

تحلیل ارتعاشات و اداشه غیرخطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند در محیط‌های حرارتی با درنظر گرفتن اثرات تنفس سطحی و غیرموضعی

سیده طلیعه پوراشرف^۱، رضا انصاری^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

* رشت، صندوق پستی ۳۷۵۶ r_ansari@guilan.ac.ir

چکیده

در این پژوهش، برای تحلیل ارتعاشات و اداشه غیرخطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند در محیط حرارتی با درنظر گرفتن اثرات تنفس سطحی و تئویری الاستیسیته غیرموضعی، یک روش حل دقیق پیشنهاد شده است. فرض می‌شود که خواص فیزیکی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند بر مبنای قانون پخش توانی در راستای ضخامت تغییر کنند. معادله حرکت غیرخطی و شرایط مرزی متغیر، با استفاده از اصل همیلتون بر مبنای تئوری تیر اوپلر-برنولی استخراج می‌شود. با استفاده از تئوری‌های الاستیسیته گورتن-مورداک و ارینگن، به ترتیب اثرات تنفس سطحی و اثرات غیرموضعی در معادلات به دست آمده به کار گرفته شدند. به منظور حل سیستمهای نیز، ابتدا روش گلرکن برای کاهش معادله دیفرانسیل حاکم غیرخطی با مشتقهای جزئی به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی به کار گرفته می‌شود. این معادله جدید با استفاده از روش انتشارات مقیاس‌های چندگانه به صورت تحلیلی حل می‌شود. در قسمت نتایج، اثرات پارامترهای مختلف شامل شاخص قانون توانی، تنفس سطحی، پارامتر غیرموضعی، شرایط مرزی و تغییرات دما بر پاسخ ارتعاشات و اداشه غیرخطی نانوتیرها مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین، نتایج تئوری‌های الاستیسیته کلاسیکه گورتن-مورداک و ارینگن با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نشان داده می‌شود که با کاهش ضخامت، اثر تنفس سطحی سبب تبدیل ویژگی غیرخطی سخت شوندگی نانوتیر می‌شود و این تأثیر در ضخامت‌های پائین بسیار مشهود است. همچنین، می‌توان دریافت که با افزایش پارامتر غیرموضعی، رفتار غیرخطی سخت شوندگی نانوتیر تشدید می‌شود.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۶ مرداد ۱۳۹۳

پذیرش: ۰۶ شهریور ۱۳۹۳

ارائه در سایت: ۰۶ آبان ۱۳۹۳

کلید واژگان:

نانوتیر ساخته شده از مواد هدفمند

ارتعاشات و اداشه غیرخطی

اثر تنفس سطحی

اثر غیرموضعی

حل دقیق

Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environments by considering surface stress and nonlocal effects

Seyedeh Talieh Pourashraf, Reza Ansari*

Department of Mechanical Engineering, Guilian University, Rasht, Iran

* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r_ansari@guilan.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 07 August 2014
Accepted 28 August 2014
Available Online 28 October 2014

Keywords:
Functionally Graded Nanobeam
Nonlinear Forced Vibration
Surface Stress Effect
Nonlocal Effect
Exact Solution

ABSTRACT

In this investigation, an exact solution is proposed for the nonlinear forced vibration analysis of nanobeams made of functionally graded materials (FGMs) in thermal environment by considering the effects of surface stress and nonlocal elasticity theory. The physical properties of FGM nanobeams are assumed to vary through the thickness direction on the basis of the power law distribution. The geometrically nonlinear equations of motion and corresponding boundary conditions are derived using Hamilton's principle on the basis of the Euler-Bernoulli beam theory. Using the Gurtin-Murdoch and Eringen elasticity theories, the surface stress and nonlocal effects are taken into account in the obtained equations, respectively. For the solution purpose, first, the Galerkin procedure is employed in order to reduce the nonlinear partial differential governing equation into a nonlinear ordinary differential equation. This new equation is solved analytically by the multiple scales perturbation method. In the results section, the influences of different parameters including power law index, surface stress, nonlocal parameter, boundary conditions and temperature changes on the nonlinear forced vibration response of nanobeams are investigated. Also, comparisons are made between the results obtained from the classical, Gurtin-Murdoch and Eringen elasticity theories. It is shown that as the thickness decreases, the surface stress effect moderates the hardening-type nonlinear behavior of nanobeams. This effect is more prominent at low magnitudes of thickness. Moreover, it is shown that by increasing the nonlocal parameter, the hardening-type response of nanobeams is intensified.

۱- مقدمه

امروزه اهمیت میکرو و نانوسازه‌ها در پیش‌برد و توسعه صنایع مختلف بر کسی پوشیده نیست. کاربردهای فراوان این تجهیزات در میکروسیستم‌های

1- micro-electro-mechanical systems (MEMS)

می‌توان به پژوهش‌های حسینی هاشمی و همکارانش اشاره کرد. آن‌ها تاثیر تنش سطحی بر ارتعاشات آزاد غیر خطی نانوپیرهای ساخته شده از مواد هدفمند را بر مبنای تئوری الاستیسیتیه غیرموضعی بررسی کردند [19]. همچنین در پژوهشی دیگر [20] آن‌ها مدلی غیر کلاسیک با استفاده از تئوری الاستیسیتیه غیرموضعی و تئوری گورتین و مورداک برای مطالعه ارتعاشات آزاد نانوپیر ساخته شده از مواد پیزوکلریک¹¹ هدفمند ارائه کردند.

در تحقیقات پیشین جای خالی مدلی غیرخطی برای بررسی جامع ارتعاشات و اداشته نانوپیرها با درنظر گرفتن تمام اثرات مربوط به سازه‌های ابعاد کوچک، مشاهده می‌شود. بدین منظور در پژوهش حاضر، با درنظر گرفتن اثرات تنش سطحی بر مبنای تئوری گورتین و مورداک و اثرات وابسته به ابعاد و اندازه بر مبنای تئوری الاستیسیتیه غیرموضعی ارینگن، مدلی غیر خطی برای بررسی ارتعاشات و اداشته نانوپیرهای ساخته شده از مواد هدفمند در محیط حرارتی ارائه شده است. معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر با آن‌ها با استفاده از اصل همیلتون¹² به دست آمدند. با استفاده از قانون پخش توانی¹³ خواص مواد هدفمند در راستای ضخامت متغیر در نظر گرفته شده است. برای حل دقیق معادلات حرکت و به دست آوردن پاسخ فرکانسی به ترتیب از روش گلرکین¹⁴ و روش مقیاس‌های چندگانه¹⁵ استفاده شده است. در نهایت اثرات ضخامت نانوپیر، پارامتر مقیاس کوچک¹⁶، تغییرات دمای محیط، شرایط تکیه‌گاهی متفاوت و دیگر پارامترهای موثر بر ارتعاشات و اداشته به صورت کامل مورد بررسی قرار گرفته است.

2- میدان جابه‌جایی، روابط ساختاری و معادلات حاکم بر حرکت

شکل 1 تصویر یک تیر ساخته شده از مواد هدفمند به طول L و ضخامت h را که سطح بالای آن از فلز و سطح پایین آن از سرامیک تشکیل شده است، تحت اثر نیروی هارمونیک نشان می‌دهد.

خواص موثر این تیر را می‌توان به صورت رابطه (1) تعریف کرد:

$$E(z) = (E_m - E_c)V_f(z) + E_c \quad (1\text{-الف})$$

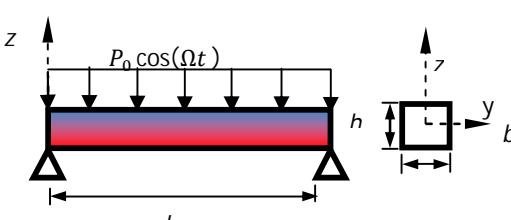
$$\nu(z) = (\nu_m - \nu_c)V_f(z) + \nu_c \quad (1\text{-ب})$$

$$\alpha(z) = (\alpha_m - \alpha_c)V_f(z) + \alpha_c \quad (1\text{-ج})$$

در رابطه (1)، E ، مدول الاستیسیتی، ν ضریب پواسون و α ضریب انبساط حرارتی هستند. همچنین، $V_f(z)$ تابع کسر حجمی است و از رابطه

$$V_f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k$$

با توجه به تئوری تیر اویلر-برنولی [12]، تنها مؤلفه غیر صفر کرنش و متعاقباً تنها مؤلفه غیر صفر تنش از رابطه (2) محاسبه می‌شوند:



شکل 1 نمایی از نانوپیر و مشخصات هندسی آن

11- piezoelectric
12- Hamilton's principal
13- power-law distribution
14- Galerkin procedure
15- multiple scales method
16- small scale parameter

این زمینه معطوف می‌شود [1,2]. در میان نانوسازهای مختلف، نانوپیرها دارای کاربردهای مهم و فراوانی هستند [3,4]. از آنجا که آماده‌سازی و انجام آزمایش‌های تجربی برای بررسی رفتار نانوپیرها بسیار سخت و پرهزینه هستند، غالباً مدل‌های تئوری بدین منظور به کار گرفته می‌شوند. تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته، راه حل اثربخش برای بررسی مشخصات مکانیکی نانوپیرها (ارتعاشات آزاد و اداشته، خمش، کمانش و موارد مشابه) می‌باشند. تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته کلاسیک در پیش‌بینی رفتارهای مکانیکی وابسته به اندازه ناتوان هستند و این نقص پژوهشگران را بر آن داشت تا با ارائه تئوری‌های اصلاح شده، این مشکل را مرتفع سازند. تئوری‌هایی همانند الاستیسیتیه گرادیان کرنش²، الاستیسیتیه تنش کوپل شده³ و الاستیسیتیه غیرموضعی ارینگن⁴ توانایی در نظر گرفتن اثرات وابسته به اندازه را دارا می‌باشند [7,6,5].

