



## تحلیل کمناش الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی در بستر پاسترناک بر پایه تئوری های نموی و تناسبی

اصغر زاجکانی<sup>1\*</sup>، مجید قدیری<sup>1</sup>، اسماعیل شهابی نژاد<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین  
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین  
\* zajkani@eng.ikiu.ac.ir, 34148 - 96818 صندوق پستی

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 30 آبان 1395

پذیرش: 07 اسفند 1395

ارائه در سایت: 21 اسفند 1395

کلید واژگان:

کمناش الاستوپلاستیک

روش تربیع تفاضلی تعمیم یافته

بستر پاسترناک

تئوری نموی

تئوری تغییر شکل

در این مقاله کمناش الاستوپلاستیک ورق‌های مستطیلی در بستر الاستیک با شرایط مرزی ساده و گیردار مورد تحلیل قرار گرفته است. همراه با شرایط بارگذاری یکنواخت بر ورق با کشش و فشار صفحه‌ای، تأثیر بستر الاستیک بر حسب دو پارامتر سفتی شامل ثوابت فنری وینکلر و برشی پاسترناک بررسی می‌شود. به منظور استخراج روابط حاکم از دو تئوری پلاستیسیته شامل: تئوری تغییر شکل کلی (DT) با معادلات ساختاری هنکی و تئوری نموی (IT) بر اساس معادلات ساختاری پرناتل - روس استفاده می‌شود. با بکارگیری روش تربیع تفاضلی تعمیم یافته برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل، اثرات ضریب بار، نسبت طول به عرض، ضخامت و خصوصیات بستر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با مقایسه نتایج به دست آمده با داده‌های گزارش شده در مراجع، صحت مدل تایید می‌گردد. بررسی نتایج نشان می‌دهد که به کار بردن بستر الاستیک باعث افزایش بار بحرانی می‌شود. به علاوه افزایش پارامتر های بستر الاستیک منجر به تشدید اختلاف میان بارهای کمناشی به دست آمده از دو تئوری به خصوص در ضخامت‌های بزرگتر بیشتر می‌گردد. همچنین متناظر با افزایش ضخامت صفحه در حالت بارگذاری کششی، به کار بردن بستر الاستیک باعث افزایش تنش ورق به میزانی بالاتر از تنش نهایی نمونه می‌شود.

## Elastoplastic buckling analysis of rectangular plates over the Pasternak foundation based on incremental and proportional theories

Asghar Zajkani\*, Majid Ghadiri<sup>1</sup>, Esmaeil Shahabi Nejad

Department of Mechanical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran  
\* P.O.B. 34148 - 96818, Qazvin, Iran, zajkani@eng.ikiu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 20 November 2016  
Accepted 25 February 2017  
Available Online 11 March 2017

### Keywords:

Elastoplastic buckling  
Generalized differential quadrature method  
Pasternak foundation  
Incremental theory  
Deformation theory

### ABSTRACT

In this paper, the elastoplastic buckling of rectangular plates over the Pasternak foundation has been analyzed with the fixed and simply supported boundary conditions. Associated with the uniform loading conditions on the plate by the in-plane compression and tension, the influence of the elastic foundation is investigated in terms of two stiffness parameters, including the Winkler spring and the Pasternak shear coefficients. In order to extract governing equations, two theories are used from the plasticity: deformation theory (DT) with the Hencky constitutive relations and the incremental theory (IT) based on the Prandtl-Reuss constitutive relations. By implementing the generalized differential quadrature method to discretize the differential equations, influences of loading ratio, length to width ratio, plate thickness, and the elastic foundation characters are studied. By comparing the obtained results with the data reported in references, the accuracy of the model is verified. Consideration of results shows that applying the elastic foundation causes critical buckling load to increase. In addition, enhancing the elastic foundation parameters leads to amplifying the difference between buckling loads obtained from two theories, especially in the larger thicknesses. Moreover, according to increasing the plate thickness in the tensile state of the loading, application of the elastic foundation causes plate stress to reach a value higher than the ultimate stress of the specimen.

### 1- مقدمه

سازه‌ها ممکن است روی مقاومت و یا سفتی تمام سازه تاثیر بگذارد. برای مقادیر بالای بارگذاری، کمناش ممکن است در محدوده‌ی پلاستیک رخ دهد. بنابراین مهم است که میزان ظرفیت کمناش یک سازه به منظور جلوگیری از شکست نابهنگام آن، تعیین گردد. با توجه به مقدار بارگذاری اعمال شده، سازه ممکن است تحت یکی از مودهای ناپایداری، دچار تغییرشکل‌های بزرگی شود. چنانچه در لحظه وقوع کمناش، وضعیت تانسور تنش در هر نقطه از جسم به گونه‌ای باشد که تنش معادل در آن نقطه کمتر از تنش

صفحه‌ها به شکل گسترده‌ای در سازه‌های مهندسی: مانند فضاپیماها، کشتی - ها، ماشین‌ها، پل‌ها و ساختمان‌ها استفاده می‌شوند. بیشتر سازه‌های ورق قابلیت تحمل بارگذاری‌های متفاوت مانند بارگذاری‌های کششی، فشاری، پیچشی، خمشی و یا ترکیبی از این بارگذاری‌ها را دارند. به دلیل ضخامت کم صفحه‌ها نسبت به ابعاد دیگر آن‌ها طراحی مقاومتی این سازه‌ها معمولاً بر اساس میزان مستعد بودن سازه برای کمناش انجام می‌شود. کمناش اجزای

Please cite this article using:

A. Zajkani, M. Ghadiri, E. Shahabi Nejad, Elastoplastic buckling analysis of rectangular plates over the Pasternak foundation based on incremental and proportional theories, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 205-215, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

می توان از فرض صفحه نازک استفاده کرد نظریه نموی و تغییرشکل نتایج به نسبت یکسانی دارند، ولی با افزایش نسبت ضخامت اختلاف دو نظریه افزایش می یابد. رضایی و تهرانی [15] کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه دایره ای نازک با ضخامت متغیر را بر اساس هر دو نظریه نموی و تغییرشکل و با استفاده از روش ریلی ریتز مطالعه کردند. آن ها نشان دادند 10 درصد تغییر ضخامت صفحه می تواند تا حدود 40 درصد اختلاف در پیش بینی تنش بحرانی کمانش به همراه داشته باشد. رمضان نژاد و همکاران [16] کمانش دینامیکی ورق مستطیلی الاستوپلاستیک را با شرایط مرزی ساده و گیردار مورد بررسی قرار دادند. نتایج آن ها نشان داد که مقاومت در مقابل تغییرشکل ورق در تکیه گاه گیردار نسبت به تکیه گاه ساده بیشتر بوده، به همین دلیل نقاط نزدیک به این نوع تکیه گاه دارای میدان سرعت و جابه جایی کمتری نسبت به نقاط نزدیک تکیه گاه ساده می باشد. بر اساس بررسی مطالعات انجام شده در این زمینه مشاهده می شود که تاکنون پژوهشی در زمینه بررسی اثر بستر الاستیک بر روی بار کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه نازک مستطیلی منتشر نشده است. تحلیل بستر الاستیک در تحلیل هایی مانند: اسکله ها، مخازن، باند فرودگاه ها، فونداسیون ساختمان ها و بسیاری از ساختار ها مورد نیاز است. در این مقاله با استفاده از روش تربیع (یک چهارم) تفاضلی تعمیم یافته (GDQ) تاثیر بستر الاستیک پاسترناک را در روی کمانش الاستیک، پلاستیک و الاستیک-پلاستیک و همچنین تاثیر آن بر روی میزان اختلاف دو تئوری مورد بررسی قرار می دهد.

## 2- معادلات و روابط پلاستیسیته

شکل 1 به صورت طرحواره هندسه و بارگذاری مساله مورد بررسی در این مقاله را نشان می دهد. در شکل 1 صفحه مستطیلی به طول  $a$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  تحت بارگذاری دومحوره قرار دارد. به منظور استخراج روابط نرخ تنش-نرخ کرنش در ادامه از دو تئوری تغییرشکل پلاستیسیته (DT) و تئوری نموی پلاستیسیته (IT) که روابط ساختاری را ارائه می دهند استفاده می شوند.

### 2-1- تئوری تغییر شکل پلاستیسیته بر اساس معادلات هنکی

نظریه تغییرشکل بر پایه معادلات ساختاری هنکی می باشد. تئوری تغییر شکل در پلاستیسیته، کرنش های پلاستیک کل را به وضعیت کنونی بارگذاری ارتباط می دهد که در نتیجه آن کرنش های پلاستیک مستقل از پیشینه بارگذاری هستند. معادله کرنش پلاستیک هنکی را می توان به صورت رابطه (1) نوشت [13].

