مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۶، ص‌ص ۲۲-۲۸

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تخمین شرط مرزی تماسی در یک مسئله هدایت حرارتی غیر فوریه‌ای کسری با استفاده از روش گرادیان مزدوج بدون/با مسئله الحاقی

عزیز عظیمی[۱*]، پیران گودرزی[۲]، شهاب غلامی[۲]

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات حفاری، دانشگاه شهید چمران، اهواز

۲- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات حفاری، دانشگاه شهید چمران، اهواز

* اهواز، صندوق پستی ۱۵۷-۶۱۳۵۵، a.azimi@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۲ دی ۱۳۹۲

پذیرش: ۱۲ بهمن ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۱۵ تیر ۱۳۹۳

کلید واژگان:

هدایت غیرفوریه کسری

تخمین شرط مرزی تماسی مجهول

روش گرادیان مزدوج

روش گرادیان مزدوج الحاقی

چکیده

در تحقیق حاضر، شرط مرزی سطح تماس مشترک بین دو قطعه گوشت فرآوری شده در دمای متفاوت (دو قطعه در دماهای اتاق و سرد) که به طور ناگهانی در تماس باهم قرار گرفته بودند، در یک مسئله هدایت حرارتی غیرفوریه معکوس تخمین زده شد. مسئله مستقیم، انتقال حرارت هدایتی غیرفوریه‌ای بیان شده توسط مدل تأخیر فاز منفرد کسری در قطعه‌ای که در دمای اتاق است، بود. در این مسئله، فرض می‌شود که معادله حاکم، خواص ترموفیزیکی و شرایط اولیه و مرزی معلوم بوده و پس از گسسته‌سازی عددی آن‌ها، بصورت صریح با استفاده از روش مک‌کورمک تعمیم‌یافته حل شدند. در مسئله معکوس، تخمین شرط مرزی تماسی مجهول در مدل غیرفوریه‌ای کسری با استفاده از روش تخمین پارامتر گرادیان مزدوج بدون/با مسئله الحاقی که یکی از روش‌های معین کارا در آنالیز معکوس است، به عنوان یک کاری نو انجام پذیرفت. همچنین در مسئله معکوس به منظور بدست آوردن دمای اندازه‌گیری‌شده، از حل یک مدل خطی تأخیر فاز دوگانه که توسط داده‌های تجربی اعتبارسنجی شده بود، استفاده شد. در انتها، نتایج این دو روش جهت تخمین شرط تماسی بین دو قطعه گوشت فرآوری شده مورد مطالعه، مقایسه شدند. نتایج بدست آمده از این دو روش نشان از تخمین مناسبی برای شرط مرزی تماسی مجهول در هدایت حرارتی غیرفوریه کسری داشتند.

Contact boundary condition estimation in fractional non-Fourier heat conduction problem using conjugate gradient method without/with adjoint problem

Aziz Azimi*, Piran Goudarzi, Shahab Gholami

Department of Mechanical Engineering, Drilling Research Centre, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.
* P.O.B. 61355-157 Ahvaz, Iran, a.azimi@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 December 2013
Accepted 01 February 2014
Available Online 06 July 2014

Keywords:
Fractional Non-Fourier
Contact Boundary Condition Estimation
Conjugate Gradient
Adjoint Conjugate Gradient

ABSTRACT

In this paper, contact boundary condition between two pieces of the processed meat at different temperatures (two pieces with cold and room temperatures), that were suddenly in contact with each other in an inverse non-Fourier heat conduction problem was estimated. The direct problem was non-Fourier heat conduction that expressed with fractional single phase model and this problem involved only the piece of the processed meat in the room temperature. In this problem, it was assumed that governing equation, thermophysical properties and initial and boundary conditions were known and then it was solved numerically using the modified Mac-Cormack method. In the inverse problem, the estimation of the unknown contact boundary condition in the fractional non-Fourier model as a new work is done using the parameter estimation version of conjugate gradient method without/with adjoin problem that is one of the efficient deterministic methods in inverse analysis. In addition, in order to obtain the measured temperature of the inverse problem, a linear dual phase lag model validated with experimental data, was used. Finally, these two methods were compared to each other. Their results of these two methods showed the efficient estimation of the unknown contact boundary condition in fractional non-Fourier heat conduction.

۱- مقدمه

مدل ساختاری هدایت حرارتی فوریه توانایی مدل کردن فرآیندهای انتقال‌حرارت در بسیاری از شرایط عملی را دارد؛ اما ظهور زمینه‌های جدید کاربردی در انتقال‌حرارت اعتبار مدل فوریه را زیر سؤال برده‌است. در نتیجه براساس شرایط مختلف چندین مدل ساختاری غیرفوریه‌ای معرفی شده است. از کاربردهای مدل‌های غیرفوریه‌ای می‌توان در حضور منابع حرارتی با شدت بالا و بسیار گذرا از قبیل لیزر و مایکروویو، انتقال‌حرارت در شرایط دمایی به شدت پایین و انتقال‌حرارت در مواد با ساختار داخلی غیرهمگن و متخلخل نام برد.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. Azimi, P. Goudarzi, Sh. Gholami, Contact boundary condition estimation in fractional non-Fourier heat conduction problem using conjugate gradient method without/with adjoint problem, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 22-28, 2014 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-09]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.6.1.0]

در دهه‌های اخیر کارایی حساب کسری در مدل‌سازی رفتارهای غیرعادی مشاهده شده در پدیده‌های فیزیکی به اثبات رسیده است. حساب کسری، مشتق و انتگرال از مرتبه غیر صحیح است؛ اما تا دهه‌های اخیر برنامه‌های کاربردی قابل توجهی از حساب کسری در زمینه‌های علمی و مهندسی یافت نشده است و تنها به صورت ریاضی مطالعه گردیده است. امروزه حساب کسری به علت توانایی ذاتی بالای خود در مدل‌سازی رفتارهای غیرعادی (فروپخشی[1] و فراپخشی[2]) در فرآیندهای بسیار پیچیده، نویدهای بزرگی در زمینه‌های مختلف علمی را نشان می‌دهد. مدل هدایت حرارتی غیرفوریه‌ای کسری[3] در مقایسه با دیگر مدل‌های غیرفوریه، بسیار جدید است و به عنوان یک زمینه نوظهور در توصیف هدایت حرارتی غیرفوریه‌ای است که توانایی توصیف کردن همزمان اثرات گذرای سریع شارحرارتی (اثرات زمانی) و اثرات اندرکنش‌های میکروساختاری (اثرات مکانی) را دارد. از جمله مدل‌های غیرفوریه‌ای می‌توان به مدل تأخیر فاز منفرد[4]، تأخیر فاز دوگانه[5]، تأخیر فاز منفرد کسری و تأخیر فاز دوگانه کسری[6] و مدل‌های کسری با مرتبه متغیر اشاره کرد. در بسیاری از مسائل، پارامترهایی در مسئله وجود دارند که مقدار آن‌ها معلوم نیست یا اینکه در مسئله پارامترهایی باید به صورت تجربی تعیین گردند که کار دشواری است، بنابراین برای پارامترهای مجهول می‌توان از آنالیز معکوس استفاده کرد و مقادیر آن‌ها را با استفاده از روش‌های مختلف آنالیز معکوس تخمین زد.