تئوری الاستیسیتیه غیرموضعی ابزاری معمول برای بررسی و تحلیل سازه‌های با ابعاد کوچک است که توسط ارینگن مطرح شد [9,8,7]. در این تئوری برخلاف تئوری کلاسیک، تنش در یک نقطه به تمام کرنش‌های موجود در دامنه‌ای مشخص وابسته است. بر مبنای این تئوری پژوهش‌های فراوانی برای بررسی رفتار مکانیکی نانوپیرها انجام شده است. امام [10] از این تئوری برای مدلسازی رفتار غیرخطی کمانشی نانوپیرها استفاده کرده است. تای [11] نیز از این تئوری برای تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد خطی نانوپیر بهره برده است.

در سال‌های اخیر بسیاری از سازه‌ها با ابعاد کوچک از مواد هدفمند ساخته می‌شوند. دلیل این امر کاربرد بسیار زیاد این مواد در میکرو و نانوسیستم‌های الکترو-مکانیکی است. همچنین تحقیقاتی نیز در این زمینه انجام شده است [12,13]. اولمر [14] ارتعاشات و اداشته نانوپیر ساخته شده از مواد هدفمند را بر مبنای تئوری الاستیسیتیه غیرموضعی مورد مطالعه قرار داد. همچنین بر اساس تئوری الاستیسیتیه غیرموضعی، سیمسک و یورتکو [15] مطالعه‌ای تحلیلی بر رفتار خمشی و کمانشی نانوپیر ساخته شده از مواد هدفمند با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی⁶ و تیموشنکو⁷ ارائه کردند. بهدلیل آن‌که نانوپیرها از نسبت سطح به حجم بالایی برخوردار هستند، اثرات تنش سطحی⁸ نقش قابل توجهی در رفتار مکانیکی این سازه‌ها دارد. گورتین⁹ و مورداک¹⁰ [16] تئوری الاستیسیتیه غیرکلاسیکی ارائه دادند که قادر به درنظر گرفتن اثرات تنش سطحی است. در این تئوری سطح به عنوان یک جزء (غیر فیزیکی) دو بعدی با ضخامت صفر (از منظر ریاضی) فرض می‌شود که حجم کلی را احاطه کرده است و هیچ گونه لغزشی بر این حجم کل ندارد. این تئوری در بسیاری از پژوهش‌های مربوط به نانوپیرها به کار گرفته شده است [17,18].

برای دریافت هرچه دقیق‌تر رفتار مکانیکی نانوپیرها، می‌توان مدلی بر مبنای تئوری الاستیسیتیه غیرموضعی ارائه کرد که اثرات تنش‌های سطحی را با توجه به تئوری گورتین و مورداک درنظر بگیرد. برتری این مدل در پیش‌بینی مشخصه‌های مکانیکی وابسته به اندازه با درنظر گرفتن توaman اثرات تنش سطحی است. از تحقیقاتی که در این زمینه انجام شده است

1- nano-electro-mechanical systems (NEMS)

2- strain gradient elasticity

3- couple stress elasticity

4- Eringen's nonlocal elasticity

5- Functionally graded material (FGM)

6- Euler-Bernoulli

7- Timoshenko

8- surface stress

9- Gurtin

10- Murdach

$$M_T = \int_A \beta(T(\bar{z}) - T_0) \bar{z} dA \quad (8)$$

انرژی جنبشی تیر با درنظر گرفتن اثرات سطح بهشکل رابطه (9) نشان داده می‌شود:

$$\Pi_T = \frac{1}{2} \int_x I_1 [(\dot{U}_0)^2 + (\dot{W})^2] dx \quad (9)$$

که در رابطه (9) $I_1 = I_0 + b\bar{\rho}_s$ و $I_0 = \int_A \rho dA$ است. علاوه بر این نماد نقطه در معادله (9) در واقع عملگر مشتق نسبت به زمان است. از طرفی تغییرات کار نیروهای خارجی (شامل نیروی هارمونیک تحریک) و تغییرات نیروی میرایی ویسکوز نیز به صورت رابطه (10) نوشته می‌شود:[21]

$$\delta W^{ext} = \int_0^L (p\delta U_0 + P_0 \cos(\Omega t) \delta W) dx + \bar{N}\delta U_0 \Big|_0^L + \bar{R}\delta W \Big|_0^L + \bar{M}\delta \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_0^L \quad (10\text{-الف})$$

$$\delta \Pi_D = -B \int_x (\dot{U}_0 \delta U_0 + \dot{W} \delta W) dx \quad (10\text{-ب})$$

در رابطه (10)، q ، p ، \bar{N} ، \bar{R} و \bar{M} به ترتیب بیانگر نیروهای محوری و عمودی بر واحد طول وارد بر تیر، نیروهای محوری و برشی و گشتاور خمی وارد بر دو انتهای تیر هستند. همچنین P_0 و Ω به ترتیب بیانگر دامنه و فرکانس تحریک هستند و B در آن ثابت میرایی ویسکوز، ناشی از بستر خارجی تیر است. با توجه به معادلات به دست آمده برای انرژی‌های پتانسیل و جنبشی، با استفاده از اصل همیلتون که به صورت

آنوپیر به صورت (11) و شرایط مرزی نیز به صورت رابطه (12) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + p - B\dot{U}_0 = I_1 \ddot{U}_0 \quad (11\text{-الف})$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial W}{\partial x} \right) + P_0 \cos(\Omega t) - B\dot{W} = I_1 \ddot{W} \quad (11\text{-ب})$$

$$\bar{N} - N = 0 \quad or \quad \delta U_0 = 0 \quad (12\text{-الف})$$

$$\bar{R} - \left(N \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} \right) = 0 \quad or \quad \delta W = 0 \quad (12\text{-ب})$$

$$\bar{M} - M = 0 \quad or \quad \delta \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (12\text{-ج})$$

در روابط (11) و (12) حتماً به این نکته توجه شود که $M = M_x^b + M_x^s$ و $N = N_x^b + N_x^s$

با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای تنش و انتگرال گیری از آن نسبت به ضخامت و همچنین با ضرب تنش در ضخامت و انتگرال گیری نسبت به آن، می‌توان معادلات ساختاری غیرموضعی نیرو و گشتاور را از رابطه (13) به دست آورد:[22]

$$N - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = A_{11} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + b\bar{A}^s \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + b\bar{\tau}^s \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - N_T \quad (13\text{-الف})$$

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = B_{11} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_0}{\partial x} - \bar{z} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \quad (2\text{-الف})$$

$$\sigma_{xx} = E \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} - \bar{z} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \beta \Delta T \quad (2\text{-ب})$$

T_0 مدل تنش دما و $\beta = \alpha E / (1 - \nu)$ می‌باشد که دمای مرجع است. همچنین U_0 و W به ترتیب جایه‌جایی تار خنثی در راستای x و z می‌باشند و \bar{z} مکان محور خنثی است و از (3) به دست می‌آید:

$$\bar{z} = z - z_0, \quad z_0 = \frac{\int_A z E(z) dA}{\int_A E(z) dA} \quad (3)$$

بر اساس تئوری گورتین و مورداک [16]، رابطه تنش سطحی با کرنش و جایه‌جایی‌ها عبارت است از:

$$\sigma_{xx}^s = \tau^s + (\lambda^s + 2\mu^s) \varepsilon_{xx} - \frac{1}{2} \tau^s \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \quad (4\text{-الف})$$

$$\sigma_{xz}^s = \tau^s \frac{\partial W}{\partial x} \quad (4\text{-ب})$$

انرژی کرنشی در یک ماده الاستیک، به صورت رابطه (5) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \frac{1}{2} \int_x \int_A \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\int_{S^+} \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij} dS^+ + \int_{S^-} \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij} dS^- \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_x \left\{ (N_{xx}^b + N_{xx}^s) \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - (M_{xx}^b + M_{xx}^s) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right\} dx \end{aligned} \quad (5)$$

