



## تحلیل ارتعاشات واداشته غیرخطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند در محیط‌های حرارتی با در نظر گرفتن اثرات تنش سطحی و غیرموضعی

سیده طلیعه پوراشرف<sup>1</sup>، رضا انصاری<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

\* رشت، صندوق پستی 3756، r\_ansari@guilan.ac.ir

### چکیده

در این پژوهش، برای تحلیل ارتعاشات واداشته غیرخطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند در محیط حرارتی با در نظر گرفتن اثرات تنش سطحی و تئوری الاستیسیته غیرموضعی، یک روش حل دقیق پیشنهاد شده است. فرض می‌شود که خواص فیزیکی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند بر مبنای قانون پخش توانی در راستای ضخامت تغییر کنند. معادله حرکت غیرخطی و شرایط مرزی متناظر، با استفاده از اصل همپلتون بر مبنای تئوری تیر اویلر-برنولی استخراج می‌شود. با استفاده از تئوری‌های الاستیسیته گورتین-مورداک و ارینگن، به ترتیب اثرات تنش سطحی و اثرات غیرموضعی در معادلات به دست آمده به کار گرفته شدند. به منظور حل مسئله نیز، ابتدا روش گلرکین برای کاهش معادله دیفرانسیل حاکم غیرخطی با مشتقات جزئی به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی به کار گرفته می‌شود. این معادله جدید با استفاده از روش اغتشاشات مقیاس‌های چندگانه به صورت تحلیلی حل می‌شود. در قسمت نتایج، اثرات پارامترهای مختلف شامل شاخص قانون توانی، تنش سطحی، پارامتر غیرموضعی، شرایط مرزی و تغییرات دما بر پاسخ ارتعاشات واداشته غیرخطی نانوتیرها مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین، نتایج تئوری‌های الاستیسیته کلاسیک، گورتین-مورداک و ارینگن با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نشان داده می‌شود که با کاهش ضخامت، اثر تنش سطحی سبب تعدیل ویژگی غیرخطی سخت شوندگی نانوتیر می‌شود و این تأثیر در ضخامت‌های پایین بسیار مشهود است. همچنین، می‌توان دریافت که با افزایش پارامتر غیرموضعی، رفتار غیرخطی سخت شوندگی نانوتیر تشدید می‌شود.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 16 مرداد 1393  
پذیرش: 06 شهریور 1393  
ارائه در سایت: 06 آبان 1393  
کلید واژگان:  
نانوتیر ساخته شده از مواد هدفمند  
ارتعاشات واداشته غیرخطی  
اثر تنش سطحی  
اثر غیرموضعی  
حل دقیق

## Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environments by considering surface stress and nonlocal effects

Seyedeh Talieh Pourashraf, Reza Ansari\*

Department of Mechanical Engineering, Guilan University, Rasht, Iran

\* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, r\_ansari@guilan.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 07 August 2014  
Accepted 28 August 2014  
Available Online 28 October 2014

#### Keywords:

Functionally Graded Nanobeam  
Nonlinear Forced Vibration  
Surface Stress Effect  
Nonlocal Effect  
Exact Solution

### ABSTRACT

In this investigation, an exact solution is proposed for the nonlinear forced vibration analysis of nanobeams made of functionally graded materials (FGMs) in thermal environment by considering the effects of surface stress and nonlocal elasticity theory. The physical properties of FGM nanobeams are assumed to vary through the thickness direction on the basis of the power law distribution. The geometrically nonlinear equations of motion and corresponding boundary conditions are derived using Hamilton's principle on the basis of the Euler-Bernoulli beam theory. Using the Gurtin-Murdoch and Eringen elasticity theories, the surface stress and nonlocal effects are taken into account in the obtained equations, respectively. For the solution purpose, first, the Galerkin procedure is employed in order to reduce the nonlinear partial differential governing equation into a nonlinear ordinary differential equation. This new equation is solved analytically by the multiple scales perturbation method. In the results section, the influences of different parameters including power law index, surface stress, nonlocal parameter, boundary conditions and temperature changes on the nonlinear forced vibration response of nanobeams are investigated. Also, comparisons are made between the results obtained from the classical, Gurtin-Murdoch and Eringen elasticity theories. It is shown that as the thickness decreases, the surface stress effect moderates the hardening-type nonlinear behavior of nanobeams. This effect is more prominent at low magnitudes of thickness. Moreover, it is shown that by increasing the nonlocal parameter, the hardening-type response of nanobeams is intensified.

### 1- مقدمه

الکترو-مکانیکی<sup>1</sup> و نانوسیستم‌های الکترو-مکانیکی<sup>1</sup> باعث ترغیب محققان برای تحلیل رفتار آن‌ها شده است و به همین دلیل بسیاری از پژوهش‌ها به

امروزه اهمیت میکرو و نانو سازه‌ها در پیش‌برد و توسعه صنایع مختلف بر کسی پوشیده نیست. کاربردهای فراوان این تجهیزات در میکروسیستم‌های

1- micro-electro-mechanical systems (MEMS)

می‌توان به پژوهش‌های حسینی هاشمی و همکارانش اشاره کرد. آن‌ها تاثیر تنش سطحی بر ارتعاشات آزاد غیر خطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند را بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرموضعی بررسی کردند [19]. همچنین در پژوهشی دیگر [20] آن‌ها مدلی غیر کلاسیک با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی و تئوری گورتین و مورداک برای مطالعه ارتعاشات آزاد نانوتیر ساخته شده از مواد پیزوالکتریک<sup>11</sup> هدفمند ارائه کردند. در تحقیقات پیشین جای خالی مدلی غیرخطی برای بررسی جامع ارتعاشات واداشته نانوتیرها با در نظر گرفتن تمام اثرات مربوط به سازه‌های ابعاد کوچک، مشاهده می‌شود. بدین منظور در پژوهش حاضر، با در نظر گرفتن اثرات تنش سطحی بر مبنای تئوری گورتین و مورداک و اثرات وابسته به ابعاد و اندازه بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن، مدلی غیر خطی برای بررسی ارتعاشات واداشته نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند در محیط حرارتی ارائه شده است. معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر با آن‌ها با استفاده از اصل همیلتون<sup>12</sup> به دست آمده‌اند. با استفاده از قانون پخش توانی<sup>13</sup> خواص مواد هدفمند در راستای ضخامت متغیر در نظر گرفته شده است. برای حل دقیق معادلات حرکت و به دست آوردن پاسخ فرکانسی به ترتیب از روش گلرکین<sup>14</sup> و روش مقیاس‌های چندگانه<sup>15</sup> استفاده شده است. در نهایت اثرات ضخامت نانوتیر، پارامتر مقیاس کوچک<sup>16</sup>، تغییرات دمایی محیط، شرایط تکیه‌گاهی متفاوت و دیگر پارامترهای موثر بر ارتعاشات واداشته به صورت کامل مورد بررسی قرار گرفته است.

## 2- میدان جابه‌جایی، روابط ساختاری و معادلات حاکم بر حرکت

شکل 1 تصویر یک تیر ساخته شده از مواد هدفمند به طول  $L$  و ضخامت  $h$  را که سطح بالای آن از فلز و سطح پایین آن از سرامیک تشکیل شده است، تحت اثر نیروی هارمونیک نشان می‌دهد.

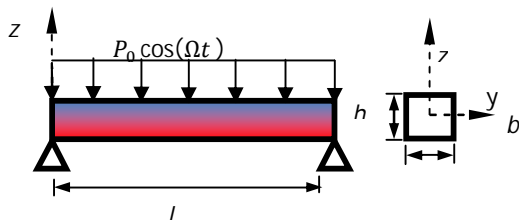
خواص موثر این تیر را می‌توان به صورت رابطه (1) تعریف کرد:

$$E(z) = (E_m - E_c)V_f(z) + E_c \quad (1-الف)$$

$$v(z) = (v_m - v_c)V_f(z) + v_c \quad (1-ب)$$

$$\alpha(z) = (\alpha_m - \alpha_c)V_f(z) + \alpha_c \quad (1-ج)$$

در رابطه (1)،  $E$ ، مدول الاستیسیته،  $v$  ضریب پواسون و  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی هستند. همچنین،  $V_f(z)$  تابع کسر حجمی است و از رابطه  $V_f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k$  به دست می‌آید که  $k$  شاخص قانون توان است. با توجه به تئوری تیر اویلر-برنولی [12]، تنها مؤلفه غیر صفر کرنش و متعاقباً تنها مؤلفه غیر صفر تنش از رابطه (2) محاسبه می‌شوند:



شکل 1 نمایی از نانوتیر و مشخصات هندسی آن

این زمینه معطوف می‌شود [1،2]. در میان نوسازهای مختلف، نانوتیرها دارای کاربردهای مهم و فراوانی هستند [3،4]. از آنجا که آماده‌سازی و انجام آزمایش‌های تجربی برای بررسی رفتار نانوتیرها بسیار سخت و پرهزینه هستند، غالباً مدل‌های تئوری بدین منظور به کار گرفته می‌شوند. تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته، راه حلی اثربخش برای بررسی مشخصات مکانیکی نانوتیرها (ارتعاشات آزاد و واداشته، خمش، کمانش و موارد مشابه) می‌باشند. تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته کلاسیک در پیش‌بینی رفتارهای مکانیکی وابسته به اندازه ناتوان هستند و این نقص پژوهشگران را بر آن داشت تا با ارائه تئوری‌های اصلاح شده، این مشکل را مرتفع سازند. تئوری‌هایی همانند الاستیسیته گرادیان کرنش<sup>2</sup>، الاستیسیته تنش کوپل شده<sup>3</sup> و الاستیسیته غیرموضعی ارینگن<sup>4</sup> توانایی در نظر گرفتن اثرات وابسته به اندازه را دارا می‌باشند [5،6،7].

تئوری الاستیسیته غیرموضعی ابزاری معمول برای بررسی و تحلیل سازه‌هایی با ابعاد کوچک است که توسط ارینگن مطرح شد [7،8،9]. در این تئوری برخلاف تئوری کلاسیک، تنش در یک نقطه به تمام کرنش‌های موجود در دامنه‌ای مشخص وابسته است. بر مبنای این تئوری پژوهش‌های فراوانی برای بررسی رفتار مکانیکی نانوتیرها انجام شده است. امام [10] از این تئوری برای مدلسازی رفتار غیرخطی کمانشی نانوتیرها استفاده کرده است. تای [11] نیز از این تئوری برای تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد خطی نانوتیر بهره برده است.

در سال‌های اخیر بسیاری از سازه‌ها با ابعاد کوچک از مواد هدفمند<sup>5</sup> ساخته می‌شوند. دلیل این امر کاربرد بسیار زیاد این مواد در میکرو و نانوسیستم‌های الکترو-مکانیکی است. همچنین تحقیقاتی نیز در این زمینه انجام شده است [12،13]. اومز [14] ارتعاشات واداشته خطی نانوتیر ساخته شده از مواد هدفمند را بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرموضعی مورد مطالعه قرار داد. همچنین بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی، سیمسک و یورتکو [15] مطالعه‌ای تحلیلی بر رفتار خمشی و کمانشی نانوتیر ساخته شده از مواد هدفمند با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی<sup>6</sup> و تیموشنکو<sup>7</sup> ارائه کردند. به دلیل آن‌که نانوتیرها از نسبت سطح به حجم بالایی برخوردار هستند، اثرات تنش سطحی<sup>8</sup> نقش قابل توجهی در رفتار مکانیکی این سازه‌ها دارد. گورتین<sup>9</sup> و مورداک<sup>10</sup> [16] تئوری الاستیسیته غیرکلاسیکی ارائه دادند که قادر به در نظر گرفتن اثرات تنش سطحی است. در این تئوری سطح به عنوان یک جزء (غیر فیزیکی) دو بعدی با ضخامت صفر (از منظر ریاضی) فرض می‌شود که حجم کلی را احاطه کرده است و هیچ گونه لغزشی بر این حجم کل ندارد. این تئوری در بسیاری از پژوهش‌های مربوط به نانوتیرها به کار گرفته شده است [17،18].

برای دریافت هرچه دقیق‌تر رفتار مکانیکی نانوتیرها، می‌توان مدلی بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارائه کرد که اثرات تنش‌های سطحی را با توجه به تئوری گورتین و مورداک در نظر بگیرد. برتری این مدل در پیش‌بینی مشخصه‌های مکانیکی وابسته به اندازه با در نظر گرفتن توامان اثرات تنش سطحی است. از تحقیقاتی که در این زمینه انجام شده است

- 1- nano-electro-mechanical systems (NEMS)
- 2- strain gradient elasticity
- 3- couple stress elasticity
- 4- Eringen's nonlocal elasticity
- 5- Functionally graded material (FGM)
- 6- Euler-Bernoulli
- 7- Timoshenko
- 8- surface stress
- 9- Gurtin
- 10- Murdach

11- piezoelectric  
12- Hamilton's principal  
13- power-law distribution  
14- Galerkin procedure  
15- multiple scales method  
16- small scale parameter

$$M_T = \int_A \beta(T(\bar{z}) - T_0)\bar{z}dA \quad (8)$$

انرژی جنبشی تیر با در نظر گرفتن اثرات سطح به شکل رابطه (9) نشان داده می شود:

$$\Pi_T = \frac{1}{2} \int_x I_1 [(\dot{U}_0)^2 + (\dot{W})^2] dx \quad (9)$$

که در رابطه (9)،  $I_0 = \int_A \rho dA$  و  $I_1 = I_0 + b\bar{p}_s$ . علاوه بر این نماد نقطه در معادله (9) در واقع عملگر مشتق نسبت به زمان است. از طرفی تغییرات کار نیروهای خارجی (شامل نیروی هارمونیک تحریک) و تغییرات نیروی میرایی ویسکوز نیز به صورت رابطه (10) نوشته می شود [21]:

$$\delta W^{ext} = \int_0^L (p\delta U_0 + P_0 \cos(\Omega t) \delta W) dx + \bar{N}\delta U_0 \Big|_0^L + \bar{R}\delta W \Big|_0^L + \bar{M}\delta \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_0^L \quad (الف-10)$$

$$\delta \Pi_D = -B \int_x (\dot{U}_0 \delta U_0 + \dot{W} \delta W) dx \quad (ب-10)$$

در رابطه (10)،  $\bar{M}$  و  $\bar{R}$  به ترتیب بیانگر نیروهای محوری و عمودی بر واحد طول وارد بر تیر، نیروهای محوری و برشی و گشتاور خمشی وارد بر دو انتهای تیر هستند. همچنین  $P_0$  و  $\Omega$  به ترتیب بیانگر دامنه و فرکانس تحریک هستند و  $B$  در آن ثابت میرایی ویسکوز، ناشی از بستر خارجی تیر است. با توجه به معادلات به دست آمده برای انرژی های پتانسیل و جنبشی، با استفاده از اصل همپلتون که به صورت  $\int_{t_1}^{t_2} (\delta \Pi_T - \delta \Pi_S + \delta W^{ext} + \delta \Pi_D) dt = 0$  معادلات حاکم بر حرکت نانوتیر به صورت (11) و شرایط مرزی نیز به صورت رابطه (12) به دست می آیند:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + p - B\dot{U}_0 = I_1 \ddot{U}_0 \quad (الف-11)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial W}{\partial x} \right) + P_0 \cos(\Omega t) - B\dot{W} = I_1 \ddot{W} \quad (ب-11)$$

$$\bar{N} - N = 0 \quad \text{or} \quad \delta U_0 = 0 \quad (الف-12)$$

$$\bar{R} - \left( N \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{or} \quad \delta W = 0 \quad (ب-12)$$

$$\bar{M} - M = 0 \quad \text{or} \quad \delta \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (ج-12)$$

در روابط (11) و (12) حتماً به این نکته توجه شود که  $M = M_x^b + M_x^s$  و  $N = N_x^b + N_x^s$

با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای تنش و انتگرال گیری از آن نسبت به ضخامت و همچنین با ضرب تنش در ضخامت و انتگرال گیری نسبت به آن، می توان معادلات ساختاری غیرموضعی نیرو و گشتاور را از رابطه (13) به دست آورد [22]:

$$N - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = A_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + b\bar{A}^s \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + b\bar{\tau}^s \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - N_T \quad (الف-13)$$

$$M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = B_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_0}{\partial x} - \bar{z} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \quad (الف-2)$$

$$\sigma_{xx} = E \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} - \bar{z} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \beta \Delta T \quad (ب-2)$$

$T_0 = T - T_0$  تنش دما و  $\beta = \alpha E / (1 - \nu)$  مدول تنش دما می باشد که  $\alpha$  هم چنین  $U_0$  و  $W$  به ترتیب جابه جایی تار خنثی در راستای  $x$  و  $z$  می باشند و  $\bar{z}$  مکان محور خنثی است و از (3) به دست می آید:

$$\bar{z} = z - z_0, \quad z_0 = \frac{\int_A z E(z) dA}{\int_A E(z) dA} \quad (3)$$

بر اساس تئوری گورتین و مورداک [16]، رابطه تنش سطحی با کرنش و جابه جایی ها عبارت است از:

$$\sigma_{xx}^s = \tau^s + (\lambda^s + 2\mu^s) \varepsilon_{xx} - \frac{1}{2} \tau^s \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \quad (الف-4)$$

$$\sigma_{xz}^s = \tau^s \frac{\partial W}{\partial x} \quad (ب-4)$$

انرژی کرنشی در یک ماده الاستیک، به صورت رابطه (5) بیان می شود:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_x \int_A \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dA dx + \frac{1}{2} \left( \int_{S^+} \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij} dS^+ + \int_{S^-} \sigma_{ij}^s \varepsilon_{ij} dS^- \right) = \frac{1}{2} \int_x \left\{ (N_{xx}^b + N_{xx}^s) \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - (M_{xx}^b + M_{xx}^s) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right\} dx \quad (5)$$

در این رابطه،  $M_{xx}$  و  $N_{xx}$  به ترتیب بیانگر نیروی منتهجه و گشتاور منتهجه هستند و بالابویس های  $b$  و  $s$  به ترتیب به بالک و سطح اشاره دارند و به صورت روابط (6) می باشند:

$$N_x^b = A_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - N_T \quad (الف-6)$$

$$M_x^b = B_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - M_T \quad (ب-6)$$

$$N_x^s = b\bar{A}^s \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + b\bar{\tau}^s \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (ج-6)$$

$$M_x^s = \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{bh^2}{4} \bar{A}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{bh}{2} \Delta \tau^s \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (د-6)$$

که در روابط (6)،  $\bar{A}^s = \lambda^{s+} + 2\mu^{s+} + \lambda^{s-} + 2\mu^{s-}$ ،  $\Delta \tau^s = \tau^{s+} - \tau^{s-}$  و  $\bar{\tau}^s = \tau^{s+} + \tau^{s-}$ ،  $\Delta \mathcal{A}^s = \lambda^{s+} + 2\mu^{s+} - \lambda^{s-} - 2\mu^{s-}$  هم چنین  $\left\{ \begin{matrix} A_{11} \\ B_{11} \\ D_{11} \end{matrix} \right\}$  از رابطه (7) محاسبه می شود:

$$\left\{ \begin{matrix} A_{11} \\ B_{11} \\ D_{11} \end{matrix} \right\} = \int_A E \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \bar{z} \\ \bar{z}^2 \end{matrix} \right\} dA \quad (7)$$

علاوه بر این، نیروها و گشتاورهای منتهجه حرارتی مطابق با رابطه (8) محاسبه خواهند شد:

$$N_T = \int_A \beta(T(\bar{z}) - T_0) dA$$

$$k_4 = B_{11} + \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s, \quad k_5 = D_{11}, \quad k_6 = \frac{bh}{2} \Delta \tau^s$$

$$k_7 = \frac{bh^2}{4} \bar{\mathcal{A}}^s \quad (17)$$

برای بی بعد کردن رابطه (16)، پارامترهای بی بعدی به صورت  $\hat{x} = \frac{x}{L}$ ،  $w = \frac{W}{h}$ ،  $\tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{A_{11m}}{I_{0m}}}$  و  $\beta = \frac{h}{L}$  تعریف کرده و با استفاده از این پارامترها، رابطه (16) به صورت بی بعد (18) بازنویسی می شود. قابل ذکر است که  $I_{0m}$  و  $A_{11m}$  مقادیر مربوط به فلز می باشند.

$$\left( -\alpha_2 \int_0^1 \left( \frac{\partial w}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} - \alpha_3 \left[ \frac{\partial w}{\partial \hat{x}}(1, \tau) - \frac{\partial w}{\partial \hat{x}}(0, \tau) \right] + \bar{H} \right) \times \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \hat{x}^2} - \mu^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \hat{x}^4} \right) + \alpha_1 \frac{\partial^4 w}{\partial \hat{x}^4} + \bar{I} \left( \ddot{w} - \mu^2 \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) - \bar{F} \cos(\bar{\Omega} \tau) + \bar{B} \left( \dot{w} - \mu^2 \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \hat{x}^2} \right) = 0 \quad (18)$$

که در رابطه (18)، ضرایب بی بعد معادله به صورت رابطه (19) محاسبه شده اند:

$$\alpha_1 = \beta^2 \left( \frac{k_5 + k_7 + \frac{k_4 k_2}{k_1}}{A_{11m} h^2} \right), \quad \alpha_2 = \beta^2 \left( \frac{k_1 - k_3}{2A_{11m}} \right)$$

$$\alpha_3 = \beta^2 \frac{k_2}{h A_{11m}}, \quad \bar{F} = \frac{h P_0}{\beta^2}, \quad P = \frac{N_T}{A_{11m}},$$

$$\bar{H} = \frac{N_T - k_3}{A_{11m}}, \quad \bar{B} = \frac{h}{\beta \sqrt{A_{11m} I_{0m}}}$$

$$\bar{I} = \frac{I_1}{I_{0m}}, \quad \mu = \frac{e_0 a}{L}, \quad \bar{\Omega} = \Omega L \sqrt{\frac{I_{0m}}{A_{11m}}} \quad (19)$$

### 3- تحلیل غیر خطی ارتعاشات اجباری

برای تبدیل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (18) به معادله دیفرانسیل معمولی با مشتقات زمان، از روش حل گلرکین استفاده می شود.

برای اعمال این روش تابع جابه جایی عرضی را به صورت ضرب دو تابع وابسته به زمان و مکان به فرم  $w(\hat{x}, \tau) = \varphi(\hat{x}) u(\tau)$  در نظر گرفته که در این حالت  $\varphi(\hat{x})$  مد ارتعاشی خطی تیر است که تابع آن برای شرایط انتهایی مختلف تیر در جدول 1 ارائه شده است. همچنین  $u(\tau)$  تابعی متغیر با زمان است که باید مشخص شود. با قرار دادن  $w(\hat{x}, \tau) = \varphi(\hat{x}) u(\tau)$  در معادله (18) و ضرب معادله حاصل در تابع شکل مد  $\varphi(\hat{x})$  و انتگرال گیری از آن در طول تیر معادله (20) حاصل می شود:

$$\ddot{u} + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \beta_4 \dot{u} = F \cos(\bar{\Omega} \tau) \quad (20)$$

که در رابطه (20)، ضرایب به صورت رابطه (21) هستند:

جدول 1 تابع مد برای تیر با شرایط انتهایی مختلف

شرایط انتهایی تیر	$\varphi(\hat{x})$
دوسر مفصل	$\sin(\beta_i \hat{x}), \quad \beta_1 = \pi, \beta_2 = 2\pi, \beta_3 = 3\pi$
دوسر گیردار	$\sinh \beta_i \hat{x} - \sin \beta_i \hat{x} + \alpha_n (\cosh \beta_i \hat{x} - \sin \beta_i \hat{x})$ $\alpha_n = \frac{\sinh \beta_i - \sin \beta_i}{\cos \beta_i - \cosh \beta_i}$ $\beta_1 = 4.7300, \quad \beta_2 = 7.8532,$ $\beta_3 = 10.9956$
یک سر مفصل - یک سر گیردار	$\sin \beta_i \hat{x} - \sinh \beta_i \hat{x} + \alpha_n (\cosh \beta_i \hat{x} - \sin \beta_i \hat{x})$ $\alpha_n = \frac{\sin \beta_i - \sinh \beta_i}{\cos \beta_i + \cosh \beta_i}$ $\beta_1 = 3.9966, \quad \beta_2 = 7.0685,$ $\beta_3 = 10.2101$

$$-\frac{bh^2}{4} \bar{\mathcal{A}}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{bh}{2} \Delta \tau^s \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (ب-13)$$

پارامتر  $e_0 a$  در رابطه (13) ضریب غیرموضعی است که اثرات اندازه را وارد معادلات می کند و  $a$  در آن طول مشخصه داخلی (همانند ابعاد دانه<sup>1</sup>) و  $e_0$  ثابت ماده ای است که به صورت تجربی و یا از طریق تطبیق نمودارهای انتشار امواج به صورت تقریبی به دست می آید.

