



## مدل سازی دینامیکی لغزش در گرفتن و جابجایی اجسام توسط انگشتان نرم

امین فخاری<sup>1</sup>، مهدی کشمیری<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

\* اصفهان، صندوق پستی 8415683111، mehdik@cc.iut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 26 اردیبهشت 1394  
پذیرش: 20 خرداد 1394  
ارائه در سایت: 13 تیر 1394

کلید واژگان:

انگشت نرم

سطح تماس

مدل سازی تماس

سطح محدود اصطکاکی

گرفتن و جابجایی

### چکیده

استفاده از انگشتان نرم باعث افزایش پایداری و چالاکی در گرفتن و جابجایی اجسام می‌شود. این امر به دلیل به وجود آمدن یک سطح تماس بین انگشت و جسم است. اگرچه پدیده لغزش نقش اساسی در گرفتن و جابجایی مقاوم و پایدار اجسام بازی می‌کند، ولی در اکثر تحقیقات گذشته در زمینه انگشتان نرم، فرض بر آن است که لغزشی بین انگشت و جسم رخ نمی‌دهد. در این مقاله، به مدل سازی دینامیکی لغزش در گرفتن و جابجایی توسط انگشتان نرم پرداخته می‌شود. به دلیل ایجاد سطح تماس بین انگشت نرم و جسم، یک ممان اصطکاکی به همراه نیروی اصطکاکی مماسی و نیروی عمودی در سطح تماس اعمال می‌شود. بنابراین، با استفاده از مفهوم سطح محدود اصطکاکی، یک روش جدید برای مدل سازی دینامیکی لغزش صفحه‌ای ارائه می‌شود. در این روش، روابط مساوی و نامساوی وضعیت‌های گوناگون تماس صفحه‌ای به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب متغیر تبدیل شده که این ضرایب بسته به شرایط لغزش تعیین می‌شوند. از این نوع مدل سازی دینامیکی نیروهای تماس می‌توان برای طراحی کنترل کننده‌هایی جهت حذف لغزش‌های ناخواسته که بین انگشت و جسم رخ می‌دهد، استفاده کرد. این روش برای مدل سازی دینامیکی و آنالیز لغزش در جابجایی یک جسم صلب با استفاده از یک انگشت نرم سه‌عضوی مورد استفاده قرار گرفته شده است. همچنین، به منظور افزایش دقت مدل سازی دینامیکی انگشت نرم، دینامیک انتهای نرم انگشت با دینامیک عضوهای صلب آن ترکیب شده است. رفتار دینامیکی این سیستم در شبیه سازی‌های عددی نشان داده شده است.

## Slippage Dynamic Modeling in Object Grasping and Manipulation with Soft Fingers

Amin Fakhari, Mehdi Keshmiri\*

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

\* P.O.B. 8415683111 Isfahan, Iran, mehdik@cc.iut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 16 May 2015  
Accepted 10 June 2015  
Available Online 04 July 2015

#### Keywords:

Soft Finger  
Contact Interface  
Contact Modeling  
Friction Limit Surface  
Grasping and Manipulation

### ABSTRACT

Using the soft fingers increases stability and dexterity in object grasping and manipulation. This is because of the enlarged contact interface between soft fingers and object. Although slippage phenomenon has a crucial role in robust grasping and stable manipulation, in most of the previous researches in the field of finger manipulation, it is assumed that the slippage between finger and object does not occur. In this paper, slippage dynamic modeling in object grasping and manipulation using soft fingers is studied. Because of the enlarged contact interface between soft fingers and object, a frictional moment along with tangential frictional force and normal force is applied on the contact interface. Therefore, a novel method for dynamic modeling of planar slippage using the concept of Friction Limit Surface is presented. In this method, equality and inequality relations of different states of planar contact are rewritten in the form of a single second-order differential equation with variable coefficients. These coefficients are determined based on the slippage conditions. This kind of dynamic modeling of contact forces can be used for designing the controllers to prevent the undesired slippage. The method is used in study of slippage analysis of a three-link soft finger manipulating a rigid object on a horizontal surface. In order to increase the accuracy of dynamic modeling of soft finger, dynamics of soft tip is integrated with the dynamic of finger linkage. Dynamic behavior of this system is shown in the numerical simulations.

### 1- مقدمه

زمینه‌های مختلف به‌ویژه رباتیک به منظور طراحی دستان رباتیکی چالاک و شبه‌انسان بوده است.

انتخاب یک مدل تماس مناسب، اولین قدم در آنالیز گرفتن و جابجایی اجسام است. مدل‌های تماس را می‌توان به دو گروه اصلی تماس جسم صلب یا تماس نقطه‌ای و تماس نرم تقسیم‌بندی کرد. بسیاری از تحقیقات گذشته

دستان انسان قادر به گرفتن و جابجایی اجسام مختلف بدون دانستن وزن و ضریب اصطکاک آن‌ها است. این توانایی، دستان انسان را به یکی از پیچیده‌ترین عضوهای بدن انسان تبدیل می‌کند. از این‌رو، بررسی جنبه‌های مختلف دستان انسان یکی از موضوعات جالب برای بسیاری از محققان در

Please cite this article using:

A. Fakhari, M. Keshmiri, Slippage Dynamic Modeling in Object Grasping and Manipulation with Soft Fingers, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 332-340, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

است. در ابتدا به بررسی مدل‌های مختلف تماس نرم پرداخته می‌شود. سپس، پس از بررسی لغزش یک‌بعدی، روشی جدید و عملی برای مدل‌سازی دینامیکی نیرو و ممان اصطکاکی تماس در لغزش صفحه‌ای با استفاده از مفهوم سطح محدود اصطکاکی ارائه می‌شود. سرانجام، معادلات دینامیکی سیستم انگشت نرم و جسم بدست آورده شده و به صورت عددی شبیه‌سازی می‌شود.

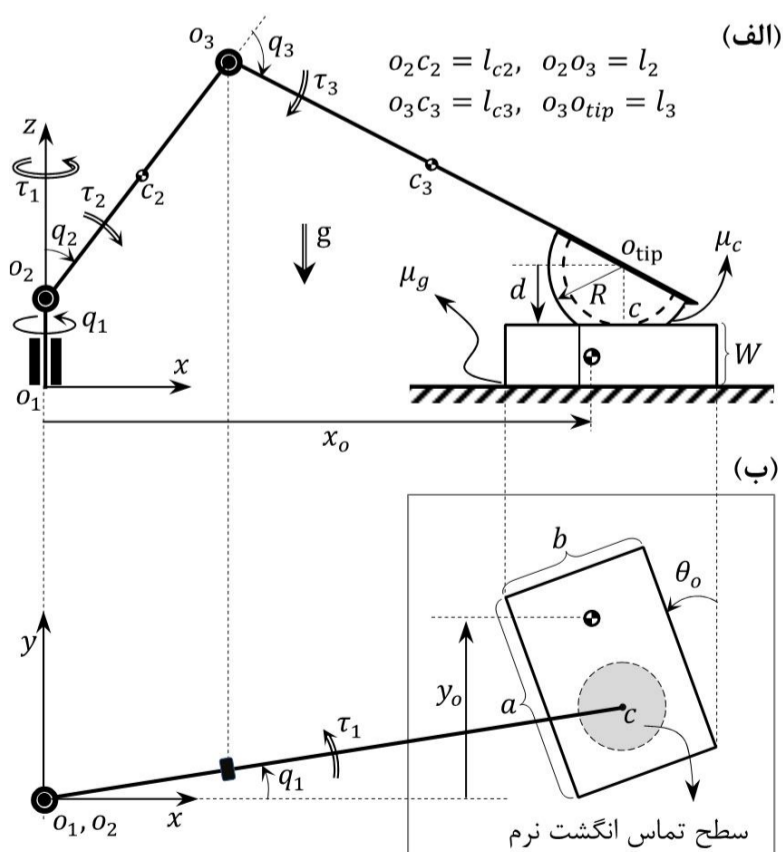
## 2- جابجایی یک جسم با استفاده از یک انگشت نرم سه‌عضوی

در این تحقیق، یک سیستم شامل یک انگشت نرم که در حال جابجایی یک جسم صلب بر روی یک صفحه افقی است، در نظر گرفته می‌شود. در شکل 1، نمای جانبی و نمای بالای این سیستم نشان داده شده است. انگشت نرم شامل سه عضو صلب و یک بخش نرم نیم‌کروی شکل در انتهای عضو سوم به منظور حرکت جسم بر روی صفحه افقی  $x-y$  است. به منظور بررسی کامل دینامیک انگشت نرم در حین جابجایی جسم، دینامیک انتهای نرم با دینامیک عضوهای انگشت ترکیب می‌شود. قبل از انتخاب یک مدل تماس برای مدل‌سازی تماس بین انتهای نرم و جسم، در ابتدا، انواع مدل‌های تماس نرم ارائه شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## 3- انواع مدل‌های تماس نرم

آنالیز گرفتن و جابجایی یک جسم با استفاده از دستان رباتیکی، قویاً به انتخاب یک مدل تماس مناسب بستگی دارد. هنگامی که تغییر شکل سر انگشتان قابل ملاحظه باشد، مدل تماس نرم باید مورد استفاده قرار گیرد. نرمی انگشتان می‌تواند باعث افزایش پایداری در گرفتن و افزایش چالاکی در جابجایی اجسام شود. مدل‌های تماس نرم مختلفی توسط محققان ارائه شده است. این مدل‌ها را می‌توان به دو دسته مدل‌های الاستیک خطی و مدل‌های الاستیک غیرخطی تقسیم‌بندی کرد.

