



مدل سازی رتبه کاسته جریان غیردائم کاویتاسیون جزئی با استفاده از روش المان مرزی

مرتضی بهبهانی‌نژاد^{۱*}، مازیار چنگیزیان^۲

۱- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

۲- دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز، ایران

* اهواز، صندوق پستی ۶۱۳۵۷۸۳۱۵۱، bnmorteza@scu.ac.ir

چکیده- در این مقاله یک روش رتبه کاسته کارا برای پیش‌بینی رفتار جریان غیردائم کاویتاسیون جزئی ارائه شده است. در این راستا جریان پتانسیل غیردائم همراه با کاویتا با استفاده از روش المان مرزی تحلیل شده است. کاویتاسیون جزئی بر اساس روش غیرخطی جزئی با شبکه ثابت همراه با برخی اصلاحات مدل شده است. روش رتبه کاسته ارائه شده بر مبنای مقادیر ویژه می‌باشد. به این منظور، الگوریتم تکراری محاسبه مرز کاویتا که به صورت متداول برای تعیین مرزهای کاویتا مورد استفاده قرار می‌گیرد، به طور بهینه‌ای حذف شده است. بر پایه این روش‌ها، تحلیل ویژه و مدل‌سازی رتبه کاسته جریان غیردائم بر روی ناکا ۱۶-۰۰۶ انجام گرفته است. دقت و کارایی مدل ارائه شده با بررسی حالت‌های مختلف مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. مقایسه نتایج بین الگوریتم پیشنهادی و روش‌های متداول بیانگر کارکرد روش پیشنهادی با دقت مطلوب است. در نهایت نشان داده شده که مدل رتبه کاسته پیشنهادی از لحاظ زمان محاسباتی بسیار بهینه‌تر از روش متداول در تحلیل جریان غیردائم کاویتاسیون جزئی بر روی هیدروفویل‌ها عمل می‌کند.

کلیدواژه‌گان: کاویتاسیون جزئی، مدل‌سازی رتبه کاسته، روش المان مرزی، جریان غیردائم، هیدروفویل.

Reduced-Order modeling of unsteady partial cavity flows using the boundary element method

M. Behbahani-Nejad^{1*}, M. Changizian²

1- Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahid Chamran Univ, Ahwaz, Iran.

2- PhD Candidate, Mech. Eng., Shahid Chamran Univ, Ahwaz, Iran.

* P. O. B. 61355148 Ahwaz, Iran. bnmorteza@scu.ac.ir

Abstract- An efficient reduced-order modeling (ROM) approach to predict unsteady behavior of partial cavity flows is proposed. The unsteady potential flow along with the cavity effects is analyzed using the boundary element method (BEM). Partial cavity flow is modeled based on the partially non-linear model without re-gridding with some modification. Proposed reduced-order model (PROM) is based on the fluid eigenmodes. The spatial iterative scheme that is usually used to determine the cavity extent is efficiently removed in order to construct the flow eigensystem. Eigenanalysis and reduced-order modeling of unsteady flows over a NACA 16-006 section are performed using the proposed reduced-order modeling approach. Numerical examples are presented to demonstrate the accuracy of the proposed method. Comparison between the obtained results of the proposed method and those of conventional ones indicates that the present algorithm works well with sufficient accuracy. Finally, it is shown that the proposed method is computationally more efficient than the conventional one for unsteady sheet cavitation analysis on hydrofoils.

Keywords: Partial Cavity, Reduced Order Modeling, Boundary Element Method, Unsteady Flow, Hydrofoil.

۱- مقدمه

افزایش نیاز به استفاده از سیستم‌های دریایی، محققان را به سمت مطالعه و طراحی آنها سوق می‌دهد. شناورهای تندرو به عنوان یکی از مهمترین این سیستم‌ها می‌باشد. یکی از مهمترین روش‌های افزایش سرعت شناورها استفاده از هیدروفویل‌ها است. این هیدروفویل‌ها در سرعت‌های مشخصی با ایجاد نیروی برآی کافی بدنه کشتی را روی آب قرار داده و شناور متکی بر هیدروفویل‌ها حرکت می‌کند. از این‌رو علاوه بر از بین بردن اصطکاک بدنه، اثرات امواج را نیز به کمترین مقدار ممکن می‌رسانند. به این وسیله موجب کاهش مصرف سوخت (افزایش برد عملیاتی) و کاهش تکان‌های ناشی از برخورد امواج به بدنه شده و پایداری شناور را افزایش می‌دهند.

توزیع فشار در بالا و پایین یک هیدروفویل متحرک در آب متفاوت بوده و الگوی ویژه‌ای دارد. تحت شرایطی این فشار در برخی از نقاط به فشار بخار اشباع آب کاهش پیدا کرده و با تبخیر موضعی آب، حباب‌های بخار تشکیل می‌شوند. در ادامه این شرایط، کاویتاسیون رخ می‌دهد. با پدیدار شدن کاویتاسیون، نسبت نیروهای آیرودینامیکی تغییر کرده و حرکت مجموعه را دچار تغییر می‌کند. یکی از متداول‌ترین انواع کاویتاسیون که بر روی هیدروفویل‌ها رخ می‌دهد، کاویتاسیون جزئی می‌باشد. در این حالت بخشی از هیدروفویل را حجم پیوسته‌ای از حباب کاویتا تشکیل می‌دهد. این حباب پیوسته همان گونه که پیشتر اشاره شد، توزیع فشار و نیروهای آیرودینامیکی را بر سطح هیدروفویل تغییر داده و از این‌رو منجر به تغییرات قابل توجه در نیروهای وارده بر شناور می‌شود.

با توجه به موارد فوق بررسی پدیده کاویتاسیون جزئی بر روی هیدروفویل‌ها از توجه ویژه‌ای برخوردار است. امروزه به دلیل اهمیت این پدیده روش‌های محاسباتی متعددی برای مدل‌سازی آن استفاده می‌شود. بخش عمده‌ای از این روش‌ها بر پایه فرض جریان پتانسیل بنا شده‌اند. این فرض با توجه به سهولت کاربرد و نیز دقت زیاد آن در مدل‌سازی جریان دائم و غیردائم کاویتاسیون جزئی از محبوبیت بسیاری برخوردار است. در این راستا از آنجاکه روش المان‌مرزی ابزاری قدرتمند در مدل‌سازی جریان‌های پتانسیل می‌باشد، به طور گسترده برای مدل‌سازی جریان‌های کاویتاسیون جزئی مورد استفاده محققان قرار گرفته است. به عنوان مثال می‌توان به مدل‌سازی‌های فاین

[۱]، کایناس و فاین [۲]، پویو و سو [۳]، سالواتوره و اسپوسیتو [۴] و لی و کایناس [۵] اشاره کرد. تمامی شبیه‌سازی‌های اشاره شده بر اساس مدل معرفی شده فاین [۱] انجام گرفته‌اند. یکی از پیچیده‌ترین بخش‌ها در مدل‌سازی جریان‌های کاویتا، تعیین مرز کاویتا (مکانی از شبکه محاسباتی با فشار ثابت از پیش تعیین شده) می‌باشد. از آنجا که سطح کاویتا در ابتدا نامعلوم بوده، اغلب پژوهش‌های انجام شده تاکنون از یک روند تکراری جهت تعیین آن استفاده کرده‌اند [۷، ۶، ۱]. این روند تکرار به وضوح منجر به افزایش هزینه محاسباتی به ویژه در تحلیل‌های غیردائم می‌شود. واز و همکارانش [۶] چند روش مختلف مدل‌سازی المان‌مرزی کاویتاسیون جزئی در حالت دائم را مورد بررسی قرار دادند. مدل غیرخطی جزئی با تولید شبکه در هر مرحله تکرار و مدل غیرخطی جزئی با شبکه ثابت از جمله این روش‌ها می‌باشند. در روش غیرخطی جزئی ارتفاع کاویتا ناچیز فرض شده و المان‌های مربوط به کاویتا بر روی سطح زیرین آن، روی هیدروفویل، در نظر گرفته می‌شوند. در روش غیرخطی جزئی با تولید شبکه در هر مرحله تکرار، تعداد المان‌های ثابتی به کاویتا اختصاص داده می‌شود. این المان‌ها می‌بایست در هر مرحله تکرار متناسب با طول جدید کاویتا تغییر اندازه داده تا کل مسافت مربوط بدین طول را پوشش دهند. این مسأله منجر به تغییر طول و جابه‌جایی المان‌های مجاور بر روی سطح تر هیدروفویل (سطح بدون کاویتا) شده و از این‌رو به روش غیرخطی جزئی با تولید شبکه در هر مرحله تکرار شناخته می‌شود. در روش غیرخطی جزئی با شبکه ثابت، تعداد المان‌های درگیر در کاویتا متناسب با طول حدس زده کاویتا تغییر کرده و از این‌رو نیازی به تغییر در شبکه و جابجایی نقاط نمی‌باشد. به عبارتی با استفاده از شبکه اولیه می‌توان جواب نهایی را تعیین کرد.

واز و همکاران [۶] به این نتیجه رسیدند که کارایی کلی روش غیرخطی جزئی با تولید شبکه در هر مرحله تکرار از دیگر روش‌های مورد بحث مناسب‌تر می‌باشد. علاوه بر این ایشان اذعان داشته‌اند که با افزایش تعداد المان‌ها، روش غیرخطی جزئی با شبکه ثابت نیