



تحلیل ارتعاشی میکرو صفحه در تماس با سیال بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده

سروش امیددزیانی¹، رمضانعلی جعفری تلوکلای^{2*}، مریم عابدی³، حامد افراسیاب²

1-دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

2-استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، بابلسر

*بابل، صندوق پستی 47148-71167 ra.jafari@nit.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 26 مهر 1395

پذیرش: 13 دی 1395

ارائه در سایت: 10 بهمن 1395

کلید واژگان:

ارتعاش آزاد

میکرو ورق مستطیلی

سیال

پارامتر مقیاس طول

چکیده

در این مطالعه تحلیل ارتعاش هیدرواستاتیکی یک میکرو ورق ایزوتروپیک مستطیلی در تماس با سیال محدود مورد مطالعه قرار گرفته است. تئوری تنش کوپل اصلاح شده بر مبنای فرضیات ورق کلاسیک (کرشهف) به منظور مدل‌سازی ریاضی مسئله بکار برده شده است. با استفاده از اصل همپلتون توسعه یافته، معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت و شرایط مرزی مربوطه استخراج شده است. سپس با استفاده از توابع مجاز، که الزاما شرایط مرزی هندسی مسئله را ارضا می‌نمایند، جابه‌جایی‌های عرضی ورق تقریب زده می‌شود. سیال غیر قابل تراکم، غیر لزج و غیر چرخشی فرض شده و تابع پتانسیل سرعت آن نیز با استفاده از شروط مرزی و سازگاری بدست خواهد آمد. در ادامه با کمک روش رایلی - ریتز فرکانس‌های طبیعی میکرو ورق بدست می‌آیند. به منظور اعتبار سنجی نتایج، فرکانس‌های طبیعی ماکرو ورق مستطیلی در تماس با سیال با نتایج موجود در پژوهش‌های گذشته مقایسه شده و تطابق بسیار خوبی مشاهده شده است. در نهایت با استفاده از نتایج بدست آمده، تاثیر پارامترهای مختلف نظیر نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول، نسبت طول به عرض، نسبت طول به ضخامت ورق و نیز شرایط مرزی بر فرکانس‌های طبیعی به تفصیل بررسی شده است. مشاهده شده است که برای صفحه با ضخامت پایین، تفاوت بین فرکانس‌های طبیعی پیش بینی شده با تئوری کلاسیک و تئوری تنش کوپل اصلاح شده زیاد می‌باشد اما با افزایش ضخامت صفحه این تفاوت از بین می‌رود.

Vibration analysis of a microplate in contact with a fluid based on the modified couple stress theory

Soroush OmidDezyani¹, Ramazan-Ali Jafari-Talookolaei^{1*}, Maryam Abedi², Hamed Afrasiab¹

1- Department of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

*P.O.B. 47148-71167, Babol, Iran, ra.jafari@nit.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 October 2016
Accepted 02 January 2017
Available Online 29 January 2017

Keywords:

Free Vibration
Rectangular Microplate
Fluid
Length Scale Parameter

ABSTRACT

In this study, the hydrostatic vibration analysis of an isotropic rectangular microplate in partial contact with a bounded fluid is studied. Modified couple stress theory based on the Kirchhoff plate assumptions is used to mathematically model the problem. The extended Hamilton's principle is employed to drive the governing differential equation of motion and the corresponding boundary conditions. The transverse displacement of the microplate is approximated by a set of admissible functions which must satisfy the geometric boundary conditions. The fluid is assumed to be incompressible, inviscid and irrotational and the fluid velocity potential is obtained using the boundary and compatibility conditions. Natural frequencies of the microplate are calculated using the Rayleigh-Ritz method. To validate the present results, the natural frequencies of an isotropic macroplate in contact with fluid are compared with the available data in the literature and very good agreements are observed. Finally, using the numerical data, the effect of different parameters such as thickness to length scale parameter, aspect ratio, length to thickness ratio and boundary conditions on the natural frequencies of the microplate are discussed in detail. We have observed that the difference between the natural frequencies predicted using the classical theory and the one evaluated by the modified couple stress theory is significant when thickness of the microplate is small, but diminishes as thickness increases.

1- مقدمه

آن‌ها می‌باشد. از نمونه‌های آن می‌توان به ارتعاشات میکروساختارهایی نظیر میکروتیرها و میکروورق‌ها اشاره کرد. میکروورق‌ها سازه‌های کم ضخامت‌اند که از آن‌ها به طور گسترده در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی¹، میکروپمپ‌ها²، میکروآینه‌ها¹، میکروروزیوتورها² و ... استفاده می‌شود.

ازجمله مباحثی که در سال‌های اخیر مورد مطالعه‌ی محققان قرار گرفته، بحث ارتعاشات در سازه‌هایی با ابعاد کوچک (میکرو و کمتر از آن) است. آنچه که موجب شده مطالعه اجسام با ساختار میکرو و نانو افزایش چشمگیری داشته باشد، کاربردهای گسترده آن‌ها در بسیاری از صنایع و شاخه‌های مختلف علوم مهندسی به دلیل مصرف انرژی پایین و نیز ابعاد بسیار کوچک

¹ Micro electromechanical system

² Micro pumps

Please cite this article using:

S. OmidDezyani, R. A. Jafari-Talookolaei, M. Abedi, H. Afrasiab, Vibration analysis of a microplate in contact with a fluid based on the modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 47-57, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مطالعه آن‌ها اثر پارامترهای مختلف بر ارتعاش آزاد نانولوله‌ها بررسی شده است.

اوگولو و همکاران [8] رفتار دینامیکی صفحات مستطیلی قرار گرفته بر بستر الاستیک و در تماس با سیال محدود و ساکن (بدون اثرات موج‌های سطحی) را مورد بررسی قرار داده‌اند. خورشیدی و فرهادی [9] نیز به مطالعه -ی نیمه تحلیلی ارتعاشات آزاد یک ورق مستطیلی ایزوتروپیک و در تماس با سیال محدود پرداخته‌اند. آن‌ها متغیرهای میدان تغییر مکان ورق را با استفاده از مجموعه‌ای از توابع مجاز که شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌نمایند تقریب زده و در نهایت بر پایه روش رایلی - ریتز توانسته‌اند فرکانس‌های طبیعی ورق را بدست آورند. در مطالعه آن‌ها از اثرات موج‌های سطحی سیال صرف‌نظر نشده و به عبارتی دیگر پدیده‌ی اسلاشینگ در سیال مدنظر قرار گرفته است. انصاری و همکاران [10] ارتعاشات نانولوله کربنی که در آن سیال داخلی با سرعت ثابت در جریان بوده و نیروی گسترده خارجی به صورت هارمونیک بر آن اعمال می‌شود را مورد بررسی قرار داده‌اند. قابل ذکر است به طور کلی در سیستم‌های سیال - صفحه دو خانواده از شکل‌دها وجود دارد. مدهای اسلاشینگ⁴ که نوسان سطح آزاد سیال به واسطه‌ی حرکت صلب سازه در آن نقش عمده را بازی می‌کند و دیگری مدهای بالچینگ⁵ که مربوط به ارتعاش ورق انعطاف پذیر است که سیال را به حرکت وامی‌دارد.

مطالعه‌ی پژوهش‌های انجام گرفته در زمینه‌ی بررسی رفتار دینامیکی صفحات در تماس با سیال نشان از آن دارد که تحقیقی درباره‌ی میکروصفحات همراه با اندرکنش سیال و جامد صورت نگرفته است. لذا در پژوهش حاضر به این مهم پرداخته شده و فرکانس‌های طبیعی و شکل‌دهای مربوطه برای یک میکرو ورق در تماس با سیال محدود با استفاده از روش رایلی - ریتز استخراج شده است. در این مطالعه اثرات موج‌های سطح آزاد سیال نیز در نظر گرفته می‌شود.

2- فرمول بندی مسئله

2-1- مروری بر تئوری تنش کوپل اصلاح شده

یانگ و همکاران [11] برای اولین بار تئوری تنش کوپل اصلاح شده را پیشنهاد کردند. بر اساس تئوری جدید تانسور تنش کوپل باید متقارن باشد و از آنجائیکه در این تئوری تنها نیاز به یک پارامتر مقیاس طول است، انرژی کرنشی تنها تابعی از تانسور کرنش (مرتبط با تانسور متقارن تنش) و تانسور متقارن انحنای (مرتبط با بخش عرضی تنش کوپل) می‌باشد. انرژی کرنشی برای یک میکرو ورق همسانگرد خطی با حجم Λ به صورت رابطه (1) بیان می‌گردد:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} (\vec{\sigma} : \vec{\epsilon} + \vec{m} : \vec{\chi}) d\Lambda \quad (1)$$

که در آن $\vec{\sigma}$ تانسور تنش، $\vec{\epsilon}$ تانسور کرنش، \vec{m} بخش عرضی تانسور تنش کوپل⁶ و $\vec{\chi}$ تانسور انحنای⁷ می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\vec{\sigma} = \lambda \text{tr}(\vec{\epsilon}) \vec{I} + 2\mu \vec{\epsilon} \quad (2)$$

$$\vec{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T] \quad (3)$$

$$\vec{m} = 2l^2 \mu \vec{\chi} \quad (4)$$

آزمایشات و تحقیقات تجربی نشان می‌دهند که رفتار مکانیکی سازه‌هایی با ابعاد کوچک (در مقیاس میکرو و نانو) به دلیل وجود ناپیوستگی‌های قابل توجه در مقایسه با ابعاد سازه، با رفتار مکانیکی سازه‌ها در مقیاس ماکرو متفاوت است. از طرفی تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته کلاسیک به دلیل اینکه شامل هیچ پارامتر مقیاس طولی نمی‌باشند، توانایی توصیف رفتار وابسته به اندازه را ندارند. این پارامتر مقیاس طول³ کمیتی ثابت بوده و از خواص مکانیکی ماده می‌باشد که به صورت تجربی و آزمایشگاهی تعیین می‌شود. لذا لازم است از تئوری‌های مکانیک محیط پیوسته غیرکلاسیک به جای تئوری مکانیک محیط پیوسته کلاسیک بهره ببریم. از جمله تئوری‌های غیرکلاسیکی که در سال‌های اخیر توسط محققان ارائه شده است می‌توان به تئوری میکرو پولار، تئوری گرادیان کرنش، تئوری تنش کوپل، تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده و تئوری تنش کوپل اصلاح شده اشاره کرد. این تئوری‌ها دارای پارامتر مقیاس طول می‌باشند و در نتیجه می‌توانند اثر اندازه را لحاظ نمایند.

در دهه‌ی 1960 میلادی میندلین و تیرستن [1]، تاپین [2] و نیز کوپتر [3]، تئوری تنش کوپل را معرفی کردند. این تئوری علاوه بر دو ثابت لامه دارای دو پارامتر مقیاس طول نیز می‌باشد. یکی از مزیت‌های این تئوری آن است که دارای دو پارامتر اضافی است، در حالی که تئوری میکرو پولار دارای چهار پارامتر اضافی و تئوری گرادیان کرنش دارای پنج پارامتر اضافی می‌باشد. از آنجایی که برای تعیین پارامترهای مقیاس طول از طریق آزمایش، نیاز به صرف زمان و هزینه می‌باشد لذا محققان در پی توسعه تئوری‌های دیگری برآمدند. برای نخستین بار یانگ و همکاران تئوری تنش کوپل اصلاح شده را معرفی کردند. این تئوری که از اضافه کردن معادله‌ی تعادل تنش کوپل‌ها به معادلات تعادل نیروها و گشتاورها بدست آمد تنها دارای یک پارامتر مقیاس طول می‌باشد.

از طرفی تحلیل میکرو/ نانو ساختارهای در تماس با سیال با عنایت به کاربردشان در میکروپمپ‌ها، میکروتوربین‌ها و دیگر تجهیزات مکانیکی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد. تاکنون گزارشی در مورد تحلیل ارتعاشی میکروصفحات مستطیلی در تماس با سیال ارائه نشده در حالیکه گزارش‌هایی برای بررسی ماکروصفحات مستطیلی در تماس با سیال ارائه شده که به برخی از آن‌ها در ادامه اشاره شده است. بخششی و خورشیدی [4] به تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق‌های مستطیلی تابعی مدرج در محیط حرارتی پرداخته‌اند. در مطالعه‌ی آن‌ها تاثیر پارامترهای هندسی و محیطی بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. انصاری و همکاران [5] به بررسی ارتعاش و ناپایداری دینامیکی میکرو پوسته‌های استوانه‌ای که جریان سیال نیز از آن عبور می‌کند پرداخته‌اند. آن‌ها برای در نظر گرفتن اثر اندازه از تئوری تنش کوپل اصلاح شده و برای مدل‌سازی پوسته از تئوری برشی مرتبه اول استفاده کرده‌اند. ژاو و چانگ [6] به مطالعه‌ی مشخصه‌های ارتعاشی یک ورق مستطیلی در تماس با سیال و با استفاده از روش رایلی - ریتز پرداخته‌اند. در مطالعه‌ی آن‌ها سیال در یک چهارچوب مستطیلی قرار دارد و در جهت طولی نیز نامحدود در نظر گرفته شده است. در این مقاله از اثرات موج‌های سطحی، تراکم پذیری سیال و نیز فشار هیدرواستاتیکی آن صرف‌نظر شده است. انصاری و همکاران [7] ارتعاش آزاد غیر خطی و پایداری نانولوله‌های کربنی تک جداره و قرار گرفته در محیط حرارتی را بررسی کرده‌اند. در

⁴ Sloshing modes

⁵ Bulging modes

⁶ Deviatoric part of couple stress tensor

⁷ Curvature tensor

¹ Micro mirrors

² Micro resonators

³ Length scale parameter

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial y}, \theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \chi_{xy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

با جایگذاری رابطه (12) در رابطه (4) و رابطه (10) در رابطه (2) به ترتیب مولفه‌های غیر صفر تانسور \vec{m} و تانسور تنش طبق روابط زیر بدست می‌آیند:

$$m_x = 2\mu l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, m_y = -2\mu l^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$m_{xy} = -\mu l^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (13)$$

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (14)$$

که در آن E و ν به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون ماده می‌باشند و مطابق رابطه (15) به ثوابت لامه‌ی λ و μ مربوط می‌شوند:

$$\lambda = \frac{Ev}{1-\nu^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

همانطور که بیان شد، انرژی کرنشی در یک ماده الاستیک خطی به صورت رابطه (1) بیان می‌گردد. در این صورت تغییرات مرتبه اول آن به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\delta U_p = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + m_x \delta \chi_x + m_y \delta \chi_y + 2m_{xy} \delta \chi_{xy}) dz dA$$

$$\delta U_p = \int_A \left[-M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + Y_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - Y_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + Y_{xy} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] dA \quad (16)$$

که در آن δ نماد تغییرات مرتبه اول و M و Y به ترتیب به عنوان برآیند تنش و برآیند تنش کوپل بوده که به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$M_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i z dz, Y_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_i dz, \quad (i = x, xy, y) \quad (17)$$

انرژی جنبشی میکرو ورق و تغییرات مرتبه اول آن مطابق رابطه زیر نوشته می‌شوند:

$$T_p = \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV$$

$$\delta T_p = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dz dA$$

$$\delta T_p = \int_A \left[I_0 \dot{w} \delta \dot{w} + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) \right] dA \quad (18)$$

که بالا نویسدات نشان دهنده مشتق زمانی و A مساحت صفحه‌ی میانی است. در رابطه‌ی فوق I_0 و I_2 با ثابت فرض کردن چگالی به صورت رابطه (19) تعریف می‌شوند:

$$(I_0, I_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (1, z^2) dz = \rho \left(h, \frac{h^3}{12} \right) \quad (19)$$

$$\vec{\chi} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{\theta} + (\nabla \vec{\theta})^T] \quad (5)$$

در روابط بالا λ و μ ثوابت لامه، l پارامتر مقیاس طول، \vec{u} بردار جابه‌جایی و $\vec{\theta}$ بردار دوران است که به صورت رابطه (6) بیان می‌شود:

$$\vec{\theta} = \frac{1}{2} \text{curl } \vec{u} \quad (6)$$

همانطور که مشاهده می‌شود متقارن بودن $\vec{\sigma}$ و \vec{m} که در روابط (2) و (4) تعریف می‌شوند با توجه به تقارن تانسورهای $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{\chi}$ قابل نتیجه‌گیری است. لازم به ذکر است که مربع پارامتر مقیاس طول که در رابطه (4) تعریف شده عبارت است از نسبت مدول انحنا به مدول برشی. بنابراین پارامتر l خصوصیتی از ماده تعریف می‌شود که مولفه‌های تنش کوپل به آن وابسته می‌باشند.