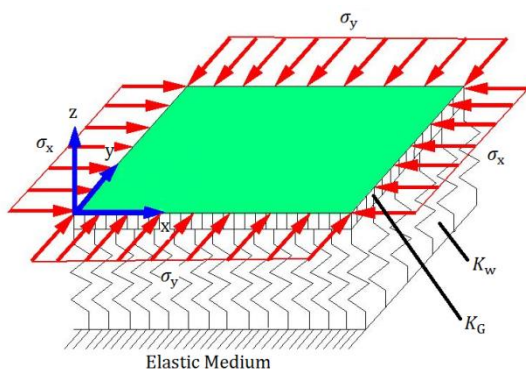


Fig.1 geometric schematic rectangular plate Subjected to axial loads embedded in elastic medium modeled as Pasternak foundation model

شکل 1 شماتیک هندسی ورق مستطیلی در معرض بارهای محوری روی بستر الاستیک پاسترناک

تسلیم اولیه جسم باشد، کمانش الاستیک و در غیر این صورت، کمانش الاستیک-پلاستیک رخ خواهد داد. در مورد تحلیل های پلاستیک، دو نظریه متداول در پلاستیسیته به کار گرفته شده اند. این نظریه ها عبارتند از: نظریه تغییرشکل<sup>1</sup> و نظریه نموی<sup>2</sup>. ایلبوشین [1]، استول [2] و الغزالی [3] را می توان از جمله توسعه دهندگان نظریه تغییرشکل دانست. پراگر و هندلمن [4] و پیرسون [5] نیز به توسعه نظریه نموی در تحلیل های الاستیک-پلاستیک پرداختند. دوربان [6] در تحقیقاتی که انجام داد دریافت که تئوری نموی نسبت به تئوری تغییرشکل بار کمانشی بیشتری را پیش گویی می کند و نتایج آزمایشگاهی با تئوری تغییرشکل همخوانی بیشتری دارند. او همچنین با بررسی کمانش الاستیک-پلاستیک پوسته های سیلندری شکل تحت بار محوری فشاری نشان داد در مواردی بار بحرانی به دست آمده از هر دو تئوری کاملاً مشابه هم هستند [7]. دوربان همچنین در پژوهشی دیگر [8] تحلیل الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی تحت بار کششی و فشاری محوری را برای چندین حالت مختلف تکیه گاهی به روش جداسازی متغیرها انجام داد و اولین نتایج مساله کمانش الاستوپلاستیک صفحات مستطیلی را گزارش داد. بتن و شین [9] با استفاده از روش حل نیمه تحلیلی به بررسی کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه نازک مستطیلی تحت شرایط تکیه گاهی ساده در چهار طرف و بارگذاری فشاری دو محوره پرداختند. آن ها در مطالعه خود به بررسی تأثیر نسبت ابعاد، ضریب بارگذاری و ضریب کار سختی بر بار کمانش پرداختند. آن ها هر دو نظریه تغییرشکل و نموی را بررسی کرده و معادله کمانش را با استفاده از روش لوی حل کردند. وانگ و همکاران [10] کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه نازک را با استفاده از هر دو تئوری نموی و تغییر-شکل و روش حل عددی یک چهارم تفاضلی تحلیل کردند و نشان دادند که بار کمانشی به خواص مکانیکی، نسبت ضخامت و ضریب بار و شرایط مرزی بستگی دارد. کدخدایان و معارف دوست [11] نیز با استفاده از روش یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته و با کارگیری هر دو تئوری پلاستیسیته به استخراج بار بحرانی کمانش برای شرایط مرزی مختلف پرداختند. آن ها نشان دادند که با گیردار شدن تکیه گاه صفحه، به دلیل افزایش سطح تنش، کمانش پلاستیک در آن سریع تر رخ می دهد. نتایج آن ها نشان می دهد که اختلاف دو نظریه تغییرشکل و نموی در حالت تنش تک محوره افزایش می یابد. همچنین، آن ها تاثیر نسبت ابعادی، بار خطی و شرایط مرزی آزاد را بر بار کمانش، مورد مطالعه قرار دادند. مساله کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه ضخیم را نخست شریواستاو در پژوهش خود بررسی کرد [12]. او در نتایج خود نشان داد که بار کمانش به دست آمده از نظریه نموی نسبت به نظریه تغییرشکل بزرگتر است. وانگ و همکاران [13] به تحلیل کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه ضخیم مستطیلی و دایره ای بر اساس نظریه برشی میندلین تحت بارگذاری فشاری تک محوره و دو محوره با شرایط تکیه گاهی مختلف گیردار، ساده و آزاد پرداختند. آن ها در کار خود به مقایسه هر دو نظریه نموی و تغییر شکل پرداخته و نشان دادند که بار کمانش به دست آمده از نظریه نموی نسبت به نظریه تغییرشکل بیشتر است. وانگ و همکاران [14] در پژوهشی دیگر به تحلیل کمانش الاستیک-پلاستیک صفحه ضخیم با استفاده از روش ریتز پرداختند. آن ها هر دو نظریه نموی و تغییرشکل را بررسی کرده، از نظریه برشی میندلین جهت استخراج معادلات استفاده و هندسه های متفاوتی مانند دایره، بیضی، مثلث و مستطیل را در مطالعه خود بررسی کردند. نتایج مطالعه آن ها نشان می دهد که در نسبت ضخامت های کم که

<sup>1</sup> Deformation Theory

<sup>2</sup> Incremental Theory

می شود [13].

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3\dot{\sigma}_e}{2H\sigma_e} S_{ij} \quad (10)$$

که  $1/H = 1/E_t - 1/E$  مدول پلاستیسیته می باشد. با استفاده از رابطه (3) فرم کلی رابطه ی نرخ کرنش بر حسب نرخ تنش به صورت رابطه (11) به دست می آید.

$$E\dot{\varepsilon}_{ij} = (1+\nu)\dot{S}_{ij} + \left(\frac{1-2\nu}{3}\right)\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} + \frac{3\dot{\sigma}_e}{2\sigma_e}\left(\frac{E}{E_t} - 1\right)S_{ij} \quad (11)$$

که مشابه عملیات انجام شده در مرحله قبل، ضرایب پلاستیسیته مربوط به تئوری نموی به صورت روابط (12) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\rho} \left[ 4 - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) \frac{\sigma_1^2}{\sigma_e^2} \right] \\ \beta &= \frac{1}{\rho} \left[ 2 - 2(1-2\nu) \frac{E_t}{E} - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2} \right] \\ \gamma &= \frac{1}{\rho} \left[ 4 - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) \frac{\sigma_2^2}{\sigma_e^2} \right] \\ \rho &= (5-4\nu) - (1-2\nu)^2 \frac{E_t}{E} - 3(1-2\nu) \left( 1 - \frac{E_t}{E} \right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2} \end{aligned} \quad (12)$$

باید توجه داشت که چنانچه رفتار صفحه در محدوده الاستیک باشد، مدول مماسی و سکانتی برابر با مدول الاستیسیته می باشند و رابطه ی (9) و (12) به صورت رابطه (13) کاهش می یابند

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{1-\nu^2}, \beta = \frac{\nu}{1-\nu^2} \quad (13)$$

### 3- معادلات دیفرانسیل حاکم

معادلات سرعت برای صفحات نازک به صورت رابطه (14) نوشته می شود [17].

$$v_x = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, v_y = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, v_z = w \quad (14)$$

در نتیجه نرخ کرنش با توجه به میدان سرعت به صورت رابطه ی (15) برقرار است.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \dot{\varepsilon}_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (15)$$

برای مساله مورد بررسی که در شکل 1 نشان داده شده است، تابع انتگرال انرژی کل بر پایه نظریه یکتایی<sup>1</sup> به صورت رابطه (16) محاسبه می شود.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \left\{ \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\sigma}_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \dot{\sigma}_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) - F_{\text{Elastic medium}} \right\} dv \quad (16)$$

که  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  فشار یکنواخت خارجی در امتداد  $x$  و  $y$  و  $F_{\text{Elastic medium}}$  بستر الاستیک پاسترناک می باشد که برابر است با:

$$F_{\text{Elastic medium}} = -k_w w + k_G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (17)$$

که  $k_w$  ثابت فنری وینکلر و  $k_G$  ثابت برشی پاسترناک می باشد. با به کارگیری اصل اکسترمم و کمینه کردن تابع انتگرالی فوق و اینکه  $G = E/2(1+\nu)$ ، معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار کمانش ورق مستطیلی به صورت رابطه (18) استخراج می شود

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3\varepsilon^p}{2\sigma_e} S_{ij} \quad (1)$$

که  $\sigma_e$ ،  $\bar{\varepsilon}^p$  و  $S_{ij}$  به ترتیب تنش موثر، کرنش پلاستیک موثر و تنش انحرافی می باشد. با اعمال مشتق نسبت به زمان، معادله نرخ کرنش پلاستیک هنکی در فرمت نموی به صورت معادله (2) استخراج می شود

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3d\sigma_e}{2\sigma_e} \left( \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{d\sigma_e} - \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\sigma_e} \right) S_{ij} + \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\sigma_e} dS_{ij} \quad (2)$$

بر اساس قانون هوک نیز روابط تنش-کرنش در فرمت نموی به صورت رابطه (3) قابل استخراج است.

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} dS_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (3)$$

که  $\delta_{ij}$  دلتای کرونیگر می باشد. با ترکیب معادلات (2) و (3) رابطه کامل تنش و کرنش در محدوده الاستوپلاستیک در رابطه (4) به دست می آید.

$$\begin{aligned} E\dot{\varepsilon}_{ij} &= \left( \frac{3E}{2E_s} - \frac{1-2\nu}{2} \right) \dot{S}_{ij} + \left( \frac{1-2\nu}{3} \right) \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \\ &\quad + \frac{3\dot{\sigma}_e}{2\sigma_e} \left( \frac{E}{E_t} - \frac{E}{E_s} \right) S_{ij} \end{aligned} \quad (4)$$

در معادله (4)  $E_s = \sigma_e/\bar{\varepsilon}$  و  $E_t = d\sigma_e/d\bar{\varepsilon}$  مدول مماسی و مدول سکانتی می باشند که با استفاده از منحنی تنش-کرنش به دست می آیند. تنش موثر را می توان به صورت رابطه (5) نوشت:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2} \quad (5)$$

با اعمال مشتق گیری مستقیم و قرار دادن تنش های اصلی به صورت  $\sigma_x = -\sigma_1$  و  $\sigma_y = -\sigma_2$  رابطه ی (6) استخراج می شود.

$$\frac{\dot{\sigma}_e}{\sigma_e} = - \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2)\dot{\sigma}_x + (2\sigma_2 - \sigma_1)\dot{\sigma}_y}{2\sigma_e^2} \quad (6)$$

با قرار دادن معادله ی (6) در معادله ی (4) و بسط آن در مختصات کارتزین، رابطه ی نرخ کرنش بر حسب نرخ تنش برای یک ماده ایزوتروپیک به فرم رابطه (7) به دست می آید.

$$\begin{aligned} E_t \dot{\varepsilon}_x &= \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_2^2}{\sigma_e^2} \right] \dot{\sigma}_x - \left[ \eta - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2} \right] \dot{\sigma}_y \\ E_t \dot{\varepsilon}_y &= \left[ 1 - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_1^2}{\sigma_e^2} \right] \dot{\sigma}_y - \left[ \eta - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2} \right] \dot{\sigma}_x \end{aligned} \quad (7)$$

که  $\eta = (1/2) - (1-2\nu)E_t/E$  نسبت انقباض می باشد. با معکوس کردن رابطه (7) می توان رابطه نرخ تنش بر حسب نرخ کرنش برای صفحه صفحه مستطیلی را به صورت رابطه (8) به دست آورد.

