http://mjmec.ir

مجله علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

اردیبهشت ۱۳۹۲، دوره ۱۳ شماره ۲ ص‌ص ۳۳-۴۵

مقاله پژوهشی کامل
تاریخ دریافت ۹۱/۵/۱۱
تاریخ پذیرش ۹۱/۸/۸
ارائه در سایت ۹۱/۱۱/۳۰

تحلیل کمانش حرارتی ورق‌های قطاعی ساخته‌شده از مواد هدفمند با روش مربعات دیفرانسیلی

مهرداد جبارزاده[۱*]، محمد کاظم باغدار دلگشا[۲]

۱- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد
* مشهد، صندوق پستی ۹۱۸۷۱۴۴۱۲۳، jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

چکیده- در این مقاله کمانش حرارتی یک قطاع ساخته‌شده از مواد هدفمند بررسی شده است. فرض شده است خواص مکانیکی و حرارتی ماده هدفمند در راستای ضخامت تغییر می‌کند. در این مقاله معادلات تعادل و پایداری که به کمک فرضیات غیرخطی فون کارمن و با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی به‌دست آمده، به‌کار رفته است. برای گسسته‌سازی معادلات تعادل و پایداری از روش مربعات دیفرانسیلی استفاده شده است. در روش استفاده شده، از توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت (توزیع چبیشف- گوس- لوباتو) جهت افزایش سرعت همگرایی و دقت حل استفاده شده است. با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل هیچ محدودیتی در اعمال شرایط مرزی وجود ندارد و انواع شرایط مرزی را می‌توان در هر لبه قطاع اعمال نمود. در انتها نتایج به‌دست آمده با نتایج دیگر تحقیقات، جهت بررسی دقت محاسبات مقایسه گردیده و اثر ضخامت، زاویه قطاع، نسبت شعاعی، اثر توان ماده هدفمند و شرایط مختلف مرزی بر روی دمای بحرانی کمانش به تفصیل بررسی شده است.

کلیدواژگان: کمانش حرارتی، مواد هدفمند، روش مربعات دیفرانسیلی، قطاع دایروی

Thermal buckling analysis of FGM sector plates using differential quadrature method

M. Jabbarzadeh[1*], M. K. Baghdar Delgosha[2]

1- Assis. Prof., Mech. Eng., Mashhad branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran
2- MSc. Student, Mech. Eng., Mashhad branch, Islamic Azad University, Mashhad, Iran
* P. O. B. 9187144123 Mashhad, jabbarzadeh@mshdiau.ac.ir

Abstract- In this article, thermal buckling analysis of functionally graded annular sector plate is studied. The mechanical and thermal properties of the functionally graded sector plate are assumed to be graded in the thickness direction. The equilibrium and stability equations are derived based on the first order shear deformation plate theory (FSDT) in conjunction with nonlinear von-karman assumptions. Differential quadrature method is used to discretize the equilibrium and stability equations. In this method a non-uniform mesh point distribution (Chebyshev- Gauss- Lobatto) is used for provide accuracy of solutions and convergence rate. By using this method, there is no restriction on implementation of boundary conditions and various boundary conditions can be implemented along any edges. Finally, The results compared with other researches and the effects of plate thickness, sector angle, annularity, power law index and various boundary conditions on the critical buckling temperature are discussed in details.

Keywords: Thermal buckling, FGM, differential quadrature method, Sector plates

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، با توسعه موتورهای پرقدرت صنایع هوا و فضا، توربین‌ها و راکتورها و دیگر ماشین‌ها، نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاوم‌تر از لحاظ مکانیکی احساس شده است. درسال‌های قبل در صنایع هوا و فضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش و روکش‌دهی قطعات با درجه کارکرد بالا استفاده می‌شد. این مواد عایق‌های بسیار خوبی بودند، ولی مقاومت زیادی در برابر تنش‌های پسماند نداشتند. تنش‌های پسماند در این مواد باعث بروز مشکلات زیادی از جمله ایجاد حفره و ترک می‌گردید که بعدها از مواد کامپوزیتی استفاده شد. تنش‌های حرارتی در این مواد نیز موجب پدیده لایه‌لایه شدن می‌گردید. با توجه به این مشکلات طرح ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکل لایه‌لایه شدن نداشته باشد ضرورت پیدا کرد. دانشمندان علم مواد در سال ۱۹۸۴ برای اولین‌بار مواد هدفمند را به عنوان مواد با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نمودند. مواد هدفمند به مواد کامپوزیتی غیرهمگنی گفته می‌شود که خواص مکانیکی و ترمومکانیکی آن به طور پیوسته و تدریجی از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. در این دسته از مواد خواصی نظیر سختی، دانسیته، ضریب انبساط حرارتی و قابلیت حرارتی تابعی از مختصات می‌باشد.

کمانش یکی از پیچیده‌ترین پدیده‌ها در مکانیک جامدات می‌باشد. با توجه به این که سیستم‌های واقعی فیزیکی یا مسائل مهندسی که به واسطه این پدیده ایجاد می‌شوند به کمک معادلات پاره‌ای توصیف می‌شوند، در اکثر حالت‌ها، حل بسته آنها سخت است. بدین سبب، روش‌های تقریبی عددی به صورت گسترده‌ای برای حل این معادلات، مورد استفاده قرار می‌گیرند. از یکی از این روش‌های حل، می توان به مربعات دیفرانسیل اشاره کرد. از مزایای این روش دست‌یابی به دقت محاسباتی مناسب در عین کم بودن تعداد گره‌های محاسباتی است.

ورق‌ها از لحاظ هندسی بسته به نوع کاربرد به شکل‌های متفاوتی ساخته می‌شوند، اما ورق‌ها به شکل مستطیلی، دایروی یا قطاعی از یک دایره کاربرد بیشتری دارند. تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه کمانش این اشکال متفاوت انجام شده است. جواهری و اسلامی[۱] در سال ۲۰۰۲ تحلیل کمانش حرارتی بر پایه تئوری برشی مرتبه سوم را برای صفحات مستطیلی ساخته‌شده از مواد هدفمند با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده ارائه کردند. نجفی‌زاده و اسلامی[۲] در سال ۲۰۰۲ حل بسته پایداری ترموالاستیک برای صفحه دایروی ارتوتروپیک بر پایه تئوری کلاسیک را ارائه نمودند. در سال ۲۰۰۲[۳] نیز پایداری ترموالاستیک یک صفحه دایروی ساخته‌شده از مواد هدفمند بر پایه تئوری برشی مرتبه اول را بررسی کردند. نجفی‌زاده و حیدری[۴] در سال ۲۰۰۴ کمانش حرارتی یک صفحه دایروی ساخته‌شده از مواد هدفمند را بر پایه تئوری برشی مرتبه سوم بررسی کردند. لان[۵] در سال ۲۰۰۴ حل بسته‌ای برای کمانش حرارتی یک صفحه مستطیلی ضخیم ساخته‌شده از مواد هدفمند بر پایه تئوری برشی مرتبه اول ارائه کرد. شارما و شاردا[۶] درسال ۲۰۰۵ با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پایداری ورق‌های قطاعی ضخیم تحت بارگذاری یکنواخت را بررسی کردند. شریعت و اسلامی[۷] در سال ۲۰۰۶ حل بسته برای کمانش حرارتی یک صفحه مستطیلی ناقص بر پایه تئوری کلاسیک ارائه کردند. در سال ۲۰۰۷[۸] نیز آنها حل بسته برای کمانش حرارتی یک صفحه ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند تحت بار حرارتی و مکانیکی بر پایه تئوری برشی مرتبه سوم ارائه نمودند. سعیدی و نادری[۹] در سال ۲۰۰۹ پاسخی تحلیلی برای کمانش ورق‌های قطاعی ساخته‌شده از مواد هدفمند تحت بار فشاری یکنواخت با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده روی لبه‌های مستقیم و تکیه‌گاه ساده، آزاد و گیردار روی لبه‌های منحنی ارائه نمودند. سعیدی و همکارانش[۱۰] در سال ۲۰۰۹ پاسخی تحلیلی برای خمش وکمانش متقارن یک صفحه دایروی ساخته شده از مواد هدفمند بر پایه تئوری برشی مرتبه سوم ارائه دادند. جمعه‌زاده و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۹ تحلیل تنش یک قطاع دایروی ساخته‌شده از مواد هدفمند بر پایه تئوری برشی مرتبه اول ارائه دادند. سعیدی و حسنی[۱۲] در سال ۲۰۱۰ پاسخی تحلیلی برای کمانش حرارتی ورق‌های قطاعی ضخیم ساخته‌شده از مواد هدفمند با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده روی لبه‌های مستقیم و تکیه‌گاه ساده، آزاد و گیردار روی لبه‌های منحنی ارائه کردند. سعیدی و نادری[۱۳] در سال ۲۰۱۱ تحلیل کمانش یک قطاع دایروی ساخته‌شده از مواد هدفمند روی تکیه‌گاه الاستیک را ارائه کردند. ملک‌زاده[۱۴] در سال ۲۰۱۱ تحلیل کمانش حرارتی سه‌بعدی یک صفحه چهار ضلعی دلخواه را به کمک روش مربعات دیفرانسیل ارائه کرد.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