2-2- فرمول بندی میکرو صفحه

شکل 1 شماتیکی از یک میکرو ورق مستطیلی با طول a ، عرض b و ضخامت h را نشان می‌دهد که قسمتی از دیواره عمودی مخزن صلب حاوی سیال است. مخزن دارای عرض c و سیال در این مخزن دارای چگالی ρ_F و عمق b_1 می‌باشند. سیال به صورت غیر قابل تراکم، غیر لزج و نیز غیر چرخشی در نظر گرفته شده است. برای بدست آوردن معادلات حاکم از یک دستگاه مختصات کارتزین استفاده شده است. مبدا این دستگاه بر گوشه‌ی صفحه‌ی میانی میکرو ورق قرار دارد، به طوری که محورهای x و y آن موازی با لبه‌های ورق و محور z عمود بر صفحه‌ی میانی است.

با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه، میدان جابه‌جایی ورق در دستگاه مختصات کارتزین به صورت روابط (7-9) بیان می‌گردند:

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial}{\partial x} w(x, y, t) \quad (7)$$

$$v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial}{\partial y} w(x, y, t) \quad (8)$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (9)$$

در روابط بالا u ، v و w نشان دهنده‌ی جابه‌جایی‌های ورق به ترتیب در راستاهای x ، y و z می‌باشند. برای جابه‌جایی‌ها و کرنش‌های کوچک میکرو ورق، مولفه‌های غیر صفر میدان کرنش به قرار زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10)$$

با توجه به روابط (6) و (5) مولفه‌های بردار دوران و تانسور انحنا مطابق روابط (11-12) بدست می‌آیند:

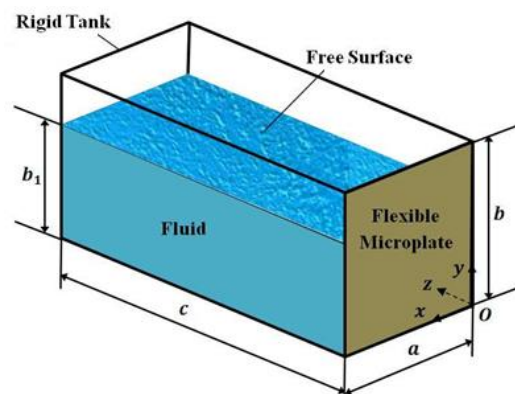


Fig. 1 Rectangular microplate in contact with fluid

شکل 1 میکرو ورق مستطیلی در تماس با سیال

3-2- فرمول بندی سیال

همانطور که اشاره شد، در سیستم های سیال - صفحه دو دسته مد وجود دارد. بنابراین پتانسیل سرعت سیال¹ کل به صورت رابطه (20) نوشته می-شود:

$$\Phi_0 = \Phi_B + \Phi_S \quad (20)$$

که در آن Φ_B و Φ_S به ترتیب پتانسیل سرعت برای مدهای بالچینگ و مدهای اسلاشینگ است. پتانسیل سرعت را می توان مطابق رابطه (21) به پتانسیل تغییر شکل (که مستقل از زمان است) و تابع زمانی هارمونیک مطابق رابطه زیر تقسیم کرد [9]:

$$\Phi_0(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, z) \dot{T}(t) = i\omega \varphi_0(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (21)$$

از آنجایی که سیال غیر قابل تراکم فرض شده است، پتانسیل سرعت سیال باید معادله سه بعدی لاپلاس را ارضا نماید:

$$\nabla^2 \varphi_0 = \nabla^2 \varphi_B + \nabla^2 \varphi_S = 0 \rightarrow \nabla^2 \varphi_B = 0, \nabla^2 \varphi_S = 0 \quad (22)$$

با توجه به شکل 1، شرایط مرزی بر روی دیواره های عمودی و کف مخزن به صورت رابطه (23) بیان می گردد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_B}{\partial x} |_{x=0,a} = 0, \frac{\partial \varphi_B}{\partial y} |_{y=0} = 0, \frac{\partial \varphi_B}{\partial z} |_{z=c} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_S}{\partial x} |_{x=0,a} = 0, \frac{\partial \varphi_S}{\partial y} |_{y=0} = 0, \frac{\partial \varphi_S}{\partial z} |_{z=0,c} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

از آنجا که در سطح آزاد سیال مد بالچینگ وجود ندارد شرط مرزی سطح آزاد و شرط سازگاری در محل تماس سیال با صفحه نیز به صورت رابطه (24) بیان می شوند:

$$\varphi_B |_{y=b_1} = 0, \frac{\partial \varphi_B}{\partial z} |_{z=0} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (24)$$

که در رابطه ی فوق $w(x, y, z)$ جابه جایی عرضی میکرو ورق می باشد. شرط اسلاشینگ خطی در سطح آزاد سیال به قرار زیر است [12]:

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} |_{y=b_1} = \frac{\omega^2}{g} \Phi_0 |_{y=b_1} \quad (25)$$

که g شتاب جاذبه و ω فرکانس چرخشی ورق است. با جایگذاری رابطه (20) در رابطه فوق و با استفاده از رابطه (24) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial y} |_{y=b_1} + \frac{\partial \Phi_S}{\partial y} |_{y=b_1} = \frac{\omega^2}{g} \Phi_S |_{y=b_1} \quad (26)$$

حال با ضرب طرفین رابطه فوق در $\rho_F \Phi_S$ و سپس انتگرال گیری از طرفین معادله در سطح آزاد سیال رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$U_{\varphi_B} + U_{\varphi_S} = \omega^2 T_{\varphi_S} \quad (27)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} U_{\varphi_B} &= \rho_F \int_0^a \int_0^c \left(\Phi_S \frac{\partial \Phi_B}{\partial y} \right) |_{y=b_1} dz dx \\ U_{\varphi_S} &= \rho_F \int_0^a \int_0^c \left(\Phi_S \frac{\partial \Phi_S}{\partial y} \right) |_{y=b_1} dz dx \\ T_{\varphi_S} &= \frac{\rho_F}{g} \int_0^a \int_0^c (\Phi_S^2) |_{y=b_1} dz dx \end{aligned} \quad (28)$$

برای بدست آوردن پتانسیل های سرعت سیال کافی است به حل رابطه (22) بپردازیم. با استفاده از روش جداسازی متغیرها و شرایط مرزی مسئله در رابطه (23) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Phi_B(x, y, z, t) &= i\omega \varphi_B(x, y, z) e^{i\omega t} \\ \varphi_B(x, y, z) &= \varphi_{BX}(x) \varphi_{BY}(y) \varphi_{BZ}(z) \end{aligned} \quad (29\text{-الف})$$

¹ Fluid velocity potential

$$\frac{\partial^2 \varphi_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_B}{\partial z^2} = 0 \quad (29\text{-ب})$$

با جایگذاری رابطه (29-الف) در رابطه (29-ب) به سه معادله ی دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم و مستقل از یکدیگر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_{BX}(x)} \frac{d^2 \varphi_{BX}(x)}{dx^2} + \frac{1}{\varphi_{BY}(y)} \frac{d^2 \varphi_{BY}(y)}{dy^2} \\ + \frac{1}{\varphi_{BZ}(z)} \frac{d^2 \varphi_{BZ}(z)}{dz^2} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

که این معادلات می تواند به شکل زیر نوشته شوند:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_{BX}(x)} \frac{d^2 \varphi_{BX}(x)}{dx^2} &= -p_1^2 \\ \frac{1}{\varphi_{BY}(y)} \frac{d^2 \varphi_{BY}(y)}{dy^2} &= -q_1^2 \\ \frac{1}{\varphi_{BZ}(z)} \frac{d^2 \varphi_{BZ}(z)}{dz^2} &= (p_1^2 + q_1^2) \end{aligned} \quad (31)$$

که در آن p_1^2 و q_1^2 اعداد نامنفی دلخواه هستند. حل عمومی روابط فوق به سادگی با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی چنین بدست می آید:

$$\begin{aligned} \varphi_{BX}(x) &= a_1 \sin(p_1 x) + a_2 \cos(p_1 x) \\ \varphi_{BY}(y) &= a_3 \sin(q_1 y) + a_4 \cos(q_1 y) \\ \varphi_{BZ}(z) &= a_5 e^{\sqrt{p_1^2 + q_1^2} z} + a_6 e^{-\sqrt{p_1^2 + q_1^2} z} \end{aligned} \quad (32)$$