مطالعه مسائل انتقال‌حرارت معکوس با مدل‌های هدایت حرارت غیرفوریه‌ای بسیار جدید است. تانگ و اراکی دو تأخیر زمانی و پخش حرارتی یک محیط تحت پالس حرارتی را در مدل غیرفوریه‌ای DPL با استفاده از روش تخمین پارامتر غیرخطی لونبرگ-مارکوارت تخمین زدند [۲،۱]. چن و همکارانش [۳]، حل عددی و تخمین پارامتر مجهول تابع شرط مرزی در مسئله هدایت حرارتی معکوس هایپربولیکی را با استفاده از تبدیل لاپلاس و حجم محدود در مسئله مستقیم و روش کمترین مربعات در مسئله معکوس مورد بررسی قرار داند. همچنین روش گرادیان مزدوج برای تخمین شار حرارتی مجهول در یک محیط محدود در مسئله هدایت حرارتی معکوس هایپربولیکی استفاده شده است [۵،۴]. یانگ [۶] روش اصلاح شده نیوتن-رافسون را برای آنالیز معکوس مسئله هدایت حرارتی هایپربولیکی در دو بعد، بکار برد. او نشان داد که نتایج روش اصلاح‌شده‌ی نیوتن-رافسون فرمولاسیون ساده‌تری نسبت به روش غیرخطی کمترین مربعات برای آنالیز معکوس مسائل هدایت حرارتی هایپربولیکی در دو بعد دارد. عظیمی و همکارانش [۷]، یک مسئله انتقال حرارت غیرفوریه‌ای معکوس را بررسی کردند و از روش گرادیان مزدوج الحاقی[7] برای تخمین دمای پایه فین طویلی با پروفیل‌های مختلف استفاده کردند. آن‌ها از نوع تخمین تابع گرادیان مزدوج الحاقی بر اساس اندازه‌گیری دمای مرز در آنالیز معکوس استفاده کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که گرادیان مزدوج الحاقی می‌تواند به دقت در آنالیز انتقال حرارت معکوس غیرفوریه‌ای بکار برود. کوثری و همکارانش [۸]، امکان تخمین توزیع تخلخل در یک محیط متخلخل را با استفاده از روش هدایت حرارتی معکوس بررسی کردند. کار آن‌ها، مدل حرارتی در یک محیط یک بعدی احاطه‌شده توسط صفحات موازی بود. آن‌ها از روش گرادیان مزدوج همراه با معادله دیفرانسیل الحاقی تحت شرایط غیرتعادلی بین دو فاز برای تخمین پیکربندی لایه‌های متخلخل در یک کانال استفاده کردند. چون‌هانگ و همکارانش [۹]، در یک مسئله هدایت حرارتی موجی، شرط مرزی شار حرارتی مجهول را بر اساس دماهای اندازه‌گیری شده با استفاده از روش گرادیان مزدوج تخمین زدند. کیو چی لیو و همکارانش [۱۰]، تأخیر فاز زمانی در مدل تأخیر فاز دوگانه را بر اساس داده‌های تجربی با استفاده از کمترین مربعات تخمین زدند.

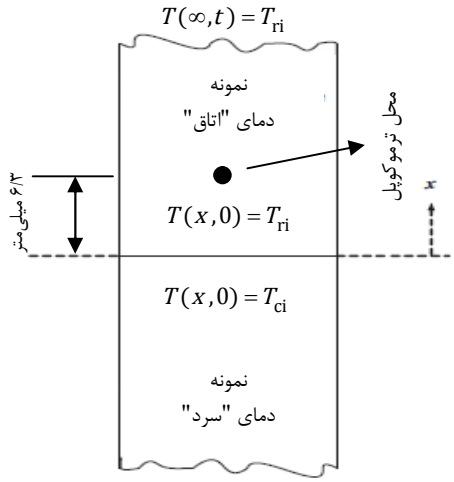
از آنجا که کاربرد مدل هدایت حرارتی کسری در مقایسه با مدل‌های موج حرارتی و تأخیر فاز دوگانه بسیار جدید است، کاربرد آنالیز معکوس برای مدل هدایت حرارتی کسری بسیار نادر است و به عنوان یک زمینه نوظهور است. باتاگلیا و همکارانش [۱۲،۱۱]، رفتار حرارتی گذرای یک سیستم را از طریق یک رابطه خطی مرتبه کسری بین دما و شار حرارتی سطح خارجی معرفی کردند. اخیراً، موریو [۱۳] مسئله معکوس معادله هدایت حرارتی کسری را بررسی‌کرد. او انتقال حرارت یک‌بعدی در یک قطعه محدود را مطالعه کرد و دما و شار حرارتی در مرز را با روش کمترین مربعات تخمین زد. او همچنین یک روش عددی برای حل معادله حرارت کسری معرفی کرد. قاضی‌زاده و همکارانش [۱۴]، آنالیز معکوس را برای تخمین همزمان زمان آسایش و مرتبه کسری در معادله حرارت تأخیر فاز منفرد کسری بکار بردند. معادله هدایت حرارتی کسری را بر روی دو مسئله فیزیکی بکار بردند. مسئله معکوس هدایت حرارتی تأخیر فاز منفرد کسری را با استفاده از روش تخمین پارامتر غیرخطی بر اساس روش لونبرگ-مارکوارت حل‌کردند و نتایج آن‌ها نشان داد که روش لونبرگ-مارکوارت می‌تواند با موفقیت در حل مسئله معکوس انتقال‌حرارت کسری بکار برده شود. برای اولین بار زمان آسایش و مرتبه کسری یک محیط غیرهمگن (گوشت فرآوری‌شده) را تخمین زدند. همچنین نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که مدل تأخیر فاز منفرد کسری می‌تواند توزیع دمایی مشابه با مدل تأخیر فاز دوگانه خطی داشته باشد. بیاتی [۱۵] مدل تأخیر فاز منفرد کسری را بر پایه‌ی مرتبه کسری متغیر با زمان تعمیم داد و از روش لونبرگ-مارکوارت برای تخمین پارامترهای زمان آسایش حرارتی و مرتبه کسری متغیر با زمان استفاده کرد.