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_x &= E[\alpha \dot{\varepsilon}_{xx} + \beta \dot{\varepsilon}_{yy}] \\ \dot{\sigma}_y &= E[\beta \dot{\varepsilon}_{xx} + \gamma \dot{\varepsilon}_{yy}] \\ \dot{\sigma}_{xy} &= 2G \dot{\varepsilon}_{xy} \end{aligned} \quad (8)$$

که ضرایب موجود در معادلات (8) به صورت روابط (9) قابل استخراج است.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\rho} \left[ 4 - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_1^2}{\sigma_e^2} \right] \\ \beta &= \frac{1}{\rho} \left[ 2 - 2(1-2\nu) \frac{E_t}{E} - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2} \right] \\ \gamma &= \frac{1}{\rho} \left[ 4 - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_2^2}{\sigma_e^2} \right] \\ \rho &= 3 \frac{E}{E_s} + (1-2\nu) \left[ 2 - (1-2\nu) \frac{E_t}{E} - 3 \left( 1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_e^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

### 2-2 تئوری نموی پلاستیسیته بر اساس معادلات پرانتل-روس

نظریه نموی بر اساس معادلات ساختاری پرانتل روس می باشد. تئوری نموی در پلاستیسیته نمو کرنش پلاستیک را به تنش ارتباط می دهد که در نتیجه کرنش های پلاستیک به پیشینه ی بارگذاری وابسته خواهد بود. معادله کرنش پلاستیک بر اساس روابط ساختاری پرانتل روس به صورت رابطه (10) نوشته

<sup>1</sup> Uniqueness theorem

دهیم. در پژوهش حاضر  $err = 0.0001$  می باشد. ماده مورد استفاده در این تحقیق AL7075 - T6 می باشد که پارامترهای مکانیکی آن به صورت  $E = 72.4GPa, \nu = 0.32$  و ضرایب رامبرگ-آزگود به صورت  $k = 3.94 \times 10^{21}$  می باشد [8]. در این بخش پیش از بررسی اثر پارامترهای مختلف بر ضریب کمانش، نخست نتایج تحلیل این مقاله با برابر صفر قراردادن اثرات بستر الاستیک، ارزیابی و اعتبارسنجی می شوند؛ برای این منظور نخست روند همگرایی نتایج تحلیل و بررسی می شوند، سپس اعتبار نتایج تحلیل این مقاله نشان داده می شود. در جدول 1 روند همگرایی ضریب کمانش بر حسب افزایش نقاط شبکه تحت بار دو محوره فشاری نشان داده شده است. مشاهده می شود که با افزایش نقاط شبکه پاسخ همگرا می شوند به گونه ای که در  $N \gg 9$  پاسخ ها یکسان شده اند. بر این اساس نتایج این پژوهش با نقاط شبکه  $N_x = N_y = 13$  به دست آمده اند. پس از بررسی همگرایی تحلیل ها، به منظور اعتبارسنجی نتایج، در جدول 2 ضریب کمانش بحرانی به دست آمده از تحلیل این مقاله، با نتایج مشابه از مرجع های پیشین مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می شود مقادیر به دست آمده از روش GDQ تطابق بسیار خوبی با سایر روش ها دارد.

جدول 3 ضریب کمانش به دست آمده از روش حل GDQ در مقایسه با سایر روش های حل از جمله: روش حل گرین فانکشن و روش حل دقیق، برای صفحه مربعی نازک تحت اثر بستر الاستیک پاسترناک، بارگذاری تک محوره و دو محوره فشاری و شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار را نشان می دهد. با توجه به جدول 3، نتایج به دست آمده از روش حل GDQ انطباق بسیار خوبی با نتایج سایر روش های حل دارد و برای تمام شرایط مرزی ساده و گیردار، ضریب کمانش تحت اثر ثابت برشی بی بعد پاسترناک بسیار بیشتر از ضریب کمانش ناشی از ثابت فنری بی بعد وینکلر است و در حضور ثابت برشی

**جدول 1** محاسبه روند همگرایی برای پلیت در شرایط تکیه گاهی ساده تحت بارگذاری دو محوره فشاری

**Table 1** The computational convergence rate for SSSS square plates under equibiaxial loading

$N_x = N_y$					$\alpha$
13	11	9	7	5	
2.0000	2.0000	2.0000	2.0105	1.9900	0.0001
1.8649	1.8649	1.8649	1.8656	1.8927	0.002

**جدول 2** مقایسه ضریب کمانش برای صفحات مربعی تحت بار تک محوری و دو محوری با شرایط تکیه گاهی ساده براساس دو تئوری نموی (IT) و تئوری تغییرشکل (DT)

**Table 2** Comparison studies of buckling coefficient for SSSS square plates under uniaxial and equibiaxial loadings with Incremental Theory (IT) and Deformation Theory (DT) predictions

$\alpha = 0.002$		$\alpha = 0.0001$		نوع بارگذاری	
IT	DT	IT	DT		
1.8713	1.8649	2	2	مرجع [8]	$\xi = -1$
1.8713	1.8649	2	2	مرجع [14]	
1.8713	1.8649	2	2	مرجع [17]	
1.8713	1.8649	2	2	نتایج جدید	
3.4955	2.7954	4	4	مرجع [14]	$\xi = 0$
3.4955	2.7954	4	4	مرجع [17]	
3.5278	2.8058	4	4	مرجع [12]	
3.4955	2.7954	4	4	نتایج جدید	

$$\frac{h^3}{12} E \left\{ \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left( \beta + \frac{1}{1+\nu} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \gamma \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right\} + \sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_w w - k_G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (18)$$

حال با معرفی پارامترهای بی بعد به صورت رابطه (19) شکل بی بعد رابطه استخراج می شود.

$$W = \frac{w}{a}, X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{b}, \lambda = \frac{a}{b}, K_w = \frac{k_w a^4}{D}, K_G = \frac{k_G a^2}{D}, \sigma_x = -\xi p, \sigma_y = p \quad (19)$$

که  $\xi$  نوع و میزان بارگذاری می باشد. به طوری که به ازای  $\xi = 0$  بارگذاری به صورت فشار تک محوره، به ازای  $\xi = -1$  فشار دو محوره و به ازای  $\xi = 1$  بارگذاری متناظر با فشار-کشش یکنواخت می باشد. با استفاده از کمیت های بی بعد در رابطه (19) شکل بی بعد شده ی رابطه (18) به صورت رابطه ی (20) بیان می شود

$$\alpha \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2 \left( \beta + \frac{1}{1+\nu} \right) \lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \gamma \lambda^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} + \frac{K_w}{1-\nu^2} W - \frac{K_G}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) = P \left( \xi \frac{12}{h^2 E} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \frac{12}{h^2 E} \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \quad (20)$$

برای حل معادله از روش GDQ استفاده می شود که روابط مربوط به روش حل در قسمت پیوست آورده شده است. اکنون ضریب کمانش بی بعد به صورت رابطه (21) تعریف می شود:

$$K = \frac{P a^2 h}{\pi^2 D} = \frac{P(1-\nu^2)}{\alpha E} \quad (21)$$

که  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  صلیبیت خمشی و  $\alpha$  نسبت ضخامت می باشد که در پژوهش حاضر  $\alpha$  شامل سه مقدار 0.0001, 0.001, 0.002 می باشد [10] که به ترتیب برابرند با مقادیر 0.011, 0.0349, 0.0493.

#### 4- نتایج و بحث

در این مقاله برای به دست آوردن نسبت مدول مماسی و سکانتی به مدول الاستیسیته از مدل رامبرگ-آزگود استفاده شده است که رابطه نهایی به صورت زیر به دست می آید [8].