حال با جایگذاری روابط (32) در روابط (29)، $\Phi_B(x, y, z)$ بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \Phi_B(x, y, z, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i\omega A_{lk}(t) \cos\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \\ &\quad \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2b_1} y\right) \{e^{\sigma z} + e^{\sigma(2c-z)}\} \\ l, k &= 0, 1, 2, \dots, 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y &\leq b_1, 0 \leq z \leq c \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن l و k اعداد نامنفی صحیح و A_{lk} ضرایب مجهول می باشند و σ نیز به صورت زیر تعریف شده است:

$$\sigma = \pi \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{2k+1}{2b_1}\right)^2} \quad (34)$$

و با استفاده از شرط سازگاری در رابطه (24) نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} i\omega A_{lk}(t) \sigma (1 - e^{2c\sigma}) \cos\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \\ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2b_1} y\right) = \dot{w}(x, y, t) \end{aligned} \quad (35)$$

که در آن A_{lk} در واقع ضریب سری فوریه دوگانه بوده و به صورت رابطه (36) بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} A_{lk}(t) &= \frac{\text{coeff}}{ab_1 \sigma (1 - e^{2c\sigma})} \int_0^a \int_0^{b_1} \{ \dot{w}(x, y, t) \\ &\quad \cos\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2b_1} y\right) dy dx \} \\ \text{coeff} &= \left\{ \begin{aligned} &(1 \text{ اگر } l, k = 0), (2 \text{ اگر } l \text{ یا } k \neq 0), \\ &(4 \text{ اگر } l, k \neq 0) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

به طور مشابه با اعمال روش جداسازی متغیرها $\Phi_S(x, y, z, t)$ به صورت سه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم مستقل از یکدیگر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \gamma_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \gamma_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \\ & + \gamma_{xy} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & - \frac{1}{2} \rho_F \int_0^a \int_0^{b_1} (\Phi_B + \Phi_S)|_{z=0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta w \right) dy dx \Big] = 0 \end{aligned}$$

با استفاده از لم اساسی حساب تغییرات و انتگرال گیری جز به جز، معادله حرکت و شرایط مرزی مربوطه به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \rho_F (\Phi_B + \Phi_S)|_{z=0} \\ & = I_0 \ddot{w} - I_2 \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_x}{\partial x} n_x + \frac{\partial M_y}{\partial y} n_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} n_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} n_x \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} n_x - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} n_y + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} n_x - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} n_y \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} n_y + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} n_x + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} n_y + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} n_x \right) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & or \delta w = 0 \\ & M_x n_x + M_{xy} n_y - \frac{1}{2} \gamma_x n_y + \frac{1}{2} \gamma_y n_x \\ & + \gamma_{xy} n_x = 0 \quad or \quad \delta \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & M_y n_y + M_{xy} n_x - \frac{1}{2} \gamma_x n_x + \frac{1}{2} \gamma_y n_x \\ & - \gamma_{xy} n_y = 0 \quad or \quad \delta \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

که برای بدست آوردن معادله حرکت بر حسب مولفه جابه جایی عرضی ورق، تنش برآیند:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (48)$$

و تنش کوپل برآیند را از رابطه (17) به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{Ehl^2}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (49)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه (44) معادله حرکت به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} & I_0 \ddot{w} - I_2 \nabla^2 \ddot{w} + \left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{Ehl^2}{1+\nu} \right] \nabla^4 w \\ & - \frac{1}{2} \rho_F (\Phi_B + \Phi_S)|_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

و با تعریف $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ به عنوان سفتی خمشی ورق و صرف نظر کردن از اینرسی دورانی I_2 رابطه (51) بدست می آید:

$$I_0 \ddot{w} + [D + \mu hl^2] \nabla^4 w - \frac{1}{2} \rho_F (\Phi_B + \Phi_S)|_{z=0} = 0 \quad (51)$$

1-3 روش حل مسئله

با فرض آن که پاسخ جابه جایی عرضی ورق در حرکت هارمونیک به شکل زیر

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial z^2} = 0 \\ & \frac{1}{\varphi_{SX}(x)} \frac{d^2 \varphi_{SX}(x)}{dx^2} + \frac{1}{\varphi_{SY}(y)} \frac{d^2 \varphi_{SY}(y)}{dy^2} \\ & + \frac{1}{\varphi_{SZ}(z)} \frac{d^2 \varphi_{SZ}(z)}{dz^2} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

که این معادلات می تواند به شکل زیر نوشته شوند:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi_{SX}(x)} \frac{d^2 \varphi_{SX}(x)}{dx^2} = -p_2^2 \\ & \frac{1}{\varphi_{SZ}(z)} \frac{d^2 \varphi_{SZ}(z)}{dz^2} = -q_2^2 \\ & \frac{1}{\varphi_{SY}(y)} \frac{d^2 \varphi_{SY}(y)}{dy^2} = (p_2^2 + q_2^2) \end{aligned} \quad (38)$$

که در آن p_2^2 و q_2^2 اعداد نامنفی دلخواه هستند. حل عمومی روابط فوق به سادگی با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی چنین بدست می آید:

$$\begin{aligned} & \varphi_{SX}(x) = a_7 \sin(p_1 x) + a_8 \cos(p_2 x) \\ & \varphi_{SZ}(z) = a_9 \sin(q_2 z) + a_{10} \cos(q_2 z) \\ & \varphi_{SY}(y) = a_{11} e^{\sqrt{p_2^2 + q_2^2} y} + a_{12} e^{-\sqrt{p_2^2 + q_2^2} y} \end{aligned} \quad (39)$$

حال به طور مشابه با جایگذاری روابط (39) در روابط (29)، $\Phi_S(x, y, z, t)$ بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & \Phi_S(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} i \omega B_{ij}(t) \cos\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \\ & \cosh(\tau y) \cos\left(\frac{j\pi z}{c}\right) \end{aligned} \quad (40)$$

$i, j = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq x \leq a$
 $0 \leq y \leq b_1, 0 \leq z \leq c$
که در آن i و j اعداد نامنفی صحیح و B_{ij} ضرایب مجهول می باشند و τ نیز به صورت زیر تعریف شده است:

$$\tau = \pi \sqrt{\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{c}\right)^2} \quad (41)$$

انرژی جنبشی سیال به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned} & T_f = T_{fB} + T_{fS} \\ & = -\frac{1}{2} \rho_F \int_0^a \int_0^{b_1} \left(\Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} dA \\ & = -\frac{1}{2} \rho_F \int_0^a \int_0^{b_1} (\Phi_B + \Phi_S)|_{z=0} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) dy dx \\ & \delta T_f = -\frac{1}{2} \rho_F \int_0^a \int_0^{b_1} (\Phi_B + \Phi_S)|_{z=0} \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta w \right) dy dx \end{aligned} \quad (42)$$

3- معادله حرکت و شرایط مرزی

معادله حاکم بر حرکت و شرایط مرزی مربوطه را می توان با استفاده از اصل همپلتون بدست آورد. با جایگذاری روابط (16)، (18) و (42) در اصل همپلتون داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{t_i}^{t_f} (\delta T_p + \delta T_f - \delta U_p) = 0 \\ & \int_{t_i}^{t_f} \int_A \left[I_0 \dot{w} \delta \dot{w} + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right) \right. \\ & + M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ & + M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \gamma_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \gamma_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{aligned} \quad (43)$$

باشد:

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t}$$

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} X_m(x) Y_n(y) = W_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (52)$$

که در آن ضرایب مجهول و $X_m(x)$ و $Y_n(y)$ توابع مجاز به ترتیب در راستای x و y می‌باشند. لازم به ذکر است که این توابع باید شرایط مرزی هندسی مسئله مورد بررسی را برآورده نمایند. ذکر این نکته حائز اهمیت است که در رابطه آخر برای خیز $W(x, y)$ از اندیس تکرار به عنوان اندیس جمع استفاده شده است که در ادامه نیز برای بیان خلاصه‌تر روابط از آن استفاده خواهد شد. همچنین توابع مجاز $X_m(x)$ و $Y_n(y)$ به روش استاندارد که اشاره خواهد شد محاسبه شده است. صفحه را به صورت دو تیر عمود بر هم (یک تیر در راستای x و دیگری در راستای y) در نظر می‌گیریم که بایستی هر تیر در دو انتهای خود شرایط مرزی متناظر صفحه را ارضا کند. به عنوان نمونه برای محاسبه $X_m(x)$ ، در ابتدا شکل پاسخ را مشابه آنچه که برای تیرهای اویلر-برنولی در نظر گرفته می‌شود در نظر می‌گیریم:

$$X_m(x) = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x) \quad (53)$$

که پس از اعمال شرایط مرزی در دو انتهای تیر می‌توانیم مقادیر ویژه (β) و نیز بردارهای ویژه (A, C, B, D) را محاسبه کنیم. شرایط مرزی مختلف به صورت روابط (54-58) نوشته می‌شوند:

$$\text{ساده-ساده: } \begin{aligned} X_m(0) &= 0, X''_m(0) = 0, \\ X_m(a) &= 0, X''_m(a) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\text{درگیر-درگیر: } \begin{aligned} X_m(0) &= 0, X'_m(0) = 0, \\ X_m(a) &= 0, X'_m(a) = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\text{ساده-درگیر: } \begin{aligned} X_m(0) &= 0, X''_m(0) = 0, \\ X_m(a) &= 0, X'_m(a) = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

$$\text{درگیر-آزاد: } \begin{aligned} X_m(0) &= 0, X'_m(0) = 0, \\ X''_m(a) &= 0, X'''_m(a) = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\text{ساده-آزاد: } \begin{aligned} X_m(0) &= 0, X''_m(0) = 0, \\ X''_m(a) &= 0, X'''_m(a) = 0 \end{aligned} \quad (58)$$