اولین بار هرترز در سال 1882 تغییر شکل کوچک در تماس بین یک نیم‌کره از جنس یک ماده الاستیک خطی و یک صفحه صلب را به صورت آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار داد [14]. مدل تماس هرترزی یکی از اولین مدل‌های الاستیک خطی است که رابطه‌ای بین شعاع سطح تماس،  $a$ ، و نیروی عمودی تماس،  $N$ ، (شکل 2) را به صورت رابطه (1) بیان می‌کند.



شکل 1 نمایش یک انگشت نرم سه‌عضوی در حال جابجایی یک جسم صلب بر روی صفحه افقی، (الف) نمای جانبی، (ب) نمای بالا

بر روی گرفتن و جابجایی اجسام، بر اساس مدل تماس جسم صلب است. در این مدل، از تغییر شکل در سطح تماس صرف‌نظر شده و معمولاً قانون کلمب<sup>1</sup> برای مدل نیروی‌های اصطکاکی تماس استفاده می‌شود. مروری جامع بر آنالیز گرفتن و جابجایی اجسام با فرض مدل جسم صلب در مرجع [1] آمده است. باید در نظر داشت که هنگامی که تغییر شکل در سطح تماس قابل صرف‌نظر کردن نیست، این مدل قابل استفاده نیست.

در تماس نرم، سطح تماس ایجاد می‌شود؛ بنابراین، مشابه با حرکت صفحه‌ای جسم صلب، یک ممان اصطکاکی به همراه نیروی عمودی و نیروهای اصطکاکی مماسی در سطح تماس اعمال می‌شود. به جای مخروط اصطکاکی در تماس جسم صلب، سطح محدود اصطکاکی<sup>2</sup> برای تماس نرم تعریف می‌شود. سطح محدود اصطکاکی نگاشتی بین نیرو/ممان وارد شده بر سطح تماس و حرکت‌های لغزشی است. این معیار تعیین می‌کند که چه هنگام لغزش صفحه‌ای در سطح تماس دو جسم اتفاق می‌افتد. گویال و همکارانش [2] توصیفی از نیرو و ممان اصطکاکی در سطح تماس یک جسم صلب در حال لغزش بر روی یک صفحه ارائه کردند. هاو و کاتکوسکی [3] به بیان روشی‌هایی ساده و عملی برای محاسبه رابطه‌ی نیرو و لغزش پرداختند. آن‌ها به صورت تئوری و عملی نشان دادند که یک بیضی‌گون تقریب مناسبی از سطح محدود اصطکاکی در بیشتر موارد است. زاس و کائو [4] مدل تماس نرمی را برای محدوده وسیعی از مواد نرم پیشنهاد کردند. آن‌ها همچنین به ارائه رابطه‌ای برای سطح محدود اصطکاکی مربوط به سطح تماس دایروی یک انگشت نرم نیم‌کروی با یک صفحه صلب پرداختند.

تحقیقات قبلی بر روی دستان رباتیکی نرم را می‌توان به دو گروه مدل‌سازی تماس نرم و جابجایی توسط انگشتان نرم دسته‌بندی کرد. تحقیقات گروه اول بر روی توسعه یک مدل صریح و ریاضی از تماس نرم مواد نرم و یا انگشت انسان متمرکز می‌شود. تحقیقات گروه دوم بر روی آنالیز گرفتن و جابجایی با استفاده از انگشتان نرم متمرکز می‌شود. کیم [5] به آنالیز جابجایی یک جسم با استفاده از یک جفت انگشت نرم و فرض سیستم فنر و دمپر خطی برای سطوح تماس پرداخته است. اینو و هیروی دینامیک و کنترل موقعیت یک جسم در حین گرفتن و جابجایی با استفاده از انگشتان نرم در حالت دو بعدی [6] و سه بعدی [7] را مورد بررسی قرار داده است. آن‌ها از مدل توزیع موازی<sup>3</sup> برای مدل‌سازی تماس نرم استفاده کرده‌اند. آریموتو و همکارانش [9,8] مسئله کنترل گرفتن و جابجایی یک جسم توسط انگشتان نرم را با استفاده از فرض توزیع شعاعی<sup>4</sup> برای مدل تماس نرم مورد بررسی قرار داده‌اند. اگرچه لغزش بین انگشت و جسم نقش اساسی در گرفتن و جابجایی مقاوم و پایدار جسم بازی می‌کند، در اغلب تحقیقات گذشته فرض بر آن است که هیچگونه لغزشی بین انگشت نرم و جسم حین گرفتن و جابجایی رخ نمی‌دهد. هادیان و همکارانش [10,11] به مدل‌سازی لغزش یک‌بعدی در تماس بین یک انگشت صلب و جسم پرداختند. سانگ و همکارانش [12] روشی جدید و عملی برای پیش‌بینی و جبران لغزش در گرفتن یک جسم توسط دو انگشت صلب با انتهای نیم‌کروی شکل ارائه کردند. انگبرگ و میک [13] کنترل‌کننده‌ای برای حذف لغزش‌های ناخواسته و همچنین کمینه کردن نیروی اعمالی به اجسام در گرفتن توسط دستان مصنوعی طراحی کردند.

در این تحقیق، تاکید بر روی مدل‌سازی دینامیکی و آنالیز لغزش در جابجایی یک جسم صلب با استفاده از یک انگشت نرم بر روی یک صفحه افقی

1- Coulomb Law  
2- Friction Limit Surface  
3- Parallel-Distributed Model  
4- Radially-Distributed Model

دقیق‌ترین مدل‌های تماس نرم است که به صورت آزمایشگاهی برای انواع مختلف مواد نرم ارزیابی شده است [4]. بنابراین، این مدل تماس نرم برای تعیین رفتار الاستیک انگشت نرم در این تحقیق انتخاب شده است. به علاوه، یک دمپر ویسکوز خطی برای مدل کردن اثر استهلاک انگشت نرم، همانطور که در تحقیقات گذشته نیز فرض شده است [5,6]، در نظر گرفته شده است.

#### 4- مدل سازی دینامیکی نیروهای تماس 4-1- لغزش یک‌بعدی

هنگامی که دو جسم صلب در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند، از مدل اصطکاک کلمب می‌توان برای مدل‌سازی نیروهای اصطکاکی تماس استفاده کرد. اصطکاک کلمب یک مدل تقریبی است که نیروی اصطکاک خشک،  $f$ ، را به صورت رابطه (3) بیان می‌کند.

$$|f| \leq \mu N \quad (3)$$

در رابطه (3)،  $N$  نیروی عمودی تماس و  $\mu$  ضریب اصطکاک بین دو جسم در تماس است (شکل 3). به عبارت دیگر، اندازه نیروی اصطکاک از صفر تا  $\mu N$  تغییر می‌کند و جهت آن همیشه در جهت خلاف سرعت نسبی‌ای که دو جسم در غیاب اصطکاک می‌توانند داشته باشند،  $\dot{x}$ ، است. وضعیت‌های مختلف نیروی اصطکاک بین دو جسم صلب در تماس را می‌توان توسط رابطه (4) نشان داد.

$$\begin{cases} f = -\mu N \operatorname{sgn}(\dot{x}) & \dot{x} \neq 0 & \text{(لغزش)} \\ |f| < \mu N & \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0 & \text{(سکون)} \\ f = 0 & \dot{x} = 0, \ddot{x} \neq 0, \ddot{x}^- \neq 0 & \text{(تغییر جهت لغزش)} \\ |f| = \mu N & \dot{x} = 0, \ddot{x} \neq 0, \ddot{x}^- = 0 & \text{(آستانه لغزش)} \end{cases} \quad (4)$$

در رابطه (4)،  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  تابع علامت،  $\dot{x}$  شتاب جسم در لحظه  $t$  و  $\ddot{x}^-$  شتاب جسم در لحظه  $t - dt$  است [10,11]. در این رابطه، معادله اول مربوط به وضعیت لغزش، معادله دوم مربوط به وضعیت سکون، معادله سوم مربوط به وضعیتی که جهت لغزش عوض می‌شود و معادله چهارم مربوط به وضعیت آستانه لغزش است. این معادله‌ها را می‌توان ترکیب کرد و به صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای مدل‌سازی نیروهای تماس به صورت رابطه (5) بیان کرد [10,11].

$$\beta_1 \ddot{x} + [\beta_{21} \quad \beta_{22} \mu] \begin{bmatrix} f \\ N \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

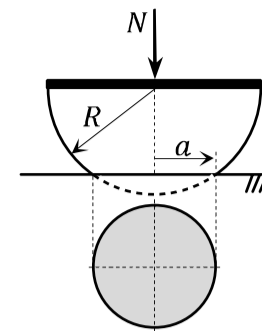
در رابطه (5)، پارامترهای  $\beta_1$ ،  $\beta_{21}$  و  $\beta_{22}$  را می‌توان از جدول 1 بر اساس وضعیت‌های گوناگون سرعت و شتاب نسبی اجسام در تماس تعیین کرد.

#### 4-2- لغزش دوبعدی (لغزش صفحه‌ای)

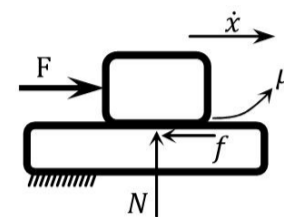
هنگامی که دو جسم صلب در تماس صفحه‌ای با یکدیگر قرار می‌گیرند (شکل 4)، سطح محدود اصطکاکی جایگزین مخروط اصطکاکی و مدل اصطکاک کلمب می‌شود. سطح محدود اصطکاکی نگاشتی بین نیرو/امان اعمال شده بر سطح تماس و حرکت‌های لغزشی است [2,3].

جدول 1 پارامترهای  $\beta_1$ ،  $\beta_{21}$  و  $\beta_{22}$  در وضعیت‌های گوناگون لغزش یک‌بعدی

$\dot{x} = 0, \ddot{x}^- = 0$	$\dot{x} = 0, \ddot{x}^- \neq 0$	$\dot{x} \neq 0$	$\beta_i$
آستانه لغزش به عقب	توقف لغزش	تغییر جهت لغزش	$\beta_1$
آستانه لغزش به جلو	توقف لغزش	تغییر جهت لغزش	$\beta_{21}$
سکون	توقف لغزش	تغییر جهت لغزش	$\beta_{22}$
0	0	0	$\operatorname{sgn}(\dot{x})$
1	0	1	شرط
1-	0	0	
$\ddot{x} < 0$	$\ddot{x} > 0$	$\ddot{x} \neq 0$	



شکل 2 انتهای نرم نیم‌کره‌ی شکل یک انگشت در تماس با یک سطح صلب تحت نیروی عمودی  $N$



شکل 3 نیروهای تماس دو جسم صلب در لغزش یک‌بعدی

$$a \propto N^{1/3} \quad (1)$$

به صورت آزمایشگاهی نشان داده شده است که مدل تماس هرگز در مورد تغییر شکل‌های بزرگ برای مواد الاستیک غیرخطی هنگامی که  $a/R \geq 0.3$  باشد، معتبر نیست [15]. در این نامساوی  $R$  شعاع نیم‌کره انتهای نرم انگشت است.

مدل‌های تماس غیرخطی را می‌توان به مدل‌های مستقل از زمان و مدل‌های وابسته به زمان یا ویسکوالاستیک<sup>1</sup> تقسیم‌بندی کرد. مدل تماس توانی<sup>2</sup> یک مدل تماس مستقل از زمان است که با استفاده از تئوری‌های مکانیک و ارزیابی‌های آزمایشی ارائه شده است [4,16,17]. این مدل، رابطه مدل تماس هرتری را نیز در بر گرفته و به صورت رابطه (2) ارائه می‌شود.

$$a = cN^\gamma \quad (2)$$

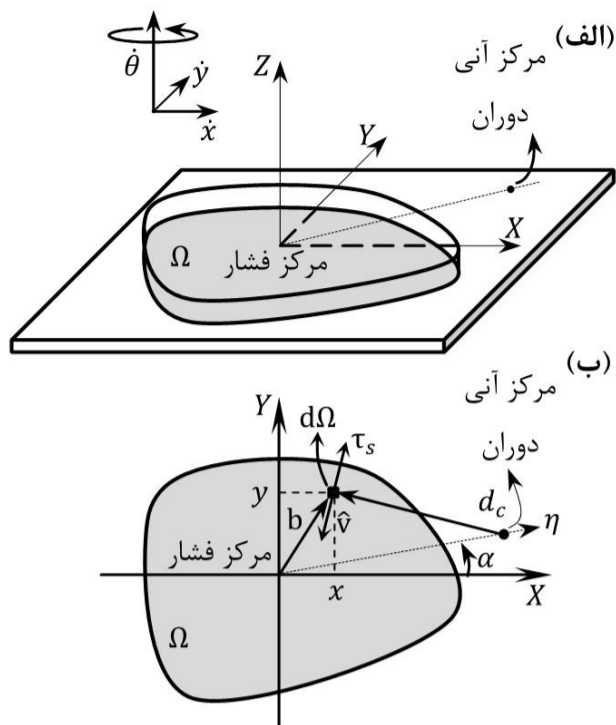
در رابطه (2)، ضریب  $c$  وابسته به اندازه، انحنای و خواص ماده انگشت نرم بوده و ضریب  $\gamma$  به صورت معادله  $\gamma = n/(2n+1)$  بیان می‌شود که  $n$  کرنش سختی<sup>3</sup> است. چون پارامتر  $n$  در محدوده  $0 \leq n \leq 1$  است، پارامتر  $\gamma$  در محدوده  $0 \leq \gamma \leq 1/3$  قرار می‌گیرد. برای مواد الاستیک خطی  $n = 1$  و در نتیجه  $\gamma = 1/3$  است. بنابراین، رابطه (2) منجر به مدل تماس هرتری می‌شود.

سایر مدل‌های تماس نرم مستقل از زمان عبارتند از: مدل توزیع شعاعی [8]، مدل فنر خطی [5] و مدل توزیع موازی [6,18]. اما این مدل‌ها صرفاً به صورت تئوری ارائه شده و دقت هیچکدام با استفاده از مواد نرم مختلف از جمله انگشتان انسان مورد بررسی قرار نگرفته است.

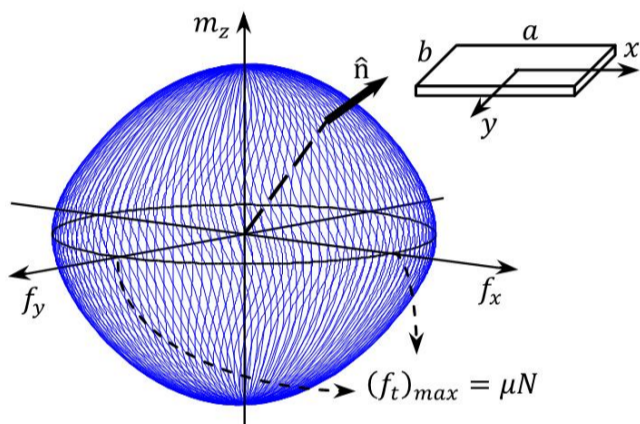
مدل‌های تماس وابسته به زمان یا ویسکوالاستیک بر اساس پدیده‌های خزش<sup>4</sup> و وارفتگی<sup>5</sup> مشاهده شده در مواد نرم ارائه شده‌اند. مدل کلونین-ویت<sup>6</sup> [19] و مدل ماکسول [20] اولین مدل‌های تماس ویسکوالاستیک بر اساس فنرها و دمپرهای سری و موازی هستند. مدل فانگ [21] مدل ویسکوالاستیک دیگری است که بر اساس جدایی پاسخ‌های الاستیک و گذرا بیان می‌شود. تییزی و کائو [22,23] این مدل را برای ارائه یک مدل ویسکوالاستیک قابل استفاده در تماس انگشتان رباتیکی ساده کردند.

در این تحقیق، به منظور بررسی دینامیک انگشت نرم، مدلی برای بیان رفتار الاستیک و استهلاک انگشت نرم باید در نظر گرفته شود. همانطور که پیشتر در این بخش ذکر شد، مدل تماس توانی (رابطه (2))، یکی از

1- Viscoelastic  
2- Power-Law Model  
3- Strain-Hardening  
4- Creep  
5- Relaxation  
6- Kelvin-Voigt



شکل 5 الف) سطح تماس یک جسم صلب در وضعیت لغزش و مرکز آنی دوران آن،  
ب) نمایش جزئیات سطح تماس بر روی صفحه  $x-y$



شکل 6 سطح محدود اصطکاکی برای یک تماس مستطیلی با فرض توزیع فشار  
یکنواخت و  $a = 4$  و  $b = 2$

این لغزش به موازات بردار یکه عمود بر سطح محدود اصطکاکی در نقطه  $(f_x, f_y, m_z)$  است (بردار  $\hat{n}$  در شکل 6). یکی از ویژگی‌های سطح محدود اصطکاکی آن است که مکان هندسی نیروهای اصطکاکی برای هر توزیع فشار در لغزش انتقالی محض (یعنی هنگامی که مرکز آنی دوران بر روی محور  $\eta$  به بی‌نهایت می‌رود)، یک دایره با شعاع  $(f_t)_{\max} = \mu N$  در صفحه  $f_x - f_y$  است (شکل 6).

هاو و کاتکوسکی [3] بصورت تئوری و عملی نشان دادند که یک بیضی‌گون که از نقاط بیشترین نیرو و ممان اصطکاکی عبور می‌کند، تقریب مناسبی از سطح محدود اصطکاکی برای سطوح تماس با شکل‌های متفاوت و فرض توزیع فشار متقارن است (شکل 7). این مدل ساده شده نسبتاً دقیق بوده و محاسبات مدلسازی دینامیکی و کنترل برخط را برای گرفتن و جابجایی یک جسم کاهش می‌دهد. معادله سطح محدود اصطکاکی بیضی‌گون (شکل 7) را می‌توان به صورت رابطه (9) نوشت.

$$\frac{f_x^2}{(f_t)_{\max}^2} + \frac{f_y^2}{(f_t)_{\max}^2} + \frac{m_z^2}{(m_z)_{\max}^2} = 1 \quad (9)$$

نشان داده شده است که برای تقریب بیضی‌گون سطح محدود اصطکاکی رابطه بین نسبت سرعت خطی به سرعت زاویه‌ای جسم،  $v_t/\dot{\theta}$  و نسبت نیروی اصطکاکی به ممان اصطکاکی،  $f_t/m_z$ ، به صورت رابطه (10) است [3, 24].

$$d_c = \frac{v_t}{\dot{\theta}} = \lambda^2 \frac{f_t}{m_z} \quad (10)$$

در رابطه (10)،  $v_t = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ، پارامترهای  $\dot{x}$  و  $\dot{y}$  و  $\dot{\theta}$  سرعت‌های خطی و زاویه‌ای جسم در حال لغزش در راستای محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  است و پارامتر  $\lambda$  به صورت  $\lambda = (m_z)_{\max}/(f_t)_{\max}$  تعریف می‌شود.

در واقع، سطح محدود اصطکاکی می‌تواند تعیین کند که چه هنگام لغزش صفحه‌ای بین دو جسم رخ می‌دهد. سطح محدود اصطکاکی با محاسبه نیروها و ممان اصطکاکی سطح تماس برای هر لغزش انتقالی و چرخشی ممکن سطح تماس بدست می‌آید.

حرکت صفحه‌ای لحظه‌ای یک جسم صلب را همیشه می‌توان به صورت چرخش خالص حول یک محور عمود بر صفحه حرکت و عبورکننده از یک نقطه یکتا که در هر لحظه دارای سرعت صفر است، بیان کرد. این نقطه مرکز آنی دوران نامیده می‌شود. در شکل 5، سطح تماس یک جسم در وضعیت آستانه لغزش و مرکز آنی دوران آن نشان داده شده است. برای آن که سطح محدود اصطکاکی تا جای ممکن متقارن بدست آید، مرکز سیستم مختصات را در مرکز فشار سطح تماس قرار می‌دهیم [3]. با دانستن شکل سطح تماس،  $\Omega$ ، توزیع فشار در سطح تماس،  $p(x, y)$ ، ضریب اصطکاک بین اجسام در تماس،  $\mu$ ، و محل مرکز آنی دوران، نیروهای اصطکاکی،  $f_x$  و  $f_y$ ، و ممان اصطکاکی،  $m_z$ ، در آن لحظه محاسبه می‌شود. حال با تغییر دادن محل مرکز آنی دوران بر روی هر نقطه‌ای از صفحه حرکت جسم، وضعیت‌های ممکن مختلف از لغزش و مقادیر متناظر نیروها و ممان اصطکاکی برای محاسبه سطح محدود اصطکاکی سه‌بعدی در فضای  $(f_x, f_y, m_z)$  بدست می‌آید (شکل 6). نیروی اصطکاکی مماسی،  $f_t = [f_x, f_y]^T$ ، بر روی سطح تماس را می‌توان با انتگرال‌گیری تنش برشی،  $\tau_s$ ، موجود بر روی سطوح بسیار کوچک سطح تماس،  $d\Omega$ ، به صورت رابطه (6) محاسبه کرد.

$$f_t = \int_{\Omega} \tau_s d\Omega \quad (6)$$

به طور مشابه، ممان اصطکاکی عمود بر سطح تماس،  $m_z$ ، به صورت رابطه (7) بدست می‌آید.

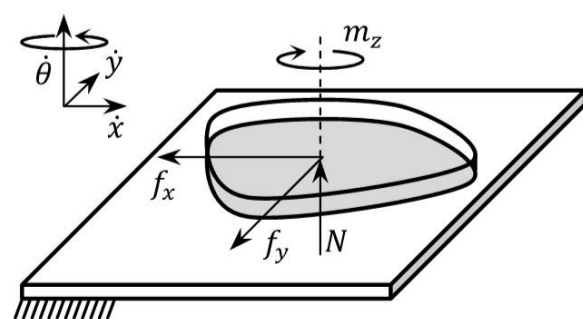
$$m_z = \int_{\Omega} (b \times \tau_s) d\Omega \quad (7)$$

در روابط (6) و (7)، تنش برشی بر اساس تعریف قانون کلمب بوده و در جهت خلاف بردار سرعت نرمال شده  $\hat{v}$  نسبت به مرکز آنی دوران است. همچنین، بردار  $b$  موقعیت المان کوچکی از سطح تماس،  $d\Omega$ ، را نشان می‌دهد. بردار  $\hat{v}$  برای حرکت ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد جسم به صورت رابطه (8) است.

$$v_{ccw,cw} = \frac{\pm (d_c \sin \alpha - y)}{\sqrt{(d_c \sin \alpha - y)^2 + (x - d_c \cos \alpha)^2}} \quad (8)$$

یک روش برای محاسبه روابط (6) و (7) برای کلیه موقعیت‌های مرکز آنی دوران، تغییر فاصله  $d_c$  از مرکز تا  $+\infty$  در طول محور  $\eta$  هنگامی که زاویه  $\alpha$  از صفر تا  $2\pi$  تغییر می‌کند، است (شکل 5-ب). در شکل (6)، سطح محدود اصطکاکی برای یک تماس مستطیلی با فرض توزیع فشار یکنواخت نشان داده شده است.

هنگامی که نیروهای اصطکاکی مماسی،  $f_x$  و  $f_y$ ، و ممان اصطکاکی،  $m_z$ ، اعمال شده در سطح تماس، درون مرز سطح محدود اصطکاکی قرار گیرند، هیچگونه حرکت نسبی در سطح تماس ایجاد نمی‌شود. با افزایش  $f_x$ ،  $f_y$  و  $m_z$  به مرز سطح محدود اصطکاکی، لغزش مماسی و انتقالی در سطح تماس آغاز می‌شود.



شکل 4 نیروها و ممان تماس دو جسم صلب در لغزش صفحه‌ای

انتهای نرم انگشت و  $Q_{i,nc}$  نیروی تعمیم یافته مرتبط با مختصات تعمیم یافته  $q_i$  است. برای آن که اثر نرمی انگشت نیز در گرفتن جسم در نظر گرفته شود، دینامیک عضوهای انگشت و انتهای نرم با یکدیگر ترکیب شده است. بنابراین، بردار مختصات تعمیم یافته به صورت  $q = [q_1, q_2, q_3, d]$  تعریف می شود که  $q_1, q_2$  و  $q_3$  زوایای مفصل و  $d$  تغییر شکل انتهای نرم انگشت (یعنی فاصله بین مرکز نیم کره انتهای نرم انگشت،  $O_{tip}$ ، و مرکز سطح تماس،  $c$ ) همانطور که در شکل 1 نشان داده شده، است.

انرژی پتانسیل انگشت نرم و تابع اتلاف ریلی به صورت رابطه (15) محاسبه می شود.

$$\begin{cases} V_{st} = \int_0^\delta N(\zeta) d\zeta \\ F_{st} = \frac{1}{2} C_{eq} d^2 \end{cases} \quad (15)$$

در رابطه (15)،  $R$  شعاع نیم کره انتهای نرم انگشت،  $\delta = R - d$ ،  $\zeta$  تغییر شکل انتهای نرم انگشت و  $C_{eq}$  تقریب خطی از ضریب دمپر ویسکوز انتهای نرم انگشت است. بر اساس رابطه (2)،  $N(\zeta)$  را می توان به صورت رابطه (16) نوشت.

$$N(\zeta) = \left(\frac{1}{c}\right)^{1/\gamma} (2R\zeta - \zeta^2)^{1/2\gamma} \quad (16)$$

از آنجایی که تغییر شکل انتهای نرم انگشت نسبت به شعاع آن کوچک است و همچنین سرعت این تغییر شکل در حین جابجایی جسم کم است، اثرات اینرسی انتهای نرم انگشت صرف نظر می شود. از این رو، انرژی جنبشی انتهای نرم انگشت،  $T_{st}$ ، صفر فرض می شود.

متغیرهای لغزش  $x_s, y_s, \theta_s$  به صورت رابطه (17) تعریف می شوند.

$$\begin{cases} \dot{x}_s = V_c^x - \dot{x}_o \\ \dot{y}_s = V_c^y - \dot{y}_o \\ \dot{\theta}_s = \omega_c^z - \dot{\theta}_o \end{cases} \quad (17)$$

در رابطه (17)،  $V_c^x$  و  $V_c^y$  سرعت های خطی مرکز سطح تماس انگشت نرم،  $c$ ، در راستای محوره های  $x$  و  $y$ ،  $\omega_c^z$  سرعت زاویه ای مرکز سطح تماس انگشت نرم حول محور  $z$ ،  $x_o$  و  $y_o$  موقعیت مرکز جرم جسم نسبت به مرکز  $o_1$  و  $o$  چرخش جسم است.

با تعریف  $F_c = [f_{c,x}, f_{c,y}, M_c, N_c]^T$  به عنوان بردار نیروها و ممان در سطح تماس بین انتهای نرم انگشت و جسم و  $F_g = [f_{g,x}, f_{g,y}, M_g, N_g]^T$  به عنوان بردار نیروها و ممان در سطح تماس بین جسم و زمین (شکل 8)، معادلات دینامیکی سیستم انگشت نرم و جسم به صورت رابطه (18) بدست می آید.

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = B\tau + J(q)^T F_c \\ M_o \ddot{q}_o + h_o = F_g - B_c F_c \\ J(q)\ddot{q} - B(\ddot{q}_o + \ddot{q}_s) = -J(q, \dot{q})\dot{q} \\ \beta_{s,1}\ddot{q}_s + B_s(\dot{q}_s)F_c = 0 \\ \beta_{o,1}\ddot{q}_o + B_o(\dot{q}_o)F_g = 0 \end{cases} \quad (18)$$

جدول 2 پارامترهای  $\beta_1, \beta_{21}, \beta_{22}$  در وضعیت های گوناگون لغزش صفحه های

$\dot{X} = 0$	$\dot{X} \neq 0$	$\beta_i$
فرض 2: آستانه لغزش	فرض 1: سکون	لغزش
0	1	$\beta_1$
1	0	$\beta_{21}$
C	$0_{3 \times 3}$	$\beta_{22}$
اگر فرض 1 برقرار نباشد	$B < 1$	شرط

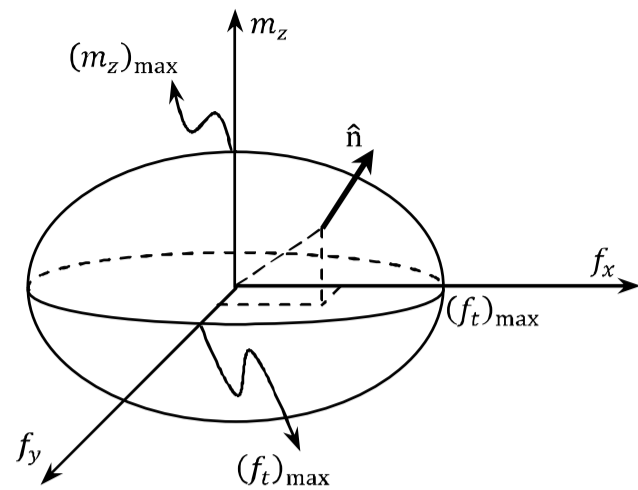
توضیحات جدول:  $X = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$

$$A = \mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \lambda^2 \dot{\theta}^2)^{-\frac{1}{2}} [\dot{x} \ \dot{y} \ \lambda^2 \dot{\theta}]^T$$

$$B = (f_x^2 + f_y^2 + m_z^2/\lambda^2)/(\mu N_c)^2$$

$$C = -\mu(\bar{f}_x^2 + \bar{f}_y^2 + \bar{m}_z^2/\lambda^2)^{-\frac{1}{2}} [\bar{f}_x \ \bar{f}_y \ \bar{m}_z]^T$$

که  $\bar{f}_x, \bar{f}_y$  و  $\bar{m}_z$  از فرض 1 محاسبه می شوند.



شکل 7 تقریب بیضی گون از سطح محدود اصطکاکی

بر اساس ویژگی های ذکر شده برای تقریب بیضی گون سطح محدود اصطکاکی، یک معادله کلی که رابطه بین نیروها و ممان اصطکاکی سطح تماس با سرعت های لغزشی خطی و زاویه ای را بیان می کند، به صورت رابطه (11) ارائه می شود.

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z/\lambda \end{bmatrix} = \frac{-\mu N}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\lambda \dot{\theta})^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \lambda \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

رابطه (11) همه ویژگی های سطح محدود اصطکاکی (یعنی روابط (9) و (10)) را در بر گرفته و ابزار مناسبی برای آنالیز لغزش صفحه ای در گرفتن و جابجایی اجسام است.

بنابراین، وضعیت های گوناگون نیرو و ممان اصطکاکی بین دو جسم در تماس صفحه ای را می توان به صورت رابطه (12) نوشت.

$$\begin{cases} f_x^2 + f_y^2 + \frac{m_z^2}{\lambda^2} < (\mu N)^2 \quad (\text{سکون}) \\ \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix} = \frac{\mu N}{\sqrt{\bar{f}_x^2 + \bar{f}_y^2 + (\bar{m}_z/\lambda)^2}} \begin{bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \\ \bar{m}_z \end{bmatrix} \quad (\text{آستانه لغزش}) \\ \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \end{bmatrix} = \frac{-\mu N}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\lambda \dot{\theta})^2}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \lambda \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{لغزش}) \end{cases} \quad (12)$$

در رابطه (12) پارامترهای  $\bar{f}_x, \bar{f}_y$  و  $\bar{m}_z$  نیروها و ممان تماس هنگامی که تماس در وضعیت سکون فرض می شود، است. مشابه با روش شرح داده شده برای لغزش یک بعدی (رابطه (5))، معادلات رابطه (12) را می توان ترکیب کرد و به صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم برای مدلسازی نیروها و ممان تماس به صورت رابطه (13) بازنویسی کرد.

$$\beta_1 \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ m_z \\ N \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

در رابطه (13)،  $\beta_1$  یک ماتریس  $3 \times 3$  است و پارامترهای  $\beta_1, \beta_{21}, \beta_{22}$  را می توان با استفاده از جدول 2 بر اساس وضعیت های گوناگون تماس بدست آورد.

## 5- آنالیز دینامیکی جابجایی جسم

معادلات دینامیکی انگشت نرم، با استفاده از روش لاگرانژ محاسبه می شود. معادلات لاگرانژ برای این سیستم شامل دمپر ویسکوز خطی و همچنین نیروهای خارجی، به صورت رابطه (14) نوشته می شود.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F_{st}}{\partial \dot{q}_i} = Q_{i,nc} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

در رابطه (14)،  $L = T + V$  لاگرانژین،  $T = T_{fi} + T_{st}$  کل انرژی جنبشی سیستم،  $T_{fi}$  انرژی جنبشی عضوهای انگشت،  $T_{st}$  انرژی جنبشی انتهای نرم انگشت،  $V = V_{fi} + V_{st}$  کل انرژی پتانسیل سیستم،  $V_{fi}$  انرژی پتانسیل عضوهای انگشت،  $V_{st}$  انرژی پتانسیل انتهای نرم انگشت،  $F_{st}$  تابع اتلاف ریلی

جدول 3 پارامترهای شبیه‌سازی

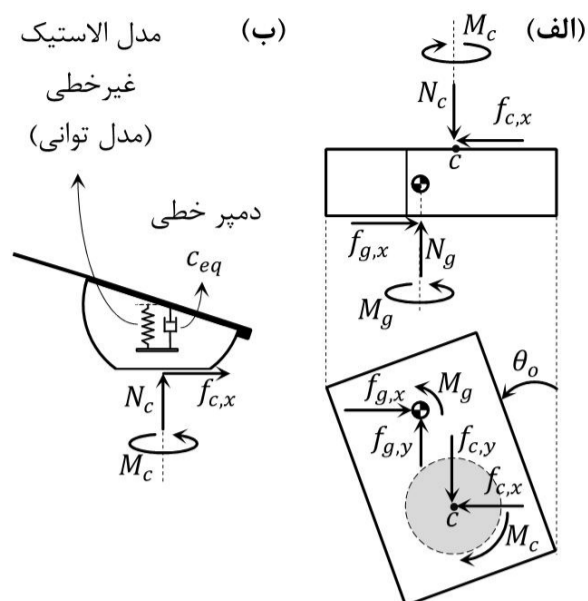
انتهای نرم و جسم	اینرسی (kgm <sup>2</sup> )	جرم (kg)	طول (m)
$I_{c_1}^{xx}$	$m_1 l_1^2 / 12$	0/02	0/025
$I_{c_1}^{yy}$	$m_1 l_1^2 / 12$	0/2	0/20
$I_{c_1}^{zz}$	0	0/2	0/20
$I_{c_2}^{xx}$	0	0/1	0/0125
$I_{c_2}^{yy}$	$m_2 l_2^2 / 12$		0/10
$I_{c_2}^{zz}$	$m_2 l_2^2 / 12$		0/10
$I_{c_3}^{xx}$	0		0/02
$I_{c_3}^{yy}$	$m_3 l_3^2 / 12$		0/02
$I_{c_3}^{zz}$	$m_3 l_3^2 / 12$		0/20
$I_o$	$5/2e-4$		0/15

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & -J^T & 0 \\ 0 & 0 & M_o & B_c & -I_4 \\ J & -B & -B & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{s,1} I_3 & 0 & B_s & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{o,1} I_3 & 0 & B_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{q}_s \\ \ddot{q}_o \\ F_c \\ F_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\tau - h \\ -h_o \\ -J\dot{q} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

در این شبیه‌سازی، گشتاورهای ورودی و مقادیر اولیه سیستم عبارتند از:  $(N_c)_0 = 0.5 \text{ N}$ ،  $(q_2)_0 = 30^\circ$ ،  $(q_1)_0 = 0^\circ$ ،  $\tau(t) = [0.1, 0.05, 0.04] \text{ N.m}$ ،  $(\theta_o)_0 = 0^\circ$  و  $(x_o)_0 = (x_{o,tip})_0$ ،  $(y_o)_0 = (y_{o,tip})_0 + 0.05 \text{ m}$ . مقادیر پارامترهای استفاده شده برای شبیه‌سازی سیستم نیز در جدول 3 آورده شده است. در شکل 9، تغییر شکل انتهایی نرم انگشت در حین جابجایی جسم در اثر اعمال گشتاور ثابت  $\tau$  به مدت  $0/3$  ثانیه نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، بیشترین تغییر شکل انتهایی نرم انگشت به اندازه  $1/25$  میلی‌متر از مقدار اولیه آن ( $R = 20 \text{ mm}$ ) است. نیروهای عمودی وارد شده در سطوح تماس، متناظر با این تغییر شکل، در شکل 10 نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که با کاهش نیروهای عمودی تماس، تغییر شکل انتهایی انگشت نیز کاهش می‌یابد. به دلیل عدم انطباق مرکز جرم جسم با محل تماس انگشت با جسم و همچنین ایجاد لغزش در تماس بین جسم و زمین، جسم تقریباً تا اندازه‌ی 25 درجه حول محور  $z$  مطابق شکل 11 می‌چرخد. مرکز جرم آن نیز مسیر نشان داده شده در شکل 12 را طی می‌کند. در شکل‌های 13 و 14، تغییرات متغیرهای لغزش نسبت به زمان  $(\dot{x}_s, \dot{y}_s, \dot{\theta}_s)$  نشان داده شده است. دقت شود که به دلیل نیم‌کروی و نرم بودن انتهایی انگشت و همچنین غلتش و لغزش توأم آن بر روی جسم، معادلات رابطه (17) غیرهولونومیک بوده و مقادیر متغیرهای لغزش  $x_s, y_s, \theta_s$  الزاماً مقدار مطلق لغزش انتهایی انگشت بر روی جسم را نشان نمی‌دهد. نیروها و ممان‌های اصطکاکی در سطح تماس بین انتهایی نرم انگشت و جسم و همچنین بین جسم و زمین در شکل‌های 15، 16 و 17 نشان داده شده است. واضح است که به دلیل کوچک‌تر بودن سطح تماس بین انگشت و جسم نسبت به سطح تماس بین جسم و زمین، ممان اصطکاکی اعمال شده در سطح تماس بین انگشت و جسم،  $M_c$ ، به‌طور چشمگیری از سطح تماس بین جسم و زمین،  $M_g$ ، کمتر است.

### 7- نتیجه‌گیری

هنگامی که لغزش‌های انتقالی و چرخشی در سطح تماس دو جسم به وجود می‌آید، سطح محدود اصطکاکی که نگاشتی بین نیروها و ممان اعمال شده در سطح تماس و حرکت‌های لغزشی است، را می‌توان مورد استفاده قرار داد. در این مقاله، یک روش عملی برای مدل‌سازی دینامیکی نیروها و ممان اصطکاکی تماس صفحه‌ای با استفاده از مفهوم و ویژگی‌های تقریب بیضی‌گون سطح محدود اصطکاکی ارائه شد.



شکل 8 الف) نیروها و ممان تماس اعمال شده به جسم، ب) مدل تماس نرم و همچنین نیروها و ممان تماس بین انگشت نرم و جسم

در رابطه (18)، معادله اول دینامیک انگشت نرم و معادله دوم دینامیک جسم است. معادله سوم از رابطه متغیرهای لغزش (17) و قید سیستم (یعنی،  $z_c = W$  در شکل 1) بدست آمده است. دو معادله آخر نیز دینامیک نیروها و ممان‌های تماس بین انتهایی نرم و جسم و همچنین بین جسم و زمین را با استفاده از رابطه ارائه شده (13) بیان می‌کند. در رابطه (18)، ماتریس اینرسی انگشت نرم،  $h$  بردار ترم‌های گریز از مرکز، کریولیس و گرانش انگشت نرم،  $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$  بردار گشتاورهای مفاصل انگشت نرم (شکل 1)،  $B$  ماتریس ضریب،  $M_o$  ماتریس ژاکوبین انگشت نرم، ماتریس اینرسی جسم،  $h_o$  بردار گرانش جسم،  $q_o = [x_o, y_o, \theta_o]^T$  بردار موقعیت و چرخش جسم،  $q_s = [x_s, y_s, \theta_s]^T$  بردار متغیرهای لغزش،  $B_s = [\beta_{s,21} I_3, \beta_{s,22}]$  با استفاده از جدول 2 بر اساس وضعیت‌های گوناگون هر تماس و دانستن ضریب اصطکاک بین انگشت نرم و جسم،  $\mu_c$ ، و ضریب اصطکاک بین جسم و زمین،  $\mu_g$ ، تعیین می‌شود.

زاس و کائو [4]، سطح محدود اصطکاکی را برای سطح تماس دایروی یک انتهایی نرم نیم‌کروی با فرض توزیع فشار یکنواخت تعیین کرده و یک تقریب بیضی‌گون برای آن ارائه کردند. آن‌ها پارامتر  $\lambda$  (تعریف شده در رابطه (10)) را برای سطح تماس دایروی انتهایی نرم به‌صورت رابطه (19) تعیین کردند.

$$\lambda_c = \frac{3}{4} \frac{\Gamma(3/k)^2}{\Gamma(2/k)\Gamma(4/k)} r \quad (19)$$

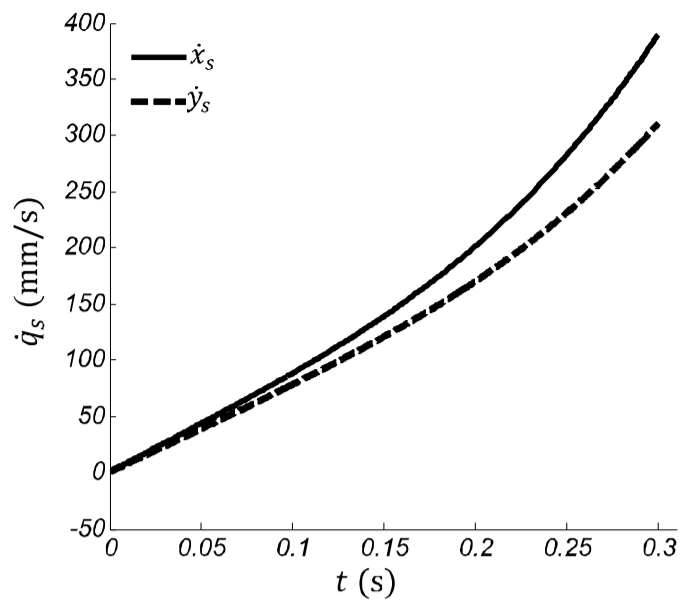
در رابطه (19)، شعاع دایره تماس،  $\Gamma(\cdot)$  تابع گاما [25] و  $k$  شکل پروفیل توزیع فشار در سطح تماس انتهایی نرم است [4]. همچنین، پارامتر  $\lambda$  برای سطح تماس مستطیلی جسم و زمین را می‌توان با استفاده از روابط (6) و (7) هنگامی که  $d_c = 0$  و توزیع فشار یکنواخت فرض می‌شود، از رابطه (20) محاسبه کرد.

$$\lambda_g = \frac{1}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad (20)$$

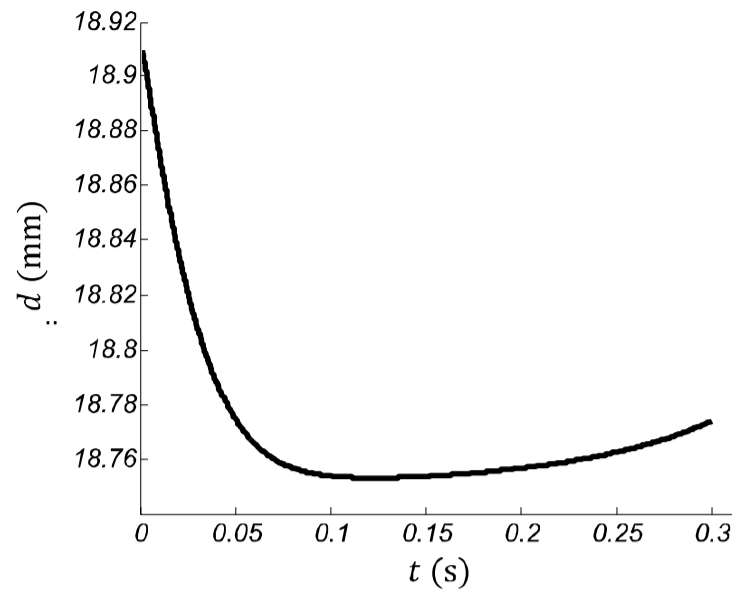
در رابطه (20)،  $a$  و  $b$  طول و عرض جسم مستطیلی است. همه ماتریس‌ها و بردارها در پیوست آورده شده است.