در مطالعات پیشین در مورد تخمین شرط مرزی تماسی با روش‌های گرادیان مزدوج و گرادیان مزدوج الحاقی در مسئله هدایت غیرفوریه‌ای کسری تحقیقی صورت نگرفته است. تنها مطالعات انجام شده در حل مسائل هدایت حرارتی غیرفوریه کسری معکوس، مطالعاتی است که توسط محققان مراجع [۱۵،۱۴] بوده‌است که از روش‌هایی غیراز روش‌های گرادیان مزدوج و گرادیان مزدوج الحاقی و برای تخمین پارامترهای مجهول τ و α استفاده شده است. در صورتی که در این تحقیق از دو روش ذکر شده جهت تخمین دمای سطح مشترک دو تکه گوشت فرآوری شده که دارای دماهای مختلفی هستند، استفاده شد که کاری نو و قابل‌توجه در زمینه هدایت حرارتی غیرفوریه کسری است.

در مطالعه حاضر، از آنالیز معکوس برای تخمین دمای سطح مشترک دو قطعه از گوشت فرآوری شده در دماهای مختلفی (دماهای سرد و اتاق) که به طور ناگهانی در تماس با یکدیگر قرار داده شدند، استفاده شد. برای تخمین دمای مجهول از روش گرادیان مزدوج بدون/با مسئله الحاقی استفاده شد. مسئله مستقیم شامل قطعه گوشتی که در دمای اتاق بود که به طور عددی با استفاده از روش مک‌کورمک صریح تعمیم‌یافته حل شد. به منظور بدست آوردن دمای اندازه‌گیری‌شده، از حل یک مدل خطی تأخیر فاز دوگانه که توسط داده‌های تجربی اعتبارسنجی شده بود [۱۶]، استفاده شد. در نهایت، نتایج این دو روش گرادیان مزدوج بدون/با مسئله الحاقی با هم مقایسه شدند.

1- Sub Diffusion
2- Super Diffusion
3- Factional Single Phase Lag (FSPL)
4- Single Phase Lag
5- Dual Phase Lag (DPL)
6- Fractional Dual Phase Lag
7- Adjoint Conjugate Gradient Method

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-09]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.6.1.0]



شکل ۱ آزمایش (۱) انجام شده در مرجع [۱۶]

۲- مسئله مستقیم

مسئله فیزیکی ارائه‌شده در این مقاله شامل آزمایش (۱) در مطالعه میترا و همکارانش [۱۶] برای نشان دادن طبیعت موجی انتقال‌حرارت در گوشت فرآوری‌شده است. آنتاکی [۱۷]، با استفاده از بحث و بررسی داده‌های تجربی [۱۶]، نشان داد که مدل خطی DPL به عنوان یک مدل جدید، قابلیت بررسی انتقال‌حرارت در بافت‌های زیستی به منظور درک رفتار شبه‌موجی پاسخ حرارتی در گوشت فرآوری‌شده را دارد. به همان شیوه، از نتایج DPL ارائه شده در [۱۷] به عنوان داده‌های اندازه‌گیری‌شده مورد نیاز در مسئله معکوس حاضر استفاده و شرط مرزی تماسی تخمین زده شد. شماتیکی از آزمایش (۱) انجام شده در [۱۶] برای نشان دادن رفتار موجی انتقال‌حرارت در گوشت فرآوری‌شده در شکل ۱ نشان داده شده است. در این آزمایش، دو نمونه یکسان و یکنواخت اما با شرایط اولیه دمایی مختلف در زمان به طور ناگهانی در $t=0^{+}$ در تماس با یکدیگر قرار داده شدند. دمای اولیه نمونه‌های "سرد" و "اتاق" به ترتیب ۸/۲ و ۲۳/۱ درجه سانتی‌گراد بود. در پیش‌بینی توزیع دمایی در نمونه‌ها در مدل‌های عددی، مقادیر زیر برای پارامترهای ترموفیزیکی استفاده شد:

$$k=0.8\ \mathrm{W/mK}\ ,\ \rho=1230\ \mathrm{kg/m^3}\ ,\ C=4660\ \ \mathrm{J/kgK}$$

در این آزمایش ترموکوپل در محل $x=6.3\ \mathrm{mm}$ از سطح تماس در نمونه "اتاق" جایگذاری شد.

همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، دو نمونه در تماس با یکدیگر قرارگرفته‌اند که در مسئله مستقیم، شرط مرزی تماسی دو نمونه مجهول است. هدف مسئله مستقیم بدست آوردن تاریخچه‌ی دمایی نمونه دمای "اتاق" در محل ترموکوپل در آزمایش است. معادله و شرایط مرزی حاکم بر مسئله حاضر به صورت معادله (۱) می‌باشند [۱۴]:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}+\tau^{\alpha}\frac{\partial^{1+\alpha}T}{\partial t^{1+\alpha}}=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
$$T(x,0)=T_{\mathrm{room}},\quad T(0,t)=T_{\mathrm{room}},\quad T(l,t)=T_{\mathrm{int}} \qquad (۱)$$

در معادله فوق، T_{int} دمای سطح مشترک دو نمونه در هنگام تماس ناگهانی است که به عنوان پارامتر مجهول در نظر گرفته شد. τ زمان آسایش حرارتی و α مرتبه کسری است که این دو پارامتر به طور همزمان اثرات گذرای سریع شار و اندرکنش‌های میکروساختاری را در نظر می‌گیرند. در این مسئله مقدار $\tau=15.376$ و $\alpha=0.992$ از مرجع [۱۴] در نظر گرفته شده است. مسئله مستقیم با استفاده از روش مک-کورمک تعمیم یافته حل گردید.

همان طور که ملاحظه می‌شود معادله (۱) شامل ترمی با مشتق غیرصحیح است. قاضی زاده و همکارانش [۱۸] یک روش برای بدست آوردن مقدار مشتق غیرصحیح ارائه داده‌اند. آن‌ها با تقریب عددی مشتق کسری بر پایه تعریف کاپوتو توانستند مقدار مشتق غیرصحیح را بدست آورند. با در نظر گرفتن تقریب عددی مشتق کسری معادله (۱) به صورت معادله (۲) گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{\partial^{1+\alpha}T}{\partial t^{1+\alpha}}=\sigma_{1+\alpha}\sum_{j=1}^{k}\omega_j^{1+\alpha}\left(T_i^{n-j+1}-2T_i^{n-j}+T_i^{n-j-1}\right)$$
$$\sigma_{1+\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{\Delta t^{1+\alpha}}$$
$$\omega_j^{1+\alpha}=j^{1-\alpha}-(j-1)^{1-\alpha} \qquad (۲)$$

و همچنین گسسته‌سازی عبارات شامل مشتق صحیح به صورت معادله (۳) است:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{3T_i^n-4T_i^{n-1}+T_i^{n-2}}{2\Delta t}$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T_{i-1}^n-2T_i^n+T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \qquad (۳)$$

۳- مسئله معکوس

هدف از حل مسئله معکوس، یافتن پارامتر مجهول شرط تماسی دو نمونه در معادله حاکم (۱) با توجه به داشتن مقادیر مورد نظر در نقاط و زمان‌های خاصی است. در تحقیق حاضر، شرط مرزی سطح تماس دو نمونه (T_{int})، پارامتر مجهول بود که برای یافتن مقدار آن از روش معکوس گرادیان مزدوج و روش معکوس گرادیان مزدوج تخمین پارامتر با مسئله الحاقی استفاده شد.

روش‌های گرادیان مزدوج و گردیان مزدوج الحاقی از روش‌های قدرتمند و پرکاربرد مینیمم‌سازی معین[1] در آنالیز معکوس می‌باشند. در این دو روش که براساس الگوریتم تکرار، عمل هموارسازی[2] پاسخ انجام می‌پذیرد، در هر تکرار با استفاده از جهت‌های مزدوج و اندازه گام مناسب به نقطه مینیمم در آن تکرار دست پیدا کرده و این عمل با استفاده از تابع گرادیان ادامه می‌یابد تا نقطه مینیمم مسئله بدست آید. استفاده از جهت‌های مزدوج، نرخ همگرایی مسئله را در رسیدن به نقطه مینیمم افزایش می‌دهد.

برای حل مسئله معکوس، از داده‌های حاصل از اندازه‌گیری کمیت‌ها در نقاط نمونه‌برداری (نقاط سنسور) استفاده می‌شود. به این ترتیب که بر اساس اختلاف بین کمیت‌های اندازه‌گیری‌شده و محاسبه‌شده در نقاط نمونه‌برداری، یک تابع خطا (تابع هدف) تشکیل داده و سپس این تابع مینیمم می‌شود. در این صورت تابع هدف، بر اساس روش حداقل‌سازی مربعات، به صورت رابطه (۴) تشکیل می‌شود:

$$S(P)=\left[T_{\mathrm{DPL}}-T\right]^{\mathrm{T}}\left[T_{\mathrm{DPL}}-T\right] \qquad (۴)$$

۳-۱- روش تخمین پارامتر گرادیان مزدوج

در این روش، از روش گرادیان مزدوج جهت حداقل‌سازی، برای مسائل تخمین پارامتر استفاده می‌شود. در این روش به محاسبه ماتریس حساسیت نیاز است. در هر مرحله از تکرار یک اندازه گام مناسب در راستای کاهش مقدار تابع هدف انتخاب می‌شود. بردار کاهش تابع از ترکیب خطی قرینه بردار گرادیان تابع در همان مرحله و بردار کاهش مرحله قبلی بدست آورده می‌شود. ترکیب خطی طوری انجام می‌شود که زاویه بین بردار بدست آمده و قرینه بردار گرادیان کمتر از ۹۰ درجه باشد و به این ترتیب مینیمم شدن

1- Deterministic
2- Regularization

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-09]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.6.1.0]

تابع هدف، حتمی خواهد شد [۲۰،۱۹].

در این روش، ابتدا شرط همگرایی بررسی می‌شود و در صورت ارضاء شدن آن معادله حساسیت حل می‌گردد و با استفاده از ماتریس حساسیت بدست‌آمده، بردار گرادیان و سپس بردار کاهش بدست می‌آید و بعد از آن تخمین پارامتر مجهول در تکرار جدید صورت می‌گیرد و این روند تکرار تا جایی که شرط همگرایی ارضاء شود ادامه می‌یابد و سپس پارامتر مجهول تخمین زده می‌شود.

روند تکرار گرادیان مزدوج به صورت معادله (۵) است [۱۹]:

$$P^{k+1}=P^k-\beta^k d^k \tag{۵}$$

β^k طول گام جستجو، d^k بردار کاهش تابع هدف و بالانویس k شماره مرحله تکرار است؛ که بردار کاهش به صورت معادله (۶) بدست می‌آید [۱۹]:

$$d^k=\nabla S(P^k)+\gamma^k d^{k-1} \tag{۶}$$

در رابطه (۶) برای محاسبه ضریب ترکیب γ^k از رابطه پولاک-ریبیر استفاده شده‌است [۱۹]:

$$\gamma^k=\frac{\left[\nabla S\left(P^k\right)\right]\left[\nabla S\left(P^k\right)-\nabla S\left(P^{k-1}\right)\right]}{\left[\nabla S\left(P^{k-1}\right)\right]^2} \tag{۷}$$

به ازای $k=1,2,3,\ldots$ و $\gamma^0=0$ برای $k=0$.

رابطه بردار گرادیان با دیفرانسیل گرفتن از معادله (۴) نسبت به بردار مجهول به دست می‌آید [۱۹] که طبق رابطه (۸) خواهیم داشت:

$$\nabla S\left(P^k\right)=-2\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\partial T_i^k}{\partial P}\right)\left[Y_i-T_i\left(P^k\right)\right] \tag{۸}$$

که معادله (۸) به صورت رابطه (۹) بازنویسی می‌شود [۱۹]:

$$\nabla S\left(P^k\right)=-2\left(J^k\right)\left[Y-T\left(P^k\right)\right] \tag{۹}$$

که در اینجا J^k ماتریس حساسیت است که به صورت رابطه (۱۰) بدست می‌آید[۱۹]:

$$J^k=\frac{\partial T}{\partial P} \tag{۱۰}$$

که $i=1,2,\ldots,I$ تعداد نمونه‌برداری‌ها در طول زمان در سنسور است.

طول گام جستجو از رابطه (۱۱) بدست می‌آید [۱۹]:

$$\beta^k=\frac{\left[J^k d^k\right]^{\mathrm{T}}\left[T\left(P^k\right)-Y\right]}{\left[J^k d^k\right]^{\mathrm{T}}\left[J^k d^k\right]} \tag{۱۱}$$

۳-۲- روش تخمین پارامتر گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی

حل معکوس با روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی شامل چند مرحله‌ی مسئله حساسیت، مسئله الحاقی و جهت گرادیان است.

۳-۲-۱- مسئله حساسیت

مسئله حساسیت، نقش مهمی در فرآیند تخمین پارامتر دارد. برای تشکیل مسئله حساسیت در روش گرادیان مزدوج الحاقی، در معادله (۱) به جای پارامتر T مقدار $T+\Delta T$ و به جای مقدار پارامتر مجهول P ($P=T_{\text{int}}$) مقدار $P+\Delta P$ ($T_{\text{int}}+\Delta T_{\text{int}}$) جایگذاری می‌شود و سپس از معادله (۱) کم می‌شود و معادله (۱۲) به دست می‌آید که معادله حساسیت نام دارد:

$$\rho c\frac{\partial(T+\Delta T)}{\partial t}+\tau^\alpha\frac{\partial^{1+\alpha}(T+\Delta T)}{\partial t^{1+\alpha}}=k\frac{\partial^2(T+\Delta T)}{\partial x^2}$$
$$T(x,0)+\Delta T(x,0)=T_{\text{room}}$$
$$T(0,t)+\Delta T(0,t)=T_{\text{room}}$$
$$T(l,t)+\Delta T(l,t)=T_{\text{int}}+\Delta T_{\text{int}} \tag{۱۲}$$

با کم کردن معادله (۱) از (۱۲)، معادله حساسیت (۱۳) بدست می‌آید:

$$\rho c\frac{\partial\Delta T}{\partial t}+\tau^\alpha\frac{\partial^{1+\alpha}\Delta T}{\partial t^{1+\alpha}}=k\frac{\partial^2\Delta T}{\partial x^2}$$
$$\Delta T(x,0)=0,\qquad \Delta T(0,t)=0,\qquad \Delta T(l,t)=\Delta T_{\text{int}} \tag{۱۳}$$

با توجه به اینکه کمیت مجهول در معادله حساسیت ظاهر نشده‌است، مسئله حساسیت یک مسئله خطی است.

۳-۲-۲- مسئله الحاقی

برای فرمول‌بندی مسئله الحاقی در روش گرادیان مزدوج، ابتدا ضریب نامعین لاگرانژ $\lambda_k(x,t)$ تعریف می‌شوند. به منظور بدست آوردن معادله دیفرانسیلی که بتوان با حل آن، ضریب نامعین لاگرانژ را بدست آورد از معادله دیفرانسیل مستقیم حاکم بر مسئله به عنوان قید استفاده می‌شود. در این راستا معادله قید در ضریب لاگرانژ مربوط به خود ضرب شده و ابتدا در حوزه مکان و پس از آن در حوزه زمان ($0\le t\le t_f$)، از عبارت حاصله انتگرال‌گیری می‌شود. نتیجه به دست‌آمده به تابع هدف $S(P)$ اضافه می‌شود تا تابع هدف بسط یافته در رابطه (۱۴) به دست آید:

$$S(P)=\int_0^{t_f}\left\{Y-T\left[x_{\text{meas}},t;P\right]\right\}^2dt$$
$$+\int_0^{t_f}\int_0^{l}\lambda(x,t)\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\tau^\alpha\frac{\partial^{1+\alpha}T}{\partial t^{1+\alpha}}-D\frac{\partial^2T}{\partial x^2}\right]dx\,dt \tag{۱۴}$$

حال باید عبارتی برای $\Delta S(P)$ به دست آورد. به این منظور فرض می‌شود که $T(x,t)$ به اندازه $\Delta T(x,t)$ و P به اندازه ΔP تغییر داده شوند. تغییرات $S(P)$ یعنی $\Delta S(P)$، مشتق جهتی $S(P)$ در جهت $\Delta S(P)$ است. با جایگزین‌کردن $T(x,t)$ با $T(x,t)+\Delta T(x,t)$ و جایگزینی P با $P+\Delta P$ در رابطه (۱۴)، رابطه جدیدی به دست می‌آید. سپس طرفین رابطه (۱۴) از طرفین این معادله کم می‌شود که با صرف‌نظر از عبارات درجه دوم، معادله به صورت معادله (۱۵) به دست می‌آید.

$$S(P)=\int_0^{t_f}2\left\{Y-T\left[x_{\text{meas}},t;P\right]\right\}\Delta T(x,t)\delta\left(x-x_{\text{meas}}\right)dt$$
$$+\int_0^{t_f}\int_0^{l}\lambda(x,t)\left[\frac{\partial\Delta T}{\partial t}+\tau^\alpha\frac{\partial^{1+\alpha}\Delta T}{\partial t^{1+\alpha}}-D\frac{\partial^2\Delta T}{\partial x^2}\right]dx\,dt \tag{۱۵}$$

عبارت انتگرالی دوم در طرف راست را می‌توان از روش جزء به جزء ساده نمود و سپس شرایط مرزی و اولیه مسئله حساسیت را به آن‌ها اعمال نمود. سپس معادله حساسیت در معادله منتج ارضاء می‌شود و به این ترتیب معادله مربوط به مسئله الحاقی به دست می‌آید. با حل مسئله الحاقی می‌توان ضریب لاگرانژ را محاسبه نمود. با انجام عملیات بالا مسئله الحاقی به صورت معادله (۱۶) بدست می‌آید:

$$D\lambda_{xx}+\lambda_t+\tau^\alpha\frac{\partial^{1+\alpha}\lambda}{\partial t^{1+\alpha}}+2(T-Y)\delta(x-x_0)=0$$
$$\lambda(0,t)=0,\qquad \lambda(l,t)=0,\qquad \lambda(x,t_f)=0 \tag{۱۶}$$

۳-۲-۳- معادله گرادیان

در فرمول‌بندی مسئله الحاقی $\Delta S(P)$ بر حسب ΔP و یکی از ضرایب لاگرانژ بیان می‌شود. این رابطه را می‌توان به شکل رابطه (۱۷) نمایش داد.

$$\Delta S(P)=\int_0^{t_f}\phi(\lambda(x_{\text{meas}},t))\Delta P\,dt \tag{۱۷}$$

تابع ϕ از فرمول‌بندی مسئله الحاقی به دست می‌آید. با توجه به اینکه پارامتر P به فضای توابع دو بار انتگرال پذیر تعلق دارد، می‌توان طبق رابطه (۱۸) نوشت:

$$\Delta S(P)=\int_0^{t_f}\nabla S(P)\Delta P\,dt \tag{۱۸}$$

در اینجا $\Delta S(P)$ گرادیان تابع هدف $S(P)$ است. از مقایسه معادلات

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-09]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.6.1.0]

(۱۷) و (۱۸)، می‌توان معادله گرادیان تابع هدف $S(P)$ را به صورت رابطه (۱۹) نتیجه گرفت:

$$\nabla S(P)=\phi(\lambda(x_{\text{meas}},t)) \tag{۱۹}$$

که در تحقیق حاضر این عبارت به صورت رابطه (۲۰) بدست آمد:

$$\nabla S(P)=-D\lambda_x(l,t) \tag{۲۰}$$

۳-۲-۴- روند تکرار برای روش گرادیان مزدوج الحاقی

روابط ریاضی فوق، سه مسئله مجزا را ارائه می‌دهند که به ترتیب مسئله مستقیم، مسئله حساسیت و مسئله الحاقی نام دارند و به ترتیب $T(x,t)$، $\Delta T(x,t)$ و $\lambda(x,t)$ را محاسبه می‌نمایند. فرض می‌شود که داده‌های نمونه‌برداری $Y(t)$ از یک سنسور در محل x_{meas} به دست آمده‌اند و گرادیان $\nabla S(P)$ توسط معادله (۲۰) داده می‌شود.

پارامتر مجهول P، با کمینه کردن تابع هدف $S(P)$ که در معادله (۱۹) داده‌شده، به دست می‌آید. این کار توسط یک روند تکراری و با انتخاب مناسب بردار کاهش و طول گام جستجو، هنگام رفتن از مرحله k به مرحله $k+1$ انجام می‌گیرد. روند تکرار روش گرادیان مزدوج برای تخمین پارامتر P با بکارگیری رابطه (۵) و سپس رابطه (۶) شروع می‌شود که ضریب γ^k را می‌توان از رابطه پولاک-ریبایر [۱۹] به ازای $k=1,2,3,\ldots$ و $\gamma^0=0$ برای $k=0$ بدست آورد. طبق رابطه (۲۱) خواهیم داشت:

$$\gamma^k=\frac{\int_0^{t_f}\left[\nabla S\left(P^k\right)\right]\left[\nabla S\left(P^k\right)-\nabla S\left(P^{k-1}\right)\right]dt}{\int_0^{t_f}\left[\nabla S\left(P^{k-1}\right)\right]^2 dt} \tag{۲۱}$$

طول گام d^k با مینیمم کردن تابع هدف $S(P^{k+1})$ نسبت به β^k بدست می‌آید. طبق رابطه (۲۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\min_{\beta^k} S(P^{k+1})&=\min_{\beta^k}\int_0^{t_f}\left\{Y(t)-T\left[x_{\text{meas}},t;P^k-\beta^k d^k\right]\right\}^2 dt\\&=\min_{\beta^k}\int_0^{t_f}\left\{Y(t)-T\left[x_{\text{meas}},t;P^k\right]\right.\\&\left.+\beta^k\Delta T\left[x_{\text{meas}},t;\mathrm{d}^k\right]\right\}^2 dt\end{aligned} \tag{۲۲}$$

در اینجا $\Delta T\left[x_{meas},t;d^k\right]$ پاسخ مسئله حساسیت است و با قرار دادن $\Delta P=d^k$ به دست می‌آید. برای مینیمم کردن معادله (۲۲)، از آن نسبت به β^k دیفرانسیل گرفته و عبارت حاصله برابر با صفر قرار داده می‌شود. بعد از ساده‌سازی‌ها، رابطه (۲۳) برای طول گام β^k به دست می‌آید:

$$\beta^k=\frac{\int_0^{t_f}\left[T\left[x_{\text{meas}},t;P^k\right]-Y(t)\right]\Delta T\left[x_{\text{meas}},t;\mathrm{d}^k\right]dt}{\int_0^{t_f}\left\{\Delta T\left[x_{\text{meas}},t;\mathrm{d}^k\right]\right\}^2 dt} \tag{۲۳}$$

جزئیات بیشتر گسسته سازی حساسیت و الحاقی در مراجع [۱۵،۱۴] گزارش شده‌اند.

۳-۳- معیار توقف روند تکرار [۱۹]

برای هر دو روش آنالیز معکوس، معیار توقف با رابطه (۲۴) بررسی می‌شود:

$$S(P^k)<\varepsilon \tag{۲۴}$$

تلورانس ε طوری تعیین می‌شود تا با وجود خطای تصادفی در داده‌های نمونه‌برداری، جواب‌های هموار و بدون نوسانی به دست آید. فرض می‌شود که جواب‌ها به اندازه‌ی کافی دقیق هستند. طبق رابطه (۲۵) خواهیم داشت:

$$\left|Y(t)-T\left[x_{\text{meas}},t;P^k\right]\approx\sigma\right| \tag{۲۵}$$

که در اینجا σ انحراف از معیار خطاهای نمونه‌برداری است؛ بنابراین ε از معادله (۲۴) به صورت زیر به دست می‌آید و در این مطالعه از مرتبه $O(10^{-2})$ در نظر گرفته شده است. طبق رابطه (۲۶) خواهیم داشت:

$$\varepsilon=\sigma^2 t_{\text{f}} \tag{۲۶}$$

۴- نتایج

در این تحقیق هدف از بکارگیری روش آنالیز معکوس به ویژه روش گرادیان مزدوج الحاقی، تخمین مقدار شرط مرزی تماسی بوده‌است تا قابلیت این روش در حل یک مسئله هدایت حرارتی غیرفوریه کسری معکوس به نمایش گذاشته شود. لذا در این بخش، ابتدا با استفاده از نتایج بدست آمده از حل مستقیم و معکوس مدل FSPL، به تحلیل و مقایسه‌ی نتایج این مدل با نتایج مدل DPL [۱۷] که صحت آن‌ها توسط داده‌های تجربی مورد ارزیابی قرار گرفته‌بودند، پرداخته شده‌است. به منظور ارائه نتایج و مقایسه آن‌ها با نتایج مرجع [۱۶]، از دمای بی بعد استفاده شده که به صورت رابطه (۲۷) تعریف می‌شود:

$$\theta=\frac{T-T_{\text{room}}}{T_{\text{int}}-T_{\text{room}}},\quad t'=\frac{t}{15.5} \tag{۲۷}$$

شکل‌های ۲ و ۳، نشان‌دهنده‌ی تاریخچه‌ی دمایی مدل FSPL با مدل تأخیر فاز دوگانه می‌باشند. در این اشکال، نتایج حل مسئله معکوس به ترتیب با روش گرادیان مزدوج و روش گرادیان مزدوج الحاقی ارائه گردیده‌است. همان طور که این اشکال نشان می‌دهند، مدل FSPL توانسته است با دقت بسیار خوبی افزایش ناگهانی دما را شبیه‌سازی کند. انطباق بالای نتایج این مدل با نتایج مدل DPL، نشان‌دهنده‌ی قابلیت بالای مدل تأخیرفاز منفرد کسری در شبیه‌سازی رفتار شبه‌موجی انتقال حرارت است.