نسبت به سایر شکل‌های هندسی ورق، کمانش ورق‌های قطاعی، به دلیل پیچیدگی بیشتر مختصات قطبی، کمتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند و حل‌های محدود ارائه‌شده برای دمای بحرانی کمانش آن‌ها نیز تا کنون برای حالات خاصی به‌دست آمده است. بدین جهت در این مقاله کمانش ورق‌های قطاعی دایروی ساخته شده از مواد هدفمند به کمک روش مربعات دیفرانسیل، با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول ارائه خواهد شد. در روش استفاده‌شده، از توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت (توزیع چبیشف-گوس- لوباتو) جهت افزایش سرعت همگرایی و دقت حل استفاده شده است. با استفاده از این روش هیچ محدودیتی در اعمال شرایط مرزی وجود ندارد و انواع شرایط مرزی را می‌توان در هر لبه قطاع اعمال نمود.

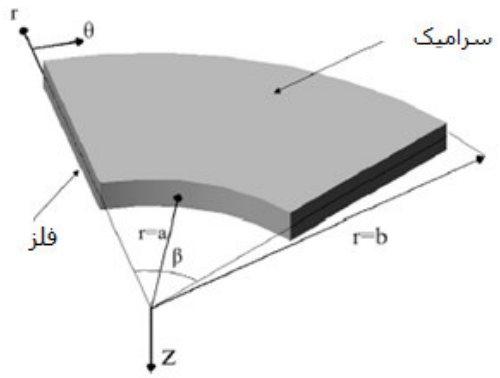
۲- تعیین معادلات تعادل بر اساس تئوری برشی مرتبه اول

در شکل ۱، ورق قطاعی دایروی در مختصات کروی درنظر گرفته شده است که محورهای r و θ در جهات شعاعی و محیطی و محور z در جهت ضخامت قرار دارد.

بر اساس تئوری برشی مرتبه اول ورق، میدان جابه‌جایی زیر برای نقاط مختلف ورق درنظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1(r,\theta,z) &= u(r,\theta) + z\psi_r \\ u_2(r,\theta,z) &= v(r,\theta) + z\psi_\theta \\ u_3(r,\theta,z) &= w(r,\theta) \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن u_1 و u_2 و u_3 به‌ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی هر نقطه دلخواهی در فاصله z از صفحه میانی در جهات r و θ و z است.



شکل ۱ ورق قطاعی دایره‌ای

همچنین u و v و w مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه میانی ورق بوده که تابعی از متغیرهای r و θ می‌باشند و عبارت‌های ψ_r و ψ_θ به‌ترتیب مربوط به چرخش المان حول محورهای θ و r نامیده می‌شوند.

با استفاده از فرضیات فون کارمن برای روابط غیرخطی کرنش-جابه‌جایی، مؤلفه‌های کرنش به صورت زیر به‌دست می‌آیند[۱۵]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + z\frac{\partial \psi_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{z}{r}\left(\psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right) \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \\ &\quad + z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r}\right) \\ 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_\theta \end{aligned} \qquad (۲)$$

ε_{rr} و $\varepsilon_{\theta\theta}$ مؤلفه‌های کرنش عمودی و $\varepsilon_{r\theta}$، ε_{rz}، $\varepsilon_{\theta z}$ کرنش‌های برشی می باشند. برای تعیین معادلات تعادل از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده می‌شود:

$$\Pi = U + \Omega \qquad (۳)$$

که Π انرژی پتانسیل کل سیستم، U انرژی کرنشی سیستم و Ω انرژی پتانسیل بارهای خارجی است. طبق این اصل، وقتی سیستمی در حال تعادل است، تغییرات انرژی پتانسیل آن سیستم صفر است:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta\Omega = 0 \qquad (۴)$$

که δ نشان‌دهنده عملگر تغییرات است. از آنجایی که انرژی کرنشی سیستم را می توان به صورت انتگرال روی حجم چگالی انرژی کرنشی برای جسم الاستیک نوشت و چگالی انرژی کرنشی نیز با مؤلفه های تنش و کرنش ارتباط دارد، لذا داریم:

$$\delta U = \iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV \qquad (۵)$$

با قراردادن مؤلفه‌های کرنش از رابطه (۲) در رابطه (۵) خواهیم داشت:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

$$\delta U=\iiint_v[\sigma_{rr}\delta(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+z\frac{\partial\psi_r}{\partial r})$$
$$+\sigma_{\theta\theta}\delta(\frac{1}{r}\left(u+\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2+\frac{z}{r}\left(\psi_r+\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right))$$
$$+\sigma_{r\theta}\delta(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)+$$
$$z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r}-\frac{\psi_\theta}{r}\right))+\sigma_{\theta z}\delta(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\psi_\theta)$$
$$+\sigma_{rz}\delta(\frac{\partial w}{\partial r}+\psi_r)]dzdA \qquad (۶)$$

با گرفتن انتگرال و ساده‌سازی معادله (۶)، معادلات تعادل را می توان به شکل زیر نوشت[۱۷،۱۶]:

$$\delta u:\ N_{rr,r}+\frac{1}{r}N_{r\theta,\theta}+\frac{N_{rr}-N_{\theta\theta}}{r}=0$$
$$\delta v:\ N_{r\theta,r}+\frac{1}{r}N_{\theta\theta,\theta}+\frac{2N_{r\theta}}{r}=0$$
$$\delta\psi_r:\ M_{rr,r}+\frac{1}{r}M_{r\theta,\theta}+\frac{M_{rr}-M_{\theta\theta}}{r}-Q_r=0$$
$$\delta\psi_\theta:\ M_{r\theta,r}+\frac{1}{r}M_{\theta\theta,\theta}+\frac{2M_{r\theta}}{r}-Q_\theta=0$$
$$\delta w:\ Q_{r,r}+\frac{1}{r}Q_{\theta,\theta}+\frac{Q_r}{r}+\frac{1}{r}(rN_{rr}w_{,r})_{,r}$$
$$+\frac{1}{r^2}(N_{\theta\theta}w_{,\theta})_{,\theta}+\frac{1}{r}(N_{r\theta}w_{,\theta})_{,r}+\frac{1}{r}(N_{r\theta}w_{,r})_{,\theta}=0 \qquad (۷)$$

که در آن کمیت‌های N_{ij} و M_{ij} به‌ترتیب نیروها و گشتاورهای منتجه و Q_i نیز نیروی برشی منتجه نامیده می‌شوند و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$(N_{rr},N_{\theta\theta},N_{r\theta})=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{rr},\sigma_{\theta\theta},\sigma_{r\theta})dz$$
$$(M_{rr},M_{\theta\theta},M_{r\theta})=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{rr},\sigma_{\theta\theta},\sigma_{r\theta})zdz$$
$$(Q_r,Q_\theta)=k^2\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{rz},\sigma_{\theta z})dz \qquad (۸)$$

که در آن k^2 ضریب تصحیح برشی نامیده می‌شود. از آنجایی که جنس ورق مورد نظر از نوع ماده هدفمند می‌باشد، تغییرات خواص طبق قانون تابع توانی و متغیر در جهت ضخامت درنظر گرفته می‌شود. بنابراین:

$$E(z)=E_m+(E_c-E_m)(\frac{1}{2}-\frac{z}{h})^n \qquad (۹)$$

که $E(z)$ مدول الاستیسیته ورق و تابعی از مختصات در جهت ضخامت می‌باشد. زیرنویس‌های m و c به‌ترتیب به جزء فلز و سرامیک ورق اشاره می‌کند. پارامتر n نشان‌دهنده توان ماده هدفمند می‌باشد که تغییرات آن باعث تغییر خواص می‌شود. با توجه به کم‌بودن تغییرات نسبت پواسون (υ)، این عامل به‌صورت مقداری ثابت فرض شده است. روابط هوک در این حالت به شکل زیر در می‌آیند:

$$\sigma_{rr}=\frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{rr}+\nu\varepsilon_{\theta\theta}-(1+\nu)\alpha(z)T(r,\theta,z))$$
$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E(z)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\theta\theta}+\nu\varepsilon_{rr}-(1+\nu)\alpha(z)T(r,\theta,z))$$
$$\sigma_{r\theta}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}(2\varepsilon_{r\theta})$$
$$\sigma_{\theta z}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}(2\varepsilon_{\theta z})$$
$$\sigma_{rz}=\frac{E(z)}{2(1+\nu)}(2\varepsilon_{rz}) \qquad (۱۰)$$

با استفاده از معادلات فوق عبارت‌های زیر برای نیروها و گشتاورهای منتجه به‌دست می‌آید:

$$N_{rr}=A_{11}\left(u_{,r}+\frac{1}{2}w_{,r}^2\right)+A_{12}\left(\frac{u}{r}+\frac{v_{,\theta}}{r}+\frac{w_{,\theta}^2}{2r^2}\right)$$
$$+B_{11}\psi_{r,r}+B_{12}\left(\frac{\psi_r}{r}+\frac{1}{r}\psi_{\theta,\theta}\right)-\frac{T_N}{1-\nu}$$
$$N_{\theta\theta}=A_{11}\left(\frac{u}{r}+\frac{v_{,\theta}}{r}+\frac{1}{2r^2}w_{,\theta}^2\right)+A_{12}\left(u_{,r}+\frac{1}{2}w_{,r}^2\right)$$
$$+B_{11}\left(\frac{\psi_r}{r}+\frac{1}{r}\psi_{\theta,\theta}\right)+B_{12}\psi_{r,r}-\frac{T_N}{1-\nu}$$
$$N_{r\theta}=A_{33}\left(\frac{u_{,\theta}}{r}+v_{,r}-\frac{v}{r}+\frac{1}{r}w_{,r}w_{,\theta}\right)$$
$$+B_{33}\left(\frac{1}{r}\psi_{r,\theta}+\psi_{\theta,r}-\frac{1}{r}\psi_\theta\right)$$
$$M_{rr}=B_{11}\left(u_{,r}+\frac{1}{2}w_{,r}^2\right)+B_{12}\left(\frac{u}{r}+\frac{v_{,\theta}}{r}+\frac{w_{,\theta}^2}{2r^2}\right)$$
$$+D_{11}\psi_{r,r}+D_{12}\left(\frac{\psi_r}{r}+\frac{1}{r}\psi_{\theta,\theta}\right)-\frac{T_M}{1-\nu}$$
$$M_{\theta\theta}=B_{11}\left(\frac{u}{r}+\frac{v_{,\theta}}{r}+\frac{1}{2r^2}w_{,\theta}^2\right)+B_{12}\left(u_{,r}+\frac{1}{2}w_{,r}^2\right)$$
$$+D_{11}\left(\frac{\psi_r}{r}+\frac{1}{r}\psi_{\theta,\theta}\right)+D_{12}\psi_{r,r}-\frac{T_M}{1-\nu}$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

$$M_{r\theta} = B_{33}\left(\frac{u_{,\theta}}{r} + v_{,r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}w_{,r}w_{,\theta}\right) + D_{33}\left(\frac{1}{r}\psi_{r,\theta} + \psi_{\theta,r} - \frac{1}{r}\psi_{\theta}\right)$$

$$Q_r = k^2 A_{33}\left(w_{,r} + \psi_r\right)$$

$$Q_\theta = k^2 A_{33}\left(\frac{w_{,\theta}}{r} + \psi_\theta\right) \qquad (۱۱)$$

در روابط فوق A_i و B_i و D_i و T_i مربوط به خواص ماده است و با انتگرال‌های زیر قابل محاسبه هستند:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu^2}(1, z, z^2)dz$$

$$(A_{12}, B_{12}, D_{12}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}(1, z, z^2)dz$$

$$(A_{33}, B_{33}, D_{33}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)}(1, z, z^2)dz$$

$$T_N = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\alpha(z)T(r,\theta,z)dz$$

$$T_M = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)\alpha(z)T(r,\theta,z)zdz \qquad (۱۲)$$

همان‌گونه که از روابط (۱۱) مشاهده می‌شود، گشتاورها و نیروهای منتجه شامل عبارت‌های غیرخطی از مؤلفه جابه‌جایی w می‌باشند. برای تعیین معادلات پایداری و حذف عبارت‌های غیرخطی، از معیار تعادل همسایگی استفاده می‌شود.

۳- تعیین معادلات پایداری

برای بررسی امکان وجود شکل‌های تعادل همسایگی، یک نمو کوچک به متغیرهای جابه‌جایی داده و دو شکل همسایگی نشان‌داده با جابه‌جایی‌ها، قبل و بعد از اعمال نمو بررسی می‌شود:

$$u \to u^0 + u^1$$
$$v \to v^0 + v^1$$
$$w \to w^0 + w^1$$
$$\psi_r \to \psi_r^{\,0} + \psi_r^{\,1}$$
$$\psi_\theta \to \psi_\theta^{\,0} + \psi_\theta^{\,1} \qquad (۱۳)$$

با جایگذاری معادلات (۱۳) در روابط مربوط به کرنش و نیز در روابط مربوط به نیروها و گشتاورهای منتجه، این عبارت‌ها شامل ترم‌های خطی و غیرخطی مؤلفه‌های جابه‌جایی مربوط به وضعیت تعادل و همسایگی آن می‌شوند:

$$N_i \to N_i^0 + N_i^1$$
$$M_i \to M_i^0 + M_i^1$$
$$Q_i \to Q_i^0 + Q_i^1 \qquad (۱۴)$$

که عبارت‌های با بالانویس ۰ مربوط به وضعیت تعادل ورق و عبارت‌های با بالانویس ۱ مربوط به وضعیت همسایگی تعادل است. برای مثال می‌توان مؤلفه‌های نیروی منتجه در جهت r را به صورت زیر نوشت:

$$N_{rr} \to N_{rr}^0 + N_{rr}^1 \qquad (۱۵)$$

که در آن عبارت‌های مربوط به تعادل و همسایگی عبارت‌اند از:

$$N_{rr}^0 = A_{11}\left(u_{,r}^0 + \frac{1}{2}w_{,r}^{0\,2}\right) + A_{12}\left(\frac{u^0}{r} + \frac{v_{,\theta}^0}{r} + \frac{w_{,\theta}^{0\,2}}{2r^2}\right) + B_{11}\psi_{r,r}^0 + B_{12}\left(\frac{\psi_r^0}{r} + \frac{1}{r}\psi_{\theta,\theta}^0\right) - \frac{T_N}{1-\nu}$$

$$N_{rr}^1 = A_{11}u_{,r}^1 + A_{12}\left(\frac{u^1}{r} + \frac{v_{,\theta}^1}{r}\right) + B_{11}\psi_{r,r}^1 + B_{12}\left(\frac{\psi_r^1}{r} + \frac{1}{r}\psi_{\theta,\theta}^1\right) \qquad (۱۶)$$

در رابطه (۱۶) از عبارت‌های مرتبه دوم و سوم با بالانویس ۱ به دلیل تاثیر کم صرف‌نظر شده است. بنابراین نیروها و گشتاورهای منتجه در حالت خطی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$A_{11}\left(\frac{1}{r^2}u_{,\theta}^1 + \frac{1}{r}u_{,r\theta}^1 + \frac{1}{r^2}v_{,\theta\theta}^1\right) + A_{33}\left(-\frac{1}{r}u_{,r\theta}^1 + v_{,rr}^1 + \frac{1}{r^2}u_{,\theta}^1 + \frac{1}{r}v_{,r}^1 - \frac{v^1}{r^2}\right) + B_{11}\left(\frac{1}{r^2}\psi_{r,\theta}^1 + \frac{1}{r}\psi_{r,r\theta}^1 + \frac{1}{r^2}\psi_{\theta,\theta\theta}^1\right) + B_{33}\left(-\frac{1}{r}\psi_{r,r\theta}^1 + \psi_{\theta,rr}^1 + \frac{1}{r^2}\psi_{r,\theta}^1 + \frac{1}{r}\psi_{\theta,r}^1 - \frac{\psi_\theta^1}{r^2}\right) = 0$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

$$
\begin{aligned}
&A_{11}\left(u^1_{,rr}+\frac{1}{r}u^1_{,r}-\frac{u^1}{r^2}-\frac{1}{r^2}v^1_{,\theta}+\frac{1}{r}v^1_{,r\theta}\right)\\
&\quad+A_{33}\left(\frac{1}{r^2}u^1_{,\theta\theta}-\frac{1}{r}v^1_{,r\theta}-\frac{1}{r^2}v^1_{,\theta}\right)\\
&\quad+B_{11}\left(\psi^1_{r,rr}+\frac{1}{r}\psi^1_{r,r}-\frac{\psi^1_r}{r^2}-\frac{1}{r^2}\psi^1_{\theta,\theta}+\frac{1}{r}\psi^1_{\theta,r\theta}\right)\\
&\quad+B_{33}\left(\frac{1}{r^2}\psi^1_{r,\theta\theta}-\frac{1}{r}\psi^1_{\theta,r\theta}-\frac{1}{r^2}\psi^1_{\theta,\theta}\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{11}\left(u^1_{,rr}+\frac{1}{r}u^1_{,r}-\frac{u^1}{r^2}-\frac{1}{r^2}v^1_{,\theta}+\frac{1}{r}v^1_{,r\theta}\right)\\
&\quad+B_{33}\left(\frac{1}{r^2}u^1_{,\theta\theta}-\frac{1}{r}v^1_{,r\theta}-\frac{1}{r^2}v^1_{,\theta}\right)\\
&\quad+D_{11}\left(\psi^1_{r,rr}+\frac{1}{r}\psi^1_{r,r}-\frac{\psi_r^{\,1}}{r^2}-\frac{1}{r^2}\psi^1_{\theta,\theta}+\frac{1}{r}\psi^1_{\theta,r\theta}\right)\\
&\quad+D_{33}\left(\frac{1}{r^2}\psi^1_{r,\theta\theta}-\frac{1}{r}\psi^1_{\theta,r\theta}-\frac{1}{r^2}\psi^1_{\theta,\theta}\right)\\
&\quad-k^2A_{33}\left(w^1_{,r}+\psi^1_r\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{11}\left(\frac{1}{r^2}u^1_{,\theta}+\frac{1}{r}u^1_{,r\theta}+\frac{1}{r^2}v^1_{,\theta\theta}\right)\\
&\quad+B_{33}\left(-\frac{1}{r}u^1_{,r\theta}+v^1_{,rr}+\frac{1}{r^2}u^1_{,\theta}+\frac{1}{r}v^1_{,r}-\frac{v^1}{r^2}\right)\\
&\quad+D_{11}\left(\frac{1}{r^2}\psi^1_{r,\theta}+\frac{1}{r}\psi^1_{r,r\theta}+\frac{1}{r^2}\psi^1_{\theta,\theta\theta}\right)\\
&\quad+D_{33}\left(-\frac{1}{r}\psi^1_{r,r\theta}+\psi^1_{\theta,rr}+\frac{1}{r^2}\psi^1_{r,\theta}+\frac{1}{r}\psi^1_{\theta,r}-\frac{\psi_\theta^{\,1}}{r^2}\right)\\
&\quad-k^2A_{33}\left(\frac{1}{r}w^1_{,\theta}+\psi^1_\theta\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&k^2A_{33}\left(w^1_{,rr}+\frac{1}{r}w^1_{,r}+\frac{1}{r^2}w^1_{,\theta\theta}+\psi^1_{r,r}+\frac{1}{r}\psi^1_{\theta,\theta}+\frac{\psi^1_r}{r}\right)\\
&\quad+\frac{N^0_{\theta\theta}}{r^2}w^1_{,\theta\theta}+\frac{2N^0_{r\theta}}{r}w^1_{,r\theta}+N^0_{rr}\left(w^1_{,rr}+\frac{1}{r}w^1_{,r}\right)=0
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

همان‌گونه که از معادلات (۱۷) مشاهده می‌شود، معادلات پایداری، معادلاتی وابسته به عبارت‌های مؤلفه‌های جابه‌جایی هستند. برای حل این معادلات از روش مربعات دیفرانسیل استفاده می‌شود. با اعمال شرایط مرزی روی پاسخ های به‌دست آمده، مسئله مقدار ویژه‌ای به‌دست می‌آید که مقادیر ویژه آن، همان دماهای کمانش می‌باشند. از بین این دماها (مقادیر ویژه)، کوچک‌ترین آنها به عنوان دمای بحرانی شناخته می‌شود. با توجه به روش مربعات دیفرانسیل، مشتق‌های m ام تابع در نقطه i ام در راستای محور مکانی r و θ به صورت زیر بیان می‌شوند[۱۸]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^m f(r_i,\theta_j)}{\partial r^m}=\sum_{n=1}^{N_R}A^{(m)}_{in}f(r_n,\theta_j)\\
&\quad i=1,2,\ldots,N_R\,,\ j=1,2,\ldots,N_\theta\\
&\frac{\partial^m f(r_i,\theta_j)}{\partial \theta^m}=\sum_{n=1}^{N_\theta}B^{(m)}_{jn}f(r_i,\theta_n)\\
&\quad j=1,2,\ldots,N_\theta\,,\ i=1,2,\ldots,N_R
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

جایی که $A^{(m)}_{ij}$ ماتریس ضرایب وزنی در راستای r و $B^{(m)}_{ij}$ ماتریس ضرایب وزنی در راستای θ می‌باشد. همچنین N_R و N_θ تعداد نقاط در راستای مکانی r و θ است. مقادیر ماتریس ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شوند[۱۸]:

$$
\begin{aligned}
&A^1_{ij}=\frac{M(x_i)}{(x_i-x_j).M(x_j)}\qquad \text{for}\ i\neq j\\
&A^1_{ii}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A_{ij}\\
&M(x_i)=\prod_{k=1,k\neq i}^{N}(x_i-x_k)\\
&A^2_{ij}=2A^1_{ij}\left(A^1_{ii}-\frac{1}{x_i-x_j}\right)\qquad \text{for}\ i\neq j\\
&A^2_{ii}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}A^2_{ij}
\end{aligned}
\tag{۱۹}
$$

یکی از انواع فواصل نقاط گره‌ای، توزیع چبیشف-گوس-لوباتو می‌باشد. این توزیع قادر به به‌دست آوردن جواب‌های عددی با دقت بسیار زیاد اما با تعداد گره‌های کم و هزینه محاسباتی پایین می‌باشد. از این رو برای حل این مسئله، از این توزیع استفاده شده است[۱۸]:

$$
\begin{aligned}
&r_i=\frac{L}{2}\left(1-\cos\frac{(i-1)\pi}{N_R-1}\right)\qquad \text{for}\ i=1,2,\ldots,N_R\\
&\theta_j=\frac{\beta}{2}\left(1-\cos\frac{(j-1)\pi}{N_\theta-1}\right)\qquad \text{for}\ j=1,2,\ldots,N_\theta
\end{aligned}
\tag{۲۰}
$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

با توجه به توضیحات فوق فرم گسسته معادلات پایداری را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$A_{11}[\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}u_{nj}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}u_{nj}-\frac{u_{ij}}{r_i^2}-\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}v_{im}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}v_{nm}]+A_{33}[\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}u_{im}-\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}v_{nm}-\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}v_{im}]+B_{11}[\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}\psi_{rnj}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}\psi_{rnj}-\frac{\psi_{rij}}{r_i^2}-\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}\psi_{\theta im}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}\psi_{\theta nm}]+B_{33}[\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}\psi_{rim}-\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}\psi_{\theta nm}-\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}\psi_{\theta im}]=0$$

$$A_{11}[\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}u_{im}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}u_{nm}+\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}v_{im}]+A_{33}[-\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}u_{nm}+\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}v_{nj}+\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}u_{im}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}v_{nj}-\frac{v_{ij}}{r_i^2}]+B_{11}[\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}\psi_{rim}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}\psi_{rnm}+\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}\psi_{\theta im}]+B_{33}[-\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}\psi_{rnm}+\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}\psi_{\theta nj}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}\psi_{\theta nj}-\frac{\psi_{\theta ij}}{r_i^2}]=0$$

$$B_{11}[\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}u_{nj}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}u_{nj}-\frac{u_{ij}}{r_i^2}-\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}v_{im}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}v_{nm}]+B_{33}[\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}u_{im}-\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}v_{nm}-\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}v_{im}]+D_{11}[\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}\psi_{rnj}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}\psi_{rnj}-\frac{\psi_{rij}}{r_i^2}-\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}\psi_{\theta im}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}\psi_{\theta nm}]+D_{33}[\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}\psi_{rim}-\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}\psi_{\theta nm}-\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}\psi_{\theta im}]=0$$

$$B_{11}[\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}u_{im}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}u_{nm}+\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}v_{im}]+B_{33}[-\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}u_{nm}+\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}v_{nj}+\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}u_{im}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}v_{nj}-\frac{v_{ij}}{r_i^2}]+D_{11}[\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}\psi_{rim}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}\psi_{rnm}+\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}\psi_{\theta im}]+D_{33}[-\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}\psi_{rnm}+\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}\psi_{\theta nj}+\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}\psi_{rim}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}\psi_{\theta nj}-\frac{\psi_{\theta ij}}{r_i^2}]-k^2A_{33}[\frac{1}{r_i}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}w_{im}+\psi_{\theta ij}]=0$$

$$k^2A_{33}[\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}w_{nj}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}w_{nj}+\frac{1}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}w_{im}+\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}\psi_{rnj}+\frac{1}{r_i}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(1)}\psi_{\theta im}+\frac{\psi_{rij}}{r_i}]+\frac{N_{\theta\theta}^0}{r_i^2}\sum_{m=1}^{N_\theta}B_{jm}^{(2)}w_{im}+\frac{2N_{r\theta}^0}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}\sum_{m=1}^{N_\theta}A_{in}^{(1)}B_{jm}^{(1)}w_{nm}+N_{rr}^0[\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(2)}w_{nj}+\frac{1}{r_i}\sum_{n=1}^{N_r}A_{in}^{(1)}w_{nj}]=0 \qquad (۲۱)$$