با استفاده از روابط (11) و صرف نظر کردن از نیرو و اینرسی محوری، با توجه به روابط (13)، روابط (14) که فرم غیرموضعی نیرو و گشتاور هستند، حاصل می شوند:

$$N = A_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + b c \bar{\mathcal{A}}^s \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + b \bar{\tau}^s \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - N_T \quad (الف-14)$$

$$M = B_{11} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{bh^2}{4} \bar{\mathcal{A}}^s \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{bh}{2} \Delta \tau^s \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - M_T + (e_0 a)^2 \left( I_T \ddot{W} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial W}{\partial x} \right) - P_0 \cos(\Omega t) + B \dot{W} \right) \quad (ب-14)$$

با فرضیات گفته شده رابطه (الف-11) به صورت  $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$  در می آید. با جای گذاری رابطه (الف-14) در این رابطه، سپس دوبار انتگرال گیری از معادله حاصل و نیز اعمال  $U_0(0, t) = 0$  و  $U_0(L, t) = 0$  که شرط مرزی عدم تحرک محوری است، رابطه (15) حاصل می شود و به کمک این رابطه، رابطه (ب-11) نیز به صورت (16) بازنویسی می شود:

$$N = \frac{(k_1 - k_3)}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{k_2}{L} \left( \frac{\partial W}{\partial x}(L, t) - \frac{\partial W}{\partial x}(0, t) \right) + k_3 - N_T \quad (15)$$

$$N \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) + k_4 \times \left( -\frac{(k_1 - k_3)}{k_1} \left( \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) - (k_5 + k_7) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (k_4 - k_6) \times \left( \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - B \left( \dot{W} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x^2} \right) + P_0 \cos(\Omega t) = I_1 \left( \ddot{W} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \ddot{W}}{\partial x^2} \right) \quad (16)$$

در روابط (15) و (16) ضرایب  $k_1$  تا  $k_7$  به صورت رابطه (17) به دست می آید:

$$k_1 = A_{11} + b c \bar{\mathcal{A}}^s, \quad k_2 = -B_{11} - \frac{bh}{2} \Delta \mathcal{A}^s, \quad k_3 = b \bar{\tau}^s$$

1- granular size

در رابطه (27)،  $A$  یک تابع مختلط است و  $\bar{A}$  بیانیگر مزدوج آن است. برای بررسی تحریک اولیه، فرض می‌شود که فرکانس تحریک بسیار نزدیک به فرکانس طبیعی خطی سیستم باشد، یعنی  $\bar{\omega} = \omega_0 + \varepsilon^2 \sigma$  به نام پارامتر انحراف از تشدید نامیده می‌شود و مقدار اختلاف بین فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی خطی سیستم مربوطه را نشان می‌دهد. با جای گذاری  $\bar{\omega} = \omega_0 + \varepsilon^2 \sigma$  در رابطه (26-ب)، رابطه (28) به دست خواهد آمد:

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = 2i\omega_0 e^{-iT_0 \omega_0} (D_1 \bar{A}) - 2A\beta_2 \bar{A} + \beta_4 \omega_0^2 A^2 e^{-2iT_0 \omega_0} - \beta_2 A^2 e^{-2iT_0 \omega_0} - 2i\omega_0 e^{iT_0 \omega_0} (D_1 A) + A^2 \beta_2 (-e^{2iT_0 \omega_0}) \quad (28)$$

شرط حل پذیری معادله بالا ممانعت از شکل گیری جملات بسیار بزرگ در پاسخ زمانی می‌باشد. برای حذف ضریب جمله  $e^{iT_0 \omega_0}$  باید رابطه (29) برقرار باشد:

$$-2i\omega_0 \frac{dA(T_1, T_2)}{dT_1} = 0 \rightarrow A = A(T_2) \quad (29)$$

با در نظر گرفتن رابطه (29) در رابطه (28)، رابطه (30) حاصل می‌شود:

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -A^2 e^{2iT_0 \omega_0} \beta_2 - 2A\bar{A}\beta_2 - e^{-2iT_0 \omega_0} \bar{A}^2 \beta_2 \quad (30)$$

جواب خصوصی رابطه (30)، به صورت رابطه (31) است:

$$u_{2p} = \frac{A^2 e^{2iT_0 \omega_0} \beta_2}{3\omega_0^2} - \frac{2A\bar{A}\beta_2}{\omega_0^2} + \frac{e^{-2iT_0 \omega_0} \bar{A}^2 \beta_2}{3\omega_0^2} \quad (31)$$

با جای گذاری روابط (27) و (31) در رابطه (26-ج) و برابر صفر قرار دادن جملات بزرگ، رابطه (32) محقق می‌شود:

$$\frac{1}{2} e^{i\sigma T_2} f - 2i\omega_0 (D_2 A) + \frac{10A^2 \bar{A} \beta_2^2}{3\omega_0^2} - 3A^2 \bar{A} \beta_3 - iA\omega_0 \zeta = 0 \quad (32)$$

رابطه (32) یک معادله دیفرانسیل مختلط است که برای حل آن  $A(T_2)$  را به صورت تابع قطبی  $A = \frac{1}{2} a(T_2) \exp(i\phi(T_2))$  فرض کرده و با جای گذاری آن در رابطه (32)، و جدا کردن جملات مختلط و حقیقی، دو معادله دیفرانسیل حاکم بر  $a$  و  $\phi$  به صورت روابط (33) به دست می‌آیند. لازم به ذکر است که  $a$  و  $\phi$  توابع حقیقی می‌باشند.

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{f}{2\omega_0} \sin(\sigma T_2 - \phi) - \frac{\zeta a}{2} \quad (33-الف)$$

$$a \frac{d\phi}{dT_1} = -\frac{f}{2\omega_0} \cos(\sigma T_2 - \phi) - \frac{R}{8\omega_0} a^3 \quad (33-ب)$$

در روابط (33)،  $R = \frac{10\beta_2^2}{3\omega_0^2} - 3\beta_3$ . با تعریف یک متغیر جدید به شکل  $\gamma = \sigma T_2 - \phi$  و حذف  $\phi$  از روابط (33)، روابط (34) نتیجه می‌شوند:

$$\frac{da}{dT_1} = \frac{f}{2\omega_0} \sin \gamma - \frac{\zeta a}{2} \quad (34-الف)$$

$$a \frac{d\gamma}{dT_1} = a\sigma + \frac{f}{2\omega_0} \cos \gamma + \frac{R}{8\omega_0} a^3 \quad (34-ب)$$

با فرض حالت پایدار،  $\frac{d\gamma}{dT_1} = \frac{da}{dT_1} = 0$  از روابط (34)، رابطه (35) حاصل خواهد شد:

$$\left(\frac{\zeta a}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{8\omega_0} a^3 + a\sigma\right)^2 = \left(\frac{f}{2\omega_0}\right)^2 \quad (35)$$

#### 4- توزیع دما

نانوتیر ساخته شده از مواد هدفمند دارای مشخصه‌های حرارتی متفاوتی در راستای ضخامت است. بنابراین فرض توزیع دمای یکنواخت در آن کاملاً نادرست می‌باشد. همچنین به دلیل یکسان نبودن سطوح نانوتیر، شرایط مرزی دما در آن متفاوت می‌باشد. این شرایط مرزی عبارتند از  $T(\frac{h}{2}) = T_m$  و  $T(-\frac{h}{2}) = T_c$  که به ترتیب برای سطوح فلزی و سرامیکی می‌باشند. توزیع

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\alpha_1 r_2 + (P - \bar{H}) r_1 - (P - \bar{H}) \mu^2 r_1}{\bar{I}(r_0 - \mu^2 r_1)} \\ \beta_2 &= \frac{\alpha_3 (\mu^2 r_4 - r_3)}{\bar{I}(r_0 - \mu^2 r_1)}, \quad \beta_3 = \frac{\alpha_2 (\mu^2 r_6 - r_5)}{\bar{I}(r_0 - \mu^2 r_1)} \\ \beta_4 &= \frac{\bar{B}}{\bar{I}}, \quad F = \frac{\bar{F} r_7}{\bar{I}(r_0 - \mu^2 r_1)}, \quad r_0 = \int_0^1 \varphi^2 d\hat{x} \\ r_1 &= \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}^2} \varphi d\hat{x}, \quad r_2 = \int_0^1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \hat{x}^4} \varphi d\hat{x} \\ r_3 &= \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}^2} \varphi d\hat{x} \\ r_4 &= \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=0} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \hat{x}^4} \varphi d\hat{x} \\ r_5 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \hat{x}^2} \varphi d\hat{x} \\ r_6 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \hat{x}^4} \varphi d\hat{x}, \quad r_7 = \int_0^1 \varphi d\hat{x} \quad (21) \end{aligned}$$

برای حل تحلیلی رابطه (20)، از روش اغتشاشات مقیاس‌های چندگانه استفاده می‌شود.

بر مبنای تکنیک اغتشاشات، پاسخ زمانی سیستم را می‌توان حول  $\varepsilon$  به صورت رابطه (22) بسط داد:

$$u(\tau; \varepsilon) = \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^3 u_3(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (22)$$

در این روش باید  $\beta_4$  و  $F$  را به نحوی مقیاس بندی کرد که گذاره‌های مربوط به میرایی و تحریک از همان مرتبه گذاره‌های غیرخطی باشند [23]. در اینجا، با توجه به رابطه (22) ترم‌های غیرخطی در مرتبه  $\varepsilon^3$  ظاهر می‌شوند. بنابراین فرض‌های غیرخطی ضروری  $F = f\varepsilon^3$ ،  $\beta_4 = \zeta\varepsilon^2$ ،  $\beta_1 = \omega_0^2$  در نظر گرفته می‌شود.  $\varepsilon$  پارامتر بدون بعد اغتشاش است و دارای مقیاسی در اندازه دامنه جواب می‌باشد. همچنین  $\omega_0$  فرکانس ارتعاشات آزاد خطی نانوتیر است. با استفاده از این فرض‌ها، رابطه (20) به شکل رابطه (23) در می‌آید:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \zeta \varepsilon^2 \dot{u} = f \varepsilon^3 \cos(\bar{\Omega} \tau) \quad (23)$$

مقیاس بندی زمان‌های چندگانه را می‌توان با استفاده از رابطه (24) انجام داد:

$$T_n = \varepsilon^n \tau, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

مشقات نسبت به هر یک از این مقیاس‌های زمانی، به صورت رابطه (25) به دست می‌آیند:

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (25)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots$$

با جای گذاری روابط (22) و (25) در رابطه (23) و با قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف  $\varepsilon$  برابر با صفر، روابط (26) حاصل می‌شوند:

$$D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = 0 \quad (26-الف)$$

$$D_0^2 u_2 + \omega_0^2 u_2 = -2(D_0 D_1 u_1) - u_1^2 \beta_2 \quad (26-ب)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 u_3 + \omega_0^2 u_3 &= \frac{1}{2} e^{-i\bar{\Omega} T_0} f + \frac{1}{2} e^{i\bar{\Omega} T_0} f \\ &\quad - 2(D_0 D_1 u_2) - D_1^2 u_1 - 2(D_0 D_2 u_1) \\ &\quad - 2u_1 u_2 \beta_2 - u_1^3 \beta_3 - (D_0 u_1) \zeta \end{aligned} \quad (26-ج)$$

جواب رابطه (26-الف) به شکل رابطه (27) خواهد شد:

$$u_1(T_0, T_1, T_2) = A(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1, T_2) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (27)$$

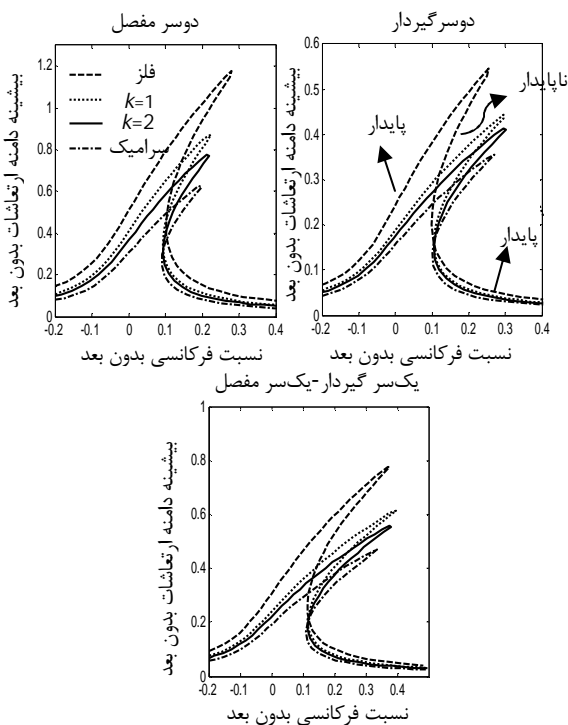
پدیده پرش ناشی از رفتار غیرخطی سیستم و با از دست دادن پایداری سیستم همراه است. در این پدیده، تغییرات اندک در فرکانس تحریک، موجب تغییرات زیاد در دامنه ارتعاشات می‌شود. در واقع در بیشینه دامنه ارتعاشات، با اندکی تغییر در فرکانس تحریک سیستم از حالت پایدار به حالت ناپایدار پرش می‌کند. محدوده پاسخ پایدار و ناپایدار هم در شکل نشان داده شده است. همچنین مشخص است که نانوتیر با تکیه گاه دوسر گیردار دارای بیشترین سفتی در میان سایر تکیه‌گاه‌ها می‌باشد.

شکل 3 تغییرات بیشینه دامنه ارتعاش با دامنه تحریک را باز هم به ازای مقادیر مختلف شاخص قانون توانی نشان می‌دهد. دامنه تحریک عامل کنترل کننده دامنه ارتعاشات است.

پدیده پرش در این نمودار هم دیده می‌شود. در این نمودار نقطه الف متناظر با بیشینه دامنه ارتعاشات به ازای فرکانس بدون بعد تحریک در شکل 2 است. مشاهده می‌شود که با تغییر فاز از فلز خالص به سرامیک خالص، بیشینه دامنه ارتعاشات کم می‌شود. همچنین قابل مشاهده است که میزان ارتفاع پرش در تیر با شرایط انتهایی دوسر مفصل از سایر تکیه‌گاه‌ها بیشتر است. شکل‌های 4 و 5، به ترتیب نمودار پاسخ فرکانسی و تغییرات بیشینه دامنه ارتعاش با دامنه تحریک برای تئوری‌های مختلف می‌باشند.

بدین منظور با برابر صفر قراردادن ضریب غیرموضعی نتایج مربوط به تئوری تنش سطحی و با برابر صفر قرار دادن ضرایب مربوط به پارامترهای سطح، نتایج مربوط به تئوری غیرموضعی رسم شده و به مقایسه آن‌ها با نتایج حاصل از تئوری کلاسیک پرداخته شده‌است.

در شکل 4، همان‌گونه که مشخص است، تئوری غیرموضعی رفتار سخت‌شوندگی بیشتری نسبت به تئوری‌های کلاسیک و تنش سطحی از خود نشان می‌دهد.



شکل 2 تاثیر شاخص توانی بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی

دما در نانوتیر ساخته شده از مواد هدفمند را می‌توان با حل معادله انتقال حرارت هدایت، رابطه (36)، به دست آورد:

$$K \frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \quad (36)$$

با اعمال شرایط مرزی حرارتی در رابطه (36)، توزیع دمای خطی (37)

به دست می‌آید:

$$T = \left( \frac{T_m + T_c}{2} \right) + (T_m - T_c) \frac{z}{h} \quad (37)$$

## 5- نتایج، تفسیر و بررسی آن‌ها

در این بخش به منظور بررسی پارامترهای موثر بر ارتعاشات واداشته غیرخطی نانوتیر ساخته شده از مواد هدفمند در محیط حرارتی، نمودارهای پاسخ فرکانسی ارائه شده است. خواص مکانیکی مواد تشکیل دهنده نانوتیر در جدول 2 آورده شده است.

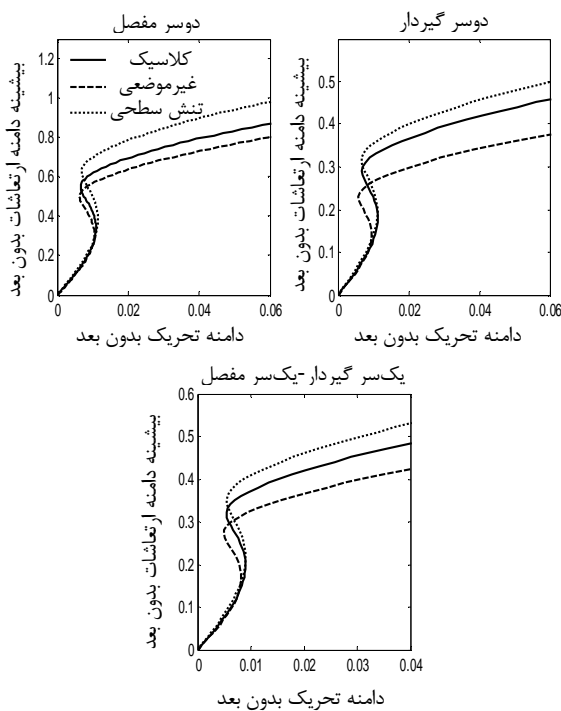
در تمامی شکل‌ها، به غیر از پارامترهای متغیر در شکل، سایر پارامترها به صورت دامنه نیروی تحریک معادل 0/01، نسبت ضخامت به طول معادل 20، ضریب میرایی معادل 0/05، اختلاف دما برابر 100 درجه، ضریب بی‌بعد غیرموضعی برابر با 0/1، ضخامت تیر برابر با 2 نانومتر و نسبت فرکانسی برابر با 0/1 فرض شده‌اند. همچنین در تمامی شکل‌ها به استثنای شکل‌های 2 و 3، مقدار شاخص قانون توانی برابر با 1 فرض شده‌است. مقادیر صفر و بی‌نهایت برای  $k$  به ترتیب بیانگر حالت فلز خالص و سرامیک خالص هستند.

