مجله مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1395، دوره 16، شماره 1، ص‌ص 203-212

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

بررسی ارتعاش محوری نانومیله‌های غیر یکنواخت با استفاده از توابع چند جمله‌ای متعامد مشخصه مرزی

سید محمد حسین گوشه گیر[1]، شیرکو فاروقی[2*]

1- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

* ارومیه، صندوق پستی 419-57155، sh.farughi@uut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 13 آبان 1394
پذیرش: 20 آذر 1394
ارائه در سایت: 09 دی 1394

کلید واژگان:
نانومیله
تئوری الاستیک غیر محلی
روش ریلی-ریتز
چند جمله ای‌های متعامد مشخصه مرزی

چکیده

در این مقاله، ارتعاش محوری نانومیله بر اساس تئوری الاستیسیته غیر محلی ارینگن با استفاده از روش ریلی-ریتز مورد تحلیل واقع شده است. یک نانومیله غیر یکنواخت با سطح مقطع، چگالی و مدول یانگ متغیر در نظر گرفته شده است. در روش حاضر، چند جمله ای‌های مرزی همراه با چند جمله ای‌های متعامد به عنوان توابع شکل در روش ریلی-ریتز مورد استفاده قرار گرفته‌اند که باعث می‌شود تجزیه و تحلیل ارتعاش کارآمد شده و اعمال شرایط مرزی ساده‌تر گردد. استفاده از چند جمله ای‌های مذکور باعث افزایش نرخ همگرایی نتایج می‌شود. تمام معادله‌های مورد استفاده در این مطالعه به منظور کاهش تعداد پارامترهای مؤثر در راه حل، بی بعد شده‌اند. اثر پارامتر غیر محلی و پارامترهای ناهمگن روی رفتار ارتعاشی نانومیله مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده در مطالعه حاضر با نتایج موجود و معتبر در متون مقایسه شده و نتایج بدست آمده بطور قابل قبولی مطابقت دارند. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که فرکانس‌های نانومیله به ضریب مقیاس، غیر یکنواخت بودن و شرایط مرزی بستگی دارد. بطور مثال افزایش ضریب مقیاس سبب افزایش نرخ فرکانس (نسبت فرکانس غیرمحلی به فرکانس محلی) می‌شود و اثر آن در فرکانس‌های بالاتر بیشتر است و همچنین با افزایش طول نانومیله پارامتر فرکانس نیز افزایش می‌یابد.

Analysis of axial vibration of non-uniform nanorods using boundary characteristic orthogonal polynomials

Seyed Mohammad Hossein Goushegir, Shirko Faroughi*

Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran.
* P.O.B. 57155-419, Urmia, Iran, sh.farughi@uut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 November 2015
Accepted 11 December 2015
Available Online 30 December 2015

Keywords:
nanorod
nonlocal elasticity theory
Rayleigh-Ritz method
boundary characteristic orthogonal polynomials

ABSTRACT

In this paper, the longitudinal vibration of nanorod based on Eringen's nonlocal elasticity theory was studied using Rayleigh-Ritz method. A non-uniform nano-rod with variable cross-sectional area, density and Young's modulus were considered. In the present work, boundary polynomials with orthogonal polynomials were used as shape functions in the Rayleigh-Ritz method which causes the vibrational analysis to be computationally efficient and imposition of boundary conditions to be easier. Using the mentioned polynomials the convergence rate of the obtained results was increased. All of the equations used in this study are nondimensionalized to reduce the number of effective parameters in the solution. The influence of the nonlocal and in-homogeneity parameters on the vibrational behavior of nanorod was investigated. The results were compared to available results in the literature and a good agreement was achieved. The results showed that nanorod frequencies were dependent on the small scale effect, non-uniformity, and boundary conditions. For instance, an increase in frequency ratio causes the scale coefficient in all vibration modes to be increased, especially in higher modes. In addition, the frequencies were increased by increasing in the length of the nanorod.

1- مقدمه

تجزیه و تحلیل استاتیکی و دینامیکی نانولوله‌های کربنی[1] بدلیل خواص استثنایی مکانیکی، الکترونیکی، الکتروشیمیایی و فیزیکی مورد علاقه بسیاری از محققان قرار گرفته است [1-4]. به طور معمول مدل‌های کلاسیک مانند مدل‌های پیوسته تیر و پوسته برای بررسی رفتار دینامیکی نانو لوله‌های کربنی مورد استفاده قرار می‌گیرند زیرا شبیه سازی‌های دینامیک مولکولی بسیار مشکل است [5-7]. گرچه معمولا ارتعاش خمشی به منظور یافتن مشخصات الاستیکی نانولوله‌های کربنی مورد بررسی قرار می‌گیرد اما آزمایش‌ها بر پایه ارتعاش محوری نیز می‌تواند به همین مقصود انجام گیرد. نانومیله‌ها را می‌توان در دستگاهای نانو/میکرو الکترومکانیکی[2] بکار گرفت.

1- Carbon nano-tubes (CNTs)

2- MEMs/NEMs

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
S.M.H. Goushegir, Sh. Faroughi, Analysis of axial vibration of non-uniform nanorods using boundary characteristic orthogonal polynomials, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 1, pp. 203-212, 2016 (in Persian)

این کاربری‌ها می‌تواند با ارتعاش محوری نانومیله‌ها بر اثر نیروهای محوری خارجی همراه باشد. بنابراین بررسی رفتار ارتعاشی محوری نانو لوله‌های کربنی کاملا ضرورت دارد.

اکثر محققین [5و6،8-12] در مطالعاتشان اثر مقیاس طولی کوچک[1] را مورد بررسی قرار داده و به این نتیجه اشاره نموده‌اند که همگن سازی ساختار مقیاس طولی نانو به حالت پیوسته ممکن است پاسخ‌های نادرست بدهد. برای رفع این مشکل، برای اولین بار تئوری الاستیسیته غیر محلی[2] توسط ارینگن معرفی شد [13]. در این تئوری، تنش در یک نقطه خاص تابعی از میدان کرنش در هر نقطه از محیط پیوسته است. اهمیت تئوری الاستیسیته غیر محلی محققان را واداشت تا ویژگی‌های نانو ساختارها را به راحتی و دقت بالاتر مورد مطالعه قرار دهند. تئوری تیر اویلر غیر محلی توسط پدیسون و همکارانش [8] برای نشان دادن اهمیت آثار مقیاس طولی کوچک، برای مسئله تیر گیردار[3] ارائه گردید. همچنین اثرات مهم طول‌های کوچک در ارتعاشات، کمانش و خمش نانو لوله‌های کربنی مورد بررسی قرار گرفت [5و6،8-12]. اگرچه مطالعاتی درباره ارتعاش خمشی نانومیله‌ها انجام شده، با این حال تحقیقات در باب ارتعاش محوری نانومیله‌ها توسط هرگونه مدل پیوسته[4] غیر محلی تا به امروز محدود بوده است. آیدوقدو [14] ارتعاش محوری نانومیله‌ها را با استفاده از مدل میله پیوسته غیر محلی مورد مطالعه قرار داد. گرچه وی نانومیله را بطور یکنواخت در نظر گرفته است.

در این مقاله، نانومیله بصورت غیریکنواخت و ناهمگن در نظر گرفته شده است. هندسه غیر یکنواخت در نانو ساختارها می‌تواند به طراحی کارآمد این سیستم‌ها کمک کند. در نانو سنسورها و نانو محرک‌ها، هندسه غیر یکنواخت (مانند سطح مقطع غیر یکنواخت) می‌تواند به کنترل ارتعاشات آن‌ها کمک بسزایی نماید. علاوه بر این، میژاوسکا و همکارانش [15] برخی تحولات اخیر در سنتز و ساخت اتصالات نامتجانس تشکیل شده بین نانو ساختارهای متفاوت را مورد بازبینی قرار داده است. این به آن معناست که در برخی موارد لازم است نانومیله‌ها بطور ناهمگن در نظر گرفته شوند. از این رو، بطور واقع بینانه، برای شبیه سازی ارتعاش تحت شرایط خاص، نانومیله باید غیر یکنواخت و ناهمگن در نظر گرفته شود. همچنین، برای طراحی مناسب نانومیله، دانش در مورد رفتار مکانیکی لازم است. از این رو، مطالعات تجربی و نظری توسط محققین انجام شده است [16]. هر چند، نتایج تجربی نتایج دقیقی است، اما انجام آزمایش در مقیاس نانو بسیار گران تمام شده و دشوار است. در این راستا، بکارگیری مدل ریاضی مناسب یک راه حل است. به طور کلی سه رویکرد مناسب از دیدگاه ریاضی عبارتند از: اتمی [17و18]، مکانیک هیبریدی اتمی- پیوستار[5] [19و20] و مکانیک محیط‌های پیوسته متداول است. از آنجا که مکانیک اتمی و هیبریدی اتمی- پیوستار هزینه بر بوده و برای تحلیل نانو سیستم‌ها با تعداد زیاد اتم‌ها مناسب نیستند [21]؛ مکانیک محیطهای پیوسته به طور گسترده ای توسط محققان استفاده می‌شود. مکانیک محیطهای پیوسته به مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک (محلی[6]) و غیرکلاسیک (غیر محلی) طبقه بندی می‌شود. در مکانیک محیطهای پیوسته کلاسیک، فاصله بین هر اتم در شبکه بلوری در نظر گرفته نشده است؛ بنابراین، استفاده از مکانیک محیطهای پیوسته کلاسیک در ارتعاش نانومیله‌ها تردید برانگیز است. نتایج تجربی و شبیه سازی اتمی نشان می‌دهد که اثر اندازه[7] ، نقش مهمی در خواص مکانیکی [22] سازه‌ها در مقیاس نانو دارد. در صورت نادیده گرفتن اثرات مقیاس، طراحی نانو ساختارها دچار مشکل خواهد شد. از این رو برای طراحی نانو ساختارها ، نانو ماشین و سیستم‌های نانو اپتومکانیکی[8] [23و24]، باید ترکیبی از اثرات مقیاس کوچک و نیروهای اتمی را برای رسیدن به راه حل‌های دقیق و قابل قبول مورد استفاده قرار داد. پارامتر غیر محلی[9] که اثر اندازه را مشخص می‌کند یک نقش حیاتی در نظریه الاستیسیته غیر محلی ایفا می‌کند.

هر چند مطالعات قبلی نشان می‌دهد که برخی از تحقیقات درباب نانو ساختارها با مقطع متغیر [25-27] پرداخته اند اما با توجه به منابع و مراجع مختلف، ارتعاش آزاد نانومیله‌ها با مقطع غیر یکنواخت و ناهمگن با استفاده از روش ریلی ریتز هنوز بررسی نشده است؛ در نتیجه، در این مقاله، ارتعاش نانومیله‌ها با در نظر گرفتن تغییرات خطی و درجه دوم پارامترهای غیر یکنواخت با استفاده از چند جمله ای‌های متعامد مشخصه مرزی[10] در روش ریلی-ریتز مورد بررسی قرار گرفته است. اگر چه قبلا این روش در ارتعاش تیرها و صفحات کلاسیک [28-31] مورد استفاده واقع شده است. استفاده از چند جمله ای‌های متعامد مشخصه مرزی در روش-ریلی ریتز باعث می-شود تا روند محاسباتی کارآمد شود؛ زیرا با توجه به تعامد توابع شکل فرضی، مقادیر برخی از درآیه‌های ماتریس‌های جرم و سختی مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته، صفر یا یک می‌گردد. در این تحقیق، علاوه بر در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک، اثرات پارامتر غیر یکنواخت، شرایط مرزی، نسبت طول به قطر و پارامترهای غیر محلی بر پارامترهای فرکانسی[11] نانومیله تحلیل و بررسی می‌شوند. در انتها سه شکل مود اول ارتعاش برای شرط مرزی دوسر ثابت نشان داده می‌شود.

در ادامه مقاله ابتدا مدل الاستیک غیر محلی برای نانومیله ارائه شده است و سپس روش حل آن ارائه شده و برای مدل مورد نظر مورد استفاده قرار خواهد گرفت و در نهایت نتیجه گیری مقاله خواهد آمد.

2- تئوری و معادلات حاکم

2-1- مدل الاستیک غیر محلی برای نانومیله

برای یک نانو لوله کربنی مطابق "شکل 1" به طول L و قطر $d(x)$ معادله متشکله غیر محلی[12] بصورت زیر نوشته می‌شود [32].

$$(1-\mu\nabla^2)\tau_{kl} = \lambda\varepsilon_{rr}\delta_{kl} + G\varepsilon_{kl} \tag{1}$$

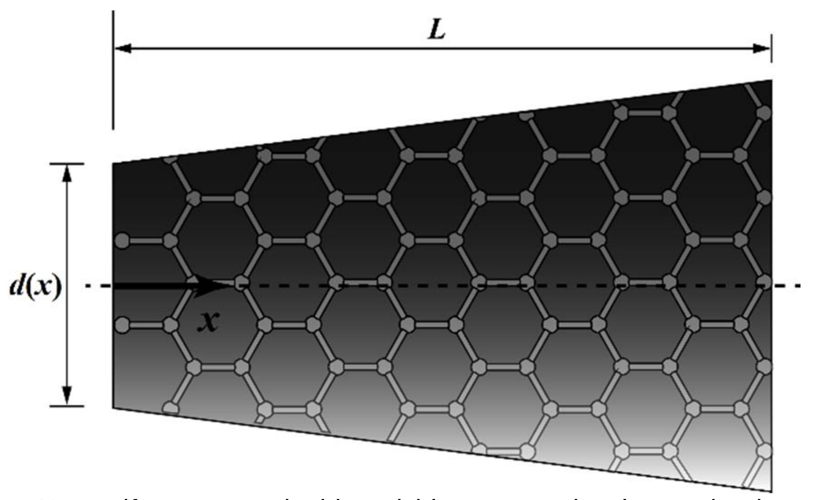


Fig. 1 Non-uniform nanorod with variable cross-sectional area, density and Young's modulus

شکل 1 نانومیله غیر یکنواخت با سطح مقطع، چگالی و مدول یانگ متغیر

1- Small length scale effect
2- Nonlocal elasticity theory
3- clamped
4- Continuum model
5- Hybrid continuum-atomistic mechanics
6- Local
7- Size effect
8- Nano-Optomechanical Systems
9- Nonlocal parameter
10- Boundary characteristic orthogonal polynomials
11- Frequency parameter
12- Nonlocal constitutive equation

که به ترتیب، τ_{kl} تانسور تنش غیر محلی، ε_{kl} تانسور کرنش، λ و G ثوابت لامه نام دارند. در رابطه مذکور $\mu=(e_0 a)^2$ پارامتر غیر محلی، a طول مشخصه داخلی و e_0 یک ثابت است.

برای ارتعاش محوری، معادله (1) بصورت ساده تر زیر نوشته می‌شود.

$$(1-\mu\nabla^2)\tau_{xx}=E\varepsilon \tag{2}$$

که در آن، E مدول یانگ می‌باشد.

معادله حرکت برای ارتعاش محوری یک نانو لوله کربنی مانند زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\partial N^L}{\partial x}=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

که در آن به ترتیب، $u(x,t)$ جابجایی محوری، m جرم واحد طول و N^L نیروی محوری واحد طول می‌باشد.

$$N^L=\int_A \sigma_{xx}dA \tag{4}$$

سطح مقطع نانو لوله کربنی و مؤلفه تنش محلی در راستای x به ترتیب با A و σ_{xx} مشخص شده است.

با انتگرال گیری از معادله (2) بر حسب مساحت مقطع نانومیله به معادله زیر خواهیم رسید.

$$N^{\mathrm{NL}}-\mu\frac{\partial^2 N^{\mathrm{NL}}}{\partial x^2}=N^{\mathrm{L}} \tag{5}$$

که در آن، $\int_A\tau_{xx}dA=N^{\mathrm{NL}}$ نیروی غیر محلی محوری را در واحد طول نشان می‌دهد.

با استفاده از معادلات (3-5) معادله حرکت برای ارتعاش آزاد محوری یک نانو لوله کربنی بدست می‌آید.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(1-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6}$$

در معادله (6)، $\rho(x)A(x)$ جایگزین جرم واحد طول m شده است.

برای $\mu=0$ معادله فوق به معادله حرکت مدل کلاسیک میله تبدیل می‌گردد.

با در نظر گرفتن تابع هارمونیک $u(x,t)=u(x)\sin\omega t$ برای ارتعاش نانومیله می‌توان معادله مشخصه حاکمه را بصورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dx}\left(E(x)A(x)\frac{du(x)}{dx}\right)+\left(1-\mu\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(\rho(x)A(x)u(x)\omega^2\right)=0 \tag{7}$$

با استفاده از روش باقی مانده وزن دار شکل ضعیف[1] معادله (7) بدست می‌آید. بنابراین با ضرب کردن این معادله در یک تابع وزنی دلخواه $\phi(x)$ و انتگرال گیری حول دامنه خواهیم داشت:

$$\int_0^L\phi(x)\left[\frac{d}{dx}\left(E(x)A(x)\frac{du(x)}{dx}\right)+\left(1-\mu\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(\rho(x)A(x)u(x)\omega^2\right)\right]dx=0 \tag{8-الف}$$

که در این معادله ω فرکانس طبیعی ارتعاش نانومیله است.

$$\int_0^L E(x)A(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{d\phi(x)}{dx}dx=\omega^2\int_0^L\left[\rho(x)A(x)u(x)\phi(x)+\mu\frac{d}{dx}\left(\rho(x)A(x)u(x)\right)\frac{d\phi(x)}{dx}\right]dx \tag{8-ب}$$

حال با مساوی قرار دادن تابع وزنی و تابع پروفیل جابجایی نانومیله، معادله زیر بدست می‌آید.

$$\int_0^L E(x)A(x)\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2dx=\omega^2\int_0^L\left[\rho(x)A(x)u(x)^2+\mu\frac{d}{dx}\left(\rho(x)A(x)u(x)\right)\frac{du(x)}{dx}\right]dx \tag{9}$$

بنابراین کسر ریلی[2] را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\frac{\int_0^L E(x)A(x)\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2dx}{\int_0^L\left[\rho(x)A(x)u(x)^2+\mu\frac{d}{dx}\left(\rho(x)A(x)u(x)\right)\frac{du(x)}{dx}\right]dx} \tag{10}$$

2-2- کسر ریلی

هدف، یافتن پارامترهای فرکانس برای یک نانومیله با بکارگیری چند جمله ای‌های متعامد و مرزی در روش ریلی-ریتز می‌باشد. در این روش الگوی جابجایی توسط یک سری از توابع شکل پذیرا[3] ارائه شده است.

برای رسیدن به یک تحلیل ساده تر و بهینه، پارامترهای بی بعد زیر تعریف شده اند.

$$\mathrm{X}=\frac{x}{L},\qquad \Lambda^{\mathrm{ND}}=\frac{\rho_0\omega^2L^2}{E_0},\qquad \alpha=\frac{\mathrm{e}_0 a}{L} \tag{11}$$

که در آن به ترتیب، α پارامتر اثر مقیاس گذاری[4]، Λ^{ND} پارامتر بی بعد فرکانس نانومیله، ρ_0 و E_0 دانسیته و مدول یانگ در $x=0$ می‌باشد. ثابت a طول مشخصه داخلی[5] نام دارد و ضریب e_0 ثابتی است که بسته به ماده متشکله به منظور مطابقت دادن مدل با نتایج قابل اعتمادی که بوسیله آزمایش یا سایر نظریه‌ها بدست می‌آیند بکارمی‌رود.

با قرار دادن روابط (11) در (10) کسر ریلی بصورت بی بعد شده بدست خواهد آمد.

$$\frac{\int_0^1 \mathrm{E_R(X)A_R(X)}\left(\frac{d\mathrm{U(X)}}{d\mathrm{X}}\right)^2d\mathrm{X}}{\int_0^1\left[\rho_{\mathrm{R}}(\mathrm{X})\mathrm{A_R(X)U(X)}^2+\alpha^2\frac{d}{d\mathrm{X}}\left(\rho_{\mathrm{R}}(\mathrm{X})\mathrm{A_R(X)U(X)}\right)\frac{d\mathrm{U(X)}}{d\mathrm{X}}\right]d\mathrm{X}} \tag{12}$$

در رابطه مذکور، روابط زیر تعریف شده است.

$$E=E_0\mathrm{E_R(X)},\qquad \rho=\rho_0\rho_{\mathrm{R}}(\mathrm{X}),\qquad A=A_0\mathrm{A_R(X)} \tag{13-الف}$$

ثابت A_0 سطح مقطع نانومیله را در مبدأ مختصات نشان می دهد. پارامترهای $\mathrm{E_R(X)}$، $\rho_{\mathrm{R}}(\mathrm{X})$ و $\mathrm{A_R(X)}$ به ترتیب، توابع تغییرات مدول یانگ، چگالی و هندسه نانومیله بر حسب X می‌باشند که بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathrm{E_R(X)}=1+p\mathrm{X}+q\mathrm{X}^2,\qquad \rho_{\mathrm{R}}(\mathrm{X})=1+r\mathrm{X}+s\mathrm{X}^2,\qquad \mathrm{A_R(X)}=1+b\mathrm{X} \tag{13-ب}$$

پرواضح است که در این تعریف، مدول یانگ و چگالی می‌توانند به هر دو حالت خطی و سهموی تغییر یابند ولی مساحت سطح مقطع بطور خطی تغییر می‌کند.

ثابت b، ضریب عریض شوندگی[6] نانومیله نام دارد.

3-2- روش ریلی-ریتز[7]

در روش ریلی-ریتز سری گسسته سازی، متشکل از N ترم توسط تابع جابجایی تعریف می‌شود.

$$\mathrm{U(X)}=\sum_{i=1}^{N}C_i^{\mathrm{R}}\bar{\eta}_i(\mathrm{X}) \tag{14}$$

1- Weak form

2- Rayleigh-quotient
3- Admissible shape function
4- Scaling effect parameter
5- Internal characteristic length
6- Thickening coefficient
7- Rayleigh-Ritz method

که C_i^{R} ضرایب نامعین بوده و $\bar{\eta}_i$ توابع شکل پذیرای متعامد و نرمالی هستند که توسط فرآیند تعامد سازی گرام-اشمیت[1] با طی کردن مراحل زیر بدست می‌آیند [28،31].

$$\xi_i = \mathrm{X}^{\mathrm{m}}(1-\mathrm{X})^{\mathrm{n}}\mathrm{X}^{i-1}$$
$$\eta_1 = \xi_1 \,, \eta_i = \xi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \theta_{ik}\eta_k$$
$$\theta_{uv} = \frac{\langle \xi_u, \eta_v \rangle}{\langle \eta_v, \eta_v \rangle} \tag{15}$$

عموما $\langle a,b \rangle$ نشانگر ضرب داخلی دو تابع a و b به صورت زیر می‌باشد.

$$\langle a,b \rangle = \int_0^1 a(\mathrm{X})b(\mathrm{X})d\mathrm{X} \tag{16}$$

که در اینجا انتگرال گیری روی دامنه‌ی بی بعد $\mathrm{X} \in [0,1]$ انجام شده است.
هر ضرب داخلی دارای یک نرم[2] بصورت زیر است.

$$\|f(\mathrm{X})\| = \sqrt{\langle f,f \rangle} \tag{17}$$

نهایتا تابع شکل نرمالیزه شده $\bar{\eta}_i$ از رابطه زیر حاصل خواهد شد.

$$\bar{\eta}_i = \frac{\eta_i}{\|\eta_i\|} \tag{18}$$

نظر به این نکته که بدلیل مفهوم تعامد، حاصل برخی از انتگرال‌ها در روند بی بعد سازی گرام-اشمیت برابر با مقدار 0 یا 1 می‌گردد؛ رابطه زیر صادق خواهد بود.

$$\langle \bar{\eta}_u, \bar{\eta}_v \rangle = \begin{cases} 0 \,, u \neq v \\ 1 \,, u = v \end{cases} \tag{19}$$

با قرار دادن رابطه (14) در رابطه (12)، مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته بدست می‌آید.

$$[K^{\mathrm{R}}]\{\mathrm{U}\} = \Lambda^{\mathrm{ND}}[M^{\mathrm{R}}]\{\mathrm{U}\} \tag{20}$$

که در آن، $[K^{\mathrm{R}}]$ و $[M^{\mathrm{R}}]$ ماتریس‌های سختی و جرم بوده و $\{\mathrm{U}\} = [C_1^{\mathrm{R}}\ C_2^{\mathrm{R}} \dots C_N^{\mathrm{R}}]^{\mathrm{T}}$ بردار ضرایب نامعین نام دارد.

عناصر ماتریس‌های جرم و سختی بصورت نمادین زیر نوشته می‌شوند.

$$k_{ij}^{\mathrm{R}} = \int_0^1 \mathrm{E_R A_R} \frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial \mathrm{X}} \frac{\partial \bar{\eta}_j}{\partial \mathrm{X}} d\mathrm{X}$$
$$m_{ij}^{\mathrm{R}} = \int_0^1 \left(\rho_{\mathrm{R}}\mathrm{A_R}\bar{\eta}_i\bar{\eta}_j + \alpha^2 \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}} (\rho_{\mathrm{R}}\mathrm{A_R}\bar{\eta}_i) \frac{\partial \bar{\eta}_j}{\partial \mathrm{X}} \right) \right) d\mathrm{X} \tag{21}$$

3- نتایج و بحث

در مطالعه حاضر، پارامترهای فرکانس نانومیله Λ^{ND} از حل عددی معادله (20) با استفاده از کد نوشته شده در میپل[3] بدست آمده اند. برای دستیابی به یک دقت قابل قبول، درجه تقریب لازم N بوسیله این برنامه بدست آمد.

به منظور حل عددی مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته، شرایط مرزی نانومیله از طریق مقدار دهی m و n با اعداد 0 و 1 به ترتیب برای حالت آزاد و گیردار اعمال شده است.

3-1- صحه گذاری و همگرایی روش

به منظور صحه گذاری روش ارائه شده، پنج پارامتر اول فرکانس برای یک نانومیله یکنواخت با شرایط مرزی مختلف محاسبه شده است. نتایج در جدول‌های 1 و 2 نشان داده شده و با نتایج کیانی [33]، سیمسک [34] و نچام [35] مقایسه گردیده است. در جدول 1 نتایج برای یک نانومیله دوسر ثابت به ازای ضریب μ برابر با 0.05 و 0.10 بدست آمده است.

در جدول 2 پارامترهای فرکانس برای یک نانومیله یکسر ثابت به ازای ضریب μ برابر با 0.05 و 0.10 محاسبه شده است.

1- Gram-Schmidt process
2- Norm
3- Maple 18.0

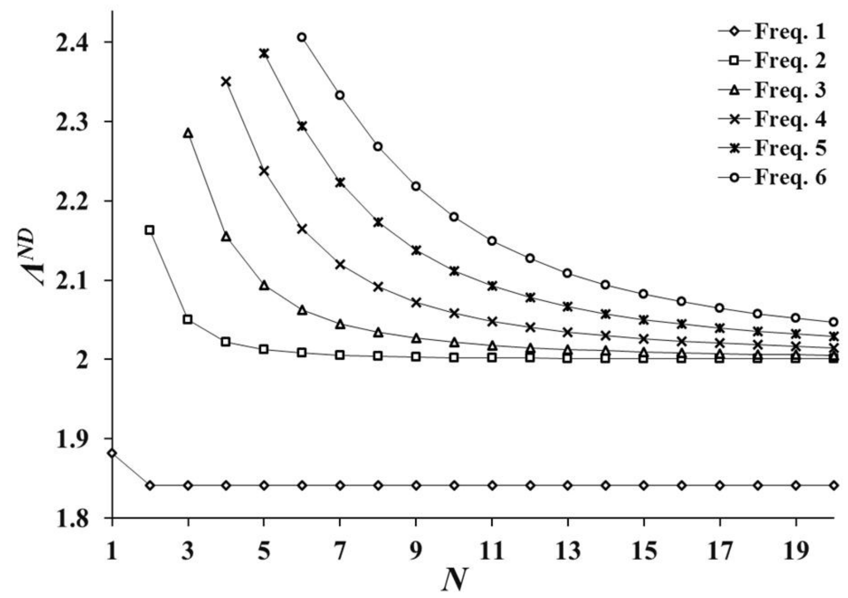


Fig. 2 Convergence of first six frequency parameters for a C-C[1] nanorod

شکل 2 همگرایی شش پارامتر اول فرکانس برای یک نانومیله دوسر گیردار

جدول 1 مقایسه پنج پارامتر اول فرکانس ارتعاش یک نانومیله دوسر ثابت با نتایج دیگران به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیر محلی $\boldsymbol{\mu}$

Table 1 Comparison of first five vibration frequency parameter of a C-C nanorod with others for different values of nonlocal parameter μ

مود ارتعاش	μ	کیانی [33]	سیمسک [34]	دقیق [35]	مطالعه حاضر
		دوسر ثابت			
1		3.1035	3.1035	3.1035	3.1035
2		5.9943	5.9943	5.9943	5.9943
3	0.05	8.5256	8.5255	8.5256	8.5256
4		10.6404	10.6403	10.6404	10.6404
5		12.3534	12.3533	12.3534	12.3534
1		2.9972	2.9971	2.9972	2.9972
2		5.3202	5.3201	5.3202	5.3202
3	0.10	6.8587	6.8586	6.8587	6.8587
4		7.8248	7.8247	7.8248	7.8248
5		8.4356	8.8338	8.8338	8.4356

جدول 2 مقایسه پنج پارامتر اول فرکانس ارتعاش یک نانومیله یکسر ثابت با نتایج دیگران به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیر محلی $\boldsymbol{\mu}$

Table 2 Comparison of first five vibration frequency parameter of a C-F nanorod with others for different values of nonlocal parameter μ

مود ارتعاش	μ	کیانی [33]	سیمسک [34]	دقیق [35]	مطالعه حاضر
		یکسر ثابت			
1		1.5660	1.5659	1.5660	1.5660
2		4.5868	4.5867	4.5868	4.5868
3	0.05	7.3105	7.3104	7.3105	7.3105
4		9.6354	9.6353	9.6354	9.6354
5		11.5443	11.5443	11.5443	11.5443
1		1.5518	1.5517	1.5518	1.5518
2		4.2628	4.2627	4.2628	4.2628
3	0.10	6.1767	6.1766	6.1767	6.1767
4		7.3981	7.3980	7.3981	7.3980
5		8.1640	8.1640	8.1640	8.1640

همانطور که در جدول‌های 1 و 2 مشاهده می‌شود؛ نتایج محاسبه شده از روش حاضر با دیگر نتایج موجود به خوبی مطابقت دارند.

در "شکل 2" همگرایی شش پارامتر اول فرکانس برای یک نانومیله دوسر گیردار با سطح مقطع ثابت به ازای $\alpha = 0.5$ نشان داده شده است. در این نمودار فرض شده است که مدول یانگ و چگالی در طول نانومیله بطور سهموی عوض می‌شوند ($p = 0.4, q = 0.1, r = 0.3, s = 0.2$).

"شکل 2" نشان می‌دهد که استفاده از چند جمله ای‌های متعامد در روش ریلی-ریتز حین افزایش درجه تقریب N، باعث همگرایی سریع نتایج می‌شود.

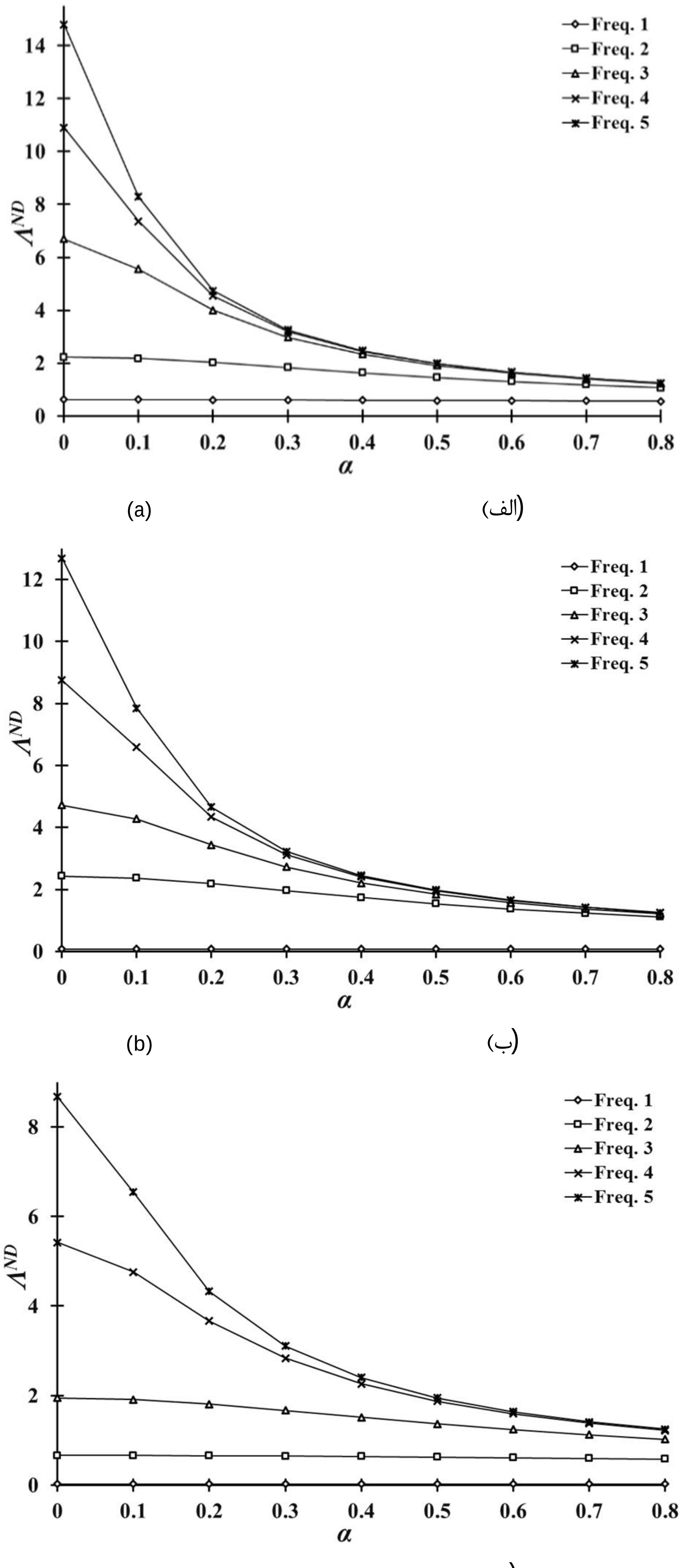
3-2- اثر پارامترهای غیر محلی

در این بخش ابتدا تأثیر پارامتر اثر مقیاس گذاری α روی پارامتر فرکانس

1- Clamped-Clamped

بررسی شده است. "شکل 3" تغییرات پنج مود ارتعاشی اول نسبت به α برای سه حالت شرایط مرزی آزاد، دوسر گیردار و یکسر گیردار با در نظر گرفتن ضرایب غیر یکنواخت $b = p = q = r = s = 0.1$ نشان داده شده است.