در شکل‌های ۴ و ۵، تاریخچه دمایی در محل سنسور به ازای در نظر گرفتن خطاهای مختلف برای داده‌های ورودی DPL [۱۷] برای هر دو روش گرادیان مزدوج و گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی نشان داده شده‌است که این مقدار خطا توسط رابطه‌ی (۲۸) وارد مسئله می‌شود:

$$Error=SENS\times T_{\max} \tag{۲۸}$$

$T_{\max}$ بیشینه دما در داده‌های ورودی DPL است و $SENS$ مقدار درصد خطا است. همان طور که در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده با کم کردن مقدار خطای داده‌های ورودی، نتایج به نتایج واقعی نزدیک‌تر می‌شوند. همچنین ملاحظه می‌گردد که می‌توان به نتایج با دقت مناسبی دست یافت که مقادیر خطای سنسور برابر با یک درصد دمای بیشینه (حدود K ۳) باشند.

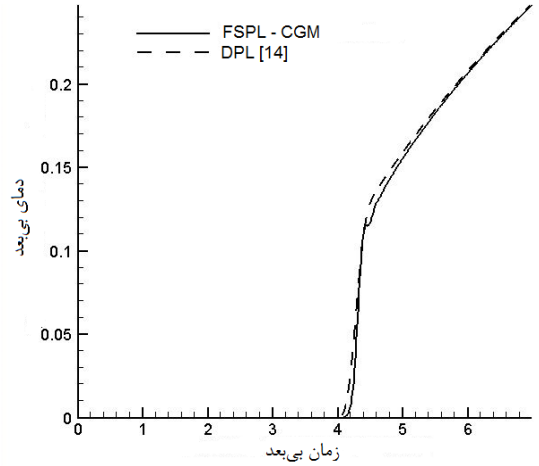
در جداول ۱ نتایج دمای تخمین زده شده از طریق دو روش گرادیان مزدوج و گرادیان مزدوج الحاقی برای سه حدس اولیه آورده شده‌اند. نتایج نشان دهنده‌ی دقت خوب این دو روش در تخمین پارامتر مجهول است.

جدول ۱ نتایج دمای شرط تماسی تخمین زده شده برای حدس اولیه‌های مختلف

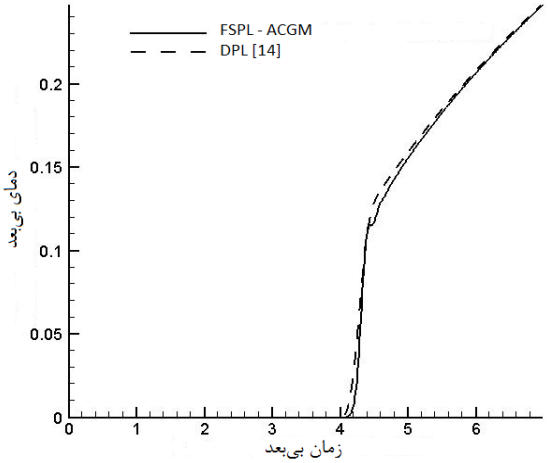
حدس‌های مختلف		گرادیان مزدوج	گرادیان مزدوج الحاقی
	دمای تخمین‌زده (K)	۲۸۸/۸۰۹۹	۲۸۸/۶۹۵۶
حدس اولیه	تعداد تکرار	۴	۳
صفر	اختلاف با مقدار دقیق	۰/۰۰۹۹	۰/۱
	زمان اجرای برنامه (S)	۴۶/۱۶	۶۷/۳۴۷
	دمای تخمین‌زده (K)	۲۸۸/۸۰۹۹	۲۸۸/۷۴۶۶۴
حدس اولیه	تعداد تکرار	۴	۳
۴۰۰ K	اختلاف با مقدار دقیق	۰/۰۰۹۹	۰/۰۵
	زمان اجرای برنامه (S)	۴۴/۰۵	۶۶/۳۴۷
	دمای تخمین‌زده (K)	۲۸۸/۸۰۹۹	۲۸۸/۶۹۵۶۵
حدس اولیه	تعداد تکرار	۴	۴
۸۰۰ K	اختلاف با مقدار دقیق	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۲۳۶
	زمان اجرای برنامه (S)	۴۴/۸۱	۶۶/۶۷۴

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-09]

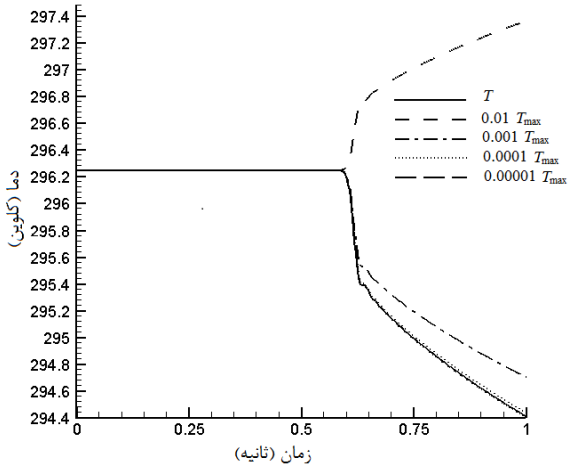
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.6.1.0]



شکل ۲ تاریخچه دمایی تخمین زده شده در محل سنسور- گرادیان مزدوج



شکل ۳ تاریخچه دمایی تخمین‌زده شده در محل سنسور- گرادیان مزدوج الحاقی

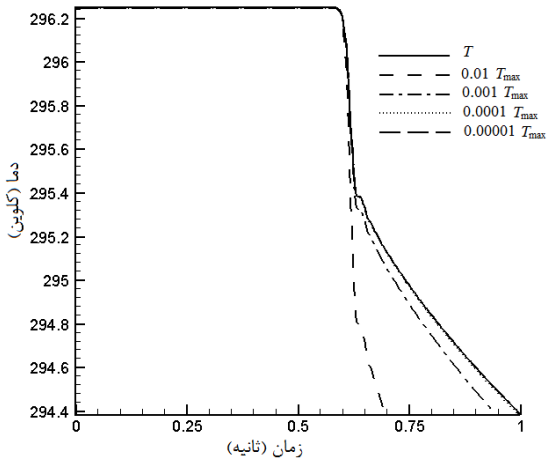


شکل ۴ تاریخچه دمایی تخمین زده شده در محل سنسور به ازای خطاهای مختلف برای داده‌های DPL [۱۷]- گرادیان مزدوج

مقدار دقیق دمای مجهول ۲۸۸.۸ درجه کلوین است و خطای نشان داده شده در جداول، خطای مطلق می‌باشند. زمان ارائه‌شده در جدول ۱ با اجرای برنامه کامپیوتری در لب‌تاپ ۷ هسته‌ای سونی انجام شده‌است.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله از قابلیت‌های آنالیز معکوس در تخمین پارامترهای مجهول مسائل انتقال‌حرارت هدایتی غیرفوریه کسری استفاده شد.