می‌توان با فرآیندی مشابه آنچه که برای تیرها انجام می‌شود شکل مدهای تیر را به صورت روابط (59-63) بدست آورد:

$$\text{ساده-ساده: } X_m(x) = \sin(\beta_m x) \quad (59)$$

$$\text{ساده-درگیر: } \begin{aligned} X_m(x) &= \cos(\beta_m x) - \cosh(\beta_m x) \\ & - \frac{\cos\beta_m - \cosh\beta_m}{\sin\beta_m - \sinh\beta_m} (\sin(\beta_m x) \\ & - \sinh(\beta_m x)) \end{aligned} \quad (60)$$

$$\text{ساده-درگیر: } \begin{aligned} X_m(x) &= \cos(\beta_m x) - \cosh(\beta_m x) \\ & - \frac{\cos\beta_m - \cosh\beta_m}{\sin\beta_m - \sinh\beta_m} (\sin(\beta_m x) \\ & - \sinh(\beta_m x)) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\text{درگیر-آزاد: } \begin{aligned} X_m(x) &= \cos(\beta_m x) - \cosh(\beta_m x) \\ & - \frac{\cosh\beta_m + \cosh\beta_m}{\sin\beta_m + \sinh\beta_m} (\sin(\beta_m x) \\ & - \sinh(\beta_m x)) \end{aligned} \quad (62)$$

$$\text{ساده-آزاد: } \begin{aligned} X_m(x) &= \sin(\beta_m x) - \sinh(\beta_m x) \\ & + \frac{\cosh\beta_m + \cosh\beta_m}{\cosh\beta_m - \cos\beta_m} (\sin(\beta_m x) \\ & + \sinh(\beta_m x)) \end{aligned} \quad (63)$$

همچنین چهار مقدار ویژه اول نیز محاسبه شده و در جدول 1 لیست شده است.

جدول 1 چهار مقدار ویژه اول مربوط به تیر با شرایط مرزی مختلف

Table 1 four first eigenvalue corresponding to beam with different boundary condition

شرایط مرزی	$(\beta_1 a)^2$	$(\beta_2 a)^2$	$(\beta_3 a)^2$	$(\beta_4 a)^2$
ساده-ساده	9.86	39.43	88.82	157.91
درگیر-درگیر	22.37	61.67	120.90	199.86
ساده-درگیر	15.41	49.96	104.24	178.27
درگیر-آزاد	3.51	22.03	61.69	120.90
ساده-آزاد	0	15.41	49.96	104.24

روابط فوق برای شکل مد صفحه در راستای y ($Y_n(y)$) نیز به سادگی و مشابه با $X_m(x)$ نوشته می‌شود. در نتیجه با داشتن پاسخ ارتعاشی صفحه به صورت $W(x, y) = W_{mn} X_m(x) Y_n(y)$ می‌توان عبارات‌های مربوط به انرژی‌ها و شرایط را بازنویسی کرد. با جایگذاری رابطه (53) در روابط (16)، (18) و (42) خواهیم داشت:

$$U_{P_{\max}} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\{2\mu + \lambda\} \frac{h^3}{12} + \mu l^2 h \right) W_{mn} X''_m Y_n W_{ij} X''_i Y_j + \left(\{2\mu + \lambda\} \frac{h^3}{12} + \mu l^2 h \right) W_{mn} X_m Y''_n W_{ij} X_i Y''_j + 2 \left(\lambda \frac{h^3}{12} - \mu l^2 h \right) W_{mn} X''_m Y_n W_{ij} X_i Y''_j + 4 \left(\mu \frac{h^3}{12} + \mu l^2 h \right) W_{mn} X'_m Y_n W_{ij} X'_i Y'_j \right] dy dx \quad (64)$$

$$T_{P_{\max}} = \omega^2 \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b W_{mn} X_m Y_n W_{ij} X_i Y_j dy dx \quad (65)$$

$$T_{fB_{\max}} = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{b_1} i \omega A_{lk} \cos\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2b_1} y\right) (1 + e^{2c\sigma}) i \omega W_{mn} X_m Y_n dy dx$$

$$(m, i) = 1, 2, \dots, M, (j, n) = 1, 2, \dots, N$$

$$l = 0, 1, \dots, M_1, k = 0, 1, \dots, N_1 \quad (66)$$

$$T_{fS_{\max}} = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{b_1} i \omega B_{ij}(t) \cos\left(\frac{i\pi}{a} x\right) \cosh(\tau y) i \omega W_{mn} X_m Y_n dy dx$$

$$m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N$$

$$i = 0, 1, \dots, M_1, j = 0, 1, \dots, N_1 \quad (67)$$

$$\Pi = \sum \text{Strain Energy}_{\max} - \sum \text{Kinetic Energy}_{\max}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \quad (68)$$

در این مقاله از روش رایلی - ریتز جهت یافتن مشخصه‌های ارتعاشی سازه استفاده شده است. بر مبنای این روش تفاضل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ماکزیمم سیستم بدست آمده و با حداقل سازی این تفاضل ثابت مجهول مسئله بدست می‌آیند. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\text{که در آن } q = \{W_{mn}, B_{ij}\}^T \text{ است. حداقل سازی رابطه (68) به یک مسئله مقدار ویژه به صورت رابطه زیر می‌انجامد:}$$

$$(K_P) W_{mn} - \omega^2 [(M_P + M_{fB}) W_{mn} + M_{fS} B_{ij}] = 0 \quad (69)$$

که در آن:

با سیال در دسترس نیست لذا ابتدا مسئله را برای ماکرو ورق مستطیلی در تماس با سیال غیر قابل تراکم حل و نتایج صحنه گذاری می‌شوند. در بخش اول به مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی در پژوهش حاضر و مرجع [8] می‌پردازیم. در جداول 2 و 3 فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای ماکرو ورق مربعی همسانگرد و در تماس با سیال به ازای نسبت‌های مختلف عمق سیال به ترتیب با شرایط مرزی تماما ساده و تماما گیردار ارائه شده است. در این محاسبه مقادیر $a = 10 \text{ m}$ ، $b = 10 \text{ m}$ ، $h = 0.15 \text{ m}$ ، $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ ، $E = 25 \text{ GPa}$ و $\nu = 0.15$ برای ورق مربعی و $c = 100 \text{ m}$ عرض مخزن و $\rho_F = 1000 \text{ kg/m}^3$ چگالی سیال در نظر گرفته شده است.

از جداول 2 و 3 مشاهده می‌شود نتایج حاضر با مرجع [8] تطبیق بسیار خوبی دارند. همچنین همانطور که مشاهده می‌شود هر چه نسبت عمق سیال داخل مخزن افزایش یابد فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابند. در ادامه نمونه‌هایی از شکل مدهای پایه صفحه برای نسبت $b_1/b = 0.6$ و شرایط مرزی تماما ساده در شکل 2 آورده شده است.

همانطور که از شکل 2 دیده می‌شود برهم کنش سیال و جامد موجب تغییر شکل مدهای صفحه شده است که در انطباق با نتایج ارائه شده در مرجع [9] برای صفحات ماکرو می‌باشد.

در بخش دوم به تاثیر تغییرات پارامترهای مختلف مانند نسبت طول به ضخامت ورق a/h ، نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول h/l و نسبت طول به عرض ورق a/b پرداخته می‌شود. نتایج برای میکرو ورق چهار طرف درگیر ارائه شده است و پارامتر مقیاس طول نیز برابر $l = 17.6 \mu\text{m}$ فرض گردیده است.