"شکل 3"، تغییرات پارامترهای فرکانس با افزایش پارامتر α را نشان می‌دهد. در حالت $\alpha = 0$ (مکانیک پیوسته محلی)، پارامترهای فرکانس در هر مود مقدارشان بیشینه است.



(a) (الف)

(b) (ب)

(c) (ج)

Fig. 3 Variations of first five vibration modes with α for, a) C-C, b) C-F[1], c) F-F[2] condition

شکل 3 تغییرات پنج مود ارتعاشی اول نسبت به α برای حالت، الف) دوسر گیردار، ب) یکسر گیردار، ج) آزاد

1- Clamped-Free
2- Free-Free

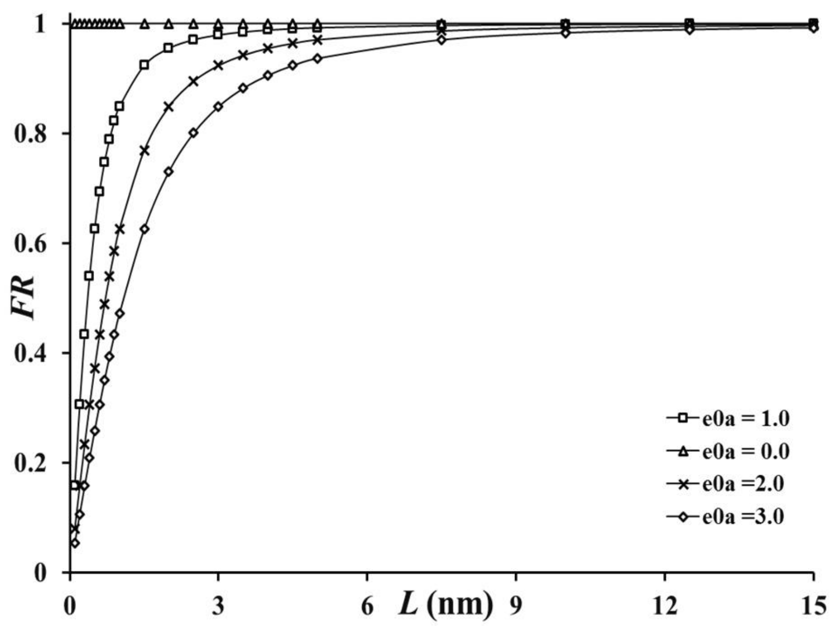


Fig. 4 Variations of fundamental frequency ratio with length of nanorod

شکل 4 تغییرات نرخ فرکانس پایه بر حسب طول نانومیله

با افزایش α هر چه بیشتر از حالت محلی به غیر محلی رسیده و مقدار پارامتر فرکانس در هر مود ارتعاشی کاهش می‌یابد. همچنین از روی نمودارهای "شکل 3" می‌توان نتیجه گرفت که نرخ نزول پارامترهای فرکانس در مود-های ارتعاشی بالاتر بیشتر است. پدیده کاهش فرکانس در نمودارها چنین تفسیر می‌شود که مدل غیر محلی یک دیدگاه اتمی داشته که در آن اتم‌ها توسط فنرهایی الاستیک به هم متصل شده اند درحالی که در مدل پیوسته محلی، ثابت فنر مقداری بی نهایت دارد. بنابراین اثر مقیاس کوچک باعث می‌شود تا نانومیله نرم تر مدل شده و فرکانس ارتعاش آن کاهش یابد. در نتیجه تأثیر پارامترهای غیر محلی قابل اغماز نخواهد بود.

به منظور بررسی اثر طول نانومیله بر نرخ فرکانس پایه، نمودار "شکل 4" برای یک نانومیله دوسر گیردار با ضریب عریض شوندگی 0.2 و ضرایب غیر یکنواخت $p = q = r = s = 0.1$ ترسیم شده است.

نرخ فرکانس[3] FR از طریق فرمول زیر قابل محاسبه است.

$$FR = \frac{\mathrm{NLF}}{\mathrm{LF}} \qquad (22)$$

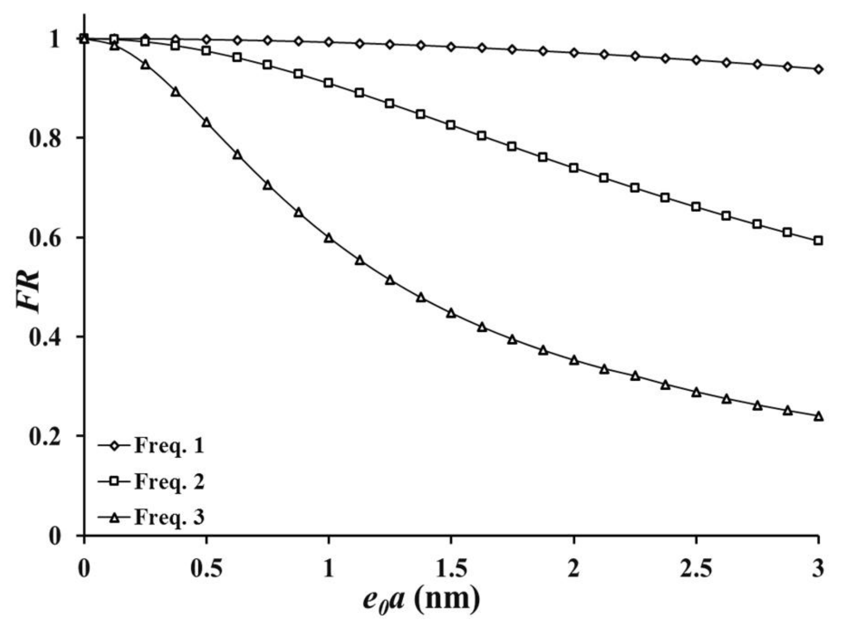
که در آن، NLF پارامتر فرکانس غیر محلی و LF پارامتر فرکانس محلی می‌باشد.

از روی نمودار "شکل 4" می‌توان دید که بدلیل اثر مقیاس طولی کوچک در تمام شرایط، فرکانس غیر محلی کمتر از فرکانس محلی است. علاوه بر این، با زیاد شدن ضریب مقیاس، نرخ فرکانس کاهش می‌یابد. دلیل این امر این است که افزایش ضریب مقیاس به معنی کاهش بر هم کنش نیروهای اتمی در ساختار نانومیله بوده که خود منجر به یک ساختار نرم تر می‌شود. با افزایش طول نانومیله، نرخ فرکانس نیز افزایش می‌یابد. از روی "شکل 4" می‌توان دریافت که وقتی طول نانومیله از 15 nm بیشتر شود؛ تمام نتایج به فرکانس محلی همگرا می‌گردند. به عبارت دیگر، وقتی طول نانومیله از مقدار مشخصی تجاوز کند پارامترهای غیر محلی تدریجا بی اثر می‌شوند؛ زیرا افزایش طول نانومیله منجر به افزایش طول موج در راستای محوری شده که در نهایت باعث کاهش اثر مقیاس کوچک می‌گردد.

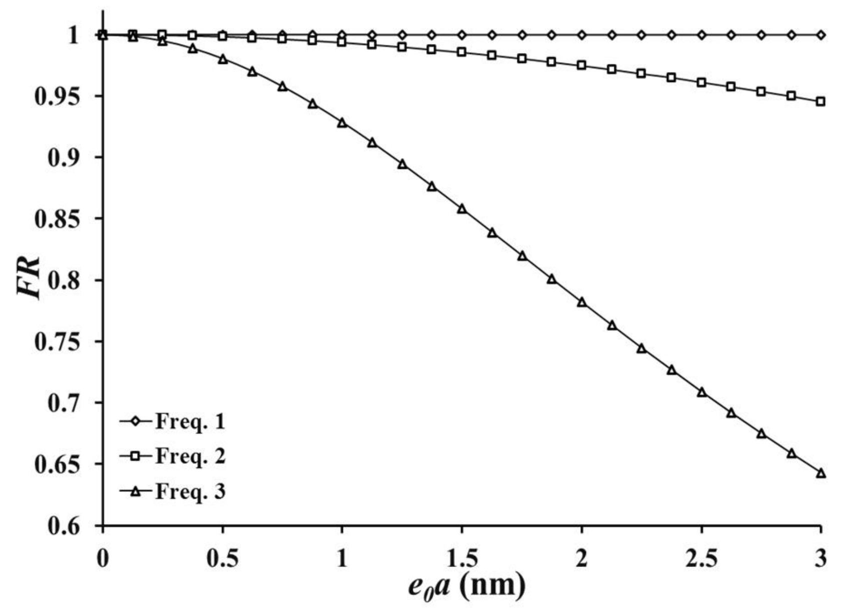
"شکل 5"، نمودار نرخ سه فرکانس اول یک نانومیله غیر یکنواخت را نسبت به تغییر ضریب مقیاس[4] برای دو شرط مرزی دوسر گیردار و یکسر گیردار نشان می‌دهد. با زیاد شدن ضریب مقیاس، نرخ فرکانس کاهش یافته که این به معنی کاهش فرکانس سیستم می‌باشد. علاوه بر این، اثرات غیر محلی در مودهای ارتعاشی بالاتر نمود بیشتری دارند.

3- Frequency ratio
4- Scaling coefficient

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.1.3.6]



(a) (الف)



(b) (ب)

Fig. 5 Variations of first three frequency ratios with scale coefficient for, a) C-C, b) C-F condition

شکل 5 تغییرات نرخ سه فرکانس اول بر حسب ضریب مقیاس برای حالت، الف) دوسر گیردار، ب) یکسر گیردار

3-3- اثر پارامترهای غیر یکنواخت

در این قسمت آثار پارامترهای غیر یکنواخت بر پارامترهای فرکانس بررسی شده است.

نتایج عددی برای حالات غیر یکنواخت زیر بدست آمده اند. در تمام حالات زیر تغییرات سطح مقطع خطی فرض شده است.