شکل ۵ تاریخچه دمایی تخمین زده شده در محل سنسور به ازای خطاهای مختلف برای داده‌های DPL [۱۷]- گرادیان مزدوج الحاقی

یکی از مسائل معکوس، مسائل از نوع تخمین شرط مرزی است که می‌تواند کمک شایانی در حل مسائل مستقیم کاربردی داشته باشد. در تحقیق حاضر، از قابلیت روش تخمین پارامتر گرادیان مزدوج بدون/با مسئله الحاقی جهت تعیین شرط مرزی سطح تماس مشترک بین دو قطعه گوشت فرآوری شده در دمای متفاوت (دو قطعه در دماهای اتاق و سرد) که به طور ناگهانی در تماس با هم قرار گرفته بودند، در یک مسئله هدایت حرارتی غیرفوریه کسری معکوس استفاده شد. انتقال حرارت هدایتی غیرفوریه‌ای بیان شده توسط مدل تأخیر فاز منفرد کسری در قطعه‌ای که فقط در دمای اتاق بود، به عنوان مسئله مستقیم مد نظر قرار گرفت. شرط مرزی تماسی نیز با استفاده از دو روش گرادیان مزدوج و گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی تخمین زده شد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که این دو روش به ویژه روش گرادیان مزدوج الحاقی، توانایی بالایی در تخمین شرط مرزی مجهول مسئله هدایت غیرفوریه‌ای کسری دارند.

با طرح مسئله مورد بررسی در این مقاله، نشان داده شد که علاوه بر اینکه یک شرط مرزی مجهول، ناشی در عدم وجود اطلاعات و یا عدم دسترسی به دمای مرز دامنه، تخمین زده شد، برخلاف بررسی انجام گرفته در مرجع [۱۶]، معادلات حاکم بر مسئله در کل دامنه حل نشده و فقط بخشی از دامنه حل برحسب نیاز مورد ارزیابی قرار گرفته‌شد. بدین گونه از روند حل ارائه شده در این مقاله می‌توان در حل مسائل کاربردی اجسام متشکل از چندین لایه با مواد مختلف مثل دیوار کوره‌های صنعتی، پوست انسان و غیره که دارای خواص، کمیت‌ها و شرایط اولیه و مرزی مجهول هستند، استفاده نمود.

۶- مراجع

[1] D.W. Tang, N. Araki, An inverse analysis to estimate relaxation parameter and thermal diffusivity with a universal heat conduction equation, *International Journal of Thermophysics,* Vol. 22, No. 2, pp. 553-561, 2000.

[2] D.W. Tang, N. Araki, Non-Fourier heat conduction behavior in finite mediums under pulse surface heating, *Journal of Material Science Engineering,* Vol. 292, No. 2, pp. 173-178, 2000.

[3] H.T. Chen, S.Y. Peng, P.C. Yang, Numerical method for hyperbolic inverse heat conduction problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 28, No. 6, pp. 847-856, 2001.

[4] C.H. Huang, H. Hsienwu, An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux by the conjugate gradient method, *Journal of Applied Physics,* Vol. 39, No. 18, pp. 4087-4096, 2006.

[5] C.H. Huang, C.Y. Lin, Inverse hyperbolic conduction problem in estimating two unknown surface heat fluxes simultaneously, *International Journal of Thermophysics,* Vol. 22, No. 4, pp. 766-774, 2008.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-09]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.6.1.0]

[6] C.Y. Yang, C.Y. Lin, Direct and inverse solutions of the two-dimensional hyperbolic heat conduction problems, *Journal of Applied Mathematical Modeling,* Vol. 33, No. 6, pp. 2907-2918, 2009.

[7] A. Azimi, A. Ahmadikia, Base temperature estimation of non-Fourier fin with different profiles by the use of inverse analysis, *Journal of Applied Mathematical Modeling,* Vol. 33, No. 7, pp. 2907-2918, 2009.

[8] F. Kowsari, M. Nazari, A new approach for porosity estimation in multilayer porous channel using nonlinear conjugate gradiants method, *Journal of porous media,* Vol. 15, No. 1, pp. 36-72, 2012.

[9] C.H. Huang, H.H. Wu, An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux by the conjugate gradient method, *Journal of Physics,* Vol. 39, No. 18, pp. 18-23, 2006.

[10] K.C. Liu, C.T. Lin, Solution of An Inverse Heat Conduction Problem In A Bi-Layered Spherical Tissue, *Journal of Computation and Methodology,* Vol. 58, No. 10, pp. 802-818, 2010.

[11] J.L. Battaglia, L. Lay, J.C. Batsale, Utilisation de modeles didentification non entiers pour laresolution de problemes inverse en conduction, *Journal of Thermal Science* , Vol. 39, No. 3, pp. 374-389, 2000.

[12] J.L. Battaglia, O. Cois, A. Puigsegur, A. Oustaloup, Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 44, No. 14, pp. 2671-2680, 2001.

[13] D.A. Murio, Time fractional IHCP with Caputo fractional derivatives, *Journal of Computer & Mathematics Applications,* Vol. 56, No. 9, pp. 2371-2381, 2008.

[14] H.R. Ghazizadeh, A. Azimi, M. Marefat, An inverse problem to estimate relaxation parameter and order of fractionality in fractional single-phase-lag heat equation, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 55, No. 8, pp. 2095-2101, 2010.

[15] H. Bayati, *Modeling non-Fourier thermal behavior based on variable-Order Single-Phase-Lag (VO SPL) model*, MSC Thesis, Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University, Ahvaz, 2012. (In Persian)

[16] K. Mitra, A. Kumar, A. Vedavarz, M.K. Moallemi, Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 117, No. 3, pp. 568-573, 1995.

[17] P.J. Antaki, New interpretation of non-Fourier heat conduction in processed meat, *International Journal of Heat and Mass Transfer,* Vol. 127, No. 2, pp. 189-193, 2005.

[18] H.R. Ghazizadeh, M. Maerefat, A. Azimi, Explicit and implicit finite difference schemes for fractional Cattaneo equation, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, No. 19, pp. 7042–7057, 2010.

[19] M.N. Ozisik, H.R.B. Orlande, *Inverse Heat Transfer*, Taylor & Francis, Vol. 55, No. 1, 2000.

[20] S.S. Roa, *Engineering Optimization: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 2000.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-09]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.6.1.0]