در این رابطه، N_{xx} و M_{xx} به ترتیب بیانگر نیروی منتجه و گشتاور منتجه هستند و بالانویس‌های b و s به ترتیب به بالک و سطح اشاره دارند و به صورت روابط (6) می‌باشد:

$$N_x^b = A_{11} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - N_T \quad (6\text{-الف})$$

$$M_x^b = B_{11} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - M_T \quad (6\text{-ب})$$

$$\begin{aligned} N_x^s &= b\bar{A}^s \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ &\quad + b\bar{\tau}^s \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (6\text{-ج})$$

$$\begin{aligned} M_x^s &= \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \\ &\quad - \frac{bh^2}{4} \bar{A}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{bh}{2} \Delta \tau^s \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (6\text{-د})$$

که در روابط (6) $\bar{A}^s = \lambda^{s+} + 2\mu^{s+} + \lambda^{s-} + 2\mu^{s-}$ و $\bar{\tau}^s = \tau^{s+} - \tau^{s-}$ ، $\Delta \mathcal{A}^s = \lambda^{s+} + 2\mu^{s+} - \lambda^{s-} - 2\mu^{s-}$ همچنین از رابطه (7) محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} A_{11} \\ B_{11} \\ D_{11} \end{cases} = \int_A E \begin{cases} 1 \\ \bar{z} \\ \bar{z}^2 \end{cases} dA \quad (7)$$

علاوه بر این، نیروها و گشتاورهای منتجه حرارتی مطابق با رابطه (8) محاسبه خواهد شد:

$$N_T = \int_A \beta(T(\bar{z}) - T_0) dA$$

$$\begin{aligned} k_4 &= B_{11} + \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s, \quad k_5 = D_{11}, \quad k_6 = \frac{bh}{2} \Delta \tau^s \\ k_7 &= \frac{bh^2}{4} \bar{\mathcal{A}}^s \end{aligned} \quad (17)$$

برای بی بعد کردن رابطه (16)، پارامترهای بی بعدی به صورت $\hat{x} = \frac{x}{L}$ و $\tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{A_{11m}}{I_{0m}}}$ ، $W = \frac{w}{h}$ تعریف کرده و با استفاده از این پارامترها، رابطه (16) به صورت رابطه بی بعد (18) بازنویسی می‌شود. قابل ذکر است که مقادیر مربوط به فاز می‌باشند.

$$\begin{aligned} &\left(-\alpha_2 \int_0^1 \left(\frac{\partial W}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} - \alpha_3 \left[\frac{\partial W}{\partial \hat{x}}(1, \tau) - \frac{\partial W}{\partial \hat{x}}(0, \tau) \right] + \bar{H} \right) \\ &\times \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \hat{x}^2} - \mu^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \hat{x}^4} \right) + \alpha_1 \frac{\partial^4 W}{\partial \hat{x}^4} + \bar{I} \left(\ddot{w} - \mu^2 \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) \\ &- \bar{F} \cos(\tilde{\Omega} \tau) + \tilde{B} \left(\dot{w} - \mu^2 \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

که در رابطه (18)، ضرایب بی بعد معادله به صورت رابطه (19) محاسبه شده‌اند:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta^2 \left(\frac{k_5 + k_7 + \frac{k_4 k_2}{k_1}}{A_{11m} h^2} \right), \quad \alpha_2 = \beta^2 \left(\frac{k_1 - k_3}{2 A_{11m}} \right) \\ \alpha_3 &= \beta^2 \frac{k_2}{h A_{11m}}, \quad \bar{F} = \frac{h P_0}{\beta^2}, \quad P = \frac{N_T}{A_{11m}}, \\ \bar{H} &= \frac{N_T - k_3}{A_{11m}}, \quad \tilde{B} = \frac{h}{\beta \sqrt{A_{11m} I_{0m}}} \\ \bar{I} &= \frac{I_1}{I_{0m}}, \quad \mu = \frac{e_0 a}{L}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega L \sqrt{\frac{I_{0m}}{A_{11m}}} \end{aligned} \quad (19)$$

3- تحلیل غیرخطی ارتعاشات اجباری

برای تبدیل معادله دیفرانسیل با مشتقهای جزئی (18) به معادله دیفرانسیل معمولی با مشتقهای زمانی، از روش حل گلرکین استفاده می‌شود. برای اعمال این روش تابع جابه‌جایی عرضی را به صورت ضرب دو تابع واستهله به زمان و مکان به فرم $w(\hat{x}, \tau) = \varphi(\hat{x}) u(\tau)$ در نظر گرفته که در این حالت φ مدد ارتعاشی خطی تیر است که تابع آن برای شرایط انتها مختلف تیر در جداول ۱ ارائه شده است. همچنین $u(\tau)$ تابعی متغیر با زمان است که باید مشخص شود. با قرار دادن $w(\hat{x}, \tau) = \varphi(\hat{x}) u(\tau)$ در معادله (18) و ضرب معادله حاصل در تابع شکل مدد $(\hat{x}) \varphi$ و انتگرال گیری از آن در طول تیر معادله (20) حاصل می‌شود:

$$\ddot{u} + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 \dot{u} = F \cos(\tilde{\Omega} \tau) \quad (20)$$

که در رابطه (20)، ضرایب به صورت رابطه (21) هستند:

جدول ۱ تابع مدد برای تیر با شرایط انتها مختلف

$\phi(\hat{x})$	شرط انتها
$\sin(\beta_i \hat{x})$, $\beta_1 = \pi, \beta_2 = 2\pi, \beta_3 = 3\pi$	دوسر مفصل
$\sinh \beta_i \hat{x} - \sin \beta_i \hat{x} + \alpha_n (\cosh \beta_i \hat{x} - \sin \beta_i \hat{x})$ $\alpha_n = \frac{\sinh \beta_i - \sin \beta_i}{\cos \beta_i - \cosh \beta_i}$	دوسر گیردار
$\beta_1 = 4.7300, \quad \beta_2 = 7.8532,$ $\beta_3 = 10.9956$	
$\sin \beta_i \hat{x} - \sinh \beta_i \hat{x} + \alpha_n (\cosh \beta_i \hat{x} - \sin \beta_i \hat{x})$ $\alpha_n = \frac{\sin \beta_i - \sinh \beta_i}{\cos \beta_i + \cosh \beta_i}$	یکسر مفصل-یک-سر گیردار
$\beta_1 = 3.9966, \quad \beta_2 = 7.0685,$ $\beta_3 = 10.2101$	

$$-\frac{bh^2}{4} \bar{\mathcal{A}}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{bh}{2} \Delta \tau^s \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (13)$$

پارامتر $e_0 a$ در رابطه (13) ضریب غیرموضعی است که اثرات اندازه را وارد معادلات می‌کند و a در آن طول مشخصه داخلی (همانند ابعاد دانه^(۱)) و ثابت ماده‌ای است که به صورت تجربی و یا از طریق تطبیق نمودارهای انتشار امواج به صورت تقریبی به دست می‌آید. با استفاده از روابط (11) و صرفنظر کردن از نیرو و اینرسی محوری، با توجه به روابط (14)، روابط (14) که فرم غیرموضعی نیرو و گشتاور هستند، حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} N &= A_{11} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ &+ b \bar{\mathcal{A}}^s \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ &+ b \bar{\tau}^s \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - N_T \end{aligned} \quad (14)-الف$$

$$\begin{aligned} M &= B_{11} \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ &+ \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{bh^2}{4} \bar{\mathcal{A}}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ &+ \frac{bh}{2} \Delta \tau^s \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - M_T \\ &+ (e_0 a)^2 \left(I_1 \dot{W} - \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial W}{\partial x} \right) - P_0 \cos(\Omega t) + B \dot{W} \right) \end{aligned} \quad (14)-ب$$

با فرضیات گفته شده رابطه (11-الف) به صورت $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ در می‌آید. با جای‌گذاری رابطه (14-الف) در این رابطه، سپس دوبار انتگرال گیری از معادله حاصل و نیز اعمال $N(0, t) = 0$ و $U_0(0, t) = 0$ و $U_0(L, t) = 0$ ، که شرط مرزی عدم تحرک محوری است، رابطه (15) حاصل می‌شود و به کمک این رابطه، رابطه (11-ب) نیز به صورت (16) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} N &= \frac{(k_1 - k_3)}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \\ &+ \frac{k_2}{L} \left(\frac{\partial W}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial W}{\partial x}(0, t) \right) + k_3 - N_T \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} N &\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) + k_4 \\ &\times \left(-\frac{(k_1 - k_3)}{k_1} \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) \\ &- (k_5 + k_7) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (k_4 - k_6) \\ &\times \left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\ &- B \left(\dot{W} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x^2} \right) + P_0 \cos(\Omega t) \\ &= I_1 \left(\ddot{W} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \ddot{W}}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

