



بررسی تأثیر میدان مغناطیسی خارجی بر مشخصات اختلاطی سیال هیدرومغناطیسی همسانگرد دوبعدی

مهزاد چیت‌ساز¹، مانی فتحعلی^{2*}

1- دانشجوی دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

* تهران، صندوق پستی 16765-3381، mfathali@kntu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 21 مرداد 1396

پذیرش: 02 آذر 1396

ارائه در سایت: 24 آذر 1396

کلید واژگان:

هیدرومغناطیسی

جریان همسانگرد

میدان مغناطیسی خارجی

بازدهی اختلاط

روش شبه طیفی

چکیده

در این پژوهش به بررسی تأثیر میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت خارجی بر خصوصیات اختلاطی یک جریان همسانگرد دوبعدی هیدرومغناطیسی و مشخصه‌های دینامیکی و ساختاری آن پرداخته شده است. برای این منظور از شبیه‌سازی عددی مستقیم به روش شبه طیفی جهت حل معادلات هیدرومغناطیسی دوبعدی تراکم‌ناپذیر بهره گرفته شده است. محاسبات نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی خارجی ثابت و یکنواخت، سبب تغییر شکل گردابه‌ها در راستای خطوط میدان می‌شود و با افزایش شدت میدان مغناطیسی این تغییر شکل افزایش می‌یابد. این تغییرات، بر مشخصه‌های دینامیکی و همچنین بازده اختلاط جریان تأثیرگذار است. بررسی بازده اختلاط نشان داد که با افزایش شدت میدان مغناطیسی و یا کاهش ضریب انتشار مغناطیسی، بازده اختلاط سیال کاهش می‌یابد. جهت بررسی عوامل تأثیرگذار بر کاهش اختلاط، دینامیک گردابه‌های کوچک و بزرگ مورد توجه قرار گرفت. بررسی اثر میدان مغناطیسی خارجی بر نرخ اتلاف انرژی که با تغییرات دینامیک گردابه‌های کوچک در ارتباط است نشان می‌دهد که نرخ اتلاف انرژی ناشی از لزجت سیال در حضور میدان مغناطیسی خارجی نسبت به حالتی که میدان مغناطیسی حضور نداشته باشد کاهش می‌یابد. این در حالی است که نتایج نشان می‌دهد نرخ اتلاف انرژی کل در مقایسه با حالت عدم حضور میدان مغناطیسی روند افزایشی دارد. از طرفی جهت نشان دادن دینامیک گردابه‌های بزرگ، انرژی کل، جنبشی و مغناطیسی مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که در حضور میدان مغناطیسی خارجی، به دلیل وجود نیروی لورنتز، انرژی از میدان سیال به میدان مغناطیسی منتقل می‌گردد که هر دو روند دینامیک گردابه‌های کوچک و بزرگ سبب کاهش اختلاط سیال می‌شود.

The effect of external magnetic field on mixing characteristics of two-dimensional isotropic MHD

Mahzad Chitsaz, Mani Fathali*

Department of Aerospace Engineering, Khajeh Nasir Toosi University, Tehran, Iran

* P.O.B. 16765-3381, Tehran, Iran, mfathali@kntu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 12 August 2017
Accepted 23 November 2017
Available Online 15 December 2017

Keywords:

MHD
Isotropic flow
External magnetic field
Mixing efficiency
Pseudo-Spectral

ABSTRACT

In this article, the impact of external constant and uniform magnetic field is investigated on the mixing efficiency and also geometric and dynamic characteristics of two-dimensional isotropic MHD flow. For this purpose, the direct numerical simulation (DNS) is applied to two-dimensional incompressible magneto-hydrodynamic equations by pseudo-spectral method. Calculations show that external magnetic field causes deformation of vortexes and this deformation is increased by intensification of magnetic field. The dynamic characteristics of flow are affected by these deformations. Investigation of mixing efficiency shows that increase in magnitude of magnetic field or decrease in magnetic diffusivity coefficient causes mixing efficiency to reduce. For explore of the factors affecting on mixing reduction, small and large scale vortexes are studied. Investigation of external magnetic field effect on dissipated energy rate that is associated with changes in the dynamics of small vortexes shows that viscose dissipated energy rate is reduced in the presence of magnetic field compared to its absence. However results show that total dissipated energy rate is increased compared to no magnetic field presence. In order to demonstrate of large scale vertex dynamics, total kinematic and magnetic energy are considered. It is shown that in the presence of external magnetic field, energy is transferred from flow field to magnetic field due to Lorentz force that both leads to reduction of mixing efficiency.

1- مقدمه

در مواردی که دو بعد میدان بسیار بزرگتر از بعد سوم باشد می‌توان جریان آشفته را دوبعدی فرض نمود. برای مثال بررسی آشفته‌گی دوبعدی دینامیک مقیاس‌های بزرگ اتمسفر، در مطالعات هواشناسی کاربرد دارد؛ همچنین

مطالعه جریان‌های آشفته دوبعدی از دیدگاه کاربردی و پدیده‌شناسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اصولاً جریان‌های آشفته، سه‌بعدی هستند اما

Please cite this article using:

M. Chitsaz, M. Fathali, The effect of external magnetic field on mixing characteristics of two-dimensional isotropic MHD, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 12, pp. 319-327, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

این پارامتر که یکی از مشخصه‌های مهم در آشفتگی مقیاس کوچک به شمار می‌آید می‌تواند بر خصوصیات دینامیکی گردابه‌های مقیاس بزرگ و ساختارهای بارز⁶ نیز تأثیرگذار باشد [7,8].

از طرفی مشخصه‌های دینامیکی جریان هیدرومغناطیس می‌تواند براساس شرایط اولیه و همچنین خصوصیات میدان مغناطیسی متفاوت باشد. در پژوهش [9] تأثیر نیروی مغناطیسی خارجی بر آشفتگی جریان هیدرومغناطیس با رینولدز پایین و تأثیر پارامتر اندرکنش و میدان مغناطیسی بر میزان ناهمسانگردی⁷ جریان به صورت تجربی و تئوری مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که آشفتگی جریان با پارامتر اندرکنش متوسط یا بزرگ به گونه‌ای توسعه می‌یابد که مشخصه‌های دینامیکی آن حالتی شبه پایدار میان انتقال و اتلاف انرژی برقرار نماید. نتایج پژوهش [10] در مورد نقش ضریب انتشار مغناطیسی⁸ و ویسکوزیته سینماتیکی⁹ در میزان ناهمسانگردی ایجاد شده توسط میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی در یک جریان همسانگرد دوبعدی نشان داد که در میدان بدون اتلاف، میزان ناهمسانگردی در سیال بسیار کمتر از مقادیر محدود ضرایب فوق می‌باشد؛ همچنین نشان داده شد که ناهمسانگردی سیال هیدرومغناطیس از مقیاس‌های طولی کوچک آغاز می‌گردد. در مرجع [11] نیز اندرکنش میدان مغناطیسی مقیاس بزرگ در جریان‌های رینولدزهای بالا و میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی ضعیف مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که در چنین جریانی، میدان مغناطیسی القایی مقیاس کوچک به شدت بر کاهش ضریب پخش مغناطیسی و همچنین دینامیک جریان تأثیرگذار است.