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{\partial^2 U_{P_{\max}}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 U_{P_{\max}}}{\partial W_{mn} \partial W_{ij}} \\ M_P &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 T_{P_{\max}}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 T_{P_{\max}}}{\partial W_{mn} \partial W_{ij}} \\ M_{fB} &= \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 T_{fB_{\max}}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 T_{fB_{\max}}}{\partial W_{mn} \partial W_{ij}} \\ M_{fS} &= \frac{\partial^2 T_{fS_{\max}}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 T_{fS_{\max}}}{\partial W_{mn} \partial B_{ij}} \end{aligned} \quad (70)$$

رابطه (69) بدون داشتن رابطه ایی برای ضریب مجهول B_{ij} قابل حل نیست. بنابراین رابطه (27) را به رابطه (69) اضافه کرده و خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} K_P & 0 \\ K_{\phi_B} & K_{\phi_S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ B_{ij} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_P + M_{fB} & M_{fS} \\ 0 & M_{\phi_S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ B_{ij} \end{Bmatrix} = 0 \quad (71)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} K_{\phi_B} &= \frac{\partial^2 U_{\phi_B}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 U_{\phi_B}}{\partial W_{mn} \partial B_{ij}} \\ K_{\phi_S} &= \frac{\partial^2 U_{\phi_S}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 U_{\phi_S}}{\partial B_{mn} \partial B_{ij}} \\ M_{\phi_S} &= \frac{\partial^2 T_{\phi_S}}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 T_{\phi_S}}{\partial B_{mn} \partial B_{ij}} \end{aligned} \quad (72)$$

واضح است معادله (71) یک معادله استاندارد مربوط به مقادیر ویژه می‌باشد که با حل آن می‌توان مقادیر ویژه (فرکانس ω) و بردارهای ویژه $\{W_{mn}, B_{ij}\}^T$ را محاسبه کرد.

4- نتایج و بحث

از آن جا که مرجعی برای اعتبار سنجی میکرو ورق‌های مستطیلی در تماس

جدول 2 فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد $\left(\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\right)$ یک ماکروورق مربعی در تماس با سیال و با شرایط مرزی تماما گیردار

Table 2 Non-dimensional natural frequencies $\left(\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}\right)$ for a square macroplate in contact with fluid and fully clamped

شماره مد	روش	b_1/b				
		0	0.2	0.4	0.6	0.8
1,1	نتایج حاضر	5.9170	5.8656	4.5983	3.1187	2.4663
	[8]	5.730	5.674	4.202	2.747	2.157
2,1	نتایج حاضر	12.0680	11.5818	9.1314	6.9442	6.0075
	[8]	11.75	11.18	8.590	7.606	5.754
1,2	نتایج حاضر	12.0680	11.9341	9.2222	8.1139	6.0803
	[8]	11.75	11.60	8.254	6.109	5.282
2,2	نتایج حاضر	17.7875	17.0007	14.6235	12.7214	9.79
	[8]	17.27	16.34	13.84	11.84	9.164
3,1	نتایج حاضر	21.6482	19.9252	16.0222	13.2856	12.0916
	[8]	21.26	19.10	16.78	14.47	12.31
3,2	نتایج حاضر	27.1260	24.9783	22.6371	19.6224	16.0434
	[8]	26.49	23.85	21.43	18.94	15.96
2,3	نتایج حاضر	27.1260	25.7826	23.6857	19.88	16.0434
	[8]	26.49	24.81	22.78	18.51	14.97
4,1	نتایج حاضر	34.6437	31.3008	25.7072	22.3779	20.9684
	[8]	34.54	30.29	26.84	24.21	21.89

جدول 3 فرکانس‌های طبیعی بی بعد ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$) یک ماکرو ورق مربعی در تماس با سیال و با شرایط مرزی تماماً ساده

Table 3 Non-dimensional natural frequencies ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$) for a square macroplate in contact with fluid and fully simply supported

شماره مد	روش	b_1/b				
		0	0.2	0.4	0.6	0.8
1,1	نتایج حاضر	3.1917	3.1038	2.3746	1.6664	1.3030
	[8]	3.169	3.064	2.196	1.496	1.173
2,1	نتایج حاضر	7.9792	7.3152	5.8788	4.5498	3.9474
	[8]	7.902	7.092	5.708	5.174	3.926
1,2	نتایج حاضر	7.9792	7.7463	6.0251	5.3601	3.9686
	[8]	7.902	7.622	5.382	4.058	3.484
2,2	نتایج حاضر	12.7667	11.7215	10.3465	9.0951	6.9678
	[8]	12.68	11.40	9.974	8.746	6.777
3,1	نتایج حاضر	15.9584	14.2176	11.6968	9.7821	8.9012
	[8]	15.95	13.80	12.57	10.57	9.410
3,2	نتایج حاضر	20.7459	18.6468	17.0397	14.4937	12.2400
	[8]	20.69	18.10	16.68	14.47	12.66
2,3	نتایج حاضر	20.7459	19.1174	17.9115	15.2195	12.6106
	[8]	20.69	18.64	17.52	14.57	11.74
4,1	نتایج حاضر	27.1293	24.5170	20.1202	17.6313	16.4688
	[8]	27.52	24.21	21.36	19.32	17.66

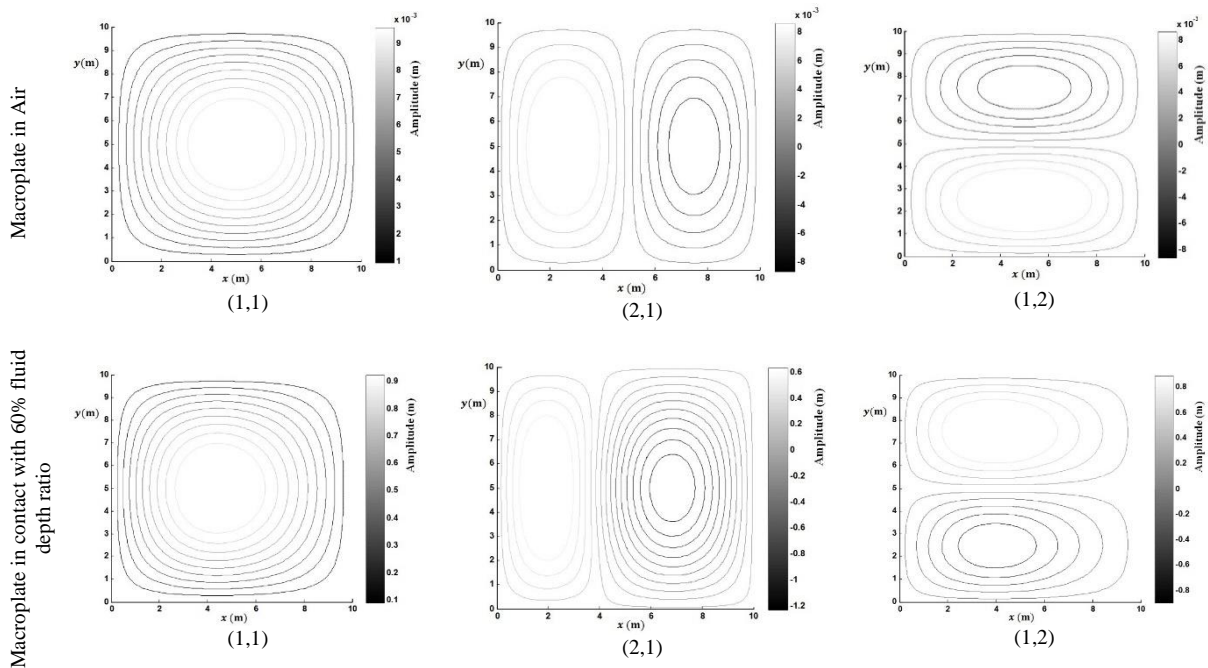


Fig. 2 First three mode shapes of a simply-supported rectangular macroplate in contact with air and partially with fluid

شکل 2 سه شکل مد اول ماکرو ورق مستطیلی در تماس با هوا و سیال محدود بیان شده بر حسب متر

دلیل است که با افزایش نسبت طول به ضخامت، سفتی کلی سیستم کاهش و در نتیجه فرکانس طبیعی نیز کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول، مقادیر فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

در شکل 4 نمودار تغییرات فرکانس پایه میکرو ورق مربعی ($a/b = 1$) با تغییرات نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول h/l و براساس تئوری

شکل 3 نمودار تغییرات فرکانس پایه میکرو ورق همسانگرد را بر حسب تغییرات نسبت طول به ضخامت ورق a/h برای نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مختلف h/l نشان می‌دهد. نسبت اضلاع نیز $a/b = 1$ فرض شده است.