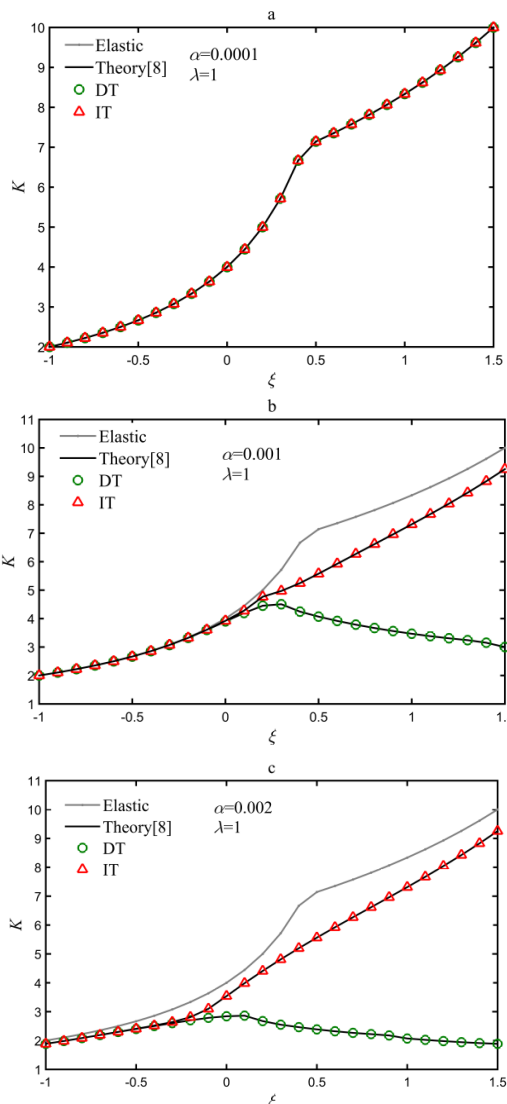
$$\frac{E_t}{E} = \frac{1}{1 + k c \left( \frac{\sigma_e}{E} \right)^c} \quad \frac{E_s}{E} = \frac{1}{1 + k \left( \frac{\sigma_e}{E} \right)^c} \quad (22)$$

که  $c, k$  خواص ماده می باشند. باید توجه داشت از آنجایی که رابطه به یک بار نامشخص وابسته است، باعث می شود که معادله غیر خطی شود برای حل این مشکل از روش تکرار استفاده می شود، یعنی ابتدا  $P = P_0$  در نظر گرفته می شود.  $P_0$  باید به اندازه ای باشد که باعث تغییرشکل پلاستیک نشود. سپس پارامترهای رامبرگ-آزگود را محاسبه کرده و از دو تئوری نموی و تغییرشکل در محاسبه ضرایب پلاستیسیتی استفاده می شود و در نهایت با استفاده از معادله، کوچکترین مقدار ویژه  $P_1$  به دست آورده می شود. چنانچه  $err = |(P_1 - P_0)/P_1|$  باشد، جواب به دست آمده جواب مورد نظر است. در غیر این صورت با قرار دادن  $P_i = [(1-\theta)P_{i-1} + \theta P_i]$  که  $\theta$  ضریب تصحیح می باشد ( $1 \gg \theta \gg 0.5$ ) مساله را از ابتدا مورد تحلیل قرار می -

جدول 3 مقایسه ضریب کماتش صفحه مربعی نازک ( $h/a = 0.001$ ) دارای بستر الاستیک پاسترناک تحت اثر بارهای تک محوره و دومحوره

**Table 3** Comparison of buckling coefficient for a thin square plate ( $h/a = 0.001$ ) subjected to uniaxial and equibiaxial loadings resting on Pasternak elastic foundation

Present GDQ		Green's Functions [18]		Exact solution [19]		$K_G$	$K_w$	شرایط مرزی
$\xi = -1$	$\xi = 0$	$\xi = -1$	$\xi = 0$	$\xi = -1$	$\xi = 0$			
2	4	2	4	-	3.99998	0	0	
12.132	18.9151	12.13	18.92	-	18.9151	100	0	
2.5133	5.0266	2.513	5.027	-	5.02658	0	100	SSSS
12.6454	19.1717	12.65	19.17	-	19.1717	100	100	
2.662	5.740	2.663	5.740	-	5.74015	0	0	
12.798	19.720	12.80	19.720	-	19.7209	100	0	
3.132	6.7670	3.132	6.767	-	6.76675	0	100	SSSC
13.264	19.9776	13.26	19.98	-	19.9776	100	100	
3.830	7.691	3.83	7.691	-	7.69112	0	0	
13.962	20.734	13.96	20.74	-	20.7344	100	0	
4.279	7.948	4.28	7.948	-	7.9477	0	100	SCSC
14.411	20.991	14.41	20.99	-	20.9911	100	100	



**Fig. 2** comparison of buckling coefficient for SSSS square plates with analytical solution [8] under Elastic Theory, Incremental Theory (IT) and Deformation Theory (DT) predictions

شکل 2 مقایسه ضریب کماتش با نتایج تحلیلی مشابه از مرجع [8] برای حالت تکیه-گاهی ساده بر اساس تئوری های الاستیک، نموی (IT) و تغییرشکل (DT)

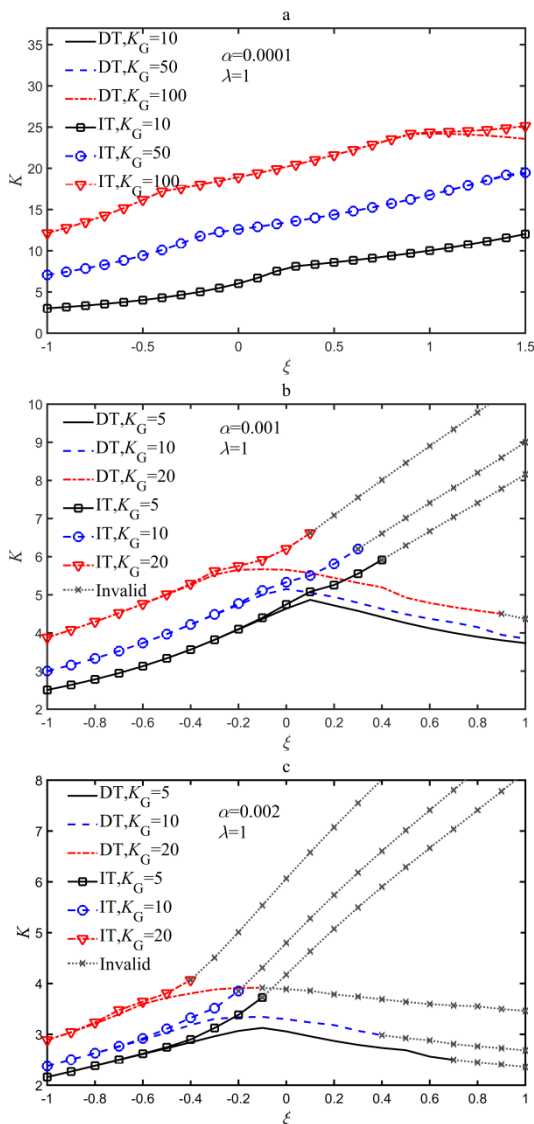
بی بعد پاسترناک، تاثیر ثابت بی بعد وینکلر ناچیز می باشد. ثابت وینکلر تحت تاثیر سرعت سطح میانی ورق در راستای  $z$  است اما ثابت پاسترناک تحت تاثیر گرادیان سرعت سطح ورق است و از آنجا که گرادیان تاثیر را زیاد می کند، تاثیر ثابت پاسترناک بیشتر می باشد.

همچنین بدیهی است که بار کماتش بی بعد تک محوره از دومحوره مقادیر بیشتری دارد. نمودارهای شکل 2 تغییرات ضریب کماتش بر حسب ضریب بارگذاری، نسبت به نتایج تحلیلی مرجع [8]، برای صفحه مربعی با سه نسبت ضخامت مختلف را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود انطباق بسیار خوبی بین نتایج این تحلیل با نتایج مرجع [8] وجود دارد.

برای صفحات نازک ( $\alpha = 0.0001$ ) به ازای تمام مقادیر ضریب بار و در نسبت ضخامت 0.001 در محدوده  $-0.1 < \xi < 1$ ، نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از حل الاستیک منطبق است اما با افزایش دامنه بارگذاری در شکل 2-b و افزایش ضخامت (شکل 2-c)، نتایج حاصل با نتایج حل الاستیک انطباقی ندارد، که نشان دهنده این است که کماتش دیگر الاستیک نیست و استفاده از تئوری الاستیک در ضخامت های بالا تخمین بالایی از بار کماتش می دهد که در عمل نتیجه مطلوبی نیست. همچنین مشاهده می شود که در شکل 2-a نتایج هر دو تئوری نموی و تغییرشکل بر هم منطبق هستند اما برای صفحات ضخیم تر تحت دامنه بارگذاری بالا (بازه  $\xi > 0$ ) برای  $\alpha = 0.001$  و  $\alpha = 0.002$  (بازه  $\xi > -0.3$ ) تفاوت قابل ملاحظه ای بین دو تئوری مشاهده می شود زیرا در ضخامت های بالا که کماتش به صورت پلاستیک است افزایش ضریب بار، باعث افزایش سطح تنش در صفحه و گسترش منطقه پلاستیک می شود و این امر باعث می شود که جواب های حاصل از دو تئوری از هم دور شوند [17,6]. شکل 3 منحنی ضریب بار- ضریب کماتش در نسبت ضخامت های مختلف با در نظر گرفتن ثابت فرنی وینکلر و شرط مرزی ساده را نشان می دهد.

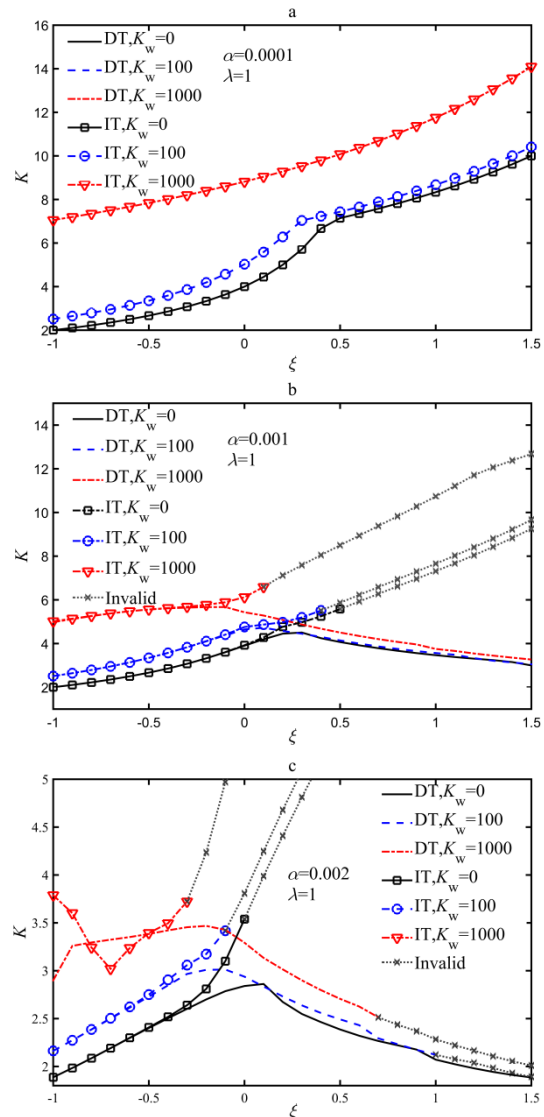
همانطور که در شکل 3-a مشاهده می شود افزایش مقادیر ثابت وینکلر باعث افزایش ضریب کماتش می شود و به ازای مقادیر مختلف ثابت فرنی وینکلر ( $K_w = 100, 1000$ ) نتایج حاصل از دو تئوری کاملاً بر هم منطبق می شوند. همانطور که قبلاً اشاره شد افزایش ضخامت صفحه باعث می شود جواب های حاصل از دو تئوری پلاستیسیته از یکدیگر فاصله بگیرند که اعمال بستر الاستیک و افزایش آن باعث می شود اختلاف بین نتایج حاصل از دو

شکل 4 منحنی ضریب بار-ضریب کماتش در نسبت ضخامت های مختلف با در نظر گرفتن ثابت برشی پاسترناک و شرط مرزی ساده را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود تاثیر ثابت بی بعد پاسترناک در افزایش ضریب کماتش بسیار بیشتر از ثابت بی بعد وینکلر می باشد. در حالت  $\alpha = 0.0001$  با افزایش مقادیر ثابت برشی، در دامنه ی بارگذاری بالا تطابق دو تئوری از بین می رود و در حالت  $\alpha = 0.001$  به ازای  $K_G = 20$  در محدوده ی  $\xi > 0.7$  ضرایب کماتش حاصل از تئوری تغییرشکل غیرقابل قبول می شود. همچنین در حالت  $\alpha = 0.002$  مشاهده می شود که با افزایش ثابت برشی پاسترناک، نتایج تئوری تغییرشکل، در محدوده ی ضریب بار کمتری غیرقابل قبول می شوند. به گونه ای که به ازای  $K_G = 20$  حد تحمل جسم، در حالت های بارگذاری تک محوره و دومحوره ی فشاری کاهش و نتایج وارد محدوده ی غیر قابل قبول می شود. برای درک بهتر این موضوع شکل 5 و 6 منحنی تغییرات ضریب بار-تنش موثر، بر حسب نسبت ضخامت ثابت برشی پاسترناک، برای



**Fig. 4** Variations of buckling coefficient with loading, thickness to length ratios and pasternak shear modulus for SSSS square plates under Incremental Theory (IT) and Deformation Theory (DT) predictions

شکل 4 تغییرات ضریب کماتش بر حسب ضریب بار، نسبت ضخامت و ثابت برشی پاسترناک برای صفحه مربعی در حالت SSSS بر اساس دو تئوری نموی (IT) و تغییرشکل (DT)



**Fig. 3** Variations of buckling coefficient with loading, thickness to length ratios and winker modulus for SSSS square plates under Incremental Theory (IT) and Deformation Theory (DT) predictions

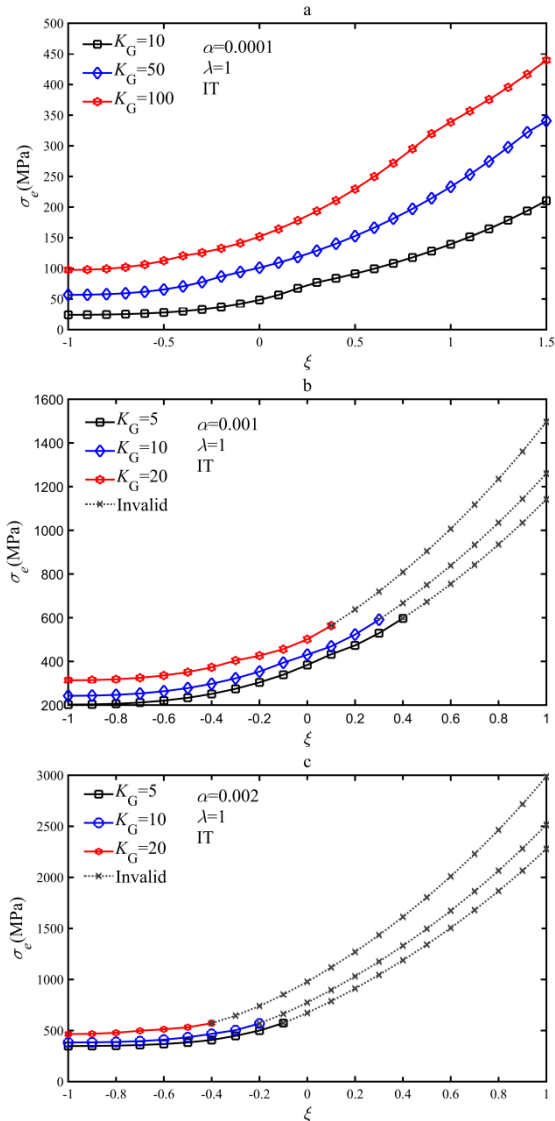
شکل 3 تغییرات ضریب کماتش بر حسب ضریب بار، نسبت ضخامت و ثابت وینکلر برای صفحه مربعی در حالت SSSS بر اساس دو تئوری نموی (IT) و تغییرشکل (DT)

تئوری افزایش یابد (شکل 3-b و 3-c). همچنین در شکل 3-b و 3-c مشاهده می شود که ضرایب کماتش حاصل از تئوری نموی در دامنه ی بارگذاری بالا غیرقابل قبول هستند. دلیل این امر آن است که در محدوده های مورد نظر تنش های پیش بینی شده توسط تئوری نموی بیش از حد تحمل ماده و غیر قابل قبول می باشد که با توجه به رابطه ی (23):

$$K = \frac{\sigma_e(1 - \nu^2)}{(1 + \xi + \xi^2)^{1/2} \alpha E} \quad (23)$$

باعث می شود ضرایب بی بعد کماتش هم غیرقابل قبول شوند. نکته ی قابل توجه در شکل 3-c این است که در  $\alpha = 0.002$  افزایش ثابت وینکلر باعث می شود که تئوری تغییرشکل هم وارد محدوده ی غیر قابل قبولی شود که با توجه به نتایج وانگ [10] مبنی بر تطابق تئوری تغییرشکل با نتایج آزمایشگاهی به نظر می رسد که این نتایج قابل اعتماد باشد و با افزودن ثابت فنری وینکلر در این نسبت ضخامت، سفتی صفحه بیش از حد بالا رفته و باعث شود تنش صفحه به مقداری بیش از تنش نهایی و تحمل جسم برسد.



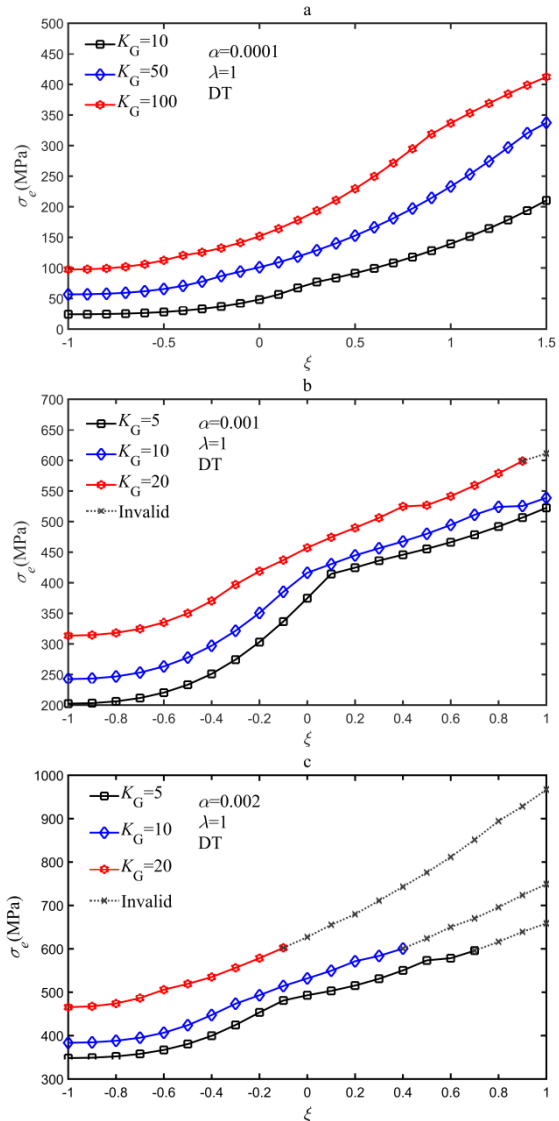


**Fig. 6** Variations of effective stress with loading, thickness to length ratios and pasternak shear modulus for SSSS square plates under Incremental Theory (IT) prediction

شکل 6 تغییرات تنش موثر بر حسب ضریب بار، نسبت ضخامت و ثابت برشی پاسترناک برای صفحه مربعی در حالت SSSS بر اساس تئوری نموی (IT)

در  $K_G = 5$  صفحه در  $\xi > 0.7$ ، در  $K_G = 10$ ، صفحه در  $\xi > 0.4$  و در  $K_G = 20$  صفحه در  $\xi > -0.1$ ، با بالا رفتن تنش به میزانی بیشتر از 608 مگاپاسکال دچار فروریزش می شود که بالا رفتن بیش از حد سفتی صفحه در این ضخامت و به تبع کاهش انعطاف پذیری را می توان از دلایل بالا رفتن تنش صفحه یاد کرد. بنابراین با توجه به شکل می توان گفت در صفحاتی با نسبت ضخامت بالاتر از 0.0001 به خصوص نسبت ضخامت 0.002 که تحت اثر بار دومحوری کششی و فشاری قرار دارند (حتی بارهای تک محوره فشاری)، استفاده از بستر الاستیک پاسترناک به منظور افزایش بار کمانش مناسب نمی باشد.

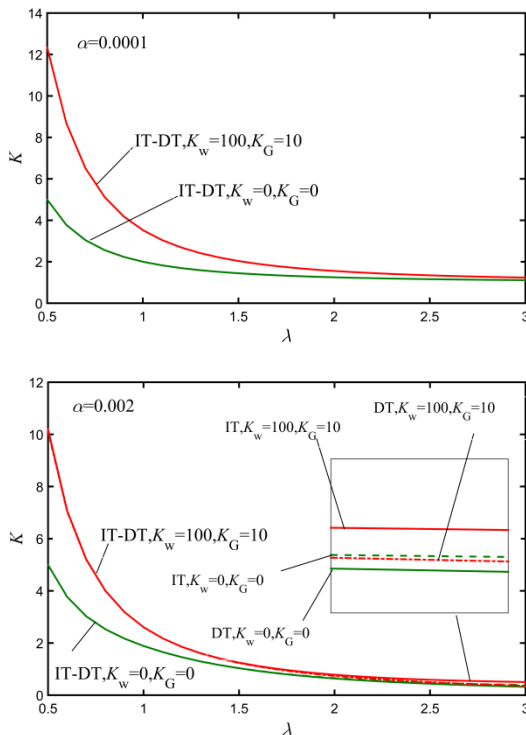
شکل 7 و 8 منحنی مدول تانژانت- ضریب بار تئوری تغییرشکل برای صفحه مربعی به ازای نسبت ضخامت و مقادیر ثابت فنری و برشی را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود در نسبت ضخامت 0.0001 کمانش صفحه در حضور ثابت وینکلر همچنان الاستیک باقی می ماند اما در حضور



**Fig. 5** Variations of effective stress with loading, thickness to length ratios and pasternak shear modulus for SSSS square plates under Deformation Theory (DT) prediction

شکل 5 تغییرات تنش موثر بر حسب ضریب بار، نسبت ضخامت و ثابت برشی پاسترناک برای صفحه مربعی در حالت SSSS بر اساس تئوری تغییر شکل (DT)

دو تئوری تغییرشکل و نموی، در حالت تکیه گاهی ساده را نشان می دهد. در نسبت ضخامت 0.0001 مشاهده می شود برای مقادیر  $K_G = 10, 50, 100$  هر دو تئوری کاملاً بر روی منحنی تنش- کرنش حرکت می کنند. در نسبت ضخامت 0.001 در غیاب بستر الاستیک برای ضریب بارهای  $\xi > 0.5$  و در نسبت ضخامت 0.002 برای ضریب بارهای  $\xi > 0$  تئوری نموی، تنش هایی بالاتر از حد تحمل جسم را نشان می دهد که اعمال بستر الاستیک و افزایش مقادیر آن باعث می شود میزان خطا در محدوده ضریب بار کمتری رخ دهد. همچنین تئوری تغییرشکل که در غیاب بستر الاستیک در نسبت ضخامت های مختلف در محدوده ضریب بار تنش- کرنش حرکت می کند با افزودن بستر الاستیک و افزایش آن، به خصوص ثابت برشی پاسترناک، تنش های صفحه به مقداری بیش از تنش نهایی می رسد. بر اساس پژوهش وانگ [10] تنش نهایی ورق آلومینیومی T6-7075 بر اساس کرنش 10.2% مقدار 608 مگاپاسکال می باشد. در شکل 5 همانطور که مشاهده می شود در نسبت ضخامت 0.002،



**Fig. 9** Variations of buckling coefficient with aspect ratios, thickness to length ratios and elastic foundation for SSSS plates under Incremental Theory (IT) and Deformation Theory (DT) predictions

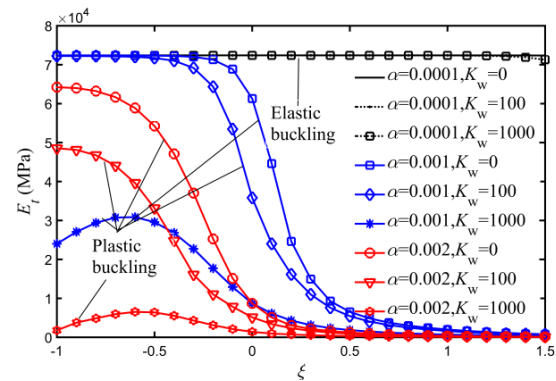
شکل 9 تغییرات ضریب کمانش بر حسب نسبت طول به عرض، نسبت ضخامت و بستر الاستیک در حالت SSSS بر اساس دو تئوری نموی (IT) و تغییرشکل (DT)

الاستیک تاثیر به سزایی در افزایش ضریب کمانش ایفا می کند. همچنین مشاهده می شود در نسبت ضخامت 0.0001 نتایج دو تئوری در انطباق با یکدیگر هستند اما در ضخامت های بالا با افزایش طول ورق این انطباق از بین می رود.

شکل 10 تغییرات ضریب کمانش نسبت به تغییرات بستر الاستیک تحت بارگذاری دو محوره فشاری و شرایط تکیه گاهی متفاوت را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود با افزایش شرط مرزی گیردار ضریب کمانش افزایش پیدا می کند. در نسبت ضخامت 0.001 و شرط مرزی SSSC افزایش ثابت وینکلر تاثیر به سزایی در افزایش ضریب کمانش دارد اما با افزایش شرط مرزی گیردار تاثیر افزایش ضریب کمانش با افزایش مقادیر ثابت وینکلر کاهش پیدا می کند. همچنین با افزایش شرط مرزی گیردار به علت افزایش سطح تنش در جسم، محدوده تطابق دو تئوری کاهش پیدا می کند به طوری که در شرط مرزی تمام گیردار هیچ تطابقی بین دو تئوری مشاهده نمی شود. شکل 11 تغییرات مدول تانژانتی را نسبت به تغییرات بستر الاستیک تحت بارگذاری دو محوره فشاری و شرایط تکیه گاهی متفاوت نشان می دهد. با مقایسه شکل 10 و 11 مشخص می شود که افزایش بار کمانشی با گیردار شدن لبه ها، به علت رخ دادن کمانش پلاستیک می باشد. همانطور که مشاهده می شود در شرط مرزی SSSC کمانش به صورت الاستیک-پلاستیک است که با افزایش لبه های گیردار، کمانش به صورت پلاستیک رخ می دهد و با افزایش مقادیر بستر الاستیک، منطقه پلاستیک گسترش پیدا می کند.

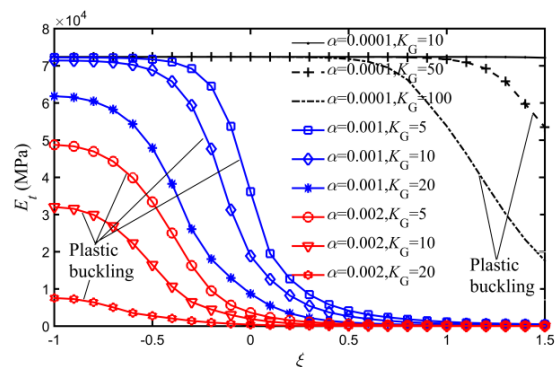
## 5- نتیجه گیری

در این مقاله کمانش الاستیک-پلاستیک صفحات نازک تحت بارگذاری کششی و فشاری با در نظر گرفتن تغییرات بستر الاستیک مورد بررسی قرار



**Fig. 7** Tangent modulus versus loading ratio by Deformation Theory (DT) in various thicknesses parameters and winkler modulus for SSSS square plate.

شکل 7 منحنی ضریب بار-مدول تانژانت برای تئوری تغییر شکل (DT) بر حسب نسبت ضخامت و ثابت وینکلر



**Fig. 8** Tangent modulus versus loading ratio by Deformation Theory (DT) in various thicknesses parameters and shear modulus for SSSS square plate

شکل 8 منحنی ضریب بار-مدول تانژانت برای تئوری تغییر شکل (DT) بر حسب نسبت ضخامت و ثابت برشی پاسترناک

ثابت برشی برای مقادیر  $K_G > 10$  رفتار صفحه به صورت الاستیک-پلاستیک خواهد بود. در نسبت ضخامت 0.001 که کمانش الاستیک-پلاستیک است با افزایش میزان بستر، کمانش پلاستیک رخ می دهد و در نسبت ضخامت 0.002 بدون حضور بستر، کمانش پلاستیک است که استفاده از بستر الاستیک باعث می شود منطقه پلاستیک گسترش، و بار بحرانی کمانش افزایش پیدا کند. بنابراین با توجه به شکل می توان دریافت که افزایش ضریب بار و مقادیر بستر الاستیک در نسبت ضخامت بالا باعث گسترش منطقه پلاستیک و افزایش بارکمانش می شود. اما این گسترش، تا حدی می تواند باعث افزایش بار کمانش شود و بعد از آن با بیش از حد ضعیف شدن مدول و به تبع کاهش سختی، بار کمانش کاهش پیدا می کند. بنابراین با توجه به شکل 7 و 8 می توان گفت که به دلیل ضعیف شدن بیش از حد مدول فلزات است که در شکل های 3 و 4 در نسبت ضخامت های بالا به ازای مقادیر خاصی از ضریب بار و بستر الاستیک، بار کمانش روند کاهشی پیدا می کند. شکل 9 تغییرات ضریب کمانش بر حسب نسبت طول به عرض، تحت شرایط تکیه گاهی ساده، بارگذاری دو محوره فشاری و بستر الاستیک پاسترناک بر اساس دو تئوری نموی و تغییرشکل را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود با ازدیاد طول ورق ضریب کمانش کاهش پیدا می کند. البته به ازای  $\lambda > 2$  تغییر چندانی در ضریب کمانش مشاهده نمی شود و بستر الاستیک تاثیر ناچیزی در افزایش ضریب کمانش دارد اما در نسبت ابعادی پایین ( $\lambda \ll 2$ ) بستر



باعث می شود دو تئوری در محدوده ی ضریب بار کمتری تطابق داشته باشند.  
4- در حالت بارگذاری فشاری بستر الاستیک تاثیر خوبی در افزایش ضریب کمانش دارد اما با افزایش ضریب بار، به خصوص در حالت کششی این تاثیر کاهش پیدا می کند.

5- افزایش مدول های وینکلر و پاسترناک تا حدی باعث افزایش ضریب کمانش می شوند، بعد از آن، افزایش آن ها باعث می شود تنش صفحه بیش از تنش نهایی آن شود و جسم دچار فروریزش شود. در نسبت ضخامت های بالا به خصوص نسبت ضخامت 0.002 وقتی جسم تحت بارگذاری کششی می باشد، افزایش مدول پاسترناک به منظور افزایش ضریب کمانش مناسب نمی باشد.

6- در حالت بارگذاری تک محوره ضریب کمانش بیشتر از حالت بارگذاری دومحوره فشاری است همچنین با گیردار شدن صفحه ضریب کمانش بالا می رود و به دلیل افزایش سطح تنش، کمانش پلاستیک در آن زودتر رخ می دهد.

7- در حالت بارگذاری دو محوره فشاری، تاثیر شرط مرزی گیردار در افزایش ضریب کمانش بیشتر از بستر الاستیک می باشد و هر چه شرط مرزی گیردار بیشتر می شود شیب افزایش ضریب کمانش با افزایش پارامترهای بستر کاهش می یابد.

8- با ازدیاد طول ورق ضریب کمانش کاهش پیدا می کند. البته به ازای  $\lambda > 2$  تغییر چندانی در ضریب کمانش مشاهده نمی شود و بستر الاستیک تاثیر ناچیزی در افزایش ضریب کمانش دارد اما در نسبت ابعادی پایین ( $\lambda \ll 2$ ) بستر الاستیک تاثیر به سزایی در افزایش ضریب کمانش ایفا می کند. همچنین مشاهده می شود برای صفحات نازک (0.0001) نتایج دو تئوری با افزایش  $\lambda$  همچنان در انطباق با یکدیگر هستند اما در ضخامت های بالا با افزایش این نسبت، انطباقی بین دو حالت مشاهده نمی شود.

6- فهرست علائم

$a$	طول صفحه
$b$	عرض صفحه
$D$	صلبیت خمشی
$E_s$	مدول وتری
$E_t$	مدول مماسی
$h$	ضخامت صفحه
$K$	ضریب کمانش
$k, c$	پارامتر های رامبرگ-آزگود
$K_w$	ثابت فنری وینکلر
$K_G$	ثابت برشی پاسترناک
$S_{ij}$	تانسور تنش انحرافی
$u, v, w$	جابه جایی ها

علائم یونانی

$\alpha$	نسبت ضخامت
$\hat{\alpha}$	پارامتر بی بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مماسی به مدول الاستیسیته
$\beta$	پارامتر بی بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مماسی به مدول الاستیسیته
$\gamma$	پارامتر بی بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مماسی به مدول الاستیسیته

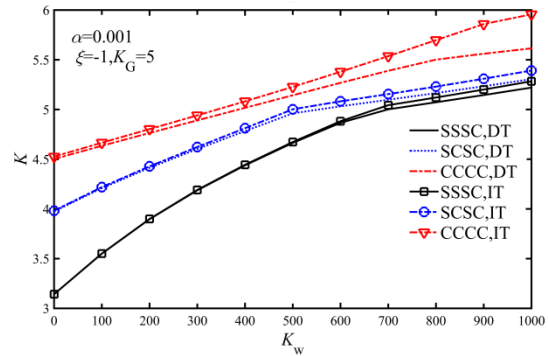


Fig. 10 Variations of buckling coefficient, with elastic foundation for square plate under various boundary conditions, equibiaxial loading and Incremental Theory (IT) and Deformation Theory (DT) predictions  
شکل 10 تغییرات ضریب کمانش نسبت به بستر الاستیک برای صفحه مربعی تحت شرایط تکیه گاهی متفاوت، بارگذاری دو محوره فشاری بر اساس دو تئوری نموی (IT) و تغییر شکل (DT)

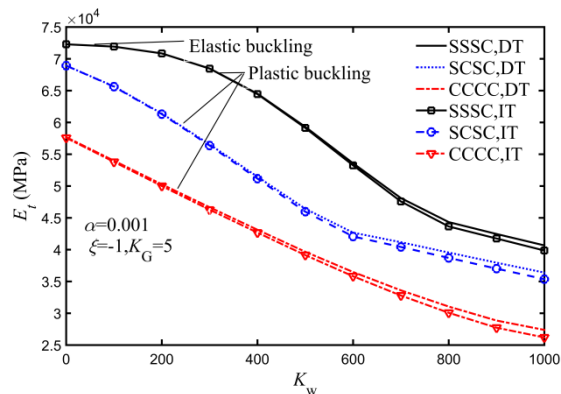


Fig. 11 Variations of tangent modulus, with elastic foundation for square plate under various boundary conditions, equibiaxial loading and Incremental Theory (IT) and Deformation Theory (DT) predictions  
شکل 11 تغییرات مدول تانژانت نسبت به بستر الاستیک برای صفحه مربعی تحت شرایط تکیه گاهی متفاوت، بارگذاری دو محوره فشاری بر اساس دو تئوری نموی (IT) و تغییر شکل (DT)

گرفته است. برای تحلیل کمانش الاستیک-پلاستیک از دو نظریه ی پلاستیسیته نموی و تغییر شکل استفاده شد و اثر تغییرات ضخامت، نسبت طول به عرض، تکیه گاه های ساده و گیردار و ثابت های فنری وینکلر و برشی پاسترناک برای آلومینیوم تجاری 7075-T6 بررسی شده است. نتایج حاصل از تحقیق زیر را به صورت زیر می توان جمع بندی کرد:

1- با افزایش پارامترهای بستر، ضریب کمانش افزایش پیدا می کند. زمانی که صفحات خیلی نازک باشند ( $\alpha \ll 0.0001$ ) در غیاب ثابت برشی، جواب های به دست آمده به ازای تمام مقادیر ثابت فنری با جواب های حاصل از کمانش الاستیک بر هم منطبق هستند اما با افزودن اثر ثابت برشی کمانش الاستیک-پلاستیک رخ می دهد.

2- افزودن بستر الاستیک باعث گسترش ناحیه پلاستیک می شود به گونه ای که در نسبت ضخامت 0.001 که کمانش الاستیک-پلاستیک اتفاق می افتد. افزودن پارامترهای بستر باعث ایجاد کمانش پلاستیک و در نسبت ضخامت 0.002 که کمانش پلاستیک رخ می دهد، بستر باعث افزایش منطقه ی پلاستیک می شود.

3- نتایج نشان می دهد که گسترش ناحیه پلاستیک باعث اختلاف بین نتایج تئوری نموی و تغییر شکل می شود. از این رو افزایش مقادیر بستر الاستیک

$$C^{(r)}_{ii} = - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n_x} C^{(r)}_{im} \quad (A.4)$$

به منظور تعیین ماتریس ضرایب در مشتق های مرتبه بالاتر، می توان از رابطه (A.5) استفاده کرد

$$\begin{aligned} [C^{(2)}] &= [C^{(1)}] \times [C^{(1)}] \\ [C^{(3)}] &= [C^{(1)}] \times [C^{(2)}] \\ [C^{(4)}] &= [C^{(1)}] \times [C^{(3)}] \end{aligned} \quad (A.5)$$

همانطور که قبلا ذکر شد روش مربعات دیفرانسیلی مشتق را به یک حاصل جمع وزن دار از مقادیر تابع تبدیل می کند و از طرف دیگر وزن ها با توجه به روابط (A.3) تا (A.5)، براساس تعداد و موقعیت گره ها حاصل می شوند. بنابراین به راحتی می توان به این نکته پی برد که موقعیت و تعداد گره ها، که به آن ها موقعیت گره گفته می شود، نقش مهمی در دقت نتایج نهایی بازی می کنند. در این تحقیق توزیع نقاط نمونه چیشف-گوس-لوباتو که دارای بیشترین سرعت همگرایی و دقت بالا می باشد استفاده می شود. این نقاط توسط رابطه زیر محاسبه می شود:

$$x_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{i-1}{n-1} \pi \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A.6)$$

با کمک اعمال روش یک چهارم تفاضلی معادله حاکم بر سیستم (20) به صورت رابطه (A.7) در می آید:

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{k=1}^{N_x} C^{(4)}_{ik} W_{kj} + 2 \left( \beta \right. \\ \left. + \frac{1}{1+\nu} \right) \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C^{(2)}_{km} \sum_{m=1}^{N_y} C^{(2)}_{ik} W_{km} \\ + \gamma \lambda^4 \sum_{k=1}^{N_y} C^{(4)}_{jk} W_{jk} + \frac{K_w}{1-\nu^2} W_{ij} \\ - \frac{K_G}{1-\nu^2} \left( \sum_{k=1}^{N_x} C^{(2)}_{ik} W_{kj} \right. \\ \left. + \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_y} C^{(2)}_{jk} W_{ik} \right) \\ = P \left( \xi \frac{12}{h^2 E} \sum_{k=1}^{N_x} C^{(2)}_{ik} W_{kj} \right. \\ \left. - \frac{12}{h^2 E} \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_y} C^{(2)}_{jk} W_{ik} \right) \end{aligned} \quad (A.7)$$

که معادله (A.7) را می توان به صورت رابطه (A.8) نوشت

$$[M][W] = P[N][W] \quad (A.8)$$

که [M] و [N] ماتریس هایی هستند که به مشتقات معادله (A.7) وابسته هستند.