در روابط (15) و (16) ضرایب k_1 تا k_7 به صورت رابطه (17) به دست می‌آیند:

$$k_1 = A_{11} + b \bar{\mathcal{A}}^s, \quad k_2 = -B_{11} - \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s, \quad k_3 = b \bar{\tau}^s$$

در رابطه (27)، A یک تابع مختلط است و \bar{A} بیانگر مزدوج آن است. برای بررسی حریک اولیه، فرض می‌شود که فرکانس حریک بسیار نزدیک به فرکانس طبیعی خطی سیستم باشد، یعنی $\omega_0 + \epsilon^2\sigma = \omega_0$. σ به نام پارامتر انحراف از تشدید نامیده می‌شود و مقدار اختلاف بین فرکانس حریک و فرکانس طبیعی خطی سیستم مربوطه را نشان می‌دهد. با جای‌گذاری $\Omega = \omega_0 + \epsilon^2\sigma$ در رابطه (26)-ب، رابطه (28) به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 &= 2i\omega_0 e^{-iT_0\omega_0} (D_1 \bar{A}) - 2A\beta_2 \bar{A} \\ &\quad + \beta_4 \omega_0^2 \bar{A}^2 e^{-2iT_0\omega_0} - \beta_2 \bar{A}^2 e^{-2iT_0\omega_0} \\ &\quad - 2i\omega_0 e^{iT_0\omega_0} (D_1 A) + A^2 \beta_2 (-e^{2iT_0\omega_0}) \end{aligned} \quad (28)$$

شرط حل پذیری معادله بالا ممانتع از شکل گیری جملات بسیار بزرگ در پاسخ زمانی می‌باشد. برای حذف ضریب جمله $e^{iT_0\omega_0}$ ، باید رابطه (29) برقرار باشد:

$$-2i\omega \frac{dA(T_1, T_2)}{dT_1} = 0 \rightarrow A = A(T_2) \quad (29)$$

با درنظر گرفتن رابطه (29) در رابطه (30) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 &= -A^2 e^{2iT_0\omega_0} \beta_2 - 2A\bar{A}\beta_2 \\ &\quad - e^{-2iT_0\omega_0} \bar{A}^2 \beta_2 \end{aligned} \quad (30)$$

جواب خصوصی رابطه (30)، به صورت رابطه (31) است:

$$u_{2p} = \frac{A^2 e^{2iT_0\omega_0} \beta_2}{3\omega_0^2} - \frac{2A\bar{A}\beta_2}{\omega_0^2} + \frac{e^{-2iT_0\omega_0} \bar{A}^2 \beta_2}{3\omega_0^2} \quad (31)$$

با جای‌گذاری روابط (27) و (31) در رابطه (26)-ج) و برابر صفر قرار دادن جملات بزرگ، رابطه (32) محقق می‌شود:

$$\frac{1}{2} e^{i\sigma T_2} f - 2i\omega_0 (D_2 A) + \frac{10A^2 \bar{A} \beta_2}{3\omega_0^2} - 3A^2 \bar{A} \beta_3 - iA\omega_0 \varsigma = 0 \quad (32)$$

رابطه (32) یک معادله دیفرانسیل مختلط است که برای حل آن $A(T_2)$ را به صورت تابع قطبی $A = \frac{1}{2}a(T_2)\exp(i\phi(T_2))$ فرض کرده و با جای‌گذاری آن در رابطه (32)، و جدا کردن جملات مختلط و حقیقی، دو معادله دیفرانسیل حاکم بر a و ϕ به صورت روابط (33) به دست می‌آیند. لازم به ذکر است که a و ϕ توابع حقیقی می‌باشند.

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{f}{2\omega_0} \sin(\sigma T_2 - \phi) - \frac{\varsigma a}{2} \quad (\text{الف}) \quad (33)$$

$$a \frac{d\phi}{dT_1} = -\frac{f}{2\omega_0} \cos(\sigma T_2 - \phi) - \frac{R}{8\omega_0} a^3 \quad (\text{-ب}) \quad (33)$$

در روابط (33)، $R = \frac{10\beta_2^2}{3\omega_0^2} - 3\beta_3$. با تعريف یک متغیر جدید به شکل

$\gamma = \sigma T_2 - \phi$ و حذف ϕ از روابط (33)، روابط (34) نتیجه می‌شوند:

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{f}{2\omega_0} \sin \gamma - \frac{\varsigma a}{2} \quad (\text{الف}) \quad (34)$$

$$a \frac{dy}{dT_1} = a\sigma + \frac{f}{2\omega_0} \cos \gamma + \frac{R}{8\omega_0} a^3 \quad (\text{-ب}) \quad (34)$$

با فرض حالت پایدار، $\frac{dy}{dT_1} = \frac{da}{dT_1} = 0$ از روابط (34)، رابطه (35) حاصل

خواهد شد:

$$\left(\frac{\varsigma a}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{8\omega_0} a^3 + a\sigma\right)^2 = \left(\frac{f}{2\omega_0}\right)^2 \quad (35)$$

4- توزیع دما

نانویی ساخته شده از مواد هدفمند دارای مشخصه‌های حرارتی متفاوتی در راستای ضخامت است. بنابراین فرض توزیع دمای یکنواخت در آن کاملاً نادرست می‌باشد. همچنین به دلیل یکسان نبودن سطوح نانویی، شرایط مرزی دما در آن متفاوت می‌باشد. این شرایط مرزی عبارتند از $T(\frac{h}{2}) = T_m$ و $T(-\frac{h}{2}) = T_c$ که به ترتیب برای سطوح فلزی و سرامیکی می‌باشند. توزیع

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 r_2 + (P - \bar{H})r_1 - (P - \bar{H})\mu^2 r_1}{\bar{I}(r_0 - \mu^2 r_1)} \quad (21)$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_3(\mu^2 r_4 - r_3)}{\bar{I}(r_0 - \mu^2 r_1)}, \quad \beta_3 = \frac{\alpha_2(\mu^2 r_6 - r_5)}{\bar{I}(r_0 - \mu^2 r_1)}$$

$$\beta_4 = \frac{\bar{B}}{\bar{I}}, \quad F = \frac{\bar{F}r_7}{\bar{I}(r_0 - \mu^2 r_1)}, \quad r_0 = \int_0^1 \varphi^2 d\hat{x}$$

$$r_1 = \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}^2} \varphi d\hat{x}, \quad r_2 = \int_0^1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \hat{x}^4} \varphi d\hat{x}$$

$$r_3 = \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}^2} \varphi d\hat{x}$$

$$r_4 = \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \hat{x}^4} \varphi d\hat{x}$$

$$r_5 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}^2} \varphi d\hat{x}$$

$$r_6 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \hat{x}^4} \varphi d\hat{x}, \quad r_7 = \int_0^1 \varphi d\hat{x} \quad (21)$$

برای حل تحلیلی رابطه (20)، از روش اغتشاشات مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود.

بر مبنای تکنیک اغتشاشات، پاسخ زمانی سیستم را می‌توان حول ϵ به صورت رابطه (22) بسط داد:

$$u(\tau; \epsilon) = \epsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^3 u_3(T_0, T_1, T_2, \dots) \quad (22)$$

در این روش باید β_4 و F را به نحوی مقیاس بندی کرد که گذاره‌های مربوط به میرایی و حریک از همان مرتبه گذاره‌های غیرخطی باشند [23]. در اینجا، با توجه به رابطه (22) ترم‌های غیرخطی در مرتبه ϵ^3 ظاهر می‌شوند. بنابراین فرض‌های غیرخطی ضروری $f = f\epsilon^3$ و $\beta_1 = \omega_0^2$ و $\beta_4 = \varsigma\epsilon^2$ دارند. در نظر گرفته می‌شود. ϵ پارامتر بدون بعد اغتشاش است و دارای مقیاسی در اندازه دامنه جواب می‌باشد. همچنین ω_0 فرکانس ارتعاشات افزای خطی نانویی است.