از طرفی در حالتی که میدان مغناطیسی تنها به صورت یک شرط اولیه وارد شود، میدان مغناطیسی القایی توسط جریان هیدرومغناطیس تولید می‌گردد که سبب تفاوت‌های دینامیکی و ساختاری میان جریان هیدرومغناطیس و هیدرومغناطیس می‌شود. در پژوهش [12] تابع ساختار¹⁰ طولی و متقاطع در جریان‌های هیدرومغناطیس در رینولدزهای بالا و تفاوت‌های آن با جریان هیدرومغناطیس مورد مطالعه قرار گرفت و نشان داده شد که این تفاوت به دلیل اندرکنش نوسانات هم‌جهت و هم‌اندازه میدان مغناطیسی و جریان به وجود می‌آید. دیگر مطالعات انجام شده در این زمینه نشان می‌دهد که در نسبت‌های بالای انرژی جنبشی به مغناطیسی، فرایند توسعه به صورت شبه خود-متشابه¹¹ صورت می‌گیرد و در صورت کوچک بودن مقدار اولیه این پارامتر، رفتار آشفتگی صرفاً گذرا و سبب کاهش مقدار این نسبت خواهد شد؛ همچنین این پارامتر بر روند تولید و اتلاف انستروپی تأثیرگذار خواهد بود [13,14]. از طرفی روند خودمتشابه جریانی‌های هیدرومغناطیس در رینولدز بالا، یکی از عوامل مؤثر بر ساختارهای مغناطیسی بارز مقیاس بزرگ¹² است. در مرجع [15] با بررسی معادلات حاکم بر سیال هیدرومغناطیس نشان داده شد که عبارت کشش مغناطیسی¹³ عامل به وجود آورنده این ساختارهای بارز می‌باشد.

از دیگر عوامل تأثیرگذار بر ساختارهای بارز مغناطیسی بازاتصال¹⁴ مغناطیسی¹⁴ است که در اثر برخوردی خطوط میدان مغناطیسی، توپولوژی مغناطیسی تغییر یافته و انرژی مغناطیسی به انرژی جنبشی، حرارتی و شتابدهی ذرات تبدیل می‌گردد که در مطالعات انجام شده به نقش رینولدز

برخی از ویژگی‌های دینامیک مقیاس بزرگ خورشیدی با استفاده از معادلات دینامیک هیدرومغناطیس دوبعدی شبیه‌سازی می‌شود. در برخی از صنایع و شرایط آزمایشگاهی که در آن میدان مغناطیسی قوی وجود دارد نیز بعد سوم جریان آشفته قابل صرف نظر کردن است و خصوصیات دینامیکی و ساختاری جریان به صورت دوبعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در سیال هیدرومغناطیس، اندرکنش میدان مغناطیسی و سیال هادی جریان الکتریسته توسط علم دینامیک هیدرومغناطیس¹ که تلفیقی از مکانیک سیالات و الکترومغناطیس است مورد بررسی قرار می‌گیرد [1]. مطالعات انجام شده بر روی رفتار سیال هیدرومغناطیس دوبعدی نشان دهنده خصوصیات دینامیکی و ساختاری بسیار متفاوتی نسبت به سیالات غیرهادی است که به عوامل متعددی مانند مشخصات و هدایت‌پذیری سیال هیدرومغناطیس و شرایط اولیه و مرزی سیال و میدان مغناطیسی وابسته است. از آنجا که آزمایش‌های تجربی دارای محدودیت‌های بسیاری است، شبیه‌سازی عددی، جهت شناسایی رفتار و دینامیک سیالات هیدرومغناطیس در شرایط اولیه و مرزی متفاوت، بسیار کارآمد است. در بسیاری از پژوهش‌های پدیده‌شناسی، جهت تمرکز بر تأثیر متقابل میدان مغناطیسی و سیال هیدرومغناطیس و همچنین استفاده مؤثر از تئوری‌های آماری جهت تحلیل خصوصیات دینامیکی آن، شرط اولیه همسانگرد و شرط مرزی پربودیک مورد توجه قرار می‌گیرد.

مطالعات بر روی دینامیک جریان و نواحی منفرد که بیانگر ساختارهای مقیاس کوچک² در جریان آشفته هستند، نشان می‌دهد که در میدان دوبعدی هیدرومغناطیس با شرط اولیه همسانگرد³، آشفتگی جریان از نظر دینامیکی بسیار شبیه به جریان غیرهادی سه بعدی است. همچنین نواحی منفرد ایجاد شده در میدان هیدرومغناطیس دوبعدی بیش از میدان جریان غیرهادی دوبعدی و کمتر از میدان جریان غیرهادی سه بعدی است [2]. از طرفی در پژوهش [3] نشان داده شده که در پارامتر اندرکنش⁴ کم، رفتار جریان هیدرومغناطیس شبه دوبعدی با جریان هیدرومغناطیس دوبعدی مطابقت دارد و با افزایش پارامتر اندرکنش، خصوصیات آن از حالت دوبعدی به سمت جریان سه بعدی تمایل پیدا می‌کند.

مطالعاتی که بر روی آبشار انرژی میدان هیدرومغناطیس دوبعدی انجام شده است نشان می‌دهد که روند انتقال انرژی در سیال هیدرومغناطیس با روند آبشار معکوس انرژی در سیال غیرهادی متفاوت است. در مرجع [4] نشان داده شد که در یک نسبت بحرانی نیروی مغناطیسی به نیروی مکانیکی، روند آبشار انرژی معکوس جریان تغییر یافته و انتقال انرژی از گردابه‌های بزرگ به گردابه‌های کوچک خواهد بود. این تفاوت در اثر تبادل بسیار پیچیده انرژی جنبشی و مغناطیسی در مقیاس‌های مختلف ایجاد می‌گردد که در مرجع [5] نحوه انتقال انرژی لایه به لایه⁵ و همچنین نرخ آبشار انرژی به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است؛ در پژوهش [6] نیز نشان داده شد که انتقال انرژی در پارامترهای اندرکنش کم روندی متفاوت در مقایسه با پارامترهای اندرکنش بالا دارد به گونه‌ای که شیب آبشار انرژی در مقادیر کم از روابط توانی و در مقادیر بالا از رابطه نمایی تبعیت می‌کند. همچنین تحقیقات نشان داده است که در سیال هیدرومغناطیس، انتقال خالص انرژی از انرژی جنبشی به انرژی مغناطیسی انجام می‌پذیرد؛ همچنین نرخ اتلاف انرژی کل روندی متفاوت و افزایشی نسبت به سیال غیرهادی دارد.

¹ Magnetohydrodynamics (MHD)

² small scale

³ Isotropic initial condition

⁴ Interaction parameter

⁵ shell to shell

⁶ coherent structure

⁷ anisotropy

⁸ magnetic diffusivity

⁹ Kinematic viscosity

¹⁰ structure functions

¹¹ quasi-self similar

¹² large coherent magnetic structures

¹³ Magnetic stretching

¹⁴ Magnetic reconnection

$$J = \nabla \times b \quad (1-ه)$$

$$\lambda = (\mu\sigma)^{-1} \quad (1-و)$$

که ω میدان چرخش، U میدان سرعت، b میدان مغناطیسی، J چگالی جریان¹ و λ ضریب انتشار مغناطیسی می‌باشد. همچنین معادله (1-د) طبیعت سلنوییدی میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد [22]. همان‌طور که در معادله (1-ب) ملاحظه می‌شود، اولین عبارت طرف راست، عامل ایجاد نیروی الکترومغناطیسی القایی است که به دلیل حرکت نسبی سیال هادی و میدان مغناطیسی به وجود می‌آید و سبب تغییر راستای میدان مغناطیسی در جهت حرکت سیال می‌گردد. تغییر راستای میدان مغناطیسی و در نتیجه ایجاد چگالی جریان، سبب ایجاد نیروی لورنتز² در معادله مومنتوم می‌شود که جهت آن خلاف جهت حرکت نسبی جریان و میدان مغناطیسی خواهد بود. بنابراین تأثیر میدان مغناطیسی القایی و نیروی لورنتز همواره در جهت کاهش حرکت نسبی سیال و میدان مغناطیسی می‌باشد که این عامل خود سبب ایجاد ناهمسانگردی و تغییر رفتار سیال در مقیاس کوچک و بزرگ و در نتیجه مشخصه‌های اختلاطی سیال می‌گردد [22].