### 7-1- شرایط مرزی حاکم

در این روش، مرز مسئله تنها یک نقطه است و از نظر ریاضی نمی توان دو یا چند شرط مرزی را در یک نقطه اعمال کرد. برای حل این مشکل و اعمال چندین شرط مرزی در هر لبه روش های مختلفی از جمله: یکپارچه سازی شرایط مرزی در ماتریس ضرایب، روش  $\delta$  و تعریف درجات آزادی اضافی وجود دارد که در اینجا از روش  $\delta$  استفاده می شود. در این روش نقاطی با فاصله بسیار کم، در همسایگی نقاط مرزی انتخاب شده، سپس معادلات مرزی به نقاط مرزی واقعی و نقاط  $\delta$  اعمال می شوند. شرایط مرزی مختلف به فرم مربعات تفاضلی عبارتند از:

$\rho$	پارامتر بی بعد مادی وابسته به ضریب پواسون و نسبت مدول وتری و مماسی به مدول الاستیسیته
$\lambda$	نسبت ابعادی
$\xi$	ضریب بار
$\bar{\sigma}$	تنش موثر
$\nu$	ضریب پواسون
$\vartheta$	ضریب تصحیح
$\bar{\epsilon}^p$	کرنش پلاستیک موثر
$\delta_{ij}$	دلتای کرنیکر

### 7- پیوست

روش مربعات دیفرانسیلی یک حل دقیق با کمترین محاسبات انجام شده است که انتخاب نقاط کم، سادگی در برنامه نویسی و سرعت همگرایی بالا باعث شده نسبت به روش های حل عددی دیگر نظیر المان محدود و یا جابه جایی محدود مزیت داشته باشد. در روش مربعات دیفرانسیلی شبکه بندی به صورت تبدیل ناحیه حل به مجموعه ای از نقاط به نام گره انجام می پذیرد. در اینجا مشتق تابع  $f$  در هر گره نسبت به یک راستای مشخص (به طور مثال  $x$ ) را به صورت مجموع خطی وزن دار از مقادیر تابع در تعدادی نقاط در آن راستا بیان می کند. بیان ریاضی فوق را می توان بدین صورت نوشت:

$$\frac{\partial^r f(x, y)}{\partial x^r} \Big|_{(x_i, y_j)} = \sum_{k=1}^{n_x} C_{ik}^{(r)} f(x_k, y_j) \quad (A.1)$$

برای مشتق گیری در راستای  $y$  و مشتق مرکب قوانین مربعات تفاضلی به شکل رابطه (22) بیان می شوند

$$\begin{aligned} \frac{\partial^s f(x, y)}{\partial x^s} \Big|_{(x_i, y_j)} &= \sum_{l=1}^{n_y} C_{jl}^{(s)} \cdot f(x_i, y_l) \\ \frac{\partial^{(r+s)} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \Big|_{(x_i, y_j)} &= \sum_{k=1}^{n_x} C_{ik}^{(r)} \cdot \sum_{l=1}^{n_y} C_{jl}^{(s)} \cdot f(x_i, y_l) \end{aligned} \quad (A.2)$$

وزن ها در رابطه فوق، در قالب ماتریس  $C$  به نام ماتریس ضرایب وزنی بیان شده اند و اندیس های  $r, s$  نشانگر مرتبه مشتق گیری و ماتریس ضرایب مربوط می باشند. به منظور استخراج ماتریس ضرایب وزنی، تابع مطلوب در هر راستا توسط توابعی تقریب زده می شوند که این توابع تقریب به توابع آزمایش شناخته می شوند و شرط انتخاب این توابع کامل بودن آن هاست. کوان و چانگ [20]، و شو و ریچارد [21] به طور مجزا، با انتخاب توابع میانیاب لاگرانژ به عنوان توابع آزمایش فرمول های صریحی را برای به دست آوردن ماتریس ضرایب ارائه کرده اند. در این فرمول ها ضرایب وزنی به طور صریح و دقیق، مستقل از تعداد و موقعیت گره ها، حاصل می شوند. فرمول های ارائه شده توسط شو و ریچارد، به واسطه بیان یک رابطه بازگشتی برای محاسبه ماتریس ضرایب در مشتق های مرتبه بالاتر، مورد توجه بیشتری قرار گرفته اند. در این فرمول ها مولفه های غیر صفر اصلی ماتریس ضرایب برای مشتق مرتبه اول به صورت رابطه (A.3) بیان می شوند.

$$\begin{aligned} C^{(1)}_{ik} &= \frac{\prod(x_i)}{(x_i - x_k) \prod_{m \neq i} (x_i - x_m)} \\ i, k &= 1, 2, \dots, n_x \\ \prod(x_i) &= \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{n_x} (x_i - x_m) \end{aligned} \quad (A.3)$$

اعضای قطر اصلی نیز به صورت رابطه (A.4) تعریف می شوند:

Vol. 65, No. 9, pp. 273-278, 2000 .

- [10] X. Wang, J. Huang, Elastoplastic buckling analyses of rectangular plates under biaxial loadings by the differential quadrature method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, No. 1, pp. 14-20, 2009 .
- [11] M. Kadkhodayan, M. Maarefdoust, Elastic/plastic buckling of isotropic thin plates subjected to uniform and linearly varying in-plane loading using incremental and deformation theories, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 32, No. 1, pp. 66-83, 2014 .
- [12] S. Shrivastava, Inelastic buckling of plates including shear effects, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 15, No. 7, pp. 567-575, 1979 .
- [13] C. Wang, Y. Xiang, J. Chakrabarty, Elastic/plastic buckling of thick plates, *International Journal of Solids And Structures*, Vol. 38, No. 48, pp. 8617-8640, 2001 .
- [14] C. Wang, T. M. Aung, Plastic buckling analysis of thick plates using p-Ritz method, *International Journal of Solids And Structures*, Vol. 44, No. 18, pp. 6239-6255, 2007 .
- [15] S. Rezaei, M. Salmani Tehrani, Elastic-plastic symmetrical buckling analysis of a solid circular plate of variable thickness, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 25-33, 2015. (in persian فارسی)
- [16] H. RamezannezhadAzarboni, M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari, Application of deformation and incremental theory of plasticity in the dynamic buckling of rectangular elastoplastic plate, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 25-33, 2015. (in persian فارسی)
- [17] J. Chakrabarty, *Applied plasticity*, Second Edition, pp. 519-522, New York, Springer, 2010.
- [18] K. Lam, C. Wang, X. He, Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions, *Engineering Structures*, Vol. 22, No. 4, pp. 364-378, 2000 .
- [19] H. Akhavan, S. H. Hashemi, H. R. D. Taher, A. Alibeigloo, S. Vahabi, Exact solutions for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part I: Buckling analysis, *Computational Materials Science*, Vol. 44, No. 3, pp. 968-978, 2009 .
- [20] J. Quan, C. Chang, New insights in solving distributed system equations by the quadrature method—I. Analysis, *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 13, No. 7, pp. 779-788, 1989 .
- [21] C. Shu, B. E. Richards, Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, No. 7, pp. 791-798, 1992.

- تکیه گاه یک سرگیردار

$$W_{1j} = W_{N_xj} = W_{i1} = W_{iN_y} = 0, (X = 0, 1, Y = 0, 1)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} C^{(1)}_{ik} W_{kj} = \sum_{k=1}^{N_x} C^{(1)}_{Nk} W_{kj} = \sum_{k=1}^{N_y} C^{(1)}_{k1} W_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_y} C^{(1)}_{kN} W_{ik}$$

$$= 0, (X = 0, 1, Y = 0, 1) \quad (A.9)$$

- تکیه گاه ساده

$$W_{1j} = W_{N_xj} = W_{i1} = W_{iN_y} = 0, (X = 0, 1, Y = 0, 1)$$

$$\alpha \sum_{k=1}^{N_x} C^{(2)}_{ik} W_{kj} + \beta \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_x} C^{(2)}_{jn} W_{in} = 0, (X = 0, 1)$$

$$\beta \sum_{k=1}^{N_y} C^{(2)}_{ik} W_{kj} + \gamma \lambda^2 \sum_{k=1}^{N_y} C^{(2)}_{jn} W_{in} = 0, (Y = 0, 1) \quad (A.10)$$

## 8- مراجع

- [1] A. A. Ilyushin, The elasto-plastic stability of plates, *NACA Technical Memorandum*, No. 1188, pp.9-17, 1947.
- [2] E. Z. Stowell, A unified theory of plastic buckling of columns and plates, *NACA Technical Note*, No. 898, pp. 2-11, 1948.
- [3] H. El-Ghazaly, A. Sherbourne, Deformation theory for elastic-plastic buckling analysis of plates under nonproportional planar loading, *Computers & structures*, Vol. 22, No. 2, pp. 131-149, 1986 .
- [4] G. Handelman, W. Prager, Plastic buckling of rectangular plates under edge thrusts, *NACA Technical Note*, No. 1530, pp. 7-13, 1948.
- [5] C. Pearson, Bifurcation criterion and plastic buckling of plates and shells, *Journal of the Aeronautical Science*, Vol. 17, No. 7, pp. 417-424, 1950.
- [6] D. Durban, Plastic buckling of plates and shells, *Stability Analysis of Plates and Shells*, pp. 293-311, Hampton, *NACA/CP*, 1998.
- [7] E. Ore, D. Durban, Elastoplastic buckling of axially compressed circular cylindrical shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 34, No. 9, pp. 727-742, 1992 .
- [8] D. Durban, Z. Zuckerman, Elastoplastic buckling of rectangular plates in biaxial compression/tension, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, No. 7, pp. 751-765, 1999 .
- [9] J. Betten, C. Shin, Elastic-plastic buckling analysis of rectangular plates subjected to biaxial loads, *Forschung im Ingenieurwesen*,