در شکل 2 تاثیر شاخص قانون توانی بر نمودار پاسخ فرکانسی سیستم رسم شده‌است. همان‌گونه که قابل مشاهده است، با افزایش شاخص قانون توانی، بیشینه دامنه پاسخ پایدار به مقادیر فرکانس تحریک بزرگتر منتقل می‌شود. این نشان از بروز رفتار سخت‌شوندگی<sup>1</sup> تیر با افزایش میزان شاخص قانون توانی دارد. با افزایش شاخص قانون توانی یا به عبارت دیگر، تغییر فاز سیستم از فلز خالص به سرامیک خالص، سفتی<sup>2</sup> سیستم افزایش می‌یابد که این خود علاوه بر افزایش فرکانس طبیعی سیستم منجر به این نیز می‌شود که اثرات غیرخطی هندسه سیستم بیشتر در پاسخ فرکانسی تاثیرگذار باشند. مشاهده می‌شود که با کاهش اندک در میزان شاخص قانون توانی نمودار دچار پرش زیادی در دامنه ارتعاشات می‌شود. این پرش به دلیل رفتار سیستم برای رسیدن به پاسخ پایدار می‌باشد.

جدول 2 خواص مکانیکی آلومینیوم و سیلیکون

خصوصیت ماده	سیلیکون	آلومینیوم
مدول الاستیسیته (GPa)	210	68/5
ضریب پواسون	0/24	0/35
چگالی (kgm <sup>-3</sup> )	2331	3000
ضریب انبساط حرارتی (K <sup>-1</sup> )	5×10 <sup>-6</sup>	23/6×10 <sup>-6</sup>
ثوابت لامه سطح (Nm <sup>-1</sup> )	μ <sup>s</sup>	-0/376
ثوابت لامه سطح (Nm <sup>-1</sup> )	λ <sup>s</sup>	-4/488
تنش پسماند سطح (Nm <sup>-1</sup> )	0/6048	0/9108
چگالی سطحی (kgm <sup>-2</sup> )	3/17×10 <sup>-7</sup>	5/46×10 <sup>-7</sup>

1. Hardening behavior  
2. Stiffness



شکل 5 تاثیر تئوری‌های مختلف بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به دامنه بدون بعد نیروی تحریک

گورتین و موردک است. یعنی به کارگرفتن تئوری گورتین و موردک سبب کاهش رفتار غیرخطی نانوتیر می‌شود. بنابراین در فرکانس‌های تحریک کمتری نسبت به دو تئوری دیگر، پدیده ناپایدار تشدید رخ می‌دهد. همچنین این تئوری موجب کاهش رفتار سخت‌شوندگی در نانوتیر می‌شود. علاوه بر این اختلاف بین تئوری‌ها در تکیه‌گاه دوسر گیردار مشهودتر است.

در شکل 5، مشخص است که با تغییر تئوری از تنش سطحی به کلاسیک و سپس به تئوری غیرموضعی، مقدار بیشینه دامنه ارتعاشات در یک دامنه تحریک معین کاهش می‌یابد.

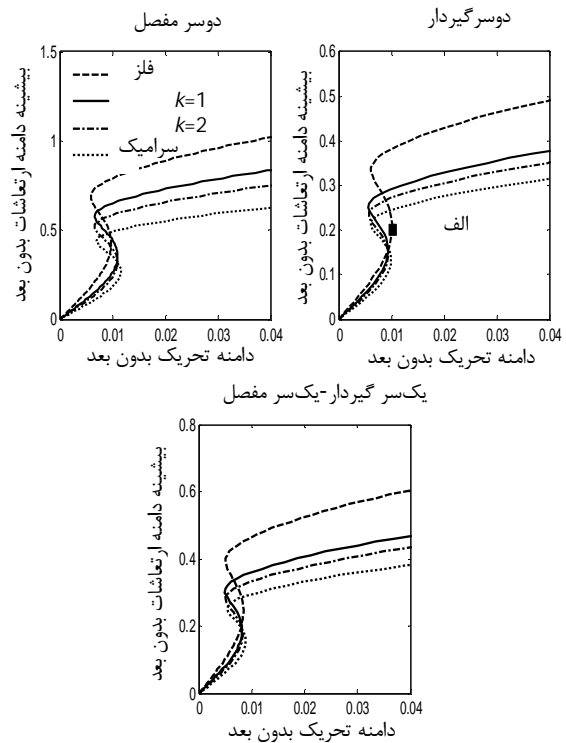
در شکل 6، تاثیر ضریب غیرموضعی بدون بعد بر پاسخ فرکانسی سیستم نشان داده شده است. با افزایش ضریب غیرموضعی بدون بعد منحنی‌های نمودار به سمت فرکانس‌های تحریک بالاتر متمایل می‌شوند. این نشان از افزایش رفتار سخت‌شوندگی نانوتیر با افزایش ضریب غیرموضعی بدون بعد دارد.

این روند برای هر سه تکیه‌گاه تکرار شده است. همچنین با افزایش میزان ضریب غیرموضعی بدون بعد پدیده غیرخطی در منحنی‌ها غالب می‌شود.

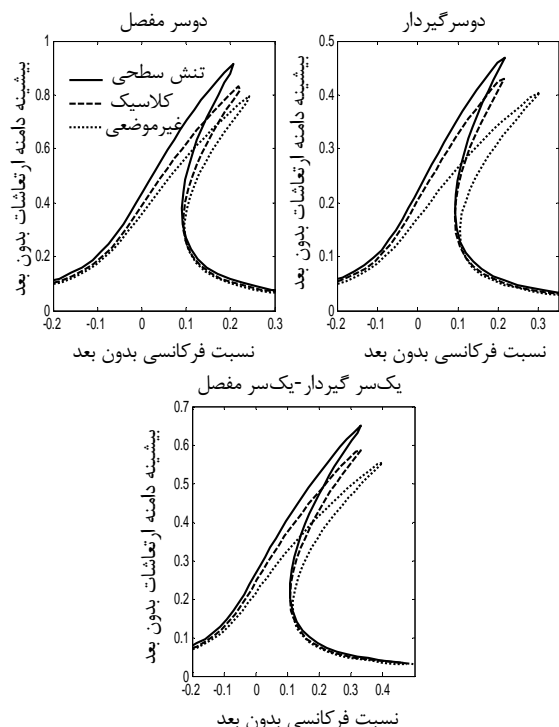
اثر تغییر ضریب غیرموضعی بدون بعد بر نمودار تغییر دامنه ارتعاشی با دامنه تحریک، در شکل 7 آورده شده است. مشخص است که با افزایش ضریب غیرموضعی بدون بعد میزان ارتفاع پرش کاهش می‌یابد. در یک دامنه تحریک مشخص اندازه بیشینه دامنه ارتعاشی سیستم عدد کوچکتری می‌شود.

به ازای شرایط انتهایی دوسر مفصل، در هر دو شکل 6 و 7، باز هم میزان بیشینه دامنه ارتعاشی برای تیر دوسر مفصل از تیر یک سر گیردار-یک سر مفصل و نیز تیر دوسر گیردار بیشتر است.

با برابر صفر قرار دادن ضریب غیرموضعی و تغییر دادن اندازه ضخامت تیر، شکل‌های 8 و 9 حاصل شده‌اند. در شکل 8، همان‌گونه که مشخص است با افزایش ضخامت تیر، نمودار پاسخ فرکانسی به نمودار حاصل از تئوری



شکل 3 تاثیر شاخص توانی بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به دامنه تحریک بدون بعد



شکل 4 تاثیر تئوری‌های مختلف بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی

همچنین می‌توان دریافت که رفتار غیرخطی نانوتیر در مدل به‌دست آمده از تئوری الاستیسیته غیر موضعی بیشتر از تئوری کلاسیک و تئوری

به انرژی حجم کل صرف نظر کرد. بنابراین تئوری کلاسیک از پیش‌بینی رفتار ارتعاشی نانوتیرها ناتوان است. از دیگر نتایج این شکل می‌توان این نکته را اضافه کرد که در ضخامت‌های کمتر، میزان انحراف نمودار به سمت راست کمتر بوده و با نزدیک شدن به نتایج حاصل از تئوری کلاسیک، میزان غیرخطی شدن رفتار نانوتیر نیز افزایش می‌یابد.