مقادیر $N_{\theta\theta}^0$ و N_{rr}^0 و $N_{r\theta}^0$ با حل معادلات پیش‌کمانش، به کمک روشی که توسط میرز و هایر[۱۹] توسعه یافت، به صورت زیر به‌دست آمد:

$$N_{rr}^0=N_{\theta\theta}^0=-\frac{T_N}{1-\nu}$$
$$N_{r\theta}^0=0 \qquad (۲۲)$$

برای به‌دست آوردن مقادیر معادله (۲۲)، با توجه به تعریف T_N از معادله (۱۲)، ابتدا باید توزیع دما در سرتاسر قطاع تعیین شود. این توزیع دمایی با معادله هدایت گرمایی یک‌بعدی فوریه به‌دست می‌آید:

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

$$\frac{d}{dz}[K(z)\frac{dT}{dz}]=0 \qquad (۲۳)$$

در معادله فوق مقدار دما در ارتفاع $h/2$ برابر T_m و در ارتفاع $h/2$ - برابر T_c می‌باشد. همچنین مقدار ضریب هدایت دمایی از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$K(z)=K_m+(K_c-K_m)(\frac{1}{2}-\frac{z}{h})^n \qquad (۲۴)$$

با جایگذاری معادله (۲۴) در معادله (۲۳) و مرتب‌سازی برحسب پارامتر بی‌بعد s خواهیم داشت:

$$-\frac{d^2T}{dS^2}+\frac{nK_{cm}S^{n-1}}{K_m+K_{cm}S^n}\frac{dT}{dS}=0 \qquad (۲۵)$$

در اینجا:

$$S=\frac{h-2z}{2h}$$

معادله دیفرانسیل فوق با به‌کار بردن سری زیر قابل حل است[۱]:

$$T(z)=T_m+S\Delta T\frac{\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{nk+1}(\frac{-K_{cm}S^n}{K_m})^k)}{\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{nk+1}(\frac{-K_{cm}}{K_m})^k)} \qquad (۲۶)$$

که در آن ΔT اختلاف بین دمای منطقه سرامیک و منطقه فلز می‌باشد. در این مقاله دمای منطقه فلز ۵ درجه سانتی‌گراد درنظر گرفته شده است.

۴- تعیین شرایط مرزی

در این مقاله سه شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، تکیه‌گاه گیردار و لبه آزاد مورد بررسی قرار گرفته است. برای تکیه‌گاه ساده داریم:

$$N_r^1=v^1=M_r^1=\psi_\theta^1=w^1=0 \quad at \quad r=R_i,R_o$$
$$u^1=N_\theta^1=\psi_r^1=M_\theta^1=w^1=0 \quad at \quad \theta=0,\beta \qquad (۲۷)$$

برای تکیه‌گاه گیردار نیز شرایط مرزی بصورت زیر می‌باشد:

$$u^1=v^1=\psi_r^1=\psi_\theta^1=w^1=0 \quad at \quad r=R_i,R_o$$
$$u^1=v^1=\psi_r^1=\psi_\theta^1=w^1=0 \quad at \quad \theta=0,\beta \qquad (۲۸)$$

همچنین برای لبه آزاد داریم:

$$N_r^1=N_{r\theta}^1=M_r^1=M_{r\theta}^1=v_r^1=0 \quad at \quad r=R_i,R_o$$
$$N_{r\theta}^1=N_\theta^1=M_{r\theta}^1=M_\theta^1=v_\theta^1=0 \quad at \quad \theta=0,\beta \qquad (۲۹)$$

که نیروهای برشی مؤثر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$v_r^1=Q_r^1+N_r^0w_{,r}^1+\frac{N_{r\theta}^0}{r}w_{,\theta}^1$$
$$v_\theta^1=Q_\theta^1+\frac{N_\theta^0}{r}w_{,\theta}^1+N_{r\theta}^0w_{,r}^1 \qquad (۳۰)$$

به عنوان مثال SCFS مشخص‌کننده قطاعی با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده در کمان داخلی، تکیه‌گاه گیردار در لبه شعاعی با زاویه صفر درجه، لبه آزاد در کمان خارجی و تکیه‌گاه ساده در لبه شعاعی با زاویه β درجه می‌باشد.

۵- نتایج عددی

به منظور اعتبار بخشیدن به روش و نتایج حاضر، مقایسه‌ای با نتایج موجود صورت گرفته است. با توجه به مقایسه‌های انجام شده، مشاهده می‌شود که روش ارائه‌شده برای حل مسئله روشی صحیح و معتبر است. برای تعیین نتایج عددی، قسمت فلز ورق از جنس آلومینیوم با مدول الاستیسیته $E_m=70$ GPa و ضریب انبساط حرارتی $\alpha_m=23\times10^{-6}$ C^{-1} و ضریب هدایت حرارتی $K_m=204$ W/mK و نیز قسمت سرامیک از جنس آلومینا با $E_c=380$ GPa و $\alpha_c=7.4\times10^{-6}$ C^{-1} و $K_c=10.4$ W/mK درنظر گرفته شده است. همچنین ضریب پواسون ثابت و برابر 0.3 و ضریب تصحیح برشی (k^2) نیز $\frac{5}{6}$ انتخاب شده است.

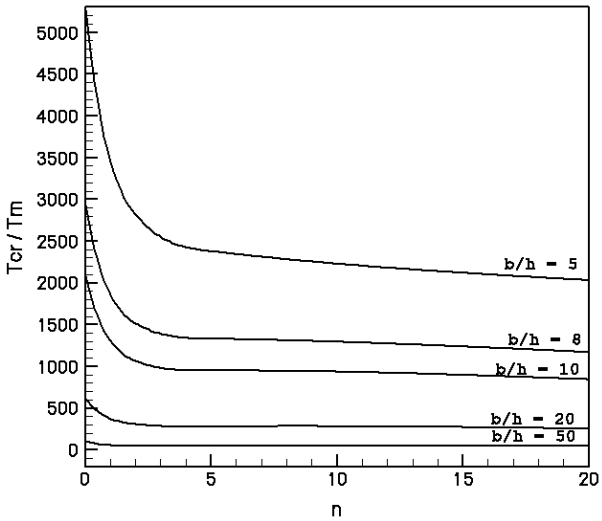
با بررسی جداول ۱ و ۲ مشخص می‌گردد دمای بحرانی کمانش به‌دست آمده با مقادیر مرجع [۱۲] همگرایی خوبی دارند. همچنین مشاهده می‌گردد بیشترین دمای بحرانی کمانش مربوط به حالت $n=0$ یعنی حالت تمام سرامیک می‌باشد. با افزایش مقدار n که باعث افزایش سهم فلز ماده هدفمند شده و با توجه به این که فلزات نسبت به سرامیک‌ها نرم‌تر هستند دمای بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. همچنین شکل ۲ بیان می‌دارد که با افزایش ضخامت قطاع، که باعث کاهش نسبت b/h می‌شود، مقدار دمای بحرانی کمانش افزایش می‌یابد. در واقع افزایش ضخامت، قطاع را در برابر پدیده کمانش مقاوم‌تر نموده و به دمای بالاتری برای وقوع کمانش نیازمند است.

شکل ۳ بیان می‌دارد که با افزایش زاویه قطاع، دمای بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. در واقع با بزرگ‌شدن زاویه

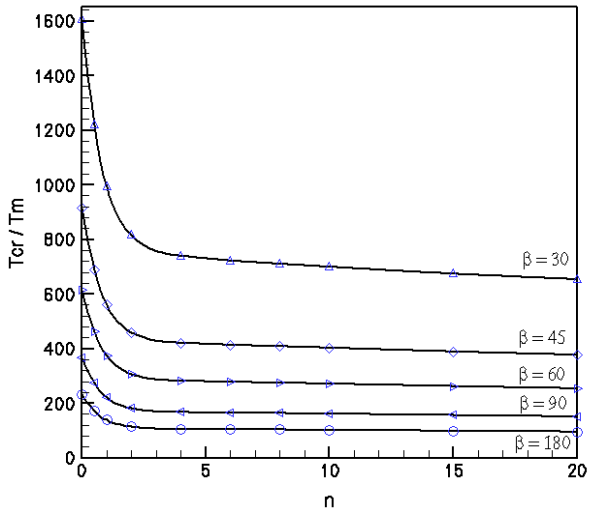
[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

قطاع، تاثیر شرایط مرزی روی لایه‌های میانی قطاع کاهش یافته و باعث می‌شود قطاع در دمای کمتر کمانش کند. همچنین، همانند شکل ۲، دمای بحرانی کمانش با افزایش توان ماده هدفمند کاهش می‌یابد و شدت این کاهش برای $n>2$ به آهستگی انجام می‌شود. دلیل احتمالی آهسته‌شدن شدت کاهش دمای بحرانی کمانش برای $n>2$ این است که افزایش سهم فلز ماده هدفمند شده در بازه ۰ تا ۲ بیشینه است و این شدت فلز شدن ماده هدفمند برای $n>2$ کاهش می‌یابد.



شکل ۲ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با شرط مرزی SCSC (β=60 و b/a = 3)



شکل ۳ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با شرط مرزی SCSC (b/h=20 و b/a = 3)

جدول ۱ مقایسه دمای بحرانی کمانش حالت CSCS با مرجع [۱۲] برای β = 60 و b/a = 3

توان ماده هدفمند (n)	b/h = 50 [۱۲]	b/h = 50 کار حاضر	b/h = 20 [۱۲]	b/h = 20 کار حاضر	b/h = 10 [۱۲]	b/h = 10 کار حاضر
۰	۵۵۹/۷۸	۵۵۹/۷۸	۳۳۳۴/۲	۳۳۳۴/۲	۱۱۰۸۳	۱۱۰۸۴
۰/۵	۴۱۳/۱۵	۴۱۳/۱۵	۲۵۰۵/۳	۲۵۰۵/۴	۸۴۸۲/۷	۸۴۸۲/۷
۱	۳۳۲/۲۳	۳۳۲/۲۳	۲۰۳۲/۳	۲۰۳۲/۴	۶۹۳۹/۸	۶۹۳۹/۸
۲	۲۷۱/۷۴	۲۷۱/۷۴	۱۶۶۸/۳	۱۶۶۸/۳	۵۶۹۰/۰	۵۶۹۰/۱
۵	۲۴۹/۷۴	۲۴۹/۷۴	۱۵۱۵/۷	۱۵۱۵/۸	۵۰۳۲/۶	۵۰۳۲/۶
۲۰	۲۲۸/۶۵	۲۲۸/۶۵	۱۳۷۵/۸	۱۳۷۵/۹	۴۴۶۴/۸	۴۴۶۴/۹

جدول ۲ مقایسه دمای بحرانی کمانش حالت FSFS با مرجع [۱۲] برای β = 60 و b/a = 3

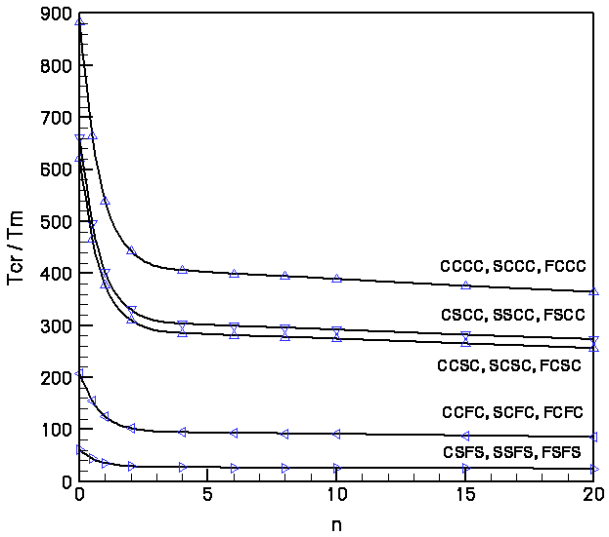
توان ماده هدفمند (n)	b/h = 50 [۱۲]	b/h = 50 کار حاضر	b/h = 20 [۱۲]	b/h = 20 کار حاضر	b/h = 10 [۱۲]	b/h = 10 کار حاضر
۰	۴۰/۱۷	۴۰/۰۵	۲۹۸/۷۱	۲۹۸/۶۸	۱۱۸۳/۲	۱۱۸۳/۳
۰/۵	۲۴/۳۲	۲۴/۱۴	۲۱۷/۸۶	۲۱۷/۸۲	۸۸۲/۳۲	۸۸۲/۳۲
۱	۱۷/۳۴	۱۷/۲۶	۱۷۴/۱۱	۱۷۴/۰۸	۷۱۳/۱۴	۷۱۳/۱۵
۲	۱۲/۸۹	۱۲/۸۱	۱۴۱/۷۵	۱۴۱/۷۳	۵۸۴/۶۹	۵۸۴/۷۰
۵	۱۲/۱۸	۱۲/۱۰	۱۳۰/۳۷	۱۳۰/۳۵	۵۳۴/۴۱	۵۳۴/۴۲
۲۰	۱۱/۰۱	۱۰/۹۳	۱۱۹/۲۴	۱۱۹/۲۳	۴۸۷/۴۶	۴۸۷/۴۷

همان‌طور که در شکل ۴ مشخص است، برای نسبت ابعادی درنظر گرفته شده (b/a = 5 و β = 60) شرط مرزی شعاع داخلی، در مقدار دمای بحرانی کمانش بی‌تاثیر است. همان‌گونه که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، مقادیر دمای بحرانی کمانش برای حالاتی که فقط کمان داخلی دارای شرط مرزی متفاوت است بسیار به یکدیگر نزدیک می‌باشند.

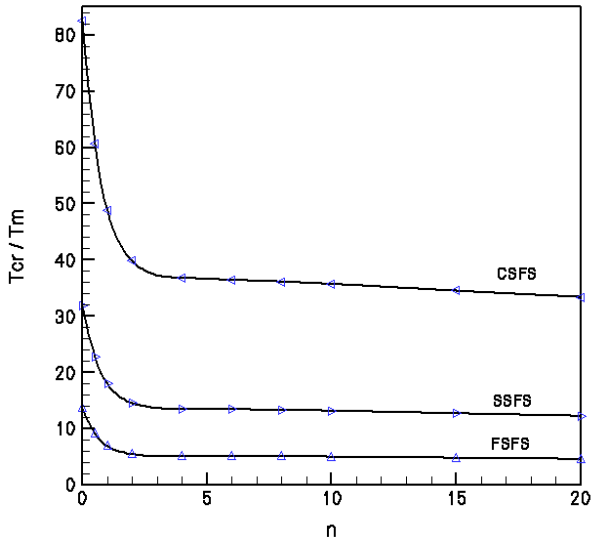
در مرجع [۱۲] بیان شده که فقط با داشتن لبه آزاد در شعاع خارجی، شرط مرزی شعاع داخلی بی‌تاثیر است و مقادیر دمای بحرانی کمانش برای انواع شرط مرزی در شعاع داخلی به هم نزدیک می‌باشند، اما با بررسی‌های انجام‌شده مشاهده می‌شود که فقط برای نسبت‌های ابعادی خاصی نتیجه مرجع [۱۲] صادق بوده و در بقیه حالت‌ها نتایج متفاوتی دارد. به عنوان مثال، همان‌طور که در شکل‌های ۵ و ۶ مشخص است، مقادیر دمای بحرانی کمانش برای نسبت‌های ابعادی درنظر

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

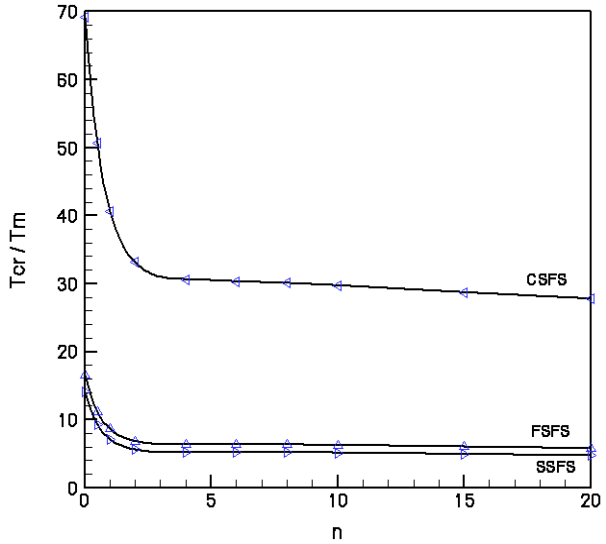
گرفته شده، به یکدیگر نزدیک نمی‌باشند. با توجه به شکل‌های ۴ تا ۶، این طور به‌نظر می‌رسد که برای نسبت‌های ابعادی خاصی، برای هر سه نوع شرط مرزی روی شعاع خارجی، شرط مرزی شعاع داخلی بی‌تاثیر است و لزومی ندارد که حتما شرط مرزی شعاع خارجی آزاد باشد. همچنین مشاهده می‌شود برای دیگر نسبت‌های ابعادی، به دلیل بزرگ‌شدن زاویه قطاع و یا بزرگ‌شدن شعاع داخلی، تاثیر شعاع داخلی افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد.



شکل ۴ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با انواع شرط مرزی (b/h=20 و b/a = 5 و β =60)



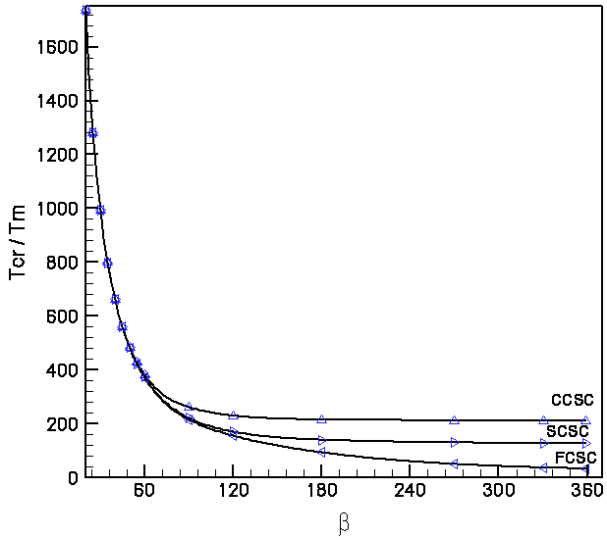
شکل ۵ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با شرط مرزی لبه آزاد در شعاع خارجی (b/h=20 و b/a = 2 و β = 90)



شکل ۶ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با شرط مرزی لبه آزاد در شعاع خارجی (b/h=20 و b/a = 3 و β = 180)

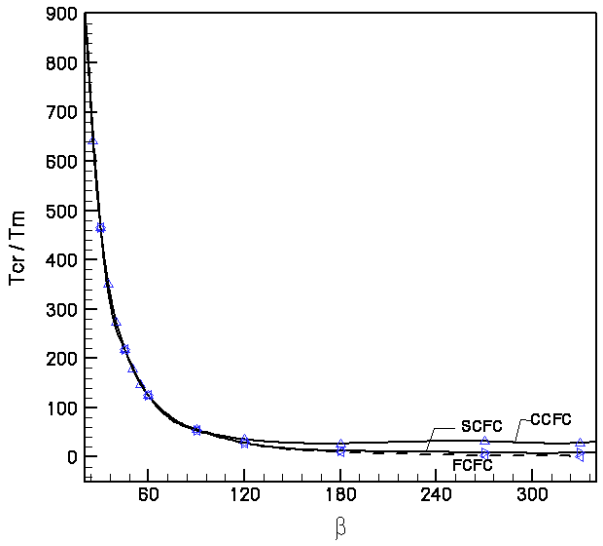
با بررسی شکل‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌گردد که اثر شرط مرزی کمان داخلی در زوایای در حدود کمتر از ۶۰ درجه ناچیز است و با افزایش مقدار زاویه قطاع این اثر افزایش می‌یابد. در واقع این شکل‌ها نتایج به‌دست آمده از شکل‌های ۵ و ۶ را تایید می‌نمایند.

شکل ۹ بیان می‌دارد تاثیر شرط مرزی شعاع خارجی قطاع بیشتر از شعاع داخلی می‌باشد.

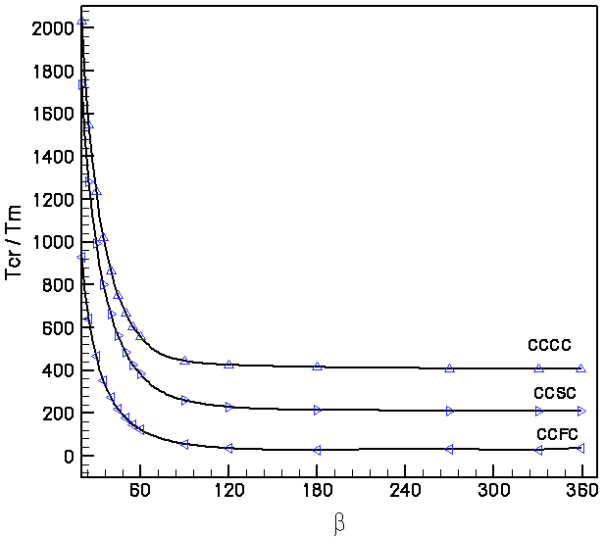


شکل ۷ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با انواع شرط مرزی در شعاع داخلی (b/h=20 و b/a = 3 و n = 1)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]



شکل ۸ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با انواع شرط مرزی در شعاع داخلی و لبه آزاد در شعاع خارجی (b/h=20 و b/a = 3 و n =1)

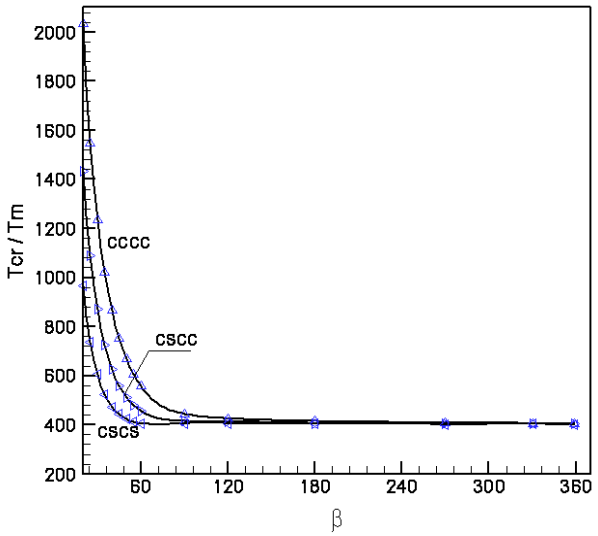


شکل ۹ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با انواع شرط مرزی در شعاع خارجی (b/h=20 و b/a = 3 و n = 1)

در واقع قطاع‌هایی که فقط کمان خارجی آن‌ها دارای شرط مرزی متفاوت است مقادیر دمای بحرانی کمانش متفاوتی دارند و این بدان معناست که تاثیر شرط مرزی شعاع خارجی بیشتر است. همچنین، مشاهده می‌گردد اثر شرط مرزی آزاد در کاهش دمای بحرانی کمانش بیشتر از سایر شرایط مرزی است و این اثر با افزایش زاویه قطاع بیشتر می‌شود.

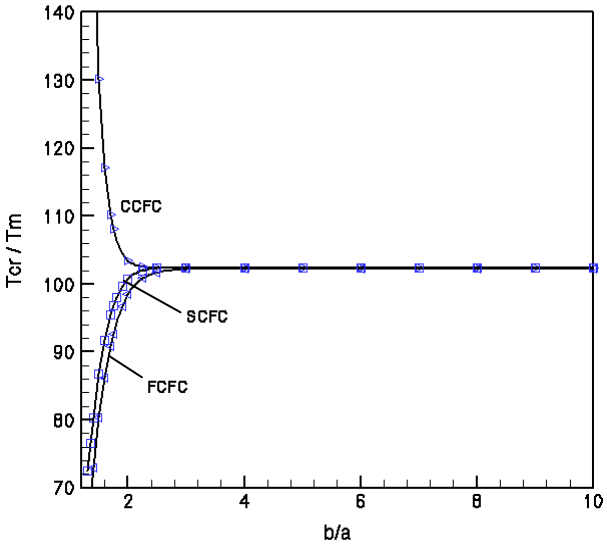
شکل ۱۰ بیان می‌نماید که اثر تغییر شرط مرزی لبه‌های شعاعی قطاع در زاویه‌های بزرگ ناچیز است و هر چه زاویه قطاع کوچکتر شود، اثر لبه‌های شعاعی بیشتر می‌گردد. همان‌طور که بیان شد، با بزرگ‌شدن زاویه قطاع، تاثیر شرایط مرزی روی لایه‌های میانی قطاع کاهش یافته و باعث می‌شود تغییر نوع شرط مرزی تاثیر چندانی روی دمای بحرانی کمانش نداشته باشد. در زوایای کوچک‌تر تاثیر شرایط مرزی روی لایه‌های میانی قطاع افزایش می‌یابد و باعث می‌شود تغییر نوع شرط مرزی روی دمای بحرانی کمانش تاثیرگذار باشد.