همانطور که از شکل 3 مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق، فرکانس پایه کاهش می‌یابد. واضح است که این نتیجه به این

به ضخامت، فرکانس طبیعی میکروورق کاهش می‌یابد. انتظار می‌رود با افزایش نسبت طول به ضخامت مقدار فرکانس پیش‌بینی شده براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده با فرضیات تئوری کرشلف با فرکانس بدست آمده براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده با فرضیات تئوری میندلین برابر شود. در ادامه به منظور بررسی اثر پارامتر مقیاس طول و نیز نسبت طول به عرض ورق بر فرکانس‌های طبیعی، نتایج در جدول 4 ارائه شده است. در این حالت ضخامت میکرو ورق $h = 100\mu\text{m}$ و نسبت طول به ضخامت $a/h = 10$ فرض شده است. همانطور که از جدول 4 می‌توان فهمید با کاهش پارامتر مقیاس طول، فرکانس طبیعی در تمام مدهای ارتعاشی کاهش می‌یابند. علت نیز آن است که با کاهش پارامتر مقیاس طول، سفتی ورق کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به عرض ورق فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش پیدا می‌کنند.

در انتها نیز فرکانس‌های طبیعی میکرو ورق مورد اشاره و در شرایط مرزی مختلف در جدول 5 ارائه شده است. در این حالت طول و عرض ورق $a = b = 0.1\text{ m}$ ، پارامتر مقیاس طول $l = 17.6\mu\text{m}$ و ضخامت $h = 1000\mu\text{m}$ در نظر گرفته شده است.

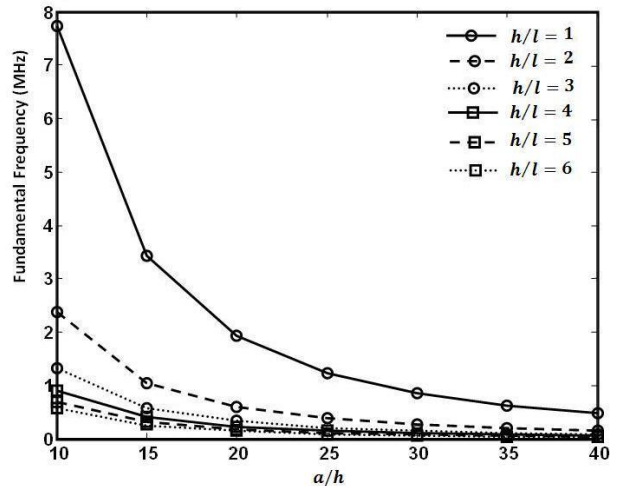


Fig. 3 Variation of fundamental frequency versus the length to thickness ratio for a square microplate and fully clamped

شکل 3 تغییرات فرکانس پایه برحسب نسبت طول به ضخامت ورق برای میکروورق مربعی و تماماً گیردار

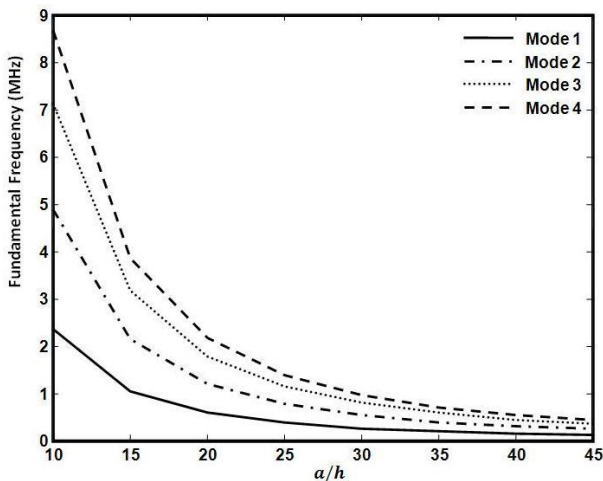


Fig. 5 Variation of first four natural frequencies versus the length to thickness ratio for a square microplate with fully clamped boundary conditions

شکل 5 تغییرات چهار فرکانس اول میکرو ورق مربعی تماماً گیردار برحسب تغییرات نسبت طول به ضخامت ورق

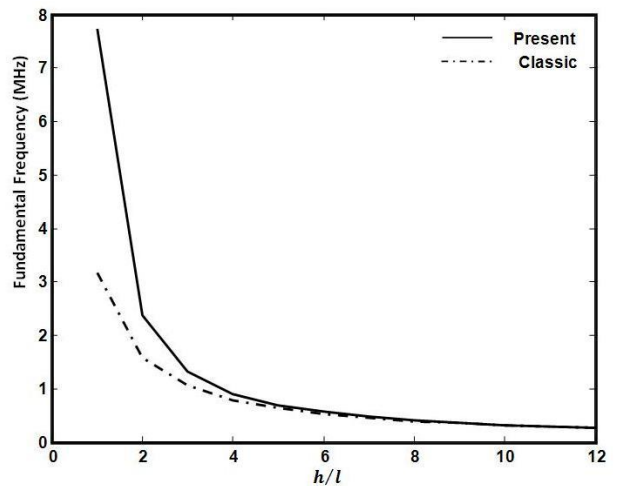


Fig. 4 The effect of plate's thickness/length scale parameter on the fundamental frequency of a square microplate with fully clamped boundary conditions based on the present and classical theories

شکل 4 اثر نسبت ضخامت صفحه به پارامتر مقیاس طول بر فرکانس پایه میکرو ورق مربعی تماماً گیردار برحسب تئوری‌های حاضر و کلاسیک

تنش کوپل اصلاح شده و تئوری کلاسیک (بدون در نظر گرفتن اثر اندازه) نشان داده شده است.

از شکل 4 دو نکته قابل بیان است: یکی آن که فرکانس‌های بدست آمده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده همواره از تئوری کلاسیک بیشتر است که علت آن نیز سفتی بیشتر مدل در نظر گرفته شده در تئوری تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد. دیگر آنکه اختلاف بین فرکانس‌های پیش‌بینی شده توسط این دو تئوری در ضخامت‌های بسیار کوچک ($h/l \leq 5$) زیاد بوده و هر چه این نسبت افزایش یابد اختلاف آن‌ها کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر برای میکرو ورق‌ها با ضخامت بسیار کوچک، تئوری کلاسیک نمی‌تواند مشخصات ارتعاشی سازه را با دقت مناسبی ارائه دهد.

شکل 5 نیز تغییرات چهار فرکانس ابتدایی میکرو ورق مربعی را برحسب تغییر نسبت طول به ضخامت a/h و با فرض $a/b = 1$ نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش نسبت طول

جدول 4 تغییرات سه فرکانس اول میکرو ورق برای پارامترهای مقیاس طول مختلف و در شرایط مرزی مختلف

Table 4 Variation of first three natural frequencies (MHz) for various length scale parameters and different boundary conditions

$a/b=2$			$a/b=1$			l/h	B.Cs
ω_3	ω_2	ω_1	ω_3	ω_2	ω_1		
5.8564	4.3551	3.5947	2.6138	2.0442	1.0888	$l/h=1$	
3.5922	2.6714	2.2049	1.6032	1.2539	0.6678	$l/h=0.5$	SCSC
2.4613	1.8304	1.5108	1.0985	0.8591	0.4575	$l/h=0.1$	
4.1342	2.7410	1.3272	2.3851	1.6304	0.9199	$l/h=1$	
2.4874	1.6961	0.7997	1.4756	0.9828	0.5680	$l/h=0.5$	CCCCF
1.6381	1.1398	0.5106	0.0131	0.6421	0.3854	$l/h=0.1$	
3.0626	1.8055	0.7365	1.5249	1.1590	0.4513	$l/h=1$	
1.8309	1.1247	0.4408	0.9491	0.6938	0.2811	$l/h=0.5$	SSSF
1.1882	0.7540	0.2694	0.6525	0.4441	0.1885	$l/h=0.1$	

جدول 5 فرکانس‌های طبیعی بی بعد ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$) یک میکرو ورق مربعی در تماس با سیال و با شرایط مرزی مختلف

Table 5 Non-dimensional natural frequencies ($\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$) for a square microplate in contact with fluid and different boundary conditions