الف) تغییرات E خطی و تغییرات ρ از درجه دوم

ب) تغییرات E از درجه دوم و تغییرات ρ خطی

ج) تغییرات E و ρ خطی

د) تغییرات E و ρ از درجه دوم

"شکل 6" برای حالت (الف)، تغییرات دو پارامتر اول فرکانس یک نانومیله یکسر گیردار را نسبت به پارامترهای غیر یکنواخت p و s نشان می‌دهد. در این حالت ضریب عریض شوندگی b برابر با 0.2 و مقدار پارامترهای r و q صفر در نظر گرفته شده است. بازه تغییرات محورهای افقی [-0.5,0.5] بوده و نتایج برای مقادیر متفاوت پارامتر اثر مقیاس گذاری α = 0, 0.4, 0.8 بدست آمده است.

در "شکل 6"، می‌توان دریافت که پارامترهای فرکانس با افزایش ضریب p، افزایش یافته اما با افزایش ضریب s، کاهش می‌یابند. دلیل این پدیده را می‌توان این گونه توجیه نمود که کسر بی بعد ریلی Λ_R^{ND} در معادله (12) با ضریب p نسبت مستقیم داشته ولی با ضریب s نسبت عکس دارد.

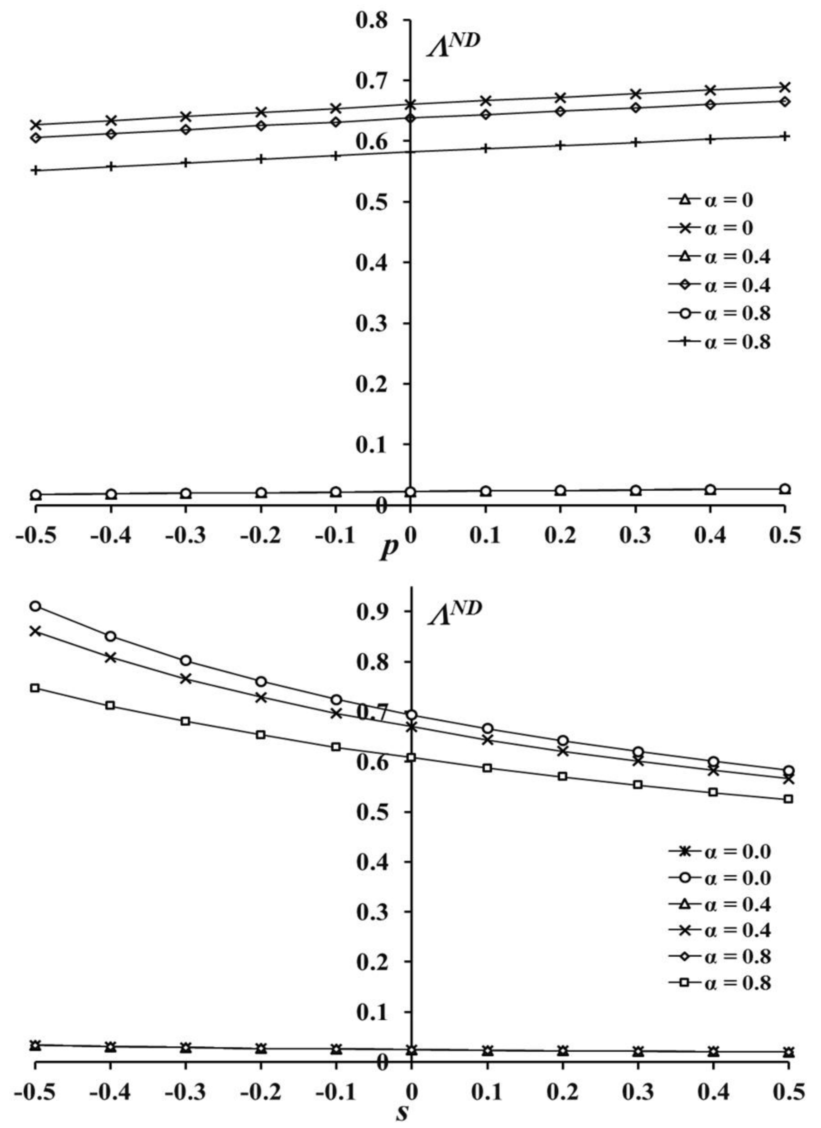


Fig. 6 Variations of first two frequency parameters of a C-F nanorod with parameters, s and p

شکل 6 تغییرات دو پارامتر اول فرکانس یک نانومیله یکسر گیردار نسبت به پارامترهای p و s

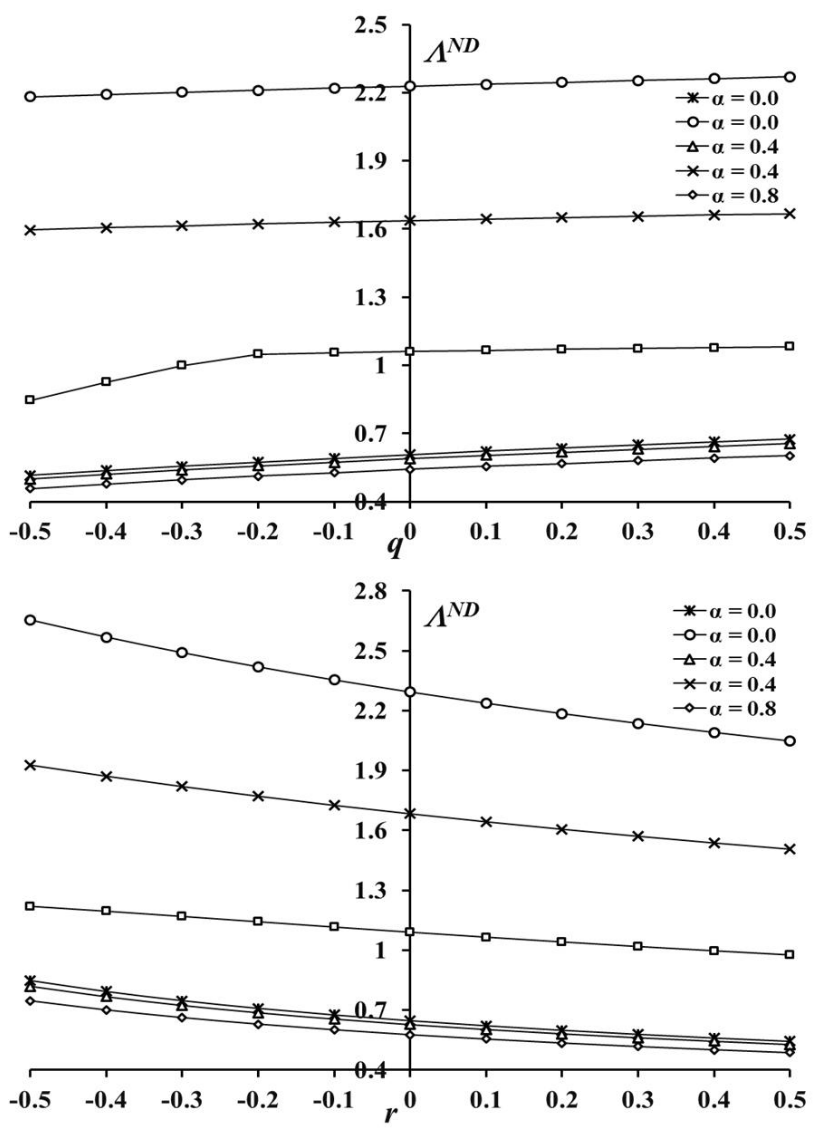


Fig. 7 Variations of first two frequency parameters of a C-C nanorod with parameters, q and r

شکل 7 تغییرات دو پارامتر اول فرکانس یک نانومیله دوسر گیردار نسبت به پارامترهای q و r

در نتیجه پارامترهای فرکانس با p افزایش و با s کاهش می‌یابند.

"شکل 7"، برای حالت (ب)، تغییرات دو پارامتر اول فرکانس یک نانومیله دوسر گیردار را نسبت به پارامترهای غیر یکنواخت q و r نمایش می‌دهد. در این حالت ضریب عریض شوندگی b برابر با 0.1 و مقدار پارامترهای s و p صفر در نظر گرفته شده است.

با توجه به "شکل 7"، پارامترهای فرکانس با افزایش ضریب q، افزایش یافته اما با افزایش ضریب r، کاهش می‌یابند. زیرا Λ_R^{ND} با ضریب q نسبت مستقیم داشته ولی با ضریب r نسبت عکس دارد و بنابراین پارامترهای فرکانس با q افزایش و با r کاهش می‌یابند.

برای حالت (ج) در "شکل 8"، تغییرات دو پارامتر اول فرکانس یک نانومیله دوسر آزاد نسبت به پارامترهای غیر یکنواخت p و r نشان داده شده است. در این حالت ضریب عریض شوندگی b برابر با 0.2 و مقدار پارامترهای s و q صفر در نظر گرفته شده است.

در "شکل 8"، مشاهده می‌شود که پارامترهای فرکانس با افزایش ضریب p، افزایش یافته اما با افزایش ضریب r، کاهش می‌یابند. با دلیلی مشابه موارد قبل این پدیده را می‌توان این گونه تفسیر نمود که کسر بی بعد ریلی با ضریب p نسبت مستقیم و با ضریب r نسبت عکس دارد. در نتیجه این رفتار قابل توجیه خواهد بود.

نهایتا "شکل 9"، برای حالت (د)، تغییرات دو پارامتر اول فرکانس یک نانومیله یکسر گیردار را نسبت به پارامترهای غیر یکنواخت q و s نمایش می‌دهد. در این حالت ضریب عریض شوندگی b برابر با 0.1 و مقدار پارامترهای r و p صفر در نظر گرفته شده است.

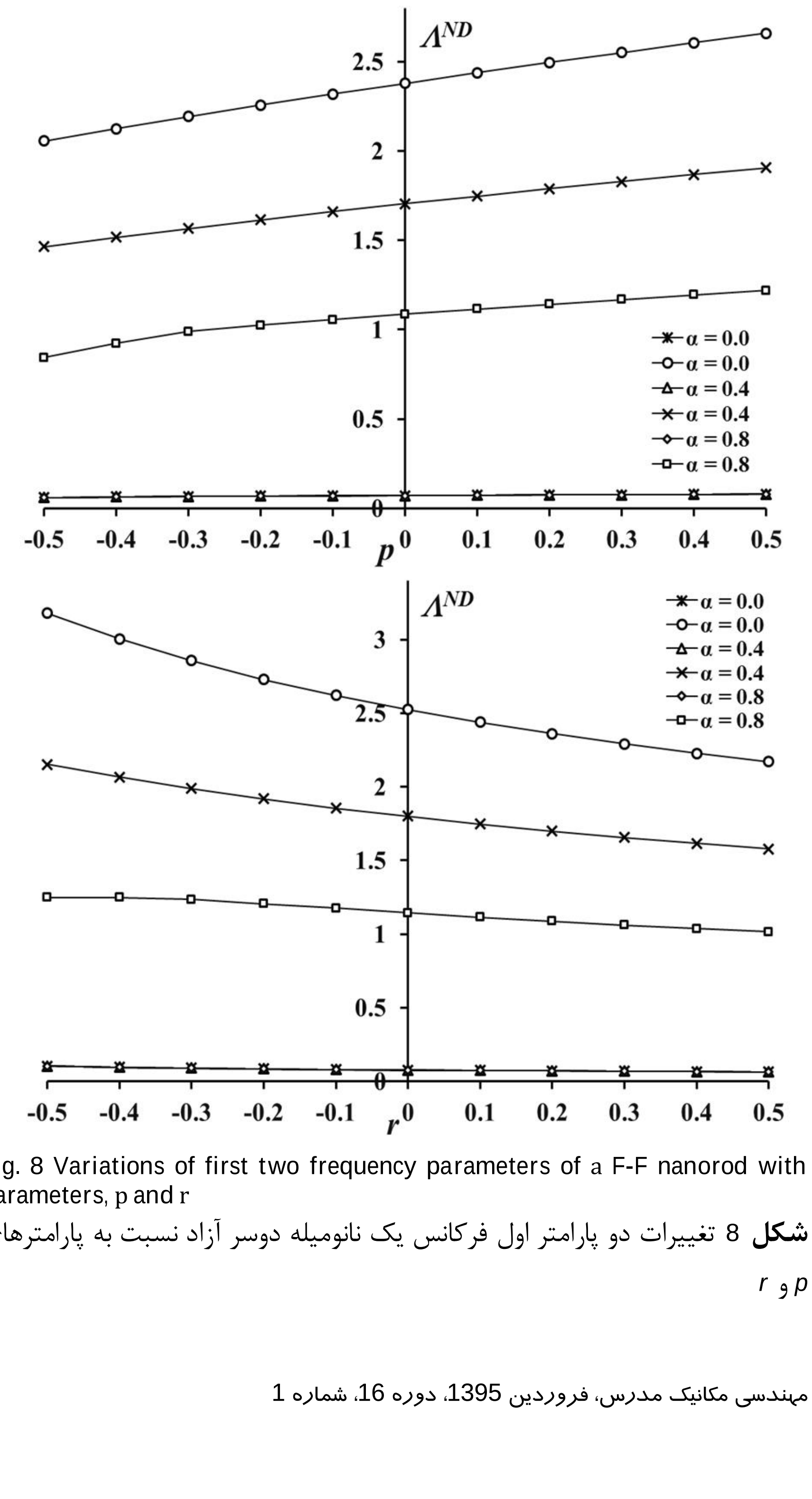


Fig. 8 Variations of first two frequency parameters of a F-F nanorod with parameters, p and r

شکل 8 تغییرات دو پارامتر اول فرکانس یک نانومیله دوسر آزاد نسبت به پارامترهای p و r

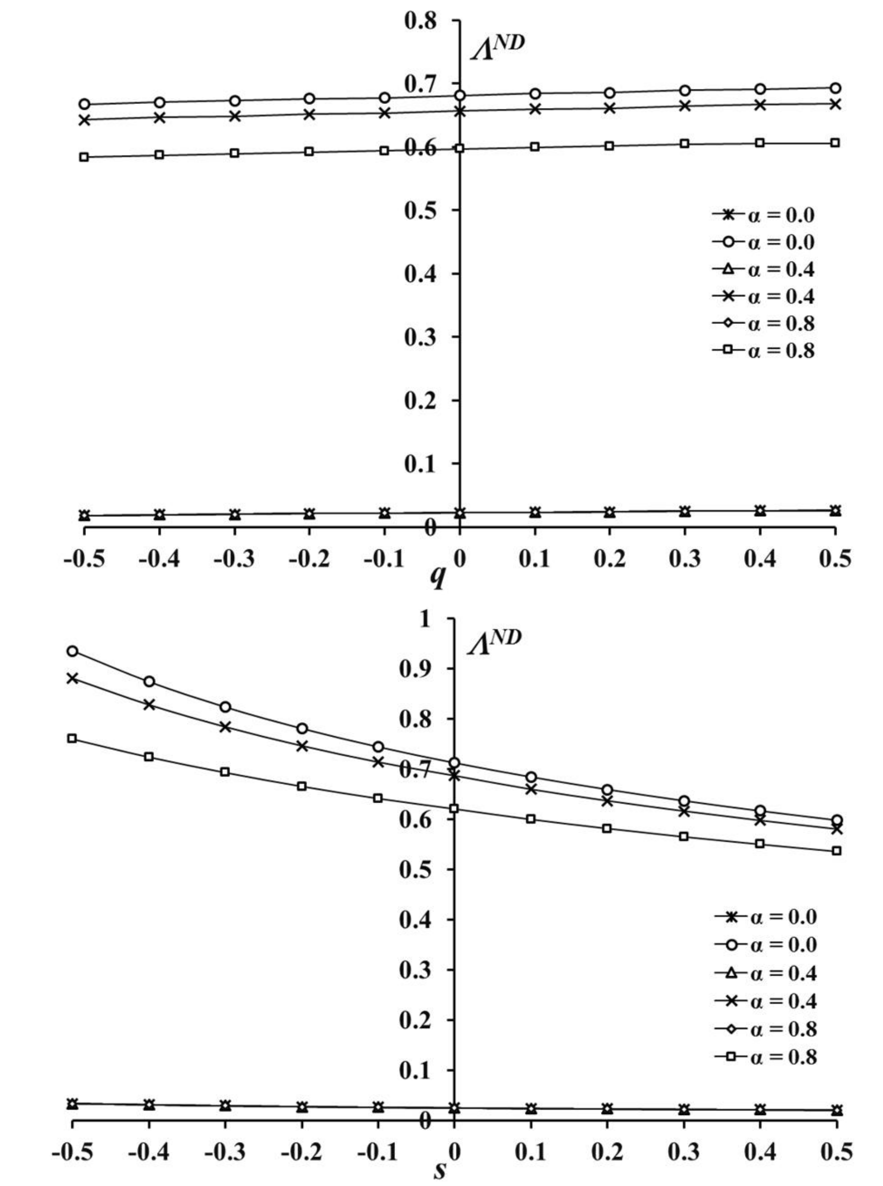


Fig. 9 Variations of first two frequency parameters of a C-F nanorod with parameters, q and s

شکل 9 تغییرات دو پارامتر اول فرکانس یک نانومیله یکسر گیردار نسبت به پارامترهای q و s

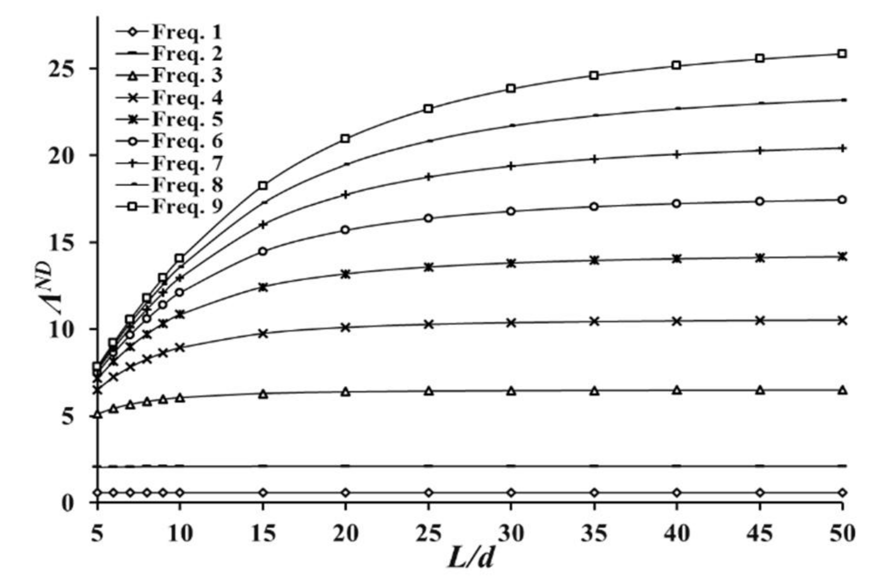


Fig. 10 Graph of variations in the first nine frequency parameters with L/d for a C-C nanorod

شکل 10 نمودار تغییرات نه پارامتر اول فرکانس نسبت به L/d برای یک نانومیله دوسر ثابت

با بررسی نتایج "شکل 9"، ملاحظه می‌شود که منحنی تغییرات پارامترهای فرکانس با افزایش q سیر صعودی داشته اما با افزایش s روندی نزولی دارد. دلیل این امر این است که ضرایب q و s به ترتیب در صورت و مخرج کسر بی بعد ریلی ظاهر می‌شوند؛ در نتیجه پارامترهای فرکانس با q نسبت مستقیم داشته ولی با s کاهش می‌یابند.

4-3- اثر پارامترهای دیگر

در این بخش آثار پارامترهایی مانند نسبت طول نانومیله به قطر آن (L/d) و شرایط مرزی، بر پارامترهای فرکانس مورد مطالعه قرار گرفته است.

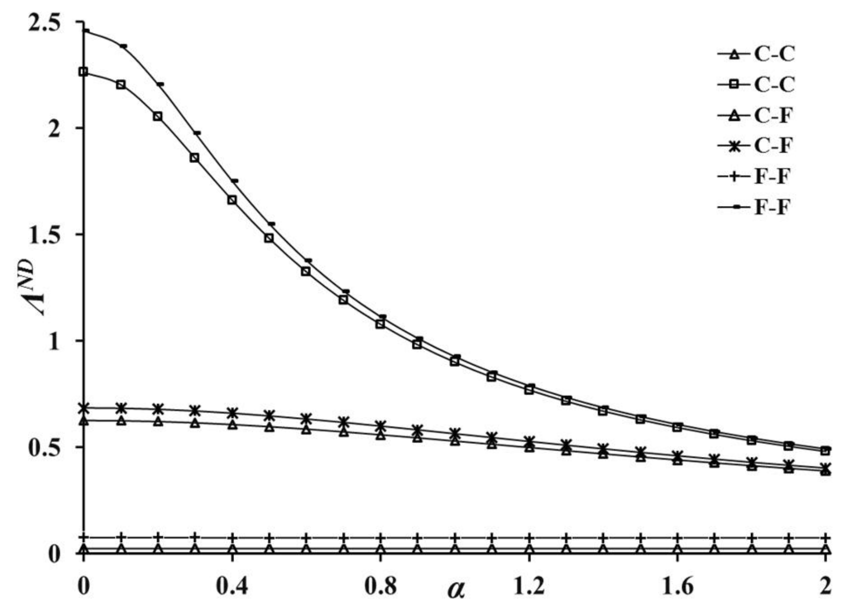


Fig. 11 Variations of first two frequency parameters with α for different boundary conditions

شکل 11 تغییرات دو پارامتر اول فرکانس بر حسب پارامتر α برای شرایط مرزی متفاوت

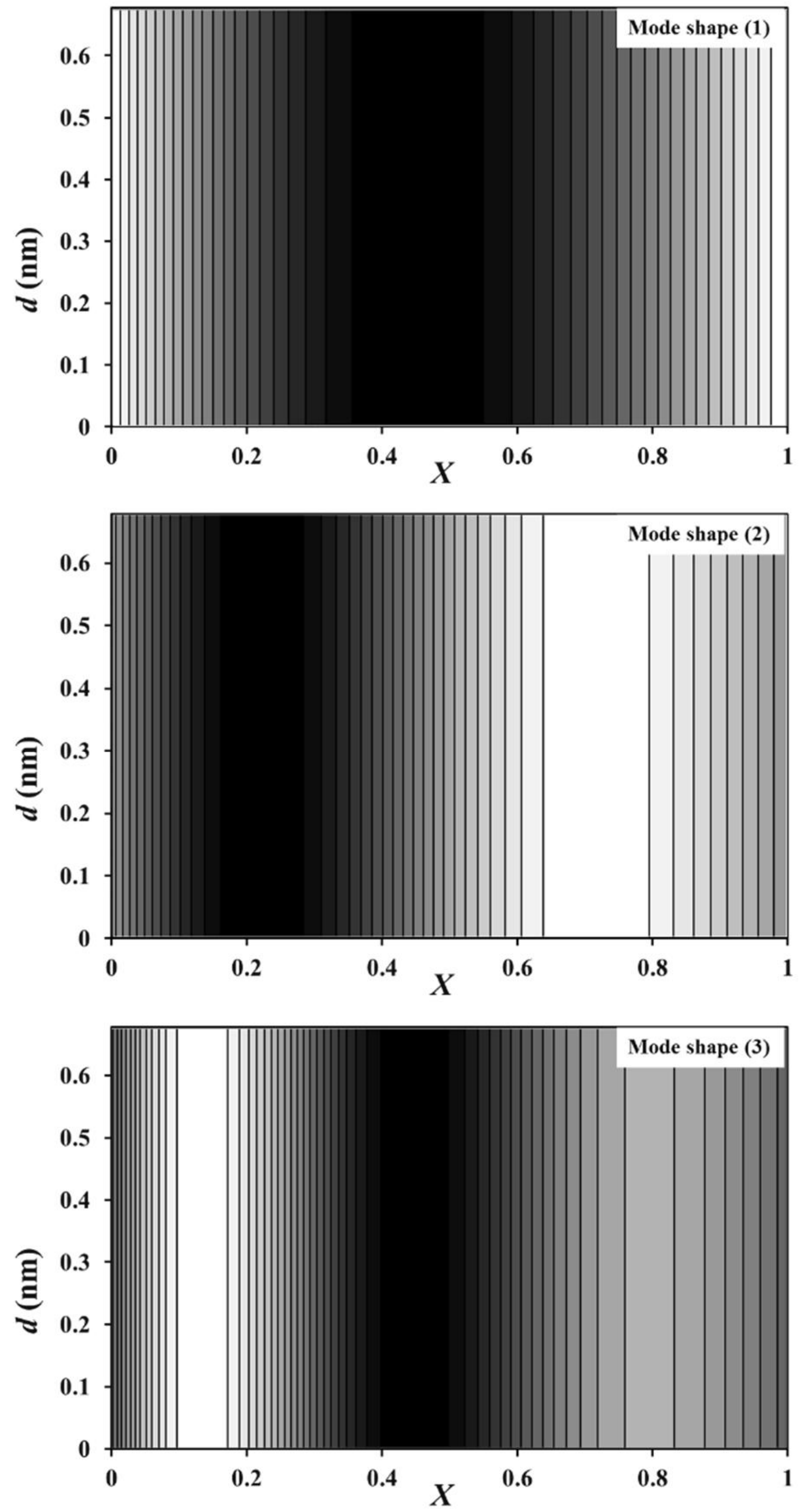


Fig. 12 First three mode shapes of a C-C nanorod

شکل 12 سه شکل مود ارتعاشی اول یک نانومیله دوسر ثابت

در "شکل 10"، نمودار تغییرات نه پارامتر اول فرکانس نسبت به L/d برای یک نانومیله دوسر ثابت با ضریب عریض شوندگی 0.1 و ضرایب غیر یکنواخت p، q، r و s به ترتیب برابر با 0.3، 0.1، 0.4 و 0.2، نشان داده شده است.

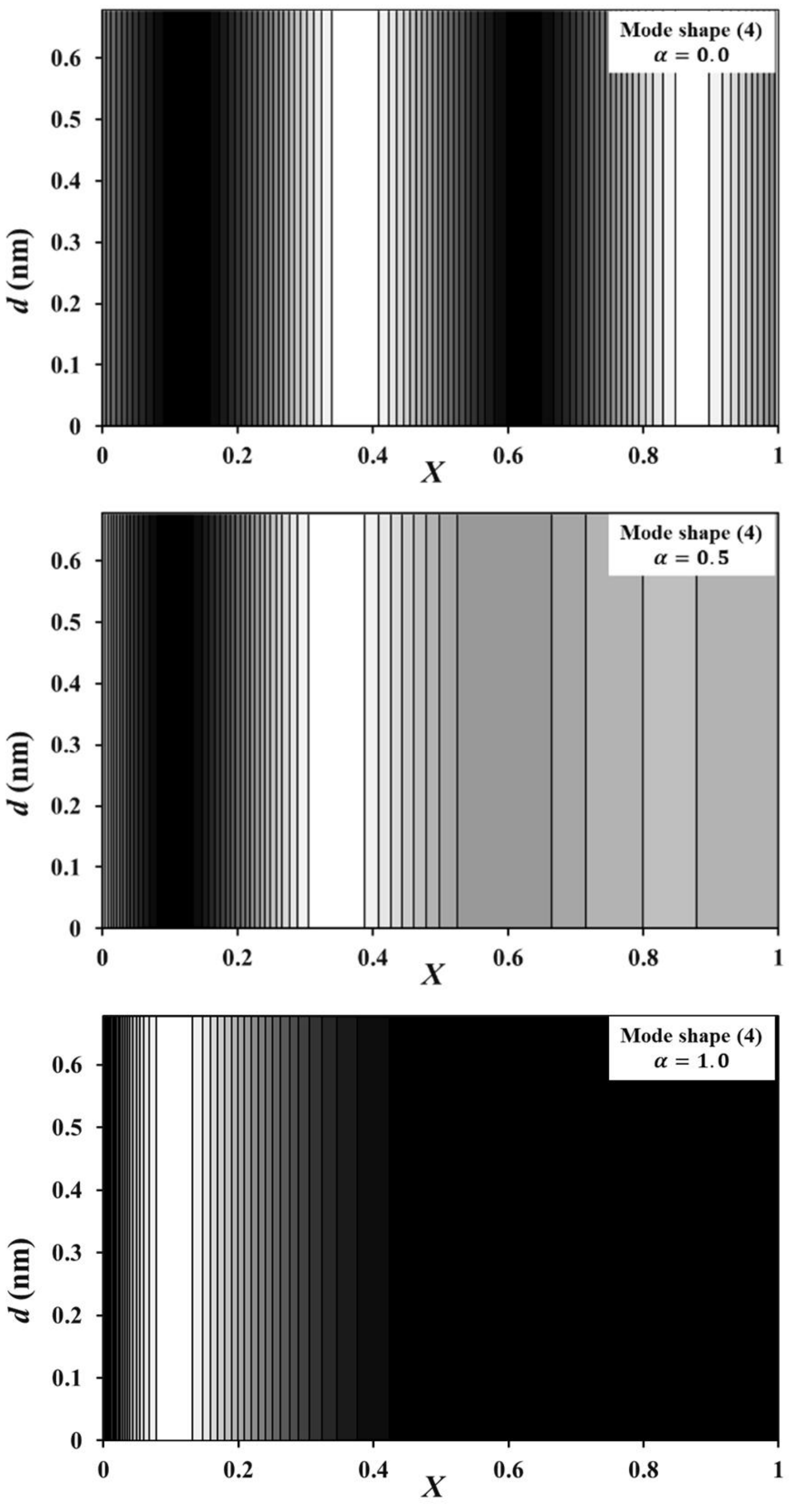


Fig. 13 Variations of fourth mode shape of a nanorod with α

شکل 13 تغییرات چهارمین شکل مود ارتعاشی یک نانومیله به ازای تغییر α

در این نمودار، نسبت طول به قطر نانومیله از 5 nm تا 50 nm مقدار دهی گردیده است. قطر نانومیله در X = 0 برابر با 0.678 nm در نظر گرفته شده است [36].

نمودار "شکل 10" نشان می‌دهد که اولا با زیاد شدن نسبت طول نانومیله به قطر آن، پارامترهای فرکانس افزایش یافته و ثانیا این سیر صعودی در مودهای ارتعاشی بالاتر نرخ شدید تری دارد.

به منظور مطالعه اثر شرایط مرزی بر پارامتر فرکانس، نمودار تغییرات دو پارامتر اول فرکانس یک نانومیله با سطح مقطع ثابت و ضرایب p، q، r و s برابر با 0.1 نسبت به پارامتر اثر مقیاس گذاری α در "شکل 11" ارائه گردیده است. در این بررسی، سه حالت مرزی دوسر ثابت، یکسر ثابت و دوسر آزاد در نظر گرفته شده است.

با توجه به نمودار "شکل 11"، با افزایش α، پارامتر فرکانس برای تمام شرایط مرزی کاهش می‌یابد. علاوه بر این، بیشترین پارامتر فرکانس پایه مربوط به حالت مرزی دوسر گیردار و کمترین آن مربوط به حالت مرزی یکسر گیردار است.

3-5- شکل مودهای ارتعاش

برای طراحی سیستم‌ها در ابعاد نانو، دانش صحیح درباره مودهای ارتعاشی

بالاتر، ضرورت دارد. بنابراین در این قسمت سه مود ارتعاشی اول در "شکل 12" برای شرط مرزی دوسر ثابت ارائه شده است.

در تمام تحلیل‌های این بخش، ضرایب p، q، r و s برابر با 0.1 و سطح مقطع نانومیله ثابت فرض شده است.

در نهایت، تغییرات چهارمین شکل مود ارتعاشی یک نانومیله نسبت به پارامتر اثر مقیاس گذاری α بدست آمده است.

همانگونه که در "شکل 13" مشاهده می‌گردد؛ پارامتر غیر محلی α تأثیر زیادی بر شکل مود ارتعاش محوری یک نانومیله دارد.

4- نتیجه گیری

در این مقاله، با استفاده از تئوری الاستیک غیر محلی، نانومیله بصورت غیر یکنواخت و ناهمگن (سطح مقطع، مدول یانگ و چگالی با تغییرات خطی و درجه دوم) مدل شده و رفتار دینامیکی آن مورد بررسی قرار گرفت. جهت بدست آوردن نتایج عددی برای مدل ارائه شده، روش ریلی-ریتز همراه با چند جمله ای‌های متعامد مشخصه مرزی بکار گرفته شد؛ همچنین تأثیر پارامترهای غیر محلی اثر مقیاس گذاری و ضریب مقیاس به ترتیب روی پارامتر فرکانس و نرخ فرکانس نانومیله بررسی شد. بعلاوه، اثرات پارامترهای غیر یکنواخت و ناهمگن، طول نانومیله، شرایط مرزی و نسبت طول نانومیله به قطر آن بر فرکانس نانومیله مورد مطالعه قرار گرفت. نهایتا سه مود ارتعاشی اول برای حالت مرزی دوسر ثابت ارائه شده و اثر مقیاس گذاری روی چهارمین شکل مود یک نانومیله غیر یکنواخت و ناهمگن مفروض، بررسی گردید.

از تجزیه و تحلیل‌های موجود نتایج زیر قابل استنتاج است.

- تئوری غیر محلی نقش مهمی را در پیش بینی بهتر مقدار فرکانس‌های بالاتر در ارتعاش نانومیله‌ها ایفا می‌کند.
- با افزایش α پارامترهای فرکانس برای تمام حالات مرزی افزایش پیدا می‌کنند.
- با افزایش طول نانومیله پارامتر فرکانس نیز افزایش می‌یابد.
- برای نانو لوله‌های کربنی به اندازه کافی بلند و باریک، اثر مقیاس کوچک قابل اغماض بوده درحالیکه برای نانو لوله‌های کربنی کوتاه و قطور بسیار قابل ملاحظه است.
- افزایش ضریب مقیاس e_0a باعث افزایش نرخ فرکانس می‌شود و اثر آن در فرکانس‌های بالاتر بیشتر است.
- بطور کلی افزایش مقادیر غیر یکنواخت p و q منجر به افزایش پارامتر فرکانس اما افزایش مقادیر r و s منجر به کاهش پارامتر فرکانس می‌گردد.
- پارامتر فرکانس با نسبت L/d رابطه مستقیم داشته و هر چه مد ارتعاش بیشتر شود، نرخ تغییرات فرکانس نسبت به تغییر پارامتر مذکور شدت بیشتری می‌یابد.
- پارامترهای غیر محلی تأثیر زیادی بر شکل مودهای ارتعاش نانومیله دارند.

مطالعه حاضر می‌تواند در طراحی ساختارهایی با هندسه غیر یکنواخت که به هر دلیلی ناهمگن هستند مفید واقع شود.

5- فهرست علائم

a	طول مشخصه داخلی (nm)
A	سطح مقطع نانومیله (nm^2)
$A(x)$	تابع تغییرات سطح مقطع نسبت به x
$A_R(X)$	تابع تغییرات سطح مقطع نسبت به X
b	ضریب عریض شوندگی نانومیله
C	مرز گیردار
C_i^R	ضرایب نامعین در روش ریلی-ریتز
$d(x)$	قطر نانومیله (nm)
e_0	ضریب ثابت وابسته به ماده
E	مدول یانگ (Pa)
E_0	مدول یانگ در مبدا مختصات (Pa)
$E(x)$	تابع تغییرات مدول یانگ نسبت به x
$E_R(X)$	تابع تغییرات مدول یانگ نسبت به X
F	مرز آزاد
FR	نرخ فرکانس
G	مدول برشی (Pa)
$[K^R]$	ماتریس سختی
L	طول نانومیله (nm)
LF	پارامتر فرکانس محلی
m	جرم واحد طول نانومیله ($\frac{kg}{m}$)
m	ضریب تعیین شرط مرزی در $X = 0$
$[M^R]$	ماتریس جرم
n	ضریب تعیین شرط مرزی در $X = 1$
N	تعداد درجات آزادی در روش ریلی-ریتز
N^L	نیروی محوری واحد طول ($\frac{N}{m}$)
N^{NL}	نیروی محوری غیرمحلی واحد طول ($\frac{N}{m}$)
NLF	پارامتر فرکانس غیرمحلی
p	پارامتر غیریکنواخت (مدول یانگ)
q	پارامتر غیریکنواخت (مدول یانگ)
r	پارامتر غیریکنواخت (چگالی)
s	پارامتر غیریکنواخت (چگالی)
$u(x,t)$	جابجایی محوری
$U(X)$	جابجایی محوری بی-بعد شده
X	متغیر مکان بی-بعد شده

علائم یونانی

Α	پارامتر اثر مقیاس گذاری
δ_{kl}	دلتای کرونکر
ε_{kl}	تانسور کرنش
$\bar{\eta}_i(X)$	توابع شکل پذیری متعامد و نرمال
η_k	توابع شکل پذیری متعامد
θ_{uv}	ضرایب ثابت در فرآیند گرام-اشمیت
λ	ثابت لامه
Λ^{ND}	پارامتر بی بعد فرکانس نانومیله
μ	پارامتر غیر محلی (nm^2)
ξ_i	توابع چندجمله‌ای مشخصه مرزی
ρ	چگالی نانومیله ($\frac{kg}{m^3}$)
ρ_0	چگالی نانومیله در مبدا مختصات ($\frac{kg}{m^3}$)
$\rho(x)$	تابع تغییرات چگالی نسبت به x
$\rho_R(X)$	تابع تغییرات چگالی نسبت به X
σ_{xx}	مؤلفه تنش محلی در راستای x

τ_{kl}	تانسور تنش غیرمحلی (Pa)
$\phi(x)$	تابع وزنی دلخواه
ω	فرکانس طبیعی هارمونیک نانومیله $\left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)$

بالانویس‌ها

L	محلی
ND	بدون بعد
NL	غیرمحلی
R	مربوط به میله

زیرنویس‌ها

R	مربوط به میله

6- مراجع

[1] G. E. Gadd, M. Blackford, S. Moricca, N. Webb, P. J. Evans, A. M. Smith, G. Jacobsen, Q. Hua, The world's smallest gas cylinders?, *Science,* Vol. 277, No. 5328, pp. 933-936, 1997.

[2] G. Che, B. B. Lakshmi, E. R. Fisher, C. R. Martin, Carbon nanotubule membranes for electrochemical energy storage and production, *Nature,* Vol. 393, No. 6683, pp. 346-349, 1998.

[3] J. Liu, A. G. Rinzler, H. Dai, J. H. Hafner, R. K. Bradley, P. J. Boul, A. Lu, R. E. Smalley, Fullerene pipes. *Science,* Vol. 280, No. 5367, pp. 1253-1256, 1998.

[4] A. Karlsson, R. Karlsson, M. Karlsson, A. Cans, A. Strömberg, F. Ryttsén, O. Orwar, Molecular engineering: networks of nanotubes and containers, *Nature,* Vol. 409, No. 5863, pp. 150–152, 2001.

[5] Q. Wang, Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied Physics,* Vol. 98, No. 12, pp. 124301-124307, 2005.

[6] M. C. Ece, M. Aydogdu, Nonlocal elasticity effect on vibration of in-plane loaded double-walled carbon nano-tubes, *Acta Mechanica,* Vol. 190, No. 5, pp. 185-195, 2007.

[7] L. Wang, Dynamical behaviors of double-walled carbon nanotubes conveying fluid accounting for the role of small length scale, *Computational Materials Science,* Vol. 45, No. 2, pp. 584-588, 2009.

[8] J. Peddieson, G. R. Buchanan, R. P. McNitt, Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science,* Vol. 41, No. 3, pp. 305-312, 2003.

[9] Y. Q. Zhang, G. R. Liu, X. Y. Xie, Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity, *Physical Review. B,* Vol. 71, No. 19, pp. 195404-195411, 2005.

[10] L. J. Sudak, Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied Physics,* Vol. 94, No. 11, pp. 7281-7287, 2003.

[11] P. Lu, H. P. Lee, C. Lu, P. Q. Zhang, Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model, *Journal of Applied Physics,* Vol. 99, No. 7, pp. 73510-73519, 2006.

[12] Y. Q. Zhang, G. R. Liu, J. S. Wang, Small-scale effects on buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression, *Physical Review B,* Vol. 70, No. 20, pp. 205430-205436, 2004.

[13] A. C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics,* Vol. 54, No. 9, pp. 4703-4710, 1983.

[14] M. Aydogdu, Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 41, No. 5, pp. 861-864, 2009.

[15] A. J. Mieszawska, R. Jalilian, G. U. Sumanasekera, F. P. Zamborini, The synthesis and fabrication of one-dimensional nanoscale heterojunctions. *Small,* Vol. 3, No. 5, pp. 722-756, 2007.

[16] S. Stankovich, D. A. Dikin, G. H. Dommett, K. M. Kohlhaas, E. J. Zimney, E. A. Stach, R. D. Piner, R. S. Ruoff, Graphene-based composite materials, *Nature,* Vol. 442, No. 7100, pp. 282-286, 2006.

[17] P. Ball, news features - Carbon nanotubes: roll up for the revolution, *Nature,* Vol. 414, No. 6860, pp. 142-144, 2001.

[18] R. H. Baughman, A. A. Zakhidov, W. A. de Heer, Carbon nanotubes--the route toward applications, *Science,* Vol. 297, No. 5582, pp. 787-792, 2002.

[19] B. H. Bodily, C. T. Sun, Structural and equivalent continuum properties of single-walled carbon nanotubes, *International Journal of Materials and Product Technology,* Vol. 18, No. 5 , pp. 381-397, 2003.

[20] C. Li, T. W. Chou, A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 40, No. 10, pp. 2487-2499, 2003.

[21] R. Chowdhury, S. Adhikari, C. Y. Wang, F. Scarpa, A molecular mechanics approach for the vibration of single-walled carbon nanotubes. *Computational Materials Science,* Vol. 48, No. 4, pp. 730-735, 2010.

[22] J. A. Ruud, T. R. Jervis, F. Spaepen, Nanoindentation of Ag/Ni multilayered thin films. *Journal of Applied Physics,* Vol. 75, No. 10, pp. 4969-4974, 1994.

[23] H. B. Peng, C. W. Chang, S. Aloni, T. D. Yuzvinsky, A. Zettl, Ultrahigh frequency nanotube resonators, *Physical Review Letters,* Vol. 97, No. 8, pp. 325-333, 2006.

[24] A. Dubey, G. Sharma, C. Mavroidis, S. M. Tomassone, K. Nikitczuk, M. L. Yarmush, Computational studies of viral protein nano-actuators. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience,* Vol. 1, No. 1, pp. 18-28, 2004.

[25] T. Murmu, S. C. Pradhan, Small-scale effect on the vibration of nonuniform nanocantilever based on nonlocal elasticity theory, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 41, No. 8, pp. 1451-1456, 2009.

[26] S. C. Pradhan, T. Murmu, Application of nonlocal elasticity and DQM in the flapwise bending vibration of a rotating nanocantilever, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 42, No. 7, pp. 1944-1949, 2010.

[27] M. Rafiei, S. R. Mohebpour, F. Daneshmand, Small-scale effect on the vibration of non-uniform carbon nanotubes conveying fluid and embedded in viscoelastic medium. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 44, pp. 1372-1379, 2012.

[28] R. B. Bhat, Plate deflections using orthogonal polynomials, *Journal of Engineering Mechanics,* Vol. 111, No. 11, pp. 1301-1309, 1985.

[29] K. Y. Cheung, D. Zhou, The free vibrations of tapered rectangular plates using a new set of beam functions with the Rayleigh-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 223, No. 5, pp. 703-722, 1999.

[30] B. Singh, S. Chakraverty, Use of characteristic orthogonal polynomials in two dimensions for transverse vibration of elliptic and circular plates with variable thickness, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 173, No. 3, pp. 289-299, 1994.

[31] L. Behera, S. Chakraverty, Free vibration of Euler and Timoshenko nanobeams using boundary characteristic orthogonal polynomials, *Applied Nanoscience,* Vol. 4, No. 3, pp. 347-358, 2014.

[32] J. N. Reddy, S. D. Pang, Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes, *Journal of Applied Physics,* Vol. 103, No. 2, pp. 23511-23527, 2008.

[33] K. Kiani, Free longitudinal vibration of tapered nanowires in the context of nonlocal continuum theory via a perturbation technique, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 43, No. 1, pp. 387-397, 2010.

[34] M. Simsek, Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods, *Computational Materials Science,* Vol. 61, No. 8, pp. 257-265, 2012.

[35] S. Nachum, E. Altus, Natural frequencies and mode shapes of deterministic and stochastic non-homogeneous rods and beams. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 302, No. 4, pp. 903-924, 2007

[36] S. Xiao, W. Hou, Studies of size effects on carbon nanotubes' mechanical properties by using different potential functions, *Fullerenes, Nanotubes, and Carbon Nanostructures,* Vol. 14, No. 1, pp. 9-16, 2006.