با استفاده از این فرض‌ها، رابطه (20) به شکل رابطه (23) در می‌آید:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \varsigma\epsilon^2 \dot{u} = f\epsilon^3 \cos(\bar{H}\tau) \quad (23)$$

مقیاس بندی زمانی‌های چندگانه را می‌توان با استفاده از رابطه (24) انجام داد:

$$T_n = \epsilon^n \tau, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

مشتقات نسبت به هر یک از این مقیاس‌های زمانی، به صورت رابطه (25) به دست می‌آیند:

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \epsilon D_1 + \dots, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (25)$$

با جای‌گذاری روابط (22) و (25) در رابطه (23) و با قرار دادن ضرایب

توان‌های مختلف ϵ برابر با صفر، روابط (26) حاصل می‌شوند:

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = 0 \quad (\text{الف}) \quad (26)$$

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2(D_0 D_1 u_1) - u_1^2 \beta_2 \quad (\text{-ب}) \quad (26)$$

$$D_0^2 u_3 + \omega_0^2 u_3 = \frac{1}{2} e^{-i\bar{H}T_0} f + \frac{1}{2} e^{i\bar{H}T_0} f - 2(D_0 D_1 u_2) - D_1^2 u_1 - 2(D_0 D_2 u_1) - 2u_1 u_2 \beta_2 - u_1^3 \beta_3 - (D_0 u_1) \varsigma \quad (26)$$

جواب رابطه (26)-الف) به شکل رابطه (27) خواهد شد:

$$u_1(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1, T_2) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (27)$$

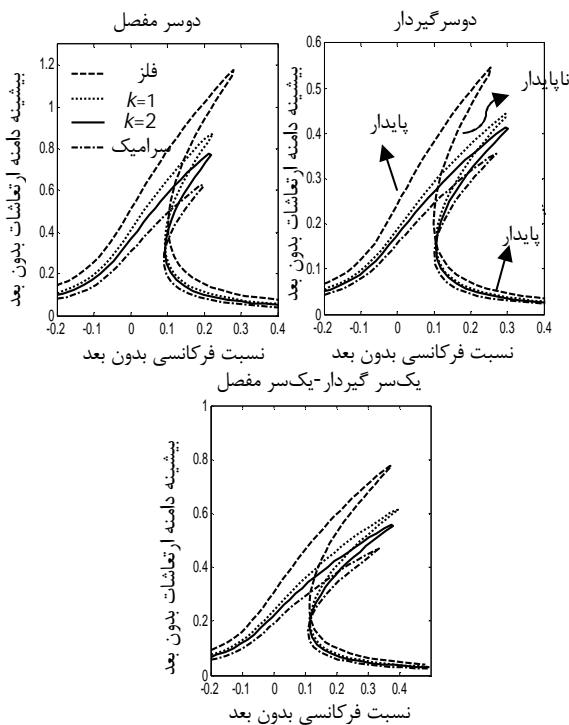
پدیده پرش ناشی از رفتار غیرخطی سیستم و با از دست دادن پایداری سیستم همراه است. در این پدیده، تغییرات اندک در فرکانس تحریک، موجب تغییرات زیاد در دامنه ارتعاشات می‌شود. در واقع در بیشینه دامنه ارتعاشات، با اندکی تغییر در فرکانس تحریک سیستم از حالت پایدار به حالت ناپایدار پرش می‌کند. محدوده پاسخ پایدار و ناپایدار هم در شکل نشان داده شده است. همچنین مشخص است که نانوتیر با تکیه گاه دوسر گیردار دارای بیشترین سفتی در میان سایر تکیه گاهها می‌باشد.

شکل 3 تغییرات بیشینه دامنه ارتعاش با دامنه تحریک را باز هم به ازای مقادیر مختلف شاخص قانون توانی نشان می‌دهد. دامنه تحریک عامل کنترل کننده دامنه ارتعاشات است.

پدیده پرش در این نمودار هم دیده می‌شود. در این نمودار نقطه الف متناظر با بیشینه دامنه ارتعاشات به ازای فرکانس بدون بعد تحریک در شکل 2 است. مشاهده می‌شود که با تغییر فاز از فلز خالص به سرامیک خالص، بیشینه دامنه ارتعاشات کم می‌شود. همچنین قابل مشاهده است که میزان ارتفاع پرش در تیر با شرایط انتهایی دوسر مفصل از سایر تکیه گاهها بیشتر است. شکل‌های 4 و 5، به ترتیب نمودار پاسخ فرکانسی و تغییرات بیشینه دامنه ارتعاش با دامنه تحریک برای تئوری‌های مختلف می‌باشند.

بدین منظور با برابر صفر قراردادن ضریب غیرموضعی نتایج مربوط به تئوری تنش سطحی و با برابر صفر قرار دادن ضرایب مربوط به پارامترهای سطح، نتایج مربوط به تئوری غیرموضعی رسم شده و به مقایسه آن‌ها با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک پرداخته شده است.

در شکل 4. همان‌گونه که مشخص است، تئوری غیرموضعی رفتار سخت‌شوندگی بیشتری نسبت به تئوری‌های کلاسیک و تنش سطحی از خود نشان می‌دهد.



شکل 2 تأثیر شاخص توانی بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد و اداشته نانوتیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی

دما در نانوتیر ساخته شده از مواد هدفمند را می‌توان با حل معادله انتقال حرارت هدایت، رابطه (36)، به دست آورد:

$$K \frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \quad (36)$$

با اعمال شرایط مرزی حرارتی در رابطه (36)، توزیع دمای خطی (37) به دست می‌آید:

$$T = \left(\frac{T_m + T_c}{2} \right) + (T_m - T_c) \frac{z}{h} \quad (37)$$

5- نتایج، تفسیر و بررسی آن‌ها

در این بخش به منظور بررسی پارامترهای موثر بر ارتعاشات و اداشته غیرخطی نانوتیر ساخته شده از مواد هدفمند در محیط حرارتی، نمودارهای پاسخ فرکانسی ارائه شده است. خواص مکانیکی مواد تشکیل دهنده نانوتیر در جدول 2 آورده شده است.

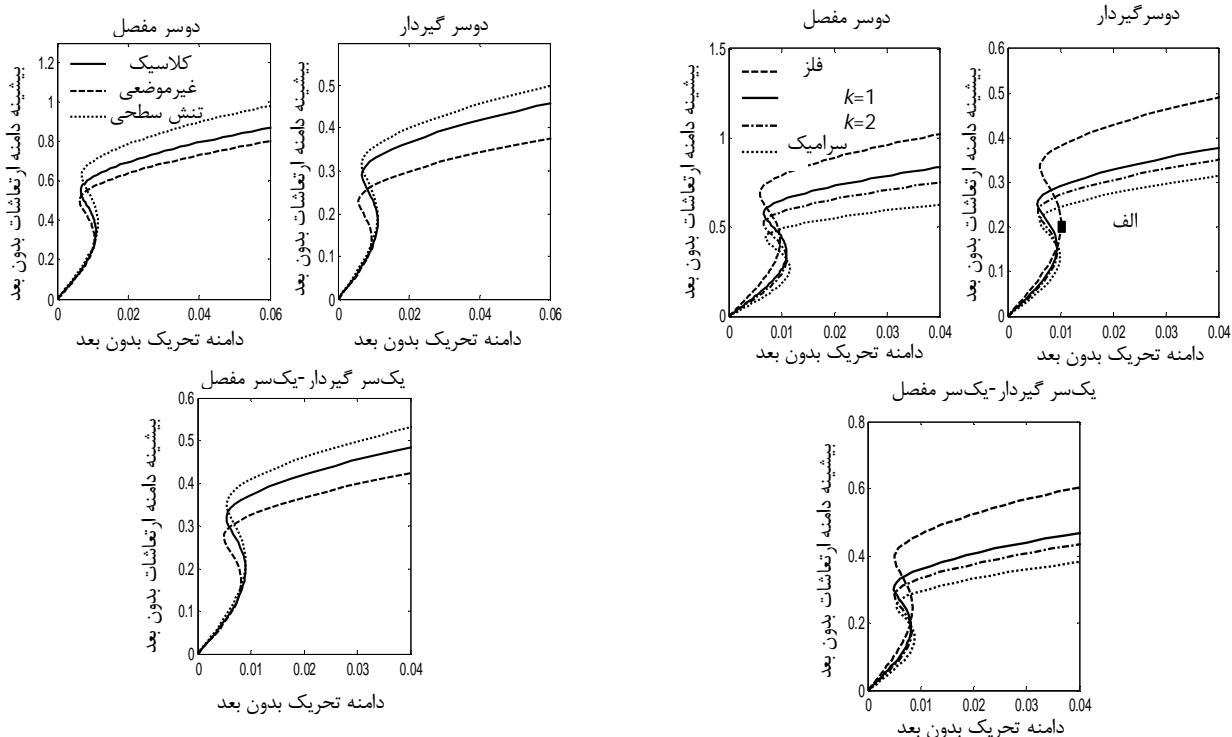
در تمامی شکل‌ها، به‌غیر از پارامترهای متغیر در شکل، سایر پارامترها به‌صورت دامنه نیروی تحریک معادل 0/01. نسبت ضخامت به طول معادل 20، ضریب میرایی معادل 0/05، اختلاف دما برابر 100 درجه، ضریب بی بعد غیرموضعی برابر با 0/1، ضخامت تیر برابر با 2 نانومتر و نسبت فرکانسی برابر با 0/1 فرض شده‌اند. همچنین در تمامی شکل‌ها به استثنای شکل‌های 2 و 3، مقدار شاخص قانون توان برابر با 1 فرض شده‌است. مقدار صفر و بینهایت برای k به ترتیب بیانگر حالت فلز خالص و سرامیک خالص هستند.