شماره مد	شرایط مرزی	b_1/b				
		0	0.2	0.4	0.6	0.8
1,1	SCSC	4.7438	4.6828	3.3762	2.1165	1.6120
	CCCF	3.9833	3.9784	3.6351	2.4682	1.7975
	SSSF	1.9400	1.9228	1.6687	1.1872	0.8576
2,1	SCSC	8.9063	8.7638	6.2021	4.3596	3.6737
	CCCF	6.6196	6.5166	4.8720	4.5511	3.8344
	SSSF	4.5666	4.2750	3.1111	2.8810	2.4450
1,2	SCSC	11.3879	10.6987	8.1210	6.7446	4.7662
	CCCF	10.4883	10.4599	8.0865	5.9541	5.0514
	SSSF	6.7489	6.6729	5.1587	3.8689	3.2336
2,2	SCSC	15.4655	14.4458	11.2545	8.7963	7.1633
	CCCF	12.5361	11.7715	9.4400	7.7361	6.6831
	SSSF	9.6855	8.7483	7.4290	5.8702	5.1511
3,1	SCSC	21.2376	18.7691	16.0993	13.3823	10.5434
	CCCF	19.2144	17.8333	14.2194	11.5560	10.3804
	SSSF	14.7353	13.5399	10.4178	8.5227	7.6200
3,2	SCSC	22.8330	21.1753	18.4569	15.0378	11.5979
	CCCF	20.2590	19.3848	15.8214	12.6570	11.6172
	SSSF	15.4250	14.4779	12.4390	9.5533	8.9783
2,3	SCSC	25.3782	22.5196	18.8684	15.5844	13.3188
	CCCF	21.8435	20.1486	16.8113	14.2128	11.9572
	SSSF	17.7793	16.1176	13.7465	12.0512	9.7115
4,1	SCSC	27.5990	26.7021	19.8915	16.7941	14.3946
	CCCF	23.1938	22.2203	20.5910	17.5302	13.7562
	SSSF	18.6364	16.2685	15.2054	13.3605	10.4965

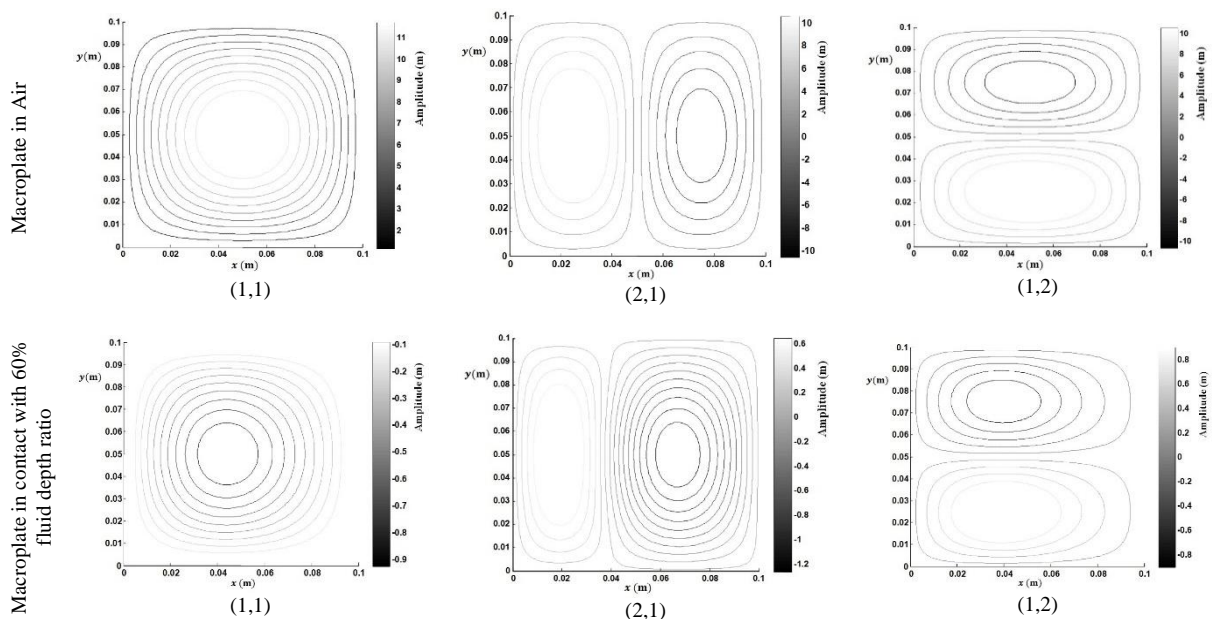


Fig. 6 First three mode shapes of a simply-supported rectangular microplate in contact with air and partially with fluid

شکل 6 سه شکل مد اول یک میکرو ورق مستطیلی در تماس با هوا و سیال محدود بیان شده برحسب متر

- elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16. pp. 415-448, 1962.
- [2] R.A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, pp.385-414, 1962.
- [3] W.T. Koiter, Couple-stresses in the theory of elasticity, *Proceeding of the Koninklijke Nederlands Akademie. Wetenschap, B 67(1)*, pp. 17-44, 1964.
- [4] A. Bakhsheshy, K. Khorshidi, Free vibration of functionally graded rectangular nanoplates in thermal environment based on the modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15. pp. 323-330, 2015 (in Persian فارسی).
- [5] R. Ansari, R. Gholami, A. Norouzzadeh, S. Sahmani, Size dependent vibration and instability of fluid-conveying functionally graded microshells based on the modified couple stress theory, *Microfluidics and nanofluidics*, Vol. 19, No. 3, pp. 509-522, 2015.
- [6] D. Zhou, Y.K. Cheung, Vibration of vertical rectangular plates coupled with fluid, *Earthquake engineering and structural dynamics*, No. 29, pp. 693-710, 2000.
- [7] R. Ansari, A. Norouzzadeh, R. Gholami, M. Faghieh Shojaei, M. Hosseinzadeh, Size-dependent nonlinear vibration and instability of embedded fluid-conveying SWBNNTs in thermal environment, *Physica E, Low-dimensional Systems and Nanostructures*. Vol. 61, pp. 148-157, 2014.
- [8] B. Ugurlu, A. Kutlu, A. Ergin, M.H. Omurtag, Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 317, pp.308-328, 2008.
- [9] K. Khorshidi, S. Farhadi, Free vibration analysis of a laminated composite rectangular plate in contact with a bounded fluid, *Composite Structures*, Vol.104, pp. 176-186, 2013.
- [10] R. Ansari Khalkhali, A. Norouzzadeh, R. Gholami, Forced vibration analysis of conveying fluid carbon nanotube resting on based on modified couple stress theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 3, pp. 27-34, 2015 (in Persian فارسی).
- [11] F. Yang, A.C.M. Chong, D.C.C. Lam, P. Tong, Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.39, pp. 2731-2743, 2002.
- [12] M. Amabili, Eigenvalue problems for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.231(1), pp.77-97, 2000.

قابل ذکر است در جداول 4 و 5 شرایط مرزی به صورت خلاصه شده $ABCD$ نشان داده شده است که حروف A, B, C, D به ترتیب بیانگر شرایط مرزی در $x=a, y=0, x=0, y=b$ می باشند. همانطور که از جدول 5 مشاهده می شود با افزایش عمق سیال فرکانس های طبیعی کاهش می یابند که این کاهش به دلیل افزایش جرم موثر سیستم می باشد.

نمونه هایی از شکل مدها نیز برای میکرو ورق با شرایط مرزی تماما ساده در تماس با هوا و سیال محدود در شکل 6 ارائه شده است.

5- جمع بندی

در این پژوهش به تحلیل ارتعاشی میکرو صفحه مستطیلی ایزوتروپیک در تماس با سیال بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده پرداخته شده است. تئوری ورق کرشیف جهت تحلیل و فرمول بندی مسئله و همچنین روش رایلی - ریتز به منظور ارائه پاسخ تحلیلی آن مورد استفاده قرار گرفته اند. نشان داده شده است که بر خلاف تئوری کلاسیک ورق، مدلی که بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده ارائه می شود به علت دارا بودن یک پارامتر مقیاس طول می تواند اثر اندازه را در تحلیل فرکانسی سازه هایی با مقیاس کوچک لحاظ نماید و استفاده از تئوری کلاسیک در این سازه ها مناسب نمی باشد. با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق فرکانس طبیعی کاهش یافته، با افزایش نسبت طول به عرض ورق فرکانس افزایش و نیز با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مقادیر فرکانس طبیعی کاهش می یابد. برهم کنش سیال-جامد موجب تغییر شکل مدهای ورق شده و نیز مشاهده می شود که فرکانس های طبیعی با افزایش عمق سیال داخل مخزن کاهش می یابند.

6- مراجع

- [1] R.D. Mindlin, H.F. Tiersten, Effects of couple-stresses in linear