با بررسی شکل‌های ۱۱ و ۱۲، مشاهده می‌گردد که اثر شرط مرزی کمان داخلی در b/a<۳ زیاد است و با افزایش مقدار b/a این اثر کاهش می‌یابد. این شکل‌ها نیز نتایج به‌دست آمده از شکل‌های ۵ و ۶ را تایید می‌نمایند. در حقیقت بزرگ شدن شعاع داخلی که باعث کاهش b/a شده سبب می‌شود شرط مرزی شعاع داخلی تاثیر بیشتری روی لایه‌های میانی قطاع بگذارد. همچنین مشاهده می‌شود، با افزایش b/a مقدار دمای بحرانی کمانش، به جز در حالت‌هایی که شعاع داخلی لبه آزاد است، کاهش می‌یابد و در حالت لبه آزاد در شعاع داخلی با توجه به اینکه شعاع داخلی از دیگر مرزها آزادی بیشتری دارد و با افزایش b/a چون سهم شعاع داخلی کمتر می‌شود در واقع قطاع مقیدتر شده و مقدار دمای بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

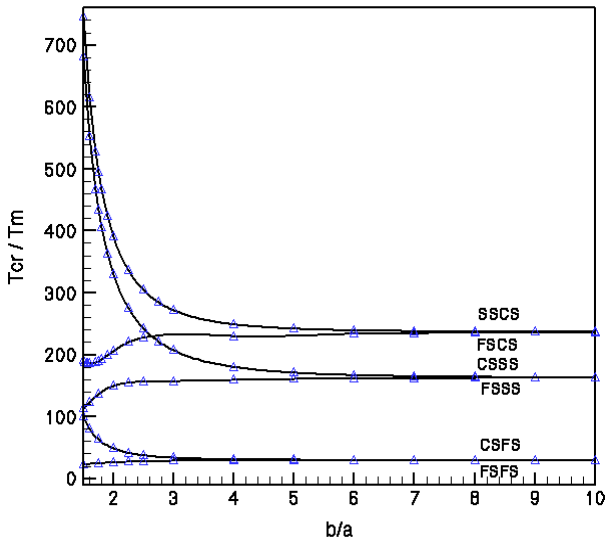


شکل ۱۰ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با انواع شرط مرزی در لبه های شعاعی (b/h=20 و b/a = 3 و n = 1)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]



شکل ۱۱ دمای بی بعد بحرانی کمانش برای قطاع با انواع شرط مرزی در لبه داخلی (b/h=20 و β = 60 و n = 2)



شکل ۱۲ دمای بی‌بعد بحرانی کمانش برای قطاع با انواع شرط مرزی (b/h=20 و β = 60 و n = 2)

۶- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله کمانش ورق‌های قطاعی دایروی ساخته‌شده از مواد هدفمند به کمک روش مربعات دیفرانسیل، با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، ارائه شد. در روش استفاده‌شده، از توزیع نقطه‌ای غیریکنواخت (توزیع چبیشف-گوس-لوباتو) جهت افزایش سرعت همگرایی و دقت حل استفاده گردید. در انتها با بررسی جداول و نمودارها نتایج زیر مشاهده می‌گردد:

۱- با افزایش توان ماده هدفمند مقدار دمای بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

۲- وقتی n>۲ است، دمای بحرانی کمانش با تغییرات n به کندی تغییر می‌کند.

۳- با کاهش نسبت ضخامت b/h، مقدار دمای بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

۴- با افزایش زاویه قطاع، دمای بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

۵- برای نسبت‌های ابعادی خاص (b/a > ۳ و β <۶۰)، شرط مرزی شعاع داخلی در مقدار دمای بحرانی کمانش بی‌تاثیر است.

۶- اثر شرط مرزی کمان داخلی در زوایای کمتر از ۶۰ درجه ناچیز است و با افزایش مقدار زاویه قطاع این اثر افزایش می‌یابد.

۷- تاثیر شرط مرزی شعاع خارجی قطاع بیشتر از شعاع داخلی می‌باشد.

۸- اثر شرط مرزی آزاد در کاهش دمای بحرانی کمانش بیشتر از سایر شرایط مرزی است و این اثر با افزایش زاویه قطاع بیشتر می‌شود.

۹- اثر تغییر شرط مرزی لبه‌های شعاعی قطاع در زاویه‌های بزرگ ناچیز است و هر چه زاویه قطاع کوچک‌تر شود اثر لبه‌های شعاعی بیشتر می‌گردد.

۱۰- اثر شرط مرزی کمان داخلی در b/a > ۳ زیاد است و با افزایش مقدار b/a این اثر کاهش می‌یابد.

۱۱- با افزایش b/a مقدار دمای بحرانی کمانش، به جز در حالت‌هایی که شعاع داخلی لبه آزاد است، کاهش می‌یابد و در حالت لبه آزاد در شعاع داخلی، با افزایش b/a مقدار دمای بحرانی کمانش افزایش می‌یابد.

۷- مراجع

[1] Javaheri R., Eslami M. R., "Thermal Buckling of Functionally Graded Plates Based on Higher Order Theory", *J Thermal Stresses*, Vol. 25, 2002, pp. 603-625.

[2] Najafizadeh M. M., Eslami M. R., "Thermo-Elastic Stability of Orthotropic Circular Plates", *J Thermal Stresses*, Vol. 25, 2002, pp. 985-1005.

[3] Najafizadeh M. M., Eslami M. R., "First Order Theory Based Thermo Elastic Stability of Functionally Graded Material Circular Plates", *AIAA J*, Vol. 40, 2002, pp. 1444-1450.

[4] Najafzadeh M. M., Heydari H. R., "Thermal Buckling of Functionally Graded Circular Plates

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]

Based on Higher Order Shear Deformation Plate Theory", *Eur J of Mechanics A/Solids,* Vol. 23, 2004, pp. 1085-1100.

[5] Lanhe W., "Thermal Buckling of a Simply Supported Moderately Thick Rectangular FG Plate", *Composite Structures,* Vol. 64, 2004, pp. 211-218.

[6] Sharma A., Sharda H. B., "Stability and Vibration of Thick Laminate Composite Structures", *J of Sound And Vibration*, Vol. 287, 2005, pp. 1-23.

[7] Samsam Shariat B. A., Eslami M. R., "Thermal Buckling of Imperfect Functionally Graded Plates", *Int J of Solids And Structures,* Vol. 43, 2006, pp. 4082-4096.

[8] Samsam Shariat B. A., Eslami M. R., "Buckling of Thick Functionally Graded Plates under Mechanical and Thermal Loads", *Composite Structures,* Vol. 78, 2007, pp. 433-439.

[9] Naderi A., Saidi A. R., "An Analytical Solution for Buckling of Moderately Thick Functionally Graded Annular and Solid Sectorial Plates", *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 81, 2011, pp. 809-828.

[10] Saidi A. R., Rasouli A., Sahraee S., "Axisymmetric Bending and Buckling Analysis of Thick Functionally Graded Circular Plates using Unconstrained Third-Order Shear Deformation Plate Theory", *Composite Structures,* Vol. 89, 2009, pp. 110-119.

[11] Jomehzadeh E., Saidi A. R., Atashipour S. R., "An Analytical Approach for Stress Analysis of Functionally Graded Annular Sector Plates", *J of Materials and Design,* Vol. 30, 2009, pp. 3679-3685.

[12] Saidi A. R., Hasani Baferani A., "Thermal Buckling Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Annular Sector Plates", *Composite Structures,* Vol. 92, 2010, pp. 1744-1752.

[13] Naderi A., Saidi A. R., "Exact Solution for Stability Analysis of Moderately Thick Functionally Graded Sector Plates on Elastic Foundation", *Composite Structures,* Vol. 93, 2011, pp. 629-638.

[14] Malekzadeh P., "Three-Dimensional Thermal Buckling Analysis of Functionally Graded Arbitrary Straight-Sided Quadrilateral Plates using Differential Quadrature Method", *Composite Structures,* Vol. 93, 2011, pp. 1246-1254.

[15] Wang C. M., Reddy J. N., *Shear Deformation Beams and Plates Relationships with Classical Solutions,* New York, Elsevier Science Ltd, 2000.

[16] Reddy J. N., *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics,* Second Ed., New York, John Wiley and Sons Inc, 2002.

[17] Reddy J. N., *Theory and Analysis of Elastic Plates,* Philadelphia, Taylor & Francis, 1999.

[18] Shu C., *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Berlin, Springer, 2000.

[19] Meyers C. A., Hyer M. W., "Thermal Buckling and Post Buckling of Symmetrically Laminated Composite Plates", *J Thermal Stresses*, Vol. 14, 1991, pp. 519-540.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1392.13.2.6.0]