در شکل 2 تأثیر شاخص قانون توانی بر نمودار پاسخ فرکانسی سیستم رسم شده‌است. همان‌گونه که قابل مشاهده است، با افزایش شاخص قانون توانی، بیشینه دامنه پاسخ پایدار به مقادیر فرکانس تحریک بزرگ‌تر منتقل می‌شود. این نشان از بروز رفتار سخت شوندگی¹ تیر با افزایش میزان شاخص قانون توانی دارد. با افزایش شاخص قانون توان یا به عبارت دیگر، تغییر فاز سیستم از فلز خالص به سرامیک خالص، سفتی² سیستم افزایش می‌پابد که این خود علاوه بر افزایش فرکانس طبیعی سیستم منجر به این نیز می‌شود که اثرات غیرخطی هندسه سیستم بیشتر در پاسخ فرکانسی تأثیرگذار باشند. مشاهده می‌شود که با کاهش اندک در میزان شاخص قانون توانی نمودار دچار پرش زیادی در دامنه ارتعاشات می‌شود. این پرش به‌دلیل رفتار سیستم برای رسیدن به پاسخ پایدار می‌باشد.

جدول 2 خواص مکانیکی آلومینیوم و سیلیکون

خصوصیت ماده	آلومینیوم	سیلیکون
مدول الاستیسیته (GPa)	68/5	210
ضریب پوآسون	0/35	0/24
چگالی (kgm ⁻³)	3000	2331
ضریب انبساط حرارتی (K ⁻¹)	23/6×10 ⁻⁶	5×10 ⁻⁶
ثوابت لامه سطح (Nm ⁻¹)	-0/376	-2/774 μ ^s
تنش پسماند سطح (Nm ⁻¹)	6/842	-4/488 λ ^s
چگالی سطحی (kgm ⁻²)	0/9108	0/6048
	5/46×10 ⁻⁷	3/17×10 ⁻⁷

1. Hardening behavior
2. Stiffness



شکل 5 تاثیر تئوری‌های مختلف بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد
واداشته نانوپیر نسبت به دامنه بدون بعد نیروی حریک

گورتین و مورداک است. یعنی به کارگرفتن تئوری گورتین و مورداک سبب کاهش رفتار غیرخطی نانوپیر می‌شود. بنابراین در فرکانس‌های حریک کمتری نسبت به دو تئوری دیگر، پدیده ناپایدار تشید رخ می‌دهد. همچنین این تئوری موجب کاهش رفتار سخت‌شوندگی در نانوپیر می‌شود. علاوه بر این اختلاف بین تئوری‌ها در تکیه‌گاه دouser گیردار مشهود است.

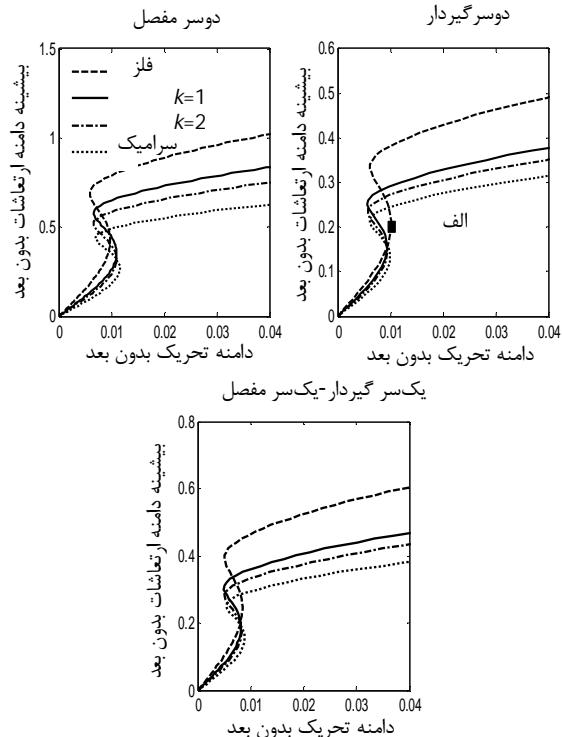
در شکل 5. مشخص است که با تغییر تئوری از تئش سطحی به کلاسیک و سپس به تئوری غیرموضعی، مقدار بیشینه دامنه ارتعاشات در یک دامنه حریک معین کاهش می‌یابد.

در شکل 6، تاثیر ضریب غیرموضعی بدون بعد بر پاسخ فرکانسی سیستم نشان داده شده است. با افزایش ضریب غیرموضعی بدون بعد منحنی‌های نمودار به سمت فرکانس‌های حریک بالاتر متمایل می‌شوند. این نشان از افزایش رفتار سخت شوندگی نانوپیر با افزایش ضریب غیرموضعی بدون بعد دارد.

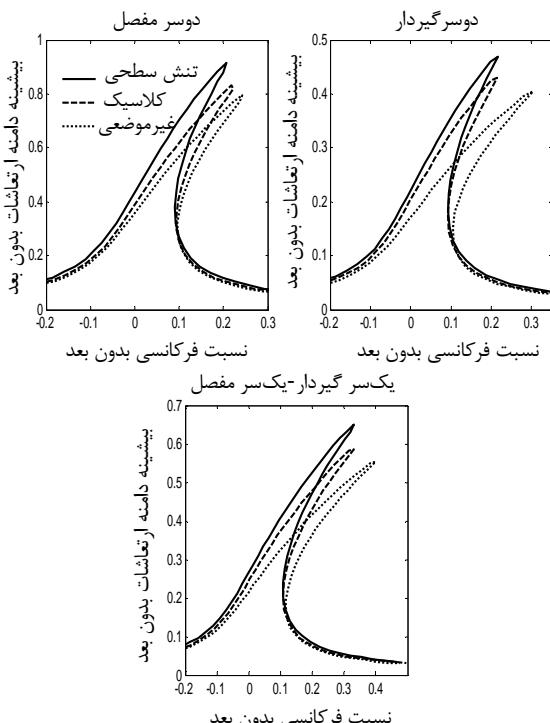
این روند برای هر سه تکیه‌گاه تکرار شده است. همچنین با افزایش میزان ضریب غیرموضعی بدون بعد پدیده غیرخطی در منحنی‌ها غالب می‌شود. اثر تغییر ضریب غیرموضعی بدون بعد بر نمودار تغییر دامنه ارتعاشی با دامنه حریک، در شکل 7 آورده شده است. مشخص است که با افزایش ضریب غیرموضعی بدون بعد میزان ارتفاع پرش کاهش می‌یابد. در یک دامنه حریک مشخص اندازه بیشینه دامنه ارتعاشی سیستم عدد کوچکتری می‌شود.

به ازای شرایط انتهایی دouser مفصل، در هر دو شکل 6 و 7، باز هم میزان بیشینه دامنه ارتعاشی برای تیر دouser مفصل از تیر یکسر گیردار-یکسر مفصل و نیز تیر دouser گیردار بیشتر است.

با برابر صفر قرار دادن ضریب غیرموضعی و تغییر دادن اندازه ضخامت تیر، شکل‌های 8 و 9 حاصل شده‌اند. در شکل 8، همان‌گونه که مشخص است با افزایش ضخامت تیر، نمودار پاسخ فرکانسی به نمودار حاصل از تئوری



شکل 3 تاثیر شاخص توانی بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوپیر نسبت به دامنه حریک بدون بعد



شکل 4 تاثیر تئوری‌های مختلف بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد
واداشته نانوپیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی

همچنین می‌توان دریافت که رفتار غیرخطی نانوپیر در مدل به دست آمده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی بیشتر از تئوری کلاسیک و تئوری

به انرژی حجم کل صرف نظر کرد. بنابراین تئوری کلاسیک از پیش‌بینی رفتار ارتعاشی نانوپیرها ناتوان است. از دیگر نتایج این شکل می‌توان این نکته را اضافه کرد که در ضخامت‌های کمتر، میزان انحراف نومدار بهست راست کمتر بوده و با نزدیک شدن به نتایج حاصل از تئوری کلاسیک، میزان غیرخطی شدن رفتار نانوپیر نیز افزایش می‌یابد.

همچنین این روند برای تکیه‌گاه‌های مختلف، مشابه است. نتیجه مشابهی هم برای شکل 9 مشاهده می‌شود. افزایش رفتار سخت‌شوندگی با افزایش میزان ضخامت نانوپیر برای هر سه تکیه‌گاه کاملاً نمایان است. علاوه بر این می‌توان مشاهده کرد که در یک دامنه تحریک مشخص، میزان بیشینه دامنه ارتعاشات برای تیرهای با ضخامت کمتر، بیشتر است.

ارتعاشات برای تیرهای با ضخامت کمتر، بیشتر است. در نهایت اثر محیط حرارتی بر رفتار ارتعاشی نانوپیر در شکل‌های 10 و 11 آورده شده است.