همچنین این روند برای تکیه‌گاه‌های مختلف، مشابه است. نتیجه مشابهی هم برای شکل 9 مشاهده می‌شود. افزایش رفتار سخت‌شوندگی با افزایش میزان ضخامت نانوتیر برای هر سه تکیه‌گاه کاملاً نمایان است. علاوه بر این می‌توان مشاهده کرد که در یک دامنه تحریک مشخص، میزان بیشینه دامنه ارتعاشات برای تیرهای با ضخامت کمتر، بیشتر است.

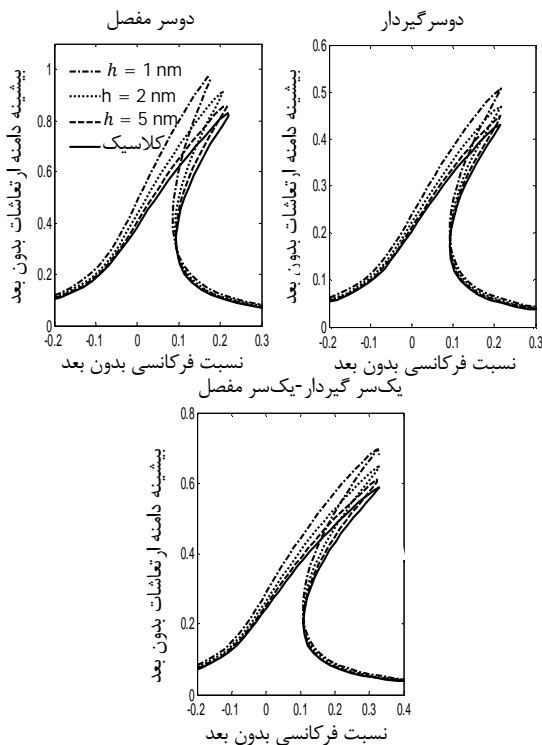
در نهایت اثر محیط حرارتی بر رفتار ارتعاشی نانوتیر در شکل‌های 10 و 11 آورده شده است.

در شکل 10، مشاهده می‌شود که با کاهش اختلاف دما، محدوده پاسخ وسیع‌تر می‌شود. میزان بیشینه دامنه ارتعاشات افزایش می‌یابد و نانوتیر در فرکانس‌های تحریک بالاتر به حداکثر دامنه ارتعاشی خود می‌رسد و در واقع تشدید غیرخطی (ناپایداری) در فرکانس‌های تحریک بالاتر رخ می‌دهد. این روند برای تمام تکیه‌گاه‌ها تکرار می‌شود. در تکیه‌گاه دوسر مفصل همانگونه که مشاهده می‌شود میزان تغییرات اختلاف دما تأثیراتی بسیار مشهودتر از دو تکیه‌گاه دیگر دارد.

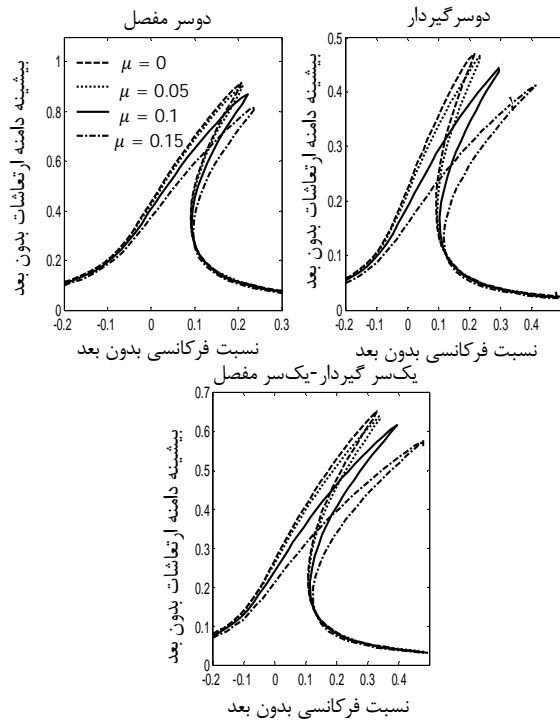
در شکل 11 پدیده پرش که ناشی از افزایش رفتار غیرخطی نانوتیر است و باعث تشدید و عدم پایداری نانوتیر می‌شود، در اختلاف دماهای پایین‌تر رخ می‌دهد. این رفتار در نانوتیر دو سر مفصل به صورت واضح پیدا می‌باشد.

### 6- جمع‌بندی

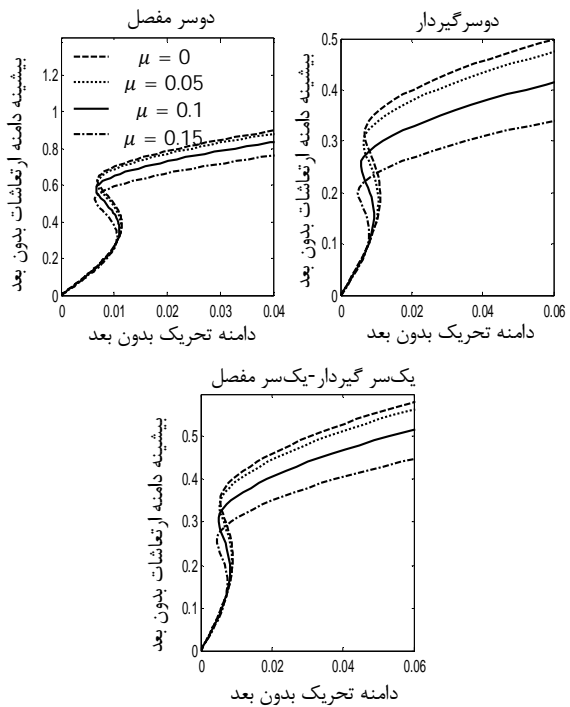
در این پژوهش تأثیرهای تنش‌های سطحی و غیرموضعی بر ارتعاشات واداشته



شکل 8 تأثیر ضخامت نانوتیر بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی



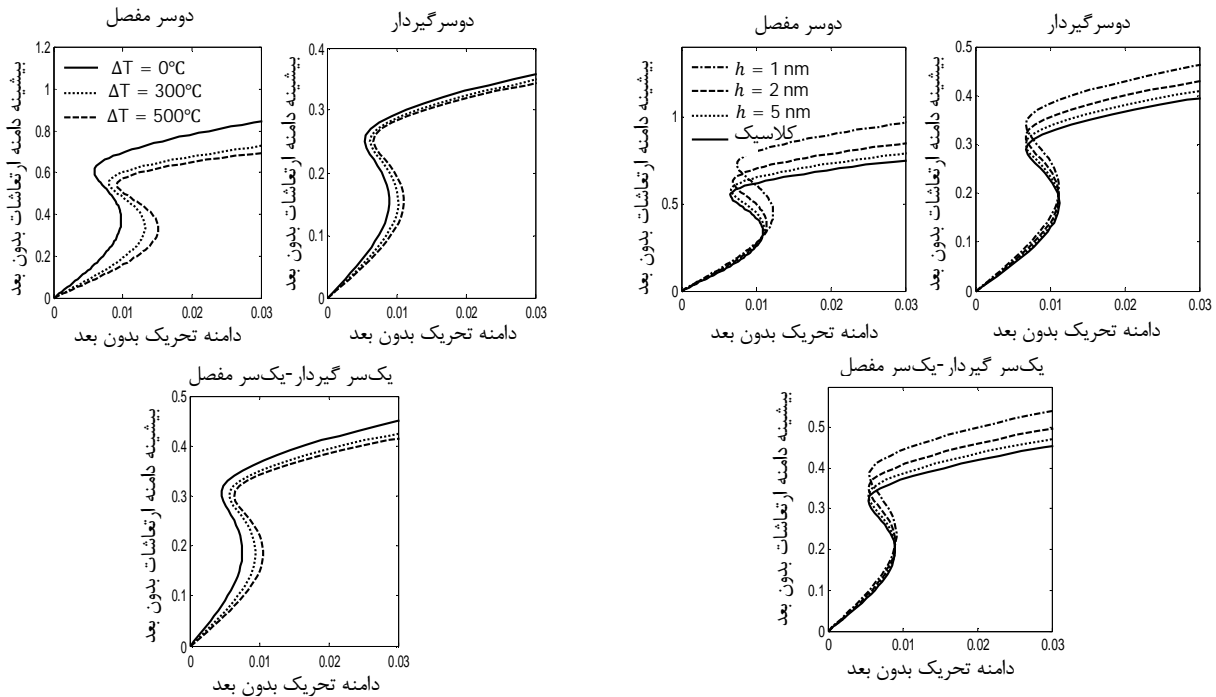
شکل 6 تأثیر ضریب غیرموضعی بدون بعد بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی



شکل 7 تأثیر ضریب غیرموضعی بدون بعد بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به دامنه بدون بعد تحریک

کلاسیک نزدیک می‌شود. به این معنی که با افزایش ضخامت اثرات مربوط به سطح ناپدید می‌شوند. دلیل این پدیده این است که با افزایش ضخامت، نسبت سطح به حجم سازه کم شده و بنابراین می‌توان از انرژی سطح نسبت





شکل 9 تاثیر ضخامت نانوتیر بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به دامنه بدون بعد نیروی تحریک

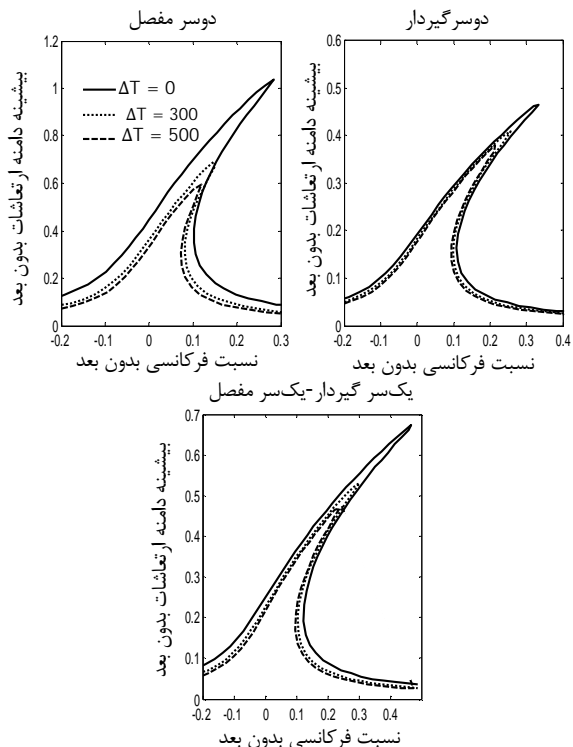
شکل 11 تاثیر اختلاف دما بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به دامنه بدون بعد نیرو

گرفته شده است. معادلات حرکت غیرخطی به دست آمده با استفاده از روش گلرکین و روش اغتشاشات زمان‌های مقیاس شده چندگانه به صورت دقیق حل شده‌اند. تاثیرات پارامترهای مختلف اعم از شاخص قانون توانی برای مواد هدفمند، تنش‌های سطحی، ضریب غیرموضعی، ضخامت نانوتیر و تغییرات دمای محیط با توجه به تکیه‌گاه‌های مختلف بررسی شدند.

نتایج نشان می‌دهند که رفتار ارتعاشی برای نانوتیر وابسته به ابعاد سازه است. مشاهده می‌شود که هرچه ابعاد تیر کوچک‌تر می‌شود، پاسخ‌ها از تئوری کلاسیک فاصله می‌گیرند. با مقایسه تئوری‌های مختلف، پدیده ناپایدار تشدید غیرخطی در فرکانس‌های تحریک کمتر برای تئوری گورتین و مورداک نسبت به دو تئوری دیگر رخ می‌دهد. رفتار غیرخطی نانوتیر به ترتیب از تئوری الاستیسته غیرموضعی به تئوری کلاسیک و تئوری گورتین و مورداک کاهش می‌یابد. همچنین کاهش میزان شاخص قانون توانی و کاهش اختلاف دما موجب این می‌شود که محدوده پاسخ پایدار (بیشینه دامنه ارتعاشات واداشته) افزایش یابد و فرکانس تحریکی که در آن نانوتیر پایداری خود را از دست می‌دهد (فرکانس متناظر با بیشینه دامنه ارتعاشات)، افزایش یابد. با افزایش میزان شاخص قانون توانی نانوتیر رفتار سخت شوندگی از خود بروز می‌دهد. همچنین این رفتار را زمانی که ضخامت نانوتیر افزایش می‌یابد نیز می‌توان مشاهده کرد.

### 7- مراجع

- [1] S. Krylov, Lyapunov exponents as a criterion for the dynamic pull-in instability of electrostatically actuated microstructures, *International Journal of Non-Linear mechanics*, Vol. 42, pp. 626-642, 2007.
- [2] M. Li, H. X. Tang, M. L. Roukes, Ultra-sensitive NEMS-based cantilevers for sensing, scanned probe and very high-frequency applications, *Nature Nanotechnology*, Vol. 2, pp. 114-120, 2007.
- [3] T. L. Daulton, K. S. Bondi, K. F. Kelton, Nanobeam diffraction fluctuation electron microscopy technique for structural characterization of disordered materials application to  $Al_{88-x}Y_7Fe_5Ti_x$  metallic glasses, *Ultramicroscopy*, Vol. 110, pp. 1279-1289, 2010.



شکل 10 تاثیر اختلاف دما بر تغییرات بیشینه دامنه ارتعاشات بدون بعد واداشته نانوتیر نسبت به تغییرات نسبت فرکانسی

غیرخطی نانوتیرهای ساخته شده از مواد هدفمند تحت یک محیط حرارتی بررسی شده‌اند. با به کارگیری تئوری‌های گورتین-مورداک و ارینگن و استفاده از اصل همپلتون مدل غیرکلاسیک برای نانوتیر به دست آمده است. با استفاده از قانون پخش توانی خواص مواد هدفمند در راستای ضخامت متغیر در نظر

- [14] B. Uymaz, Forced Vibration analysis of functionally graded beams using nonlocal elasticity, *Composite Structures*, Vol. 105, pp. 227-239, 2013.
- [15] M. Şimşek, H. H. Yurtcu, Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory, *Composite Structures*, Vol. 97, pp. 378-386, 2013.
- [16] M. E. Gurtin, A. I. Murdoch, Surface stress in solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, pp. 431-440, 1978.
- [17] R. Ansari, V. Mohammadi, M. Faghih Shojaei, R. Gholami, S. Sahmani, On the forced vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on the surface stress elasticity theory, *Composites Part B:Engineering*, Vol. 60, pp. 158-166, 2014.
- [18] P. Asgharifard Sharabiani, M. R. Haeri Yazdi, Nonlinear Free vibrations of functionally graded nanobeams with surface effects, *Composites Part B:Engineering*, Vol. 45, pp. 581-586, 2013.
- [19] S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, M. Bedroud, Surface effects on nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams using nonlocal elasticity, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 38, pp. 3538-3553, 2014.
- [20] S. Hosseini-Hashemi, I. Nahas, M. Fakher, R. Nazemnezhad, Surface effects on free vibration of piezoelectric functionally graded nanobeams using nonlocal elasticity, *Acta Mechanica*, Vol. 225, No. 6, pp. 581-586, 2014.
- [21] M. H. Ghayesh, M. Amabili, H. Farokhi, Three-dimensional nonlinear size-dependent behavior of Timoshenko microbeams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 71, pp. 1507-586, 2013.
- [22] J. N. Reddy, Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 6, pp. 1507-586, 2010.
- [23] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, pp. 196-198, New York: John Wiley & Sons, 2008.
- [4] B. Hu, Y. Ding, W. Chen, D. Kulkarni, Y. Shen, V. V. Tsukruk, Z.L. Wang, External-strain induced insulating phase transition in VO<sub>2</sub> nanobeam and its application as flexible strain sensor, *Advanced Materials*, Vol. 22, pp. 5134-5139, 2010.
- [5] R. D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, pp. 52-78, 1964.
- [6] R. A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, No. 1, pp. 385-414, 1962.
- [7] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.
- [8] M. E. Golmakani, J. Rezatalab, Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal model of Eringen using DQM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 14, pp. 122-136, 2013. (In Persian)
- [9] M. Jabbarzadeh, H. Talati, A. R. Noroozi, Nonlinear analysis of circular graphene sheet using nonlocal continuum mechanic theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 13, pp. 57-66, 2013. (In Persian).
- [10] S. A. Emam, A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams, *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 37, pp. 6929-6939, 2013.
- [11] H. T. Thai, A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 52 pp. 56-64, 2012.
- [12] R. Ansari, M. A. Ashrafi, T. Pourashraf, M. Hemmatnezhad, Vibration analysis of a postbuckled microscale FG beam based on modified couple stress theory, *Shock and Vibration*, Vol. 2014, Article ID 654640, 2014.
- [13] M. A. Eltahir, S. A. Emam, F. F. Mahmoud, Static and stability analysis of nonlocal functionally graded nanobeams, *Composite Structures*, Vol. 96, pp. 82-88, 2013.