3- توصیف مسئله

3-1- شرط اولیه

در این پژوهش، اندرکنش میدان مغناطیسی خارجی ثابت یکنواخت و جریان هیدرومغناطیس دو بعدی با شرط میدان چرخش اولیه همسانگرد، یک شبیه‌سازی می‌گردد. باید در نظر داشت که جریان همگن همسانگرد، یک جریان ایده‌آل است که در طبیعت و در مقیاس‌های بزرگ رخ نمی‌دهد؛ با این حال بسیاری از تحقیقات عددی و حتی تجربی بر روی این جریان‌ها انجام می‌پذیرد چرا که در جریان همسانگرد، بیشترین تقارن وجود دارد که به محققان اجازه استفاده از تئوری‌های آماری تحلیل را می‌دهد. جهت ایجاد اغتشاشات همسانگرد میدان چرخش اولیه، ابتدا با انتخاب طیف انرژی اولیه، میدان چرخش استخراج می‌گردد و سپس با توسعه این میدان همگن، میدان چرخش با توزیع طیف انرژی مطابق با تئوری بچلر³، به دست می‌آید. از طرفی جهت شناسایی مشخصات جریان هیدرومغناطیس، پارامترهای (2) تا (7) حائز اهمیت است [22,23].

$$l = \sqrt{\frac{E_v}{Z}} \quad (2)$$

$$\tau = \frac{l}{\sqrt{E_v}} \quad (3)$$

$$Re = \frac{Ul}{v} \quad (4)$$

$$Re_m = \frac{Ul}{\lambda} \quad (5)$$

$$Pr_m = \frac{v}{\lambda} \quad (6)$$

$$N = \frac{b^2 l}{\lambda U} \quad (7)$$

که E_v و Z به ترتیب انرژی جنبشی جریان مغشوش⁴ و انرژی انستروپی⁵ هستند که از روابط زیر به دست می‌آیند [23].

$$E_v = \frac{1}{2}((u^2) + (v^2)) \quad (8)$$

$$Z = \frac{1}{2}(\omega^2) \quad (9)$$

مغناطیسی و همچنین اتلاف انرژی جریان آشفته هیدرومغناطیس در ایجاد این پدیده و نقش متقابل آن در مشخصات دینامیکی سیال پرداخته شده است [14,16,17].

یکی دیگر از خصوصیات مهم جریان‌های آشفته در سیالات هیدرومغناطیس که در صنعت متالورژی و همچنین بهبود عملکرد پمپ‌های الکترومغناطیس و همزن‌های فلزات مایع کاربرد فراوانی دارد، مشخصات اختلاطی جریان در اثر نیروی مغناطیسی است [18]. بسیاری از پژوهش‌های صورت گرفته در این زمینه به صورت تجربی بر روی یک دستگاه مشخص انجام شده یا با شبیه‌سازی عددی و بررسی اسکالره‌های غیرفعال در سیال، روند اختلاط در اثر میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار گرفته است و در پژوهش‌های اندکی به صورت عددی و تحلیل دینامیک و ساختار جریان به آن پرداخته شده است [19-21]. این در حالی است که حل عددی و همچنین تحلیل تأثیر میدان مغناطیسی بر مشخصات اختلاطی سیال از طریق بررسی تغییرات مشخصات دینامیکی و ساختاری سیال، می‌تواند در پدیده‌شناسی و همچنین پیش‌بینی و تحلیل رفتار اختلاطی تجهیزات صنعتی و همچنین برخی از پدیده‌های طبیعی مؤثر باشد؛ از این رو نیاز است تا پژوهش‌های عددی بیشتری با تمرکز مستقیم بر روی مشخصات اختلاطی سیال و پدیده شناسی آن، تحت تأثیر شرایط اولیه مختلف جریان و میدان مغناطیسی و اندرکنش آن‌ها صورت گیرد.

در این پژوهش با بررسی پیچیدگی‌های ناشی از میدان مغناطیسی القایی و اندرکنش آن با جریان و همچنین تحلیل دینامیک و ساختار سیال در مقیاس‌های کوچک و بزرگ، تأثیر میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت بر مشخصات اختلاطی سیال هیدرومغناطیس همسانگرد دوبعدی با رینولدز متوسط و عوامل مؤثر بر آن، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه در اختلاط یک سیال، نیاز است که مشخصات سیال در هر دو مقیاس کوچک و بزرگ مورد بررسی قرار گیرد، از حل عددی مستقیم بهره گرفته شده است. جهت این کار، در بخش 2 معادلات دینامیکی سیال هیدرومغناطیس و همچنین معادله میدان مغناطیسی القایی معرفی می‌گردد. در بخش 3، به توصیف مسئله، معرفی پارامترهای اصلی در تعیین مشخصات جریان، تعیین شرایط مرزی و همچنین نحوه تولید شرایط اولیه پرداخته می‌شود. در بخش 4 و 5 روش حل عددی و نحوه اعتبارسنجی کد تدوین شده مورد توجه قرار می‌گیرد و در بخش 6 و 7 با بررسی روند توسعه میدان چرخش و همچنین تحلیل دینامیک گردابه‌های بزرگ و کوچک، تأثیر شدت میدان مغناطیسی بر بازده اختلاط و عوامل تأثیر گذار بر آن، بررسی می‌گردد.

2- معادلات دینامیکی

برای بررسی و شبیه‌سازی دینامیک حاکم بر سیال هیدرومغناطیس دو بعدی از ترکیب معادلات ناویر-استوکس در قالب معادلات میدان چرخش و معادلات ماکسول بهره گرفته شده است؛ لازم به ذکر است در سیال هیدرومغناطیس به دلیل رسانش بالای جریان الکتریسته، مقدار چگالی باردار سیال قابل صرف نظر است. این روابط در معادلات (1-الف) تا (1-و) نشان داده شده است [22].

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (U \times \omega - b \times J) + v \nabla^2 \omega \quad (1-الف)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla \times (U \times b) + \lambda \nabla^2 b \quad (1-ب)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (1-ج)$$

$$\nabla \cdot b = 0 \quad (1-د)$$

¹ current density

² Lorentz force

³ Batchelor

⁴ Turbulent kinetic energy

⁵ Enstrophy

است؛ همچنین برای جلوگیری از ایجاد ناهمسانگردی توسط شرایط مرزی، شرط مرزی میدان حل، دوبعدی پریودیک در نظر گرفته شده است. این بدان معنی است که میدان حل مورد بررسی بخشی بسیار کوچک از یک میدان بزرگ است و تنها عامل مؤثر در ایجاد ناهمسانگردی سیال، میدان مغناطیسی می‌باشد.

4- روش حل عددی

در این پژوهش برای بررسی خصوصیات اختلاطی سیال هیدرومغناطیس در اثر میدان مغناطیسی، از حل عددی مستقیم^۲ بهره گرفته شده است؛ همچنین با توجه به شرایط مرزی میدان حل و همچنین حساسیت زیاد این نوع جریان، روش حل شبه طیفی^۳، مناسب‌ترین و سریع‌ترین روش حل به نظر می‌رسد. در این روش، با استفاده از تبدیل فوریه، معادلات (1-الف) تا (1-د) به معادلات دیفراسیل معمولی^۴ (13-الف) تا (13-د) تبدیل می‌گردد.

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} = ik \times (\widehat{U \times \omega} - \widehat{b \times J}) - \nu k^2 \hat{\omega} \quad (13-الف)$$

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial t} = ik \times (\widehat{U \times b}) - \lambda k^2 \hat{b} \quad (13-ب)$$

$$ik \cdot U = 0 \quad (13-ج)$$

$$ik \cdot b = 0 \quad (13-د)$$

که در آن k عدد موج می‌باشد.

$$k = (k_x, k_y) \quad (14-الف)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (14-ب)$$

در روش طیفی، برای محاسبه ترم‌های غیرخطی معادلات (13-الف) و (13-ب)، نیاز به محاسبه انتگرال کانولوشن^۵ است. این امر باعث صرف هزینه محاسبات و زمان بسیار بالا است. بنابراین در روش شبه‌طیفی برای کاهش زمان محاسبه، عبارت غیرخطی در فضای فیزیکی محاسبه شده و سپس با گرفتن تبدیل فوریه به فضای فوریه انتقال می‌یابد. هرچند این روش باعث کاهش محسوس زمان محاسبات می‌شود، اما موجب پدیده هم‌اثرسازی^۶ می‌شود. بنابراین نیاز به حذف این تأثیر نامطلوب است که برای این کار از روشی موسوم به قانون '2/3' بهره گرفته شده است؛ در نهایت معادلات (13-الف) و (13-ب) با استفاده از روش رانگ کوتاه مرتبه چهار^۷ انتگرال‌گیری زمانی می‌گردد [25,26].

5- اعتبارسنجی

در این پژوهش، جهت شبیه‌سازی جریان هیدرومغناطیس با شرایط اولیه و مرزی ذکر شده، کدنویسی عددی معادلات ارائه شده در بخش‌های 2 تا 4، در محیط برنامه‌نویسی متلب انجام گردید. همچنین برای اطمینان از درستی نتایج کد هیدرومغناطیس ایجاد شده، نمودارهای انرژی کل، جنبشی و مغناطیس با شرایط اولیه ارسزاگ-تانگ^۸ که در مرجع [27] ارائه شده است، مقایسه گردید. در جریان هیدرومغناطیس، انرژی جنبشی، انرژی مغناطیسی و انرژی کل به ترتیب از معادلات (15)، (16) و (17) به دست می‌آید [27].

$$E_v = \frac{1}{2} (2\pi)^{-2} \iint U^2 dx dy \quad (15)$$

$$E_m = \frac{1}{2} (2\pi)^{-2} \iint b^2 dx dy \quad (16)$$

در رینولدز مغناطیسی Re_m ، بزرگی مقدار القای نیروی الکترومغناطیس نسبت به میرایی میدان مغناطیسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در صورتی که رینولدز مغناطیسی بزرگ باشد (سیال با هدایت پذیری بالا) یک اندرکنش دو طرفه بین U و b به وجود می‌آید؛ در این حالت میدان مغناطیسی به واسطه عبارت القای مغناطیسی در راستای میدان سرعت کشیده می‌شود؛ از طرفی میدان مغناطیسی از طریق نیروی لورنتز بر سرعت تأثیر می‌گذارد و با آن مقابله می‌کند. در حالتی که Re_m کوچک باشد، از عبارت القای مغناطیسی می‌توان صرف‌نظر نمود. با این حال میدان مغناطیسی همچنان از طریق نیروی حجمی لورنتز بر میدان سرعت اثر می‌گذارد و سبب کاهش حرکت نسبی سیال هیدرومغناطیس و میدان مغناطیسی می‌گردد. یکی دیگر از پارامترهای مهم در تعیین مشخصات سیال، پارامتر اندرکنش است که بیانگر نسبت نیروی لورنتز به نیروی انتقالی^۱ سرعت می‌باشد و در رابطه (7) نشان داده شده است.

در این پژوهش، میدان مغناطیسی خارجی یکنواخت، ثابت و بدون اغتشاشات اولیه در جهت $+y$ به میدان جریان هیدرومغناطیس با رینولدز مغناطیسی متوسط وارد می‌شود که به معنی تأثیر هر سه پارامتر میدان مغناطیسی القایی، نیروی لورنتز و میرایی میدان مغناطیسی بر دینامیک جریان می‌باشد.

3-1-1- استخراج میدان چرخش از طیف انرژی جنبشی

برای آماده‌سازی ایجاد شرط اولیه، طیف انرژی جنبشی اغتشاشات میدان سرعت از رابطه (10) به دست می‌آید [24].

$$E(k, 0) = \frac{Q}{k_p} \left(\frac{k}{k_p} \right)^7 \exp \left[-3.5 \left(\frac{k}{k_p} \right)^2 \right] \quad (10)$$

$$l = \sqrt{\frac{7}{8}} k_p^{-1} \quad (11)$$

که k_p عدد موج مربوط به بیشینه طیف انرژی جنبشی است. این پارامتر تعیین کننده طول انتگرالی شرط اولیه میدان جریان است، به طوری که هر چه k_p بزرگ‌تر باشد طول انتگرالی برای میدان شرط اولیه، که براساس طیف انرژی جنبشی متناظر تولید می‌شود، کوچک‌تر خواهد بود. پس از محاسبه طیف انرژی جنبشی، میدان چرخش از رابطه (12) استخراج می‌گردد.

$$\hat{\omega}(k, 0) = E(k, 0) e^{i2\pi\theta} \quad (12)$$

که θ عددی تصادفی بین صفر و یک خواهد بود.

3-1-2- توسعه میدان همگن و همسانگرد

از آنجا که مدت زمانی طول خواهد کشید تا میدان شرایط اولیه تولید شده از حالت گذرا به آشفتگی کاملاً توسعه یافته برسد و توزیع طیف انرژی به توزیع طیف انرژی واقعی نزدیک و شکل گردابه‌ها طبیعی شود، نیاز است میدان حاصل از شرایط اولیه، با طول انتگرالی کوچک‌تر از مقدار موردنظر، در یک پیش محاسبه عددی حل گردد تا میدان به طول انتگرالی مورد نظر برسد و شیب طیف انرژی با شیب ارائه شده در تئوری بچلر همخوانی پیدا کند؛ پس از این مرحله میدان را تا سطح انرژی مورد نیاز نرمالایز کرده و میدان چرخش حاصل خواهد شد. میدان چرخش در زمان اولیه و ساختار همسانگرد آن، در "شکل 1" قابل مشاهده است [24].

3-2- شرط مرزی

در این پژوهش، عرض و طول کل میدان برابر با مقدار 2π در نظر گرفته شده

¹ convection

² Direct numerical simulation (DNS)

³ Pseudo-spectral

⁴ Ordinary Differential Equations (ODE)

⁵ Convolution

⁶ Aliasing

⁷ Fourth- order runge- kutta

⁸ Orszag-Tang initial condition

است. همان‌طور که مشاهده می‌شود میدان مغناطیسی سبب تغییر ساختار و توپولوژی میدان چرخش و همچنین کشیدگی گردابه‌ها و ناهمسانگردی جریان در راستای خطوط میدان مغناطیسی می‌گردد و این ناهمسانگردی با افزایش شدت میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد.

تغییر دینامیک جریان و توپولوژی ساختار میدان چرخش توسط میدان مغناطیسی خارجی، بر بسیاری از خصوصیات مهم سیال، از جمله مشخصات اختلاطی سیال تأثیرگذار است. یکی از مهم‌ترین پارامترهای اختلاطی جریان که در بررسی آشفتگی بسیار مورد توجه قرار می‌گیرد، بازده اختلاط است. به‌طور کلی، اختلاط در یک میدان جریان، در اثر کشش و خمش^۱ یک گردابه در ارتباط با گردابه‌های دیگر ایجاد می‌شود. در جریان‌های دوبعدی کشش گردابه‌های^۲ وجود ندارد، ولی از آن‌جا که خطوط هم‌تراز چرخش همانند خطوط مادی^۳ عمل می‌کنند، سبب می‌شود گردابه‌ها با گذشت زمان به‌صورت رشته‌های نازک و مارپیچ تغییر شکل دهند که این فرایند رشته‌ای شدن^۴ گردابه‌ها نامیده می‌شود که توسط عبارت اول سمت راست معادله (18) نشان داده شده است [23].

فرایند رشته‌ای شدن گردابه‌ها، که یک فرآیند غیرلزج است، تولید و کنترل میدان کرنش را برعهده دارد و به همراه فرسایش، سبب تولید گردابان چرخش در میدان جریان آشفته دوبعدی می‌شود. آخرین عبارت سمت راست، نشان‌دهنده لزجت جریان است که نقش استهلاک گردابه‌های رشته‌ای را برعهده داشته و باعث کاهش گردابان چرخش می‌شود [29] همچنین در حضور میدان مغناطیسی، عبارت‌های دوم و سوم سمت راست معادله سبب

جدول 1 شرایط اولیه نمونه‌های حل

Table 1 initial conditions of test cases						
b_{ext}	Pr_m	ν	Re_m	Re	l	نمونه حل
0	-	0.005	6.2	62	0.027	1
1	0.1	0.005	6.2	62	0.027	2
2	0.1	0.005	6.2	62	0.027	3
3	0.1	0.005	6.2	62	0.027	4
1	1	0.005	62	62	0.027	5

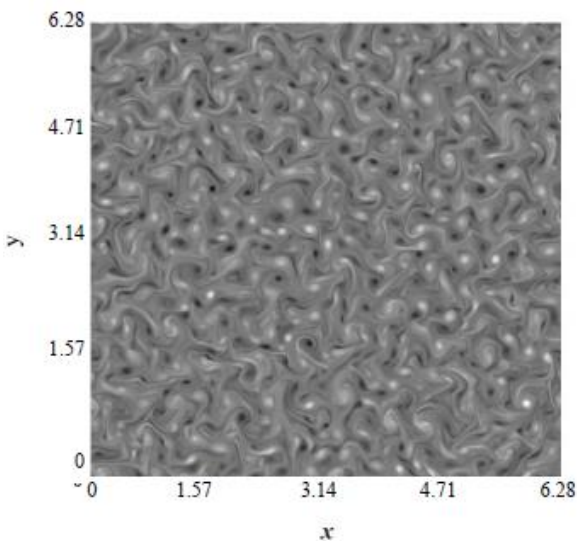


Fig. 3 Evolution of vorticity field after 30τ without magnetic field
شکل 3 توسعه میدان چرخش پس از 30τ بدون حضور میدان مغناطیسی

¹ stretch and folding
² vortex stretching
³ Material lines
⁴ filamentation

$$E_t = E_v + E_m \quad (17)$$

همان‌طور که در "شکل 2" ملاحظه می‌شود، نمودارهای حاصل از کد با نمودارهای ارائه شده در [27] تطبیق مناسبی دارد.

6- نتایج

میدان با وضوح 2048×2048 برای شرط اولیه همسانگرد و شدت و پراختل مغناطیسی متفاوت حل شده است. شرایط اولیه نمونه‌های مورد بررسی در جدول 1 نشان داده شده است. همان‌طور که در جدول 1 ملاحظه می‌شود، مقدار رینولدز مغناطیسی 6.2 است که در محدوده متوسط قرار می‌گیرد [28]. در هر یک از موارد ذکر شده، مسئله تا 30 برابر مقیاس زمانی حل شده است.

همان‌طور که در "شکل 3" قابل مشاهده است، در حالت نبود میدان مغناطیسی، میدان چرخش حالت همسانگرد خود را حفظ می‌کند ولی به دلیل آشپار انرژی معکوس، مقیاس‌های طولی افزایش می‌یابد. همچنین در "شکل 4" تأثیر میدان مغناطیسی بر توسعه میدان چرخش نشان داده شده

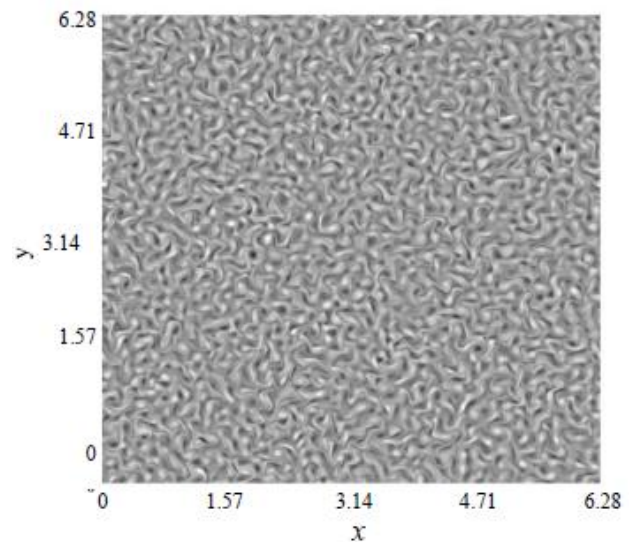


Fig. 1 Isotropic vorticity field in $(\tau = 0)$
شکل 1 میدان چرخش همسانگرد در زمان $(\tau = 0)$

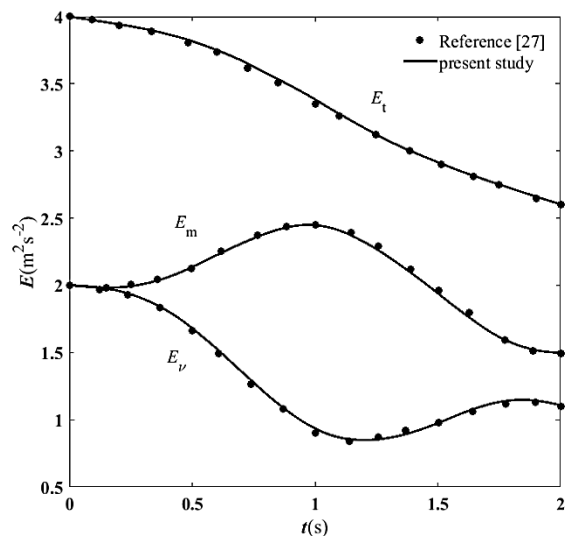


Fig. 2 Conformity of kinetic, magnetic and total Energy with reference [27]

شکل 2 مطابقت نتایج انرژی جنبشی، مغناطیسی و کل با مرجع [27]

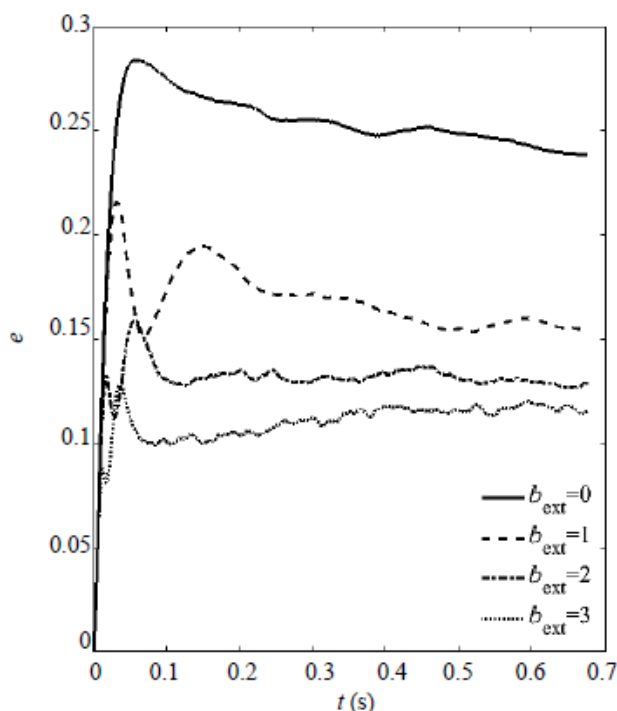


Fig. 5 Mixing efficiency changes of flow with external magnetic field $b_{ext} = 0, 1, 2, 3$

شکل 5 تغییرات بازده اختلاط جریان با میدان مغناطیسی خارجی $b_{ext} = 0, 1, 2, 3$

میدان مغناطیسی و تغییر شکل میدان چرخش، سبب افزایش زاویه میان گردادیان چرخش و بردار ویژه نرخ کرنش d_2 و کاهش همراستایی می‌شود که در نتیجه آن بازدهی اختلاط کاهش می‌یابد.

جهت بررسی عوامل موثر بر کاهش بازده اختلاط در حضور میدان مغناطیسی ثابت یکنواخت، می‌باید مشخصات دینامیکی مؤثر بر فرایند اختلاط مورد بررسی قرار گیرد و از آنجا که انتقال انرژی توسط گردابه‌های بزرگ و انتشار انرژی توسط گردابه‌های کوچک، دو عامل اصلی در اختلاط یک جریان به‌شمار می‌آید، تغییرات توپولوژی و دینامیک گردابه‌های کوچک و بزرگ جریان ناشی از میدان مغناطیسی خارجی، مورد بررسی قرار خواهد گرفت [31].

یکی از پارامترهایی که در بررسی دینامیک گردابه‌های کوچک و انتشار مولکولی مورد بررسی قرار می‌گیرد، نرخ اتلاف انرژی است که از رابطه (23) به‌دست می‌آید.

$$\epsilon(t) = \nu \iint \omega^2 dx dy + \lambda \iint j^2 dx dy \quad (23)$$

"شکل 7" نرخ اتلاف انرژی کل، مغناطیسی و لزج را در حضور میدان مغناطیسی خارجی و همچنین بدون حضور آن نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در صورت نبود میدان مغناطیسی، نرخ اتلاف انرژی روند نزولی دارد که این روند، در نتیجه آبخار معکوس انرژی حاصل می‌گردد [32]. در مقایسه، در حضور میدان مغناطیسی در لحظات اولیه، نرخ اتلاف انرژی به‌شدت افزایش می‌یابد که این افزایش با میزان ضریب انتشار مغناطیسی رابطه مستقیم دارد [8]. با تفکیک نرخ اتلاف انرژی کل به نرخ اتلاف انرژی مغناطیسی و نرخ اتلاف ناشی از لزجت سیال مشاهده می‌شود که نرخ اتلاف انرژی مغناطیسی بسیار بیشتر از نرخ اتلاف انرژی ناشی از لزجت سیال است و به‌دلیل نرخ افزایشی اتلاف انرژی مغناطیسی، نرخ اتلاف انرژی کل نیز در حضور میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد. از طرفی تغییر ساختار و

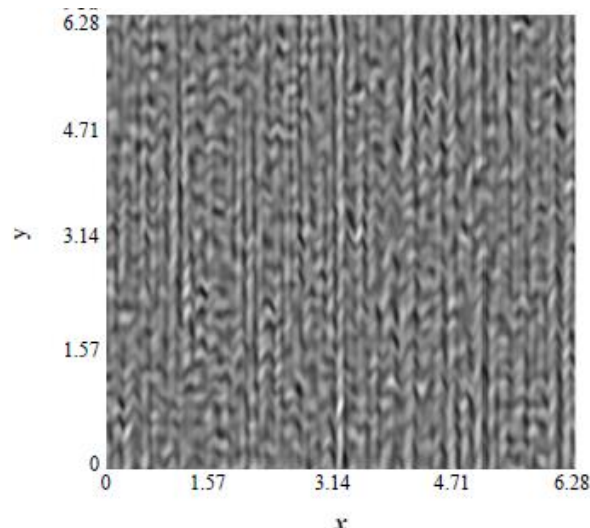


Fig. 4 Evolution of vorticity field after 30τ with external magnetic field ($b_{ext} = 3$)

شکل 4 توسعه میدان چرخش پس از 30τ با میدان مغناطیسی خارجی ($b_{ext} = 3$)

تغییر شکل گردابه در راستای نیروی مغناطیسی خارجی می‌شود [23].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \cdot \nabla\right) \nabla \omega = -\nabla U \cdot \nabla \omega + (b \cdot \nabla) \nabla J + \nabla b \cdot \nabla J + \nu \nabla^2 (\nabla \omega) \quad (18)$$

از طرفی بازده اختلاط به‌صورت زاویه بین گردادیان چرخش و بردارهای ویژه نرخ تانسور کرنش تعریف می‌شود که نشان‌دهنده میزان تولید گردادیان چرخش و در ارتباط با تولید گردابه رشته‌ای است و به‌صورت رابطه (19) نشان داده می‌شود [30].

$$e = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\alpha) \quad (19)$$

که α زاویه بین $\nabla \omega$ و بردار ویژه نرخ کرنش d_2 است و d_2 نیز به‌صورت معادله (20) نشان داده می‌شود.

$$d_2 = \left[\frac{-s_{12}}{\sqrt{s_{11}^2 + s_{12}^2} + s_{11}} \right] \quad (20)$$

$$s_{11} = \frac{2\partial u}{\partial x} \quad (21)$$

$$s_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (22)$$

در "شکل 5" نمودار بازدهی اختلاط که براساس رابطه (19) محاسبه شده، نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود افزایش شدت میدان مغناطیسی سبب کاهش بازده اختلاط می‌شود. این روند به این معناست که تأثیر میدان مغناطیسی بر روی گردادیان میدان چرخش در جهت ناهمراستایی با بردار ویژه نرخ کرنش است.

حضور میدان مغناطیسی خارجی سبب تغییر شکل گردابه در جهت میدان مغناطیسی و در نتیجه جهت‌دار شدن بردار گردادیان چرخش خواهد شد. این موضوع منجر به کاهش بازده اختلاط می‌شود. همچنین بررسی تأثیر ضریب انتشار مغناطیسی بر بازده اختلاط نشان می‌دهد که با کاهش ضریب انتشار مغناطیسی و در نتیجه کاهش میرایی میدان مغناطیسی، بازده اختلاط کاهش می‌یابد. این نشان‌دهنده آن است که عامل اصلی کاهش بازدهی اختلاط، تأثیر میدان مغناطیسی بر جهت‌گیری میدان چرخش می‌باشد. جهت صحت این موضوع می‌توان از تابع چگالی احتمال زاویه 2α استفاده نمود.

"شکل 6" تابع چگالی زاویه 2α را برای جریان با میدان مغناطیسی خارجی 0، 1 و 3 نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود افزایش

آن است. در "شکل 8" انرژی کل در حالت $b_{ext} = 1$ در ابتدا بیشتر از انرژی سیال در نبود میدان مغناطیسی است ولی در انتهای حل، به مقدار کمتری نسبت به انرژی سیال در $b_{ext} = 0$ می‌رسد. با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان نتیجه گرفت در حضور میدان مغناطیسی خارجی، نیروی لورنتز سبب انتقال انرژی از سیال به میدان

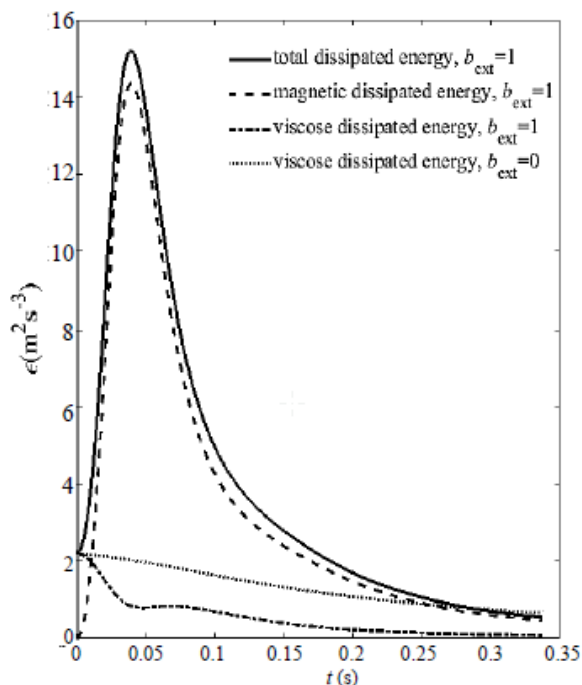


Fig. 7 Total, viscous & magnetic dissipated energy rate
شکل 7 نرخ اتلاف انرژی کل، لزج و مغناطیسی

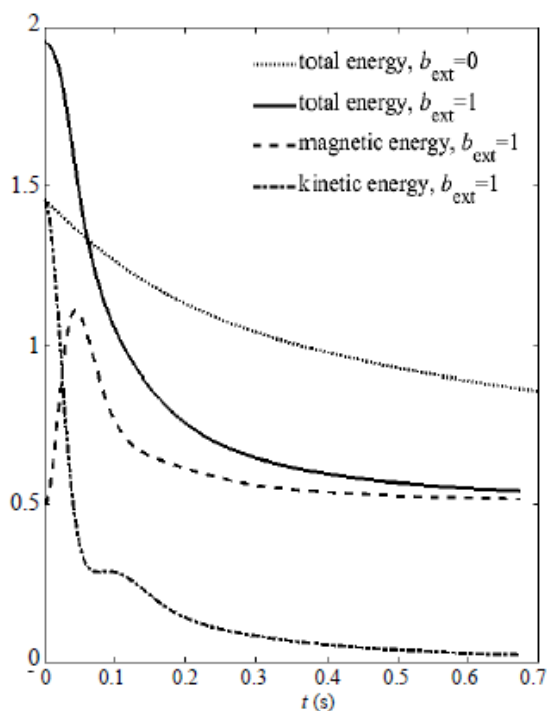


Fig. 8 Total energy and energy transfer between the kinetic and magnetic components in MHD
شکل 8 انرژی کل و انتقال انرژی میان انرژی جنبشی و مغناطیسی در سیال هیدرومغناطیس

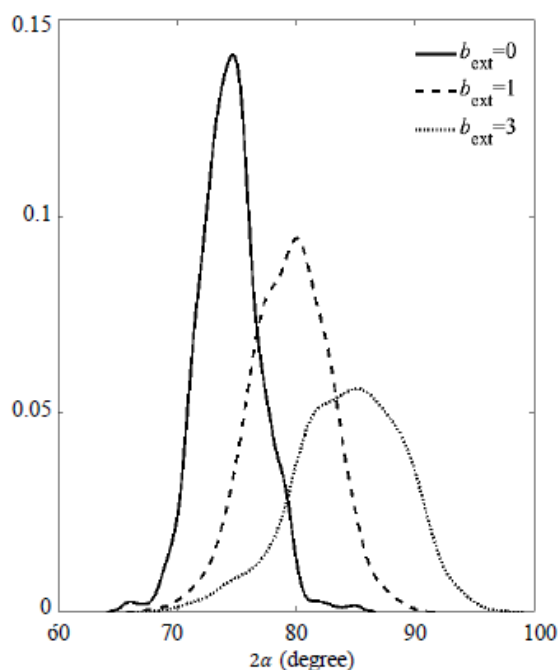


Fig. 6. The probability density function of 2α with external magnetic field ($b_y = 0, 1, 3$)
شکل 6 تابع چگالی احتمال 2α با میدان مغناطیسی خارجی ($b_y = 0, 1, 3$)

کشیدگی میدان چرخش در اثر میدان مغناطیسی و همچنین انتقال بخشی از انرژی گردابه‌های کوچک به میدان مغناطیسی، موجب کاهش نرخ اتلاف انرژی ناشی از لزجت سیال نسبت به حالتی که در آن میدان مغناطیسی وجود ندارد، می‌گردد. این تغییرات به‌وجود آمده در نرخ اتلاف انرژی و همچنین دینامیک گردابه‌های کوچک می‌تواند بر خصوصیات دینامیکی گردابه‌های بزرگ نیز تأثیرگذار باشد.

یکی از مشخصه‌هایی که جهت توصیف دینامیک گردابه‌های بزرگ و همچنین میزان اختلاط مورد توجه قرار می‌گیرد، متوسط انرژی جنبشی سیال است [33]. در "شکل 8" انرژی کل، مغناطیسی و جنبشی سیال در حالت $b_{ext} = 1$ و همچنین انرژی جنبشی سیال بدون وجود میدان مغناطیسی نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در حضور میدان مغناطیسی، انرژی از سیال به میدان مغناطیسی منتقل می‌شود. این موضوع را می‌توان با استفاده از معادلات (24) و (25) تحلیل نمود. این معادلات به ترتیب نرخ انرژی جنبشی سیال و نرخ انرژی مغناطیسی را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در هر دو معادله عبارت $U \cdot (J \times b)$ با علامت متفاوت ظاهر شده است که شامل نیروی لورنتز و میدان سرعت می‌باشد و عامل انتقال انرژی از جریان به میدان مغناطیسی به‌شمار می‌آید [1]. از آن‌جا که نیروی لورنتز همواره با حرکت نسبی سیال نسبت به میدان مغناطیسی مخالفت می‌کند، سبب کاهش انرژی جنبشی سیال و در نتیجه افزایش انرژی مغناطیسی می‌گردد که با مرجع [7] نیز همخوانی دارد.

$$\frac{DE_v}{Dt} = U \cdot (-\nabla P + \nu \nabla^2 U) + U \cdot (J \times b) \quad (24)$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = \nabla \cdot [(U \times b) \times b] + \lambda b \cdot \nabla^2 b - U \cdot (J \times b) \quad (25)$$

با توجه به نرخ بالای اتلاف انرژی مغناطیسی نسبت به نرخ اتلاف ناشی از لزجت سیال و نیز انتقال انرژی از سیال به میدان مغناطیسی، نرخ کاهش انرژی جنبشی و انرژی کل در حضور میدان مغناطیسی، بسیار بیشتر از نبود

J	چگالی جریان (Am^{-2})	مغناطیسی می‌گردد و این خود سبب کاهش انرژی جنبشی و در نتیجه میزان انتقال انرژی توسط گردابه‌های بزرگ و همچنین نرخ اتلاف انرژی سیال و انتشار مولکولی گردابه‌های مقیاس کوچک می‌گردد که هر دو در کاهش بازده اختلاط سیال هیدرومغناطیس مؤثر است.
k	بردار عدد موج (m^{-1})	
k_p	عدد موج طول انتگرالی میدان جریان (m^{-1})	
l	طول انتگرالی میدان جریان (m)	
N	پارمتر اندرکنش	
P	فشار ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)	
Pr	عدد پراوتل	
Pr_m	عدد پراوتل مغناطیسی	
Re	عدد رینولدز	
Re_m	عدد رینولدز مغناطیسی	
u	مولفه سرعت عمود بر میدان مغناطیسی خارجی (ms^{-1})	
U	بردار میدان سرعت جریان (ms^{-1})	
v	مولفه سرعت در جهت بر میدان مغناطیسی خارجی (ms^{-1})	
Z	انستروپی (s^{-2})	
علایم یونانی		
α	زاویه بین گرادیان چرخش و بردار ویژه نرخ کرنش (deg)	
σ	ضریب هدایت پذیری الکتریکی ($\text{kgm}^3\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$)	
ϵ	نرخ اتلاف انرژی (m^2s^{-3})	
θ	عدد تصادفی بین 0 و 1	
λ	ضریب انتشار مغناطیسی (m^2s^{-1})	
μ	ضریب نفوذ پذیری ($\text{kgms}^{-2}\text{A}^{-2}$)	
ν	ویسکوزیته سینماتیکی (m^2s^{-1})	
τ	مقیاس زمانی (s)	
τ_m	زمان میرایی ژول (s)	
ω	چرخش (s^{-1})	

7- نتیجه گیری

در این پژوهش به بررسی تأثیر میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت خارجی بر مشخصه‌های دینامیکی و ساختاری مؤثر بر اختلاط یک جریان همسانگرد دوبعدی هیدرومغناطیس پرداخته شد. نتایج حاصل از حل عددی مستقیم معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر و معادله القای نیروی مغناطیسی دوبعدی نشان داد که وجود میدان مغناطیسی خارجی ثابت و یکنواخت سبب می‌شود تا میدان چرخش در راستای خطوط میدان تغییر شکل دهد و با افزایش شدت میدان مغناطیسی، این تغییر شکل افزایش می‌یابد. در این پژوهش نشان داده شد که تغییر توپولوژی میدان چرخش، تحت تأثیر میدان مغناطیسی، سبب تغییرات اساسی خصوصیات جریان می‌گردد که می‌تواند بر بازده اختلاط که خود یکی از فاکتورهای مورد توجه در جریان‌های آشفته و کاربردهای صنعتی است، تأثیرگذار باشد. این موضوع با ترسیم بازده اختلاط و زاویه گرادیان چرخش با بردار ویژه نرخ کرنش مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که با افزایش شدت میدان مغناطیسی و یا کاهش ضریب انتشار مغناطیسی، بازده اختلاط سیال کاهش می‌یابد. از آنجا که دینامیک گردابه‌های کوچک و بزرگ، هر دو از عوامل مؤثر بر میزان و نحوه اختلاط سیال می‌باشند، برای بررسی عوامل مؤثر بر کاهش بازده اختلاط، رفتار گردابه‌های مقیاس کوچک و بزرگ و تأثیر آن بر اختلاط سیال مورد مطالعه قرار گرفت.

جهت بررسی تغییرات دینامیک گردابه‌های کوچک، نرخ اتلاف انرژی مورد مطالعه قرار گرفت و نشان داده شد که در حضور میدان مغناطیسی خارجی، نرخ اتلاف انرژی مغناطیسی سبب روند افزایشی نرخ اتلاف انرژی کل در لحظات اولیه و افزایش مقدار آن نسبت به حالت $b = 0$ می‌شود؛ با این وجود، نرخ اتلاف انرژی ناشی از لزجت سیال نسبت به حالت $b = 0$ کاهش می‌یابد که سبب کاهش انتشار مولکولی و در نتیجه کاهش اختلاط توسط گردابه‌های مقیاس کوچک می‌گردد. از طرفی جهت نشان دادن دینامیک گردابه‌های بزرگ، انرژی کل، جنبشی و مغناطیسی مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که در حضور میدان مغناطیسی خارجی، به دلیل وجود نیروی لورنتز، انرژی از میدان سیال به میدان مغناطیسی منتقل می‌شود که سبب کاهش انتقال انرژی در میدان چرخش سیال و در نتیجه کاهش اختلاط توسط گردابه‌های بزرگ می‌گردد.

8- فهرست علایم

b	میدان مغناطیسی به فرم سرعت آلفون (ms^{-1})
b_{ext}	میدان مغناطیسی خارجی به فرم سرعت آلفون (ms^{-1})
d_2	بردار ویژه نرخ کرنش
e	بازده اختلاط
E_u	انرژی جنبشی جریان (m^2s^{-2})
E_m	انرژی میدان مغناطیسی (m^2s^{-2})
E_t	انرژی کل (m^2s^{-2})
i	بردار یکه در جهت x
j	بردار یکه در جهت y

- 9- مراجع**
- [1] P. A. Davidson, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, First ed., pp. 1, 208-212, New York: Cambridge university press, 2001.
 - [2] A. Pouquet, On two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 88, No. 1, pp. 1-16, 1978.
 - [3] K. S. Reddy, M. K. Verma, Strong anisotropy in quasi-static magnetohydrodynamic turbulence for high interaction parameters, *Physics of Fluids*, Vol. 26, No. 2, pp. 025109, 2014.
 - [4] K. Seshasayanan, A. Alexakis, Critical behavior in the inverse to forward energy transition in two-dimensional magnetohydrodynamic flow, *Physical Review E*, Vol. 93, No. 1, pp. 013104, 2016.
 - [5] M. Lal, S. Agarwal, Mode to mode energy transfer in magneto hydrodynamic turbulence, *Proceedings of National Conference on Modern Trends in Analytical & Environmental Physics*, Moradabad, India: International Journal of Advance Research and Innovation, pp. 52-54, 2017.
 - [6] M. K. Verma, K. S. Reddy, Modeling quasi-static magnetohydrodynamic turbulence with variable energy flux, *Physics of Fluids*, Vol. 27, No. 2, pp. 025114, 2015.
 - [7] G. Dar, M. K. Verma, V. Eswaran, Energy transfer in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence: formalism and numerical results, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 157, No. 3, pp. 207-225, 2001.
 - [8] K. Seshasayanan, A. Alexakis, Transition from 2D HD to 2D MHD turbulence, *arXiv preprint arXiv:1509.02334*, 2015.
 - [9] A. Alemany, R. Moreau, P. Sulem, U. Frisch, Influence of an external magnetic field on homogeneous MHD turbulence, *Journal de Mecanique*, Vol. 18, No. 2, pp. 277-313, 1979.
 - [10] J. V. Shebalin, W. H. Matthaeus, D. Montgomery, Anisotropy in MHD turbulence due to a mean magnetic field, *Journal of Plasma Physics*, Vol. 29, No. 3, pp. 525-547, 1983.
 - [11] T. Kondić, D. W. Hughes, S. M. Tobias, The Decay of a Weak Large-Scale Magnetic Field in Two-dimensional Turbulence, *The Astrophysical Journal*, Vol. 823, No. 2, pp. 111, 2016.
 - [12] J. Friedrich, H. Homann, T. Schäfer, R. Grauer, Longitudinal and transverse structure functions in high Reynolds-number magneto-hydrodynamic turbulence, *New Journal of Physics*, Vol. 18, No. 12, pp. 125008, 2016.
 - [13] D. Biskamp, H. Welter, Dynamics of decaying two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence, *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, Vol. 1, No. 10, pp. 1964-1979, 1989.

- First ed., pp. 569-575, New York: Oxford University Press, 2015.
- [24] K. D. Mostafa, F. Mani, Numerical study of the impact of the initial turbulent integral length scale on the dynamics of a two dimensional shear-free turbulent mixing layer, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 113-123, 2014. (in persian فارسی)
- [25] S. A. Orszag, G. Patterson Jr, Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence, *Physical Review Letters*, Vol. 28, No. 2, pp. 76, 1972.
- [26] D. G. Fox, S. A. Orszag, Pseudospectral approximation to two-dimensional turbulence, *Journal of Computational Physics*, Vol. 11, No. 4, pp. 612-619, 1973.
- [27] S. A. Orszag, C.-M. Tang, Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 90, No. 1, pp. 129-143, 1979.
- [28] B. Knaepen, S. Kassinos, D. Carati, Magnetohydrodynamic turbulence at moderate magnetic Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 513, pp. 199-220, 2004.
- [29] B. Protas, A. Babiano, N. R. Kevlahan, On geometrical alignment properties of two-dimensional forced turbulence, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 128, No. 2, pp. 169-179, 1999.
- [30] M. Fathali, M. K. Deshiri, Sensitivity of the two-dimensional shearless mixing layer to the initial turbulent kinetic energy and integral length scale, *Physical Review E*, Vol. 93, No. 4, pp. 043122, 2016.
- [31] J. M. Ottino, *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport*, First ed., pp. 1-3, New York: Cambridge university press, 1989.
- [32] D. Biskamp, H. Welter, Dynamics of decaying two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence, 1988.
- [33] S. Delport, M. Baelmans, J. Meyers, Maximizing dissipation in a turbulent shear flow by optimal control of its initial state, *Physics of Fluids*, Vol. 23, No. 4, pp. 045105, 2011.
- [14] R. Kinney, J. McWilliams, T. Tajima, Coherent structures and turbulent cascades in two-dimensional incompressible magnetohydrodynamic turbulence, *Physics of Plasmas (1994-present)*, Vol. 2, No. 10, pp. 3623-3639, 1995.
- [15] A. Ishizawa, Y. Hattori, Large Coherent Structure Formation by Magnetic Stretching Term in Two-Dimensional MHD Turbulence, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 67, No. 12, pp. 4302-4303, 1998.
- [16] S. Servidio, W. Matthaeus, M. Shay, P. Cassak, P. Dmitruk, Magnetic reconnection in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence, *Physical review letters*, Vol. 102, No. 11, pp. 115003, 2009.
- [17] S. Servidio, W. Matthaeus, M. Shay, P. Dmitruk, P. Cassak, M. Wan, Statistics of magnetic reconnection in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence, *Physics of Plasmas (1994-present)*, Vol. 17, No. 3, pp. 032315, 2010.
- [18] C. Greif, D. Li, D. Schötzau, X. Wei, A mixed finite element method with exactly divergence-free velocities for incompressible magnetohydrodynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45, pp. 2840-2855, 2010.
- [19] E. Schuster, L. Luo, M. Krstić, MHD channel flow control in 2D: Mixing enhancement by boundary feedback, *Automatica*, Vol. 44, No. 10, pp. 2498-2507, 2008.
- [20] H. J. Kang, B. Choi, Development of the MHD micropump with mixing function, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 165, No. 2, pp. 439-445, 2011.
- [21] F. Yuan, K. Isaac, A study of MHD-based chaotic advection to enhance mixing in microfluidics using transient three dimensional CFD simulations, *Sensors and Actuators B: Chemical*, Vol. 238, pp. 226-238, 2017.
- [22] P. A. Davidson, *Turbulence in rotating, stratified and electrically Conducting Fluids*, First ed., pp. 129-132, New York: Cambridge University Press, 2013.
- [23] P. A. Davidson, *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*,