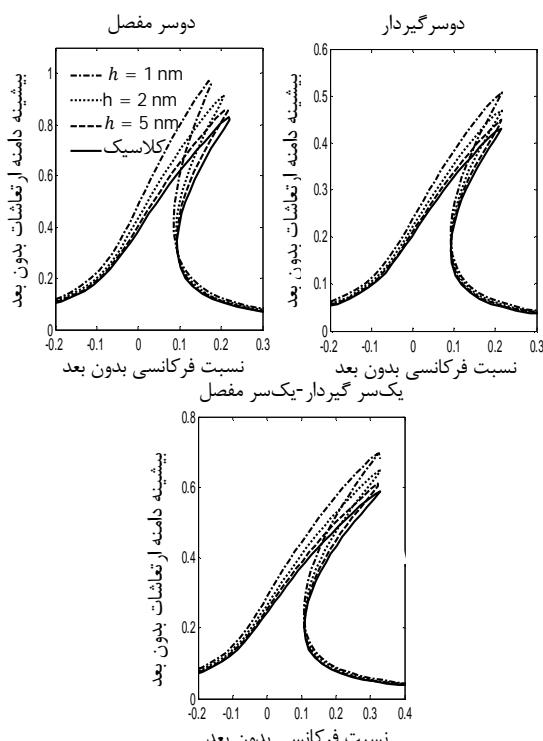
در شکل 10، مشاهده می‌شود که با کاهش اختلاف دما، محدوده پاسخ وسیع‌تر می‌شود. میزان بیشینه دامنه ارتعاشات افزایش می‌یابد و نانوپیر در فرکانس‌های تحریک بالاتر به حداقل دامنه ارتعاشی خود می‌رسد و در واقع تشدید غیرخطی(ناپایداری) در فرکانس‌های تحریک بالاتر رخ می‌دهد.

این روند برای تمام تکیه‌گاه‌ها تکرار می‌شود. در تکیه‌گاه دوسر مفصل همانگونه که مشاهده می‌شود میزان تغییرات اختلاف دما تاثیراتی بسیار مشهودتر از دو تکیه‌گاه دیگر دارد.

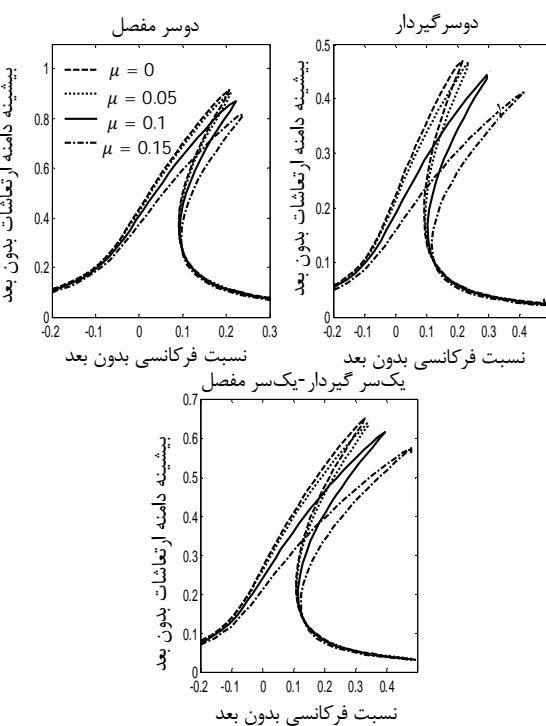
در شکل 11 پدیده پرش که ناشی از افزایش رفتار غیرخطی نانوپیر است و باعث تشدید و عدم پایداری نانوپیر می‌شود، در اختلاف دمایی‌های پایین‌تر رخ می‌دهد. این رفتار در نانوپیر دو سر مفصل به صورت واضح پیدا می‌باشد.

6- جمع‌بندی

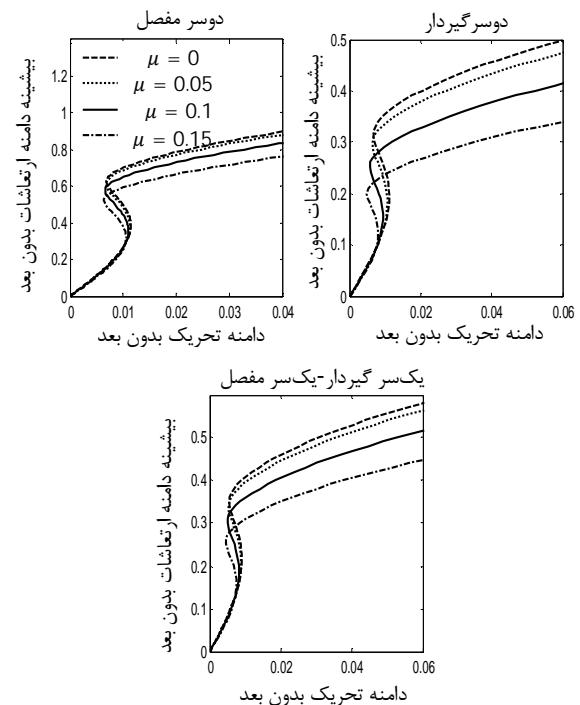
در این پژوهش تأثیرهای تنش‌های سطحی و غیرموضعی بر ارتعاشات و اداشته



شکل 8 تأثیر ضخامت نانوپیر بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد و اداشته نانوپیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی

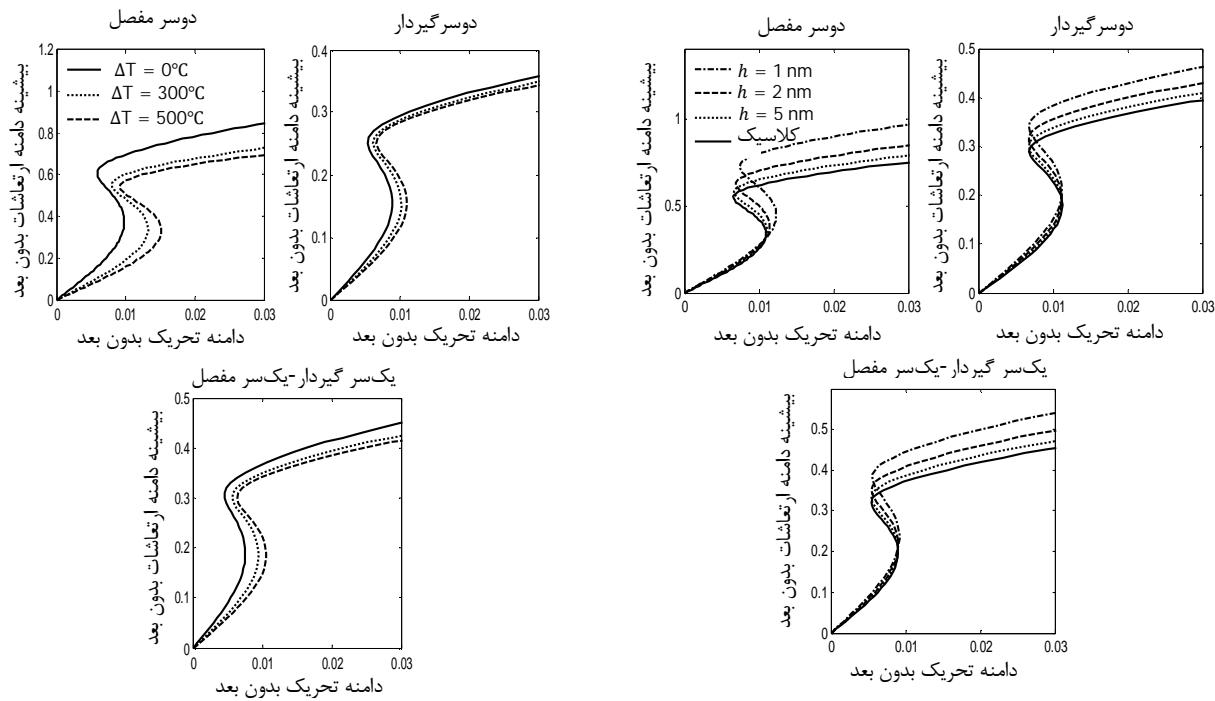


شکل 6 تأثیر ضریب غیرموضعی بدون بعد بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد و اداشته نانوپیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی



شکل 7 تأثیر ضریب غیرموضعی بدون بعد بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد و اداشته نانوپیر نسبت به دامنه بدون بعد تحریک

کلاسیک نزدیک می‌شود. به این معنی که با افزایش ضخامت اثرات مربوط به سطح ناپایدار می‌شوند. دلیل این پدیده این است که با افزایش ضخامت، نسبت سطح به حجم سازه کم شده و بنابراین می‌توان از انرژی سطح نسبت



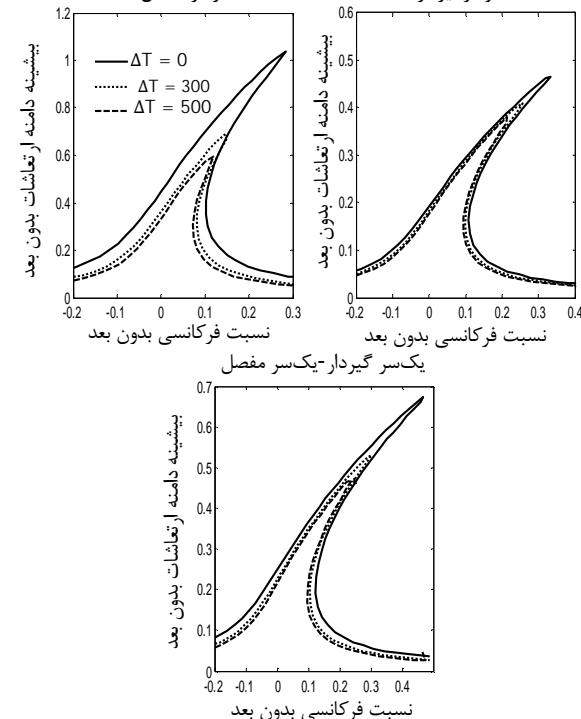
شکل 11 تاثیر اختلاف دما بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد و اداشته نانوتیر نسبت به دامنه بدون بعد نیرو

گرفته شده است. معادلات حرکت غیرخطی به دست آمده با استفاده از روش گلرکین و روش اغتشاشات زمان‌های مقیاس شده چندگانه به صورت دقیق حل شده‌اند. تأثیرات پارامترهای مختلف اعم از شاخص قانون توانی برای مواد هدفمند، تنش‌های سطحی، ضریب غیرموضعی، ضخامت نانوتیر و تغییرات دمای محیط با توجه به تکیه‌گاه‌های مختلف بررسی شدند.

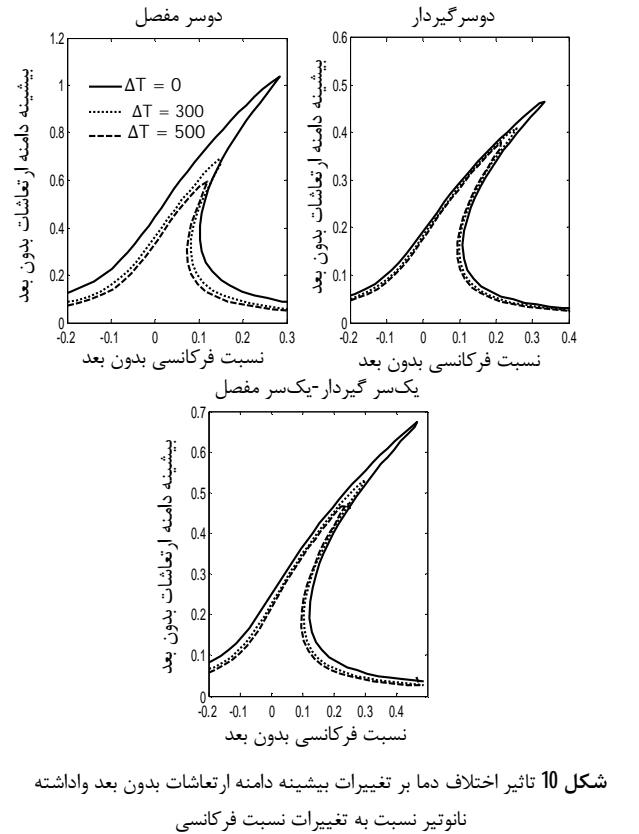
نتایج نشان می‌دهند که رفتار ارتعاشی برای نانوتیر وابسته به ابعاد سازه است. مشاهده می‌شود که هرچه ابعاد تیر کوچک‌تر می‌شود، پاسخ‌ها از تئوری کلاسیک فاصله می‌گیرند. با مقایسه تئوری‌های مختلف، پدیده ناپایدار تشید غیرخطی در فرکانس‌های تحریک کمتر برای تئوری گورتین و مورداک نسبت به دو تئوری دیگر رخ می‌دهد. رفتار غیرخطی نانوتیر به ترتیب از تئوری الاستیسته غیرموضعی به تئوری کلاسیک و تئوری گورتین و مورداک کاهش می‌یابد. همچنین کاهش میزان شاخص قانون توانی و کاهش اختلاف دما موجب این می‌شود که محدوده پاسخ پایدار (بیشینه دامنه ارتعاشات و اداشته) افزایش یابد و فرکانس تحریکی که در آن نانوتیر پایداری خود را از دست می‌دهد (فرکانس متناظر با بیشینه دامنه ارتعاشات)، افزایش یابد. با افزایش میزان شاخص قانون توانی نانوتیر رفتار سخت شوندگی از خود بروز می‌دهد. همچنین این رفتار را زمانی که ضخامت نانوتیر افزایش می‌یابد نیز می‌توان مشاهده کرد.

7- مراجع

- [1] S. Krylov, Lyapunov exponents as a criterion for the dynamic pull-in instability of electrostatically actuated microstructures, *International Journal of Non-Linear mechanics*, Vol. 42, pp. 626–642, 2007.
- [2] M. Li, H. X. Tang, M. L. Roukes, Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications, *Nature Nanotechnology*, Vol. 2, pp. 114–120, 2007.
- [3] T. L. Daulton, K. S. Bondi, K. F. Kelton, Nanobeam diffraction fluctuation electron microscopy technique for structural characterization of disordered materials application to Al_{88-x}Y₇Fe₅Ti_x metallic glasses, *Ultramicroscopy*, Vol. 110, pp. 1279–1289, 2010.



شکل 9 تاثیر ضخامت نانوتیر بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد و اداشته نانوتیر نسبت به دامنه بدون بعد نیروی تحریک



شکل 10 تاثیر اختلاف دما بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد و اداشته نانوتیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی

غیرخطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند تحت یک محیط حرارتی بررسی شده‌اند. با به کارگیری تئوری‌های گورتین-مورداک و ارینگن و استفاده از اصل همیلتون مدل غیرکلاسیک برای نانوتیر به دست آمده است. با استفاده از قانون پخش توانی خواص مواد هدفمند در راستای ضخامت متغیر در نظر

- [14] B. Uymaz, Forced Vibration analysis of functionally graded beams using nonlocal elasticity, *Composite Structures*, Vol. 105, pp. 227-239, 2013.
- [15] M. Şimşek, H. H. Yurtcu, Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory, *Composite Structures*, Vol. 97, pp. 378-386, 2013.
- [16] M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, Surface stress in solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, pp. 431-440, 1978.
- [17] R. Ansari, V. Mohammadi, M. Faghhi Shojaei, R. Gholami, S. Sahmani, On the forced vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on the surface stress elasticity theory, *Composites Part B:Engineering*, Vol. 60, pp. 158-166, 2014.
- [18] P. Asgharifard Sharabiani, M. R. Haeri Yazdi, Nonlinear Free vibrations of functionally graded nanobeams with surface effects, *Composites Part B:Engineering*, Vol. 45, pp. 581-586, 2013.
- [19] S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, M. Bedroud, Surface effects on nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams using nonlocal elasticity, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 38, pp. 3538-3553, 2014.
- [20] S. Hosseini-Hashemi, I. Nahas, M. Fakher, R. Nazemnezhad, Surface effects on free vibration of piezoelectric functionally graded nanobeams using nonlocal elasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 6, pp. 581-586, 2014.
- [21] M. H. Ghayesh, M. Amabili, H. Farokhi, Three-dimensional nonlinear size-dependent behavior of Timoshenko microbeams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 71, pp. 1507-1586, 2013.
- [22] J. N. Reddy, Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 6, pp. 1507-1586, 2010.
- [23] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, pp. 196-198, New York: John Wiley & Sons, 2008.
- [4] B. Hu, Y. Ding, W. Chen, D. Kulkarni, Y. Shen, V. V. Tsukruk, Z.L. Wang, External-strain induced insulating phase transition in VO₂ nanobeam and its application as flexible strain sensor, *Advanced Materials*, Vol. 22, pp. 5134-5139, 2010.
- [5] R. D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, pp. 52-78, 1964.
- [6] R. A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385-414, 1962.
- [7] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.
- [8] M. E. Golmaki, J. Rezatalab, Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal model of Eringen using DQM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 14, pp. 122-136, 2013. (In Persian)
- [9] M. Jabbarzadeh, H. Talati, A. R. Noroozi, Nonlinear analysis of circular graphene sheet using nonlocal continuum mechanic theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13, pp. 57-66, 2013. (In Persian).
- [10] S. A. Emam, A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 37, pp. 6929-6939, 2013.
- [11] H. T. Thai, A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 52 pp. 56-64, 2012.
- [12] R. Ansari, M. A. Ashrafi, T. Pourashraf, M. Hemmatnezhad, Vibration analysis of a postbuckled microscale FG beam based on modified couple stress theory, *Shock and Vibration*, Vol. 2014, Article ID 654640, 2014.
- [13] M. A. Eltaher, S. A. Emam, F. F. Mahmoud, Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams, *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 82-88, 2013.