### 6- شبیه‌سازی عددی

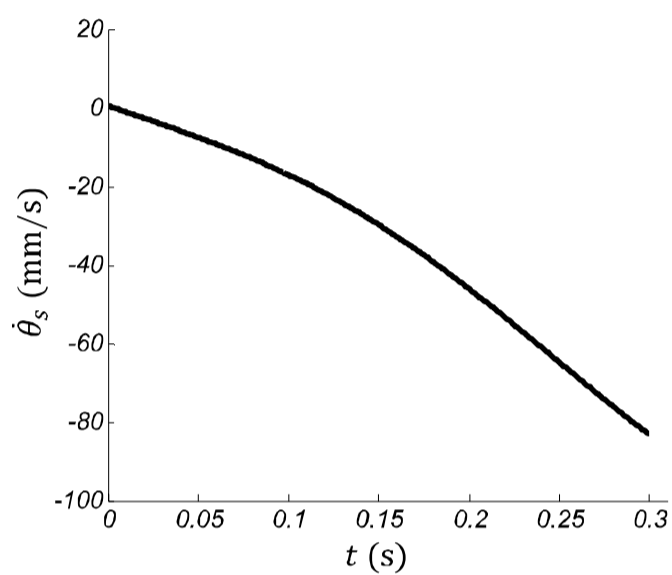
در این قسمت، رفتار دینامیکی سیستم شبیه‌سازی می‌شود. به منظور حل معادلات دینامیکی سیستم، رابطه (18) به فرم  $Ax = b$  و به‌صورت رابطه (21) بازنویسی می‌شود.



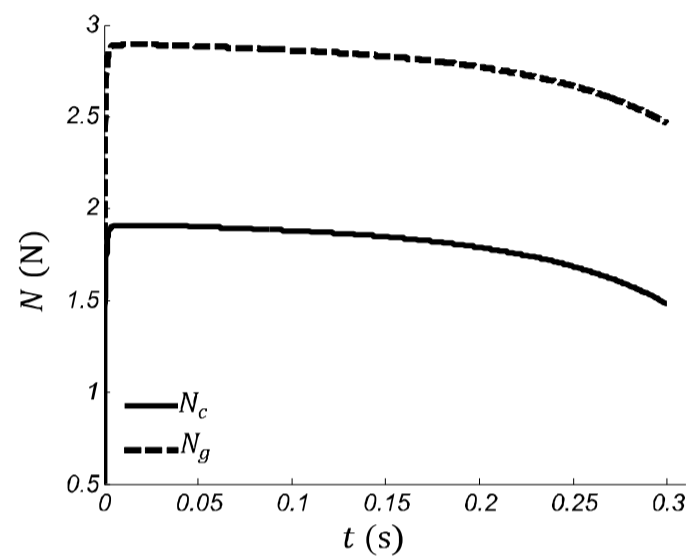
شکل 13 تغییرات متغیر لغزش  $x_s$  و  $y_s$  نسبت به زمان



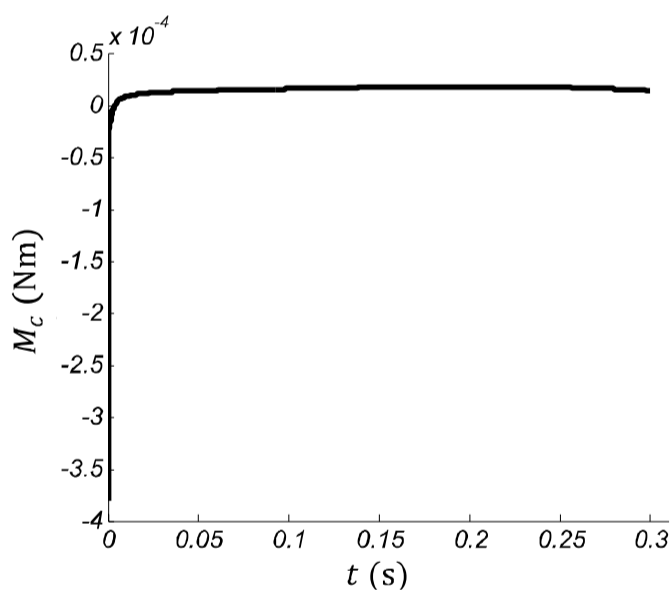
شکل 9 تغییر شکل انتهای نرم انگشت در حین جابجایی جسم



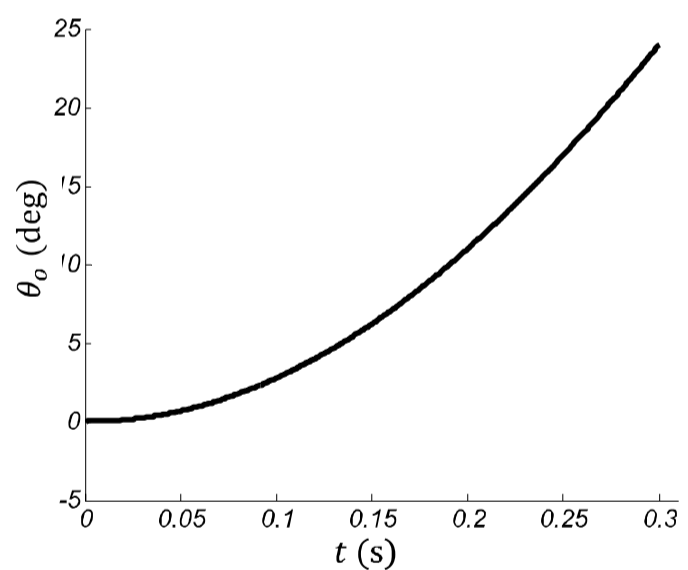
شکل 14 تغییرات متغیر لغزش  $\theta_s$  نسبت به زمان



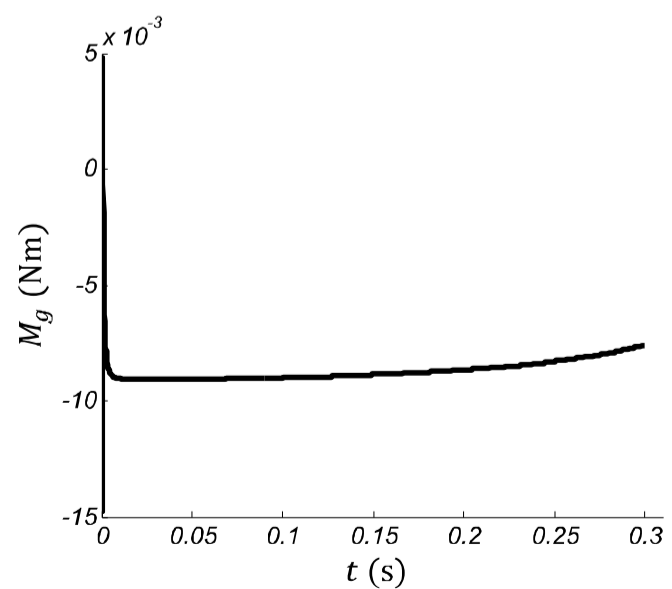
شکل 10 نیروی عمودی در سطح تماس بین انتهای نرم انگشت و جسم و همچنین بین جسم و زمین



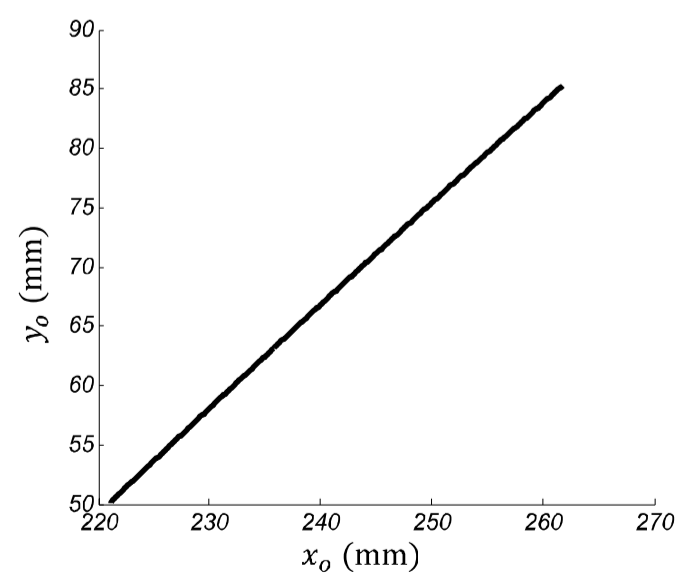
شکل 15 ممان اصطکاکی در سطح تماس بین انتهای نرم انگشت و جسم



شکل 11 چرخش جسم حول محور z



شکل 16 ممان اصطکاکی در سطح تماس بین جسم و زمین



شکل 12 موقعیت مرکز جرم جسم

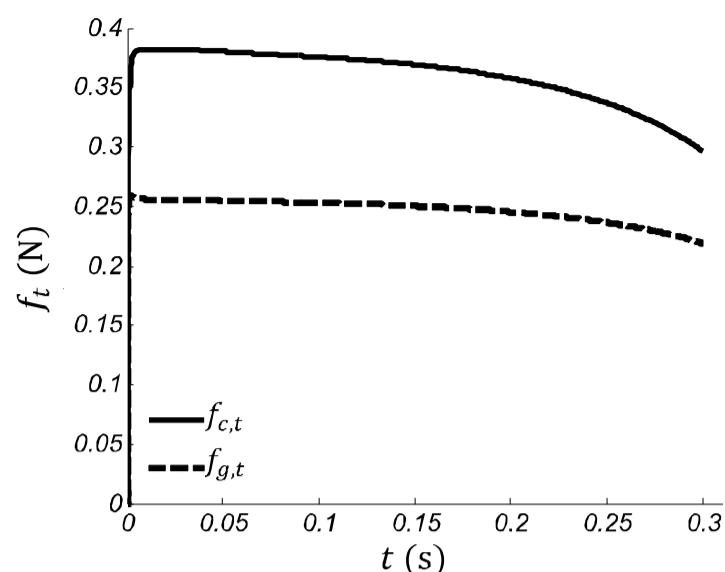
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_o - y_c & x_c - x_o & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

در روابط (22) تا (27)،  $m_o$  جرم جسم،  $l_1$ ،  $l_2$  و  $l_3$  طول عضوهای انگشت نرم،  $l_{c_1}$ ،  $l_{c_2}$  و  $l_{c_3}$  فاصله بین مفاصل و مرکز جرم عضوها (شکل 1)،  $m_1$ ،  $m_2$  و  $m_3$  جرم عضوها و  $I_{c_i}^{xx}$ ،  $I_{c_i}^{yy}$  و  $I_{c_i}^{zz}$  (که  $i = 1, 2, 3$ ) ممان اینرسی عضوها است. جرم انتهای نرم در جرم جسم سوم در نظر گرفته شده است. به علاوه،  $s_1$ ،  $c_1$ ،  $s_l$  و  $c_l$  به عنوان خلاصه شده  $\sin(\theta_1)$ ،  $\cos(\theta_1)$ ،  $\sin(\theta_1 + \theta_j)$  و  $\cos(\theta_1 + \theta_j)$  (که  $j = 1, 2, 3$ ) استفاده شده است.

## 9- مراجع

- [1] A. Bicchi, Hands for dexterous manipulation and robust grasping: a difficult road toward simplicity, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 16, No. 6, pp. 652-662, 2000.
- [2] S. Goyal, A. Ruina, and J. Papadopoulos, Planar sliding with dry friction: Part 1. limit surface and moment function, *Wear*, Vol. 143, pp. 307-330, 1991.
- [3] R. Howe and M. Cutkosky, Practical force-motion models for sliding manipulation, *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 15, No. 6, pp. 555-572, 1996.
- [4] N. Xydias and I. Kao, Modeling of contact mechanics and friction limit surface for soft fingers in robotics, with experimental results, *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 18, No. 8, pp. 941-950, 1999.
- [5] B.-H. Kim, Motion analysis of soft-fingertip manipulation tasks, *Int. Journal of Control, Automation, and Systems*, Vol. 2, No. 2, pp. 228-237, 2004.
- [6] T. Inoue and S. Hirai, Dynamic stable manipulation via soft-fingered hand, in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 586-591, 2007.
- [7] T. Inoue and S. Hirai, Parallel-distributed model in three-dimensional soft-fingered grasping and manipulation, in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2092-2097, 2009.
- [8] S. Arimoto, P. A. N. Nguyen, H. Y. Han, and Z. Doulgeri, Dynamics and control of a set of dual fingers with soft tips, *Robotica*, Vol. 18, pp. 71-80, 2000.
- [9] S. Arimoto, Z. Doulgeri, P. Nguyen, and J. Fasoulas, Stable pinching by a pair of robot fingers with soft tips under the effect of gravity, *Robotica*, Vol. 20, No. 3, pp. 241-249, 2002.
- [10] S. Hadian Jazi, M. Keshmiri, F. Sheikholeslam, M. Ghobadi Shahreza, and M. Keshmiri, Dynamic analysis and control synthesis of undesired slippage of end-effectors in a cooperative grasping, *Advanced Robotics*, Vol. 26, No. 15, pp. 1693-1726, 2012.
- [11] S. Hadian Jazi, M. Keshmiri, and F. Sheikholeslam, Adaptive Slippage Control in a One-Finger Hand Robot Manipulation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 13, pp. 297-307, 2015 (In Persian).
- [12] X. Song, H. Liu, J. Bimbo, K. Althoefer, and L.D. Seneviratne, A novel dynamic slip prediction and compensation approach based on haptic surface exploration, in *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pp. 4511-4516, 2012.
- [13] E.D. Engeberg and S.G. Meek, Adaptive sliding mode control for prosthetic hands to simultaneously prevent slip and minimize deformation of grasped objects, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 18, No. 1, pp. 376-385, 2013.
- [14] H. Hertz, *On the contact of rigid elastic solids and on hardness*, Ch 6: Assorted Papers, 1882.
- [15] Y. Tataru, Large deformations of a rubber sphere under diametral compression: Part 1: Theoretical analysis of press approach, contact radius and lateral extension, *JSME Int. J.*, Vol. 36, No. 2, pp. 190-196, 1993.
- [16] N. Xydias and I. Kao, Modeling of contact mechanics with experimental results for soft fingers, in *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 1, pp. 488-493, 1998.
- [17] J. N. Xydias and I. Kao, Influence of material properties and fingertip size on the power-law equation for soft fingers, in *IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Vol. 2, pp. 1285-1290, 2000.



شکل 17 نیرو اصطکاکی مماسی در سطح تماس بین انتهای نرم انگشت و جسم

$$(f_{c,t} = \sqrt{f_{c,x}^2 + f_{c,y}^2}) \text{ و همچنین بین جسم و زمین } (f_{g,t} = \sqrt{f_{g,x}^2 + f_{g,y}^2})$$

در واقع، به جای استفاده از روابط مساوی و نامساوی شرایط تماس اصطکاکی، وضعیت‌های گوناگون نیروها و ممان تماس را می‌توان توسط یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب متغیر بیان کرد. این روش برای مدل‌سازی دینامیکی و آنالیز لغزش در جابجایی یک جسم صلب در یک صفحه افقی توسط یک انگشت نرم سه‌عضوی استفاده شد. به منظور ترکیب کردن دینامیک انتهای نرم با عضوهای صلب انگشت، رفتار الاستیک و استهلاک انتهای نرم انگشت با استفاده از مدل توانی و مدل دمپر ویسکوز خطی مدل شد. کنترل لغزش‌های ناخواسته‌ای که معمولاً بین انگشت و جسم رخ می‌دهد، نقش مهمی در گرفتن و جابجایی مقاوم و پایدار جسم بازی می‌کند. از آنجایی که طراحی یک کنترل‌کننده مناسب به مدل‌سازی دقیقی از سیستم وابسته است، مدل‌سازی دینامیکی ارائه شده، طراحی کنترل‌کننده‌هایی جهت حذف این لغزش‌های ناخواسته را هموار می‌سازد.

## 8- پیوست

ماتریس‌ها و بردارهای معادلات دینامیکی سیستم (رابطه (18)) در روابط (22) تا (27) بیان شده‌اند.

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} & 0 \\ 0 & M_{32} & m_3 l_{c_3}^2 + I_{c_3}^{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = I_{c_2}^{xx} + I_{c_3}^{xx} + I_{c_1}^{zz} - I_{c_3}^{xx}(s23)^2 + I_{c_3}^{zz}(s23)^2 - I_{c_2}^{xx}(s2)^2 + I_{c_2}^{yy}(s2)^2 + l_{c_3}^2 m_3 (s23)^2 + l_{c_2}^2 m_3 (s2)^2 + l_{c_2}^2 m_2 (s2)^2 + 2l_2 l_{c_3} m_3 \sin^2\left(q_2 + \frac{q_3}{2}\right) - 2l_2 l_{c_3} m_3 \sin^2\left(\frac{q_3}{2}\right)$$

$$M_{22} = m_3 l_{c_2}^2 + 2m_3 c3 l_2 l_{c_3} + m_2 l_{c_2}^2 + m_3 l_{c_3}^2 + I_{c_2}^{zz} + I_{c_3}^{zz}$$

$$M_{23} = M_{32} = m_3 l_{c_3}^2 + l_2 l_{c_3} m_3 c3 + I_{c_3}^{zz}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} -s1J_1 & c1J_1 & c1J_3 & 0 \\ c1J_1 & s1J_2 & s1J_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_3 s23 - l_2 s2 & -l_3 s23 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = l_3 s23 + l_2 s2$$

$$J_2 = l_3 c23 + l_2 c2 - d$$

$$J_3 = l_3 c23 - d \quad (23)$$

$$M_o = \begin{bmatrix} m_o & 0 & 0 \\ 0 & m_o & 0 \\ 0 & 0 & I_o \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$h_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_o g \end{bmatrix} \quad (25)$$



- [23] P. Tiezzi and I. Kao, Modeling of viscoelastic contacts and evolution of limit surface for robotic contact interface, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 23, No. 2, pp. 206-217, 2007.
- [24] I. Kao and M. Cutkosky, Quasistatic manipulation with compliance and sliding, *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 11, No. 1, pp. 20-40, 1992.
- [25] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ser. Applied mathematics series. Dover Publications, 1964.
- [18] T. Inoue and S. Hirai, Elastic model of deformable fingertip for soft-fingered manipulation, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 22, pp. 1273-1279, 2006.
- [19] W. Flugge, *Viscoelasticity*. Blaisdell Publishing Company, 1967.
- [20] J. C. Maxwell, On the dynamical theory of gases, *Philosophical Transactions of the Royal Society London*, Vol. 157, pp. 49-88, 1867.
- [21] Y. C. Fung, *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer-Verlag, 1993.
- [22] P. Tiezzi and I. Kao, Characteristics of contact and limit surface for viscoelastic fingers, in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1365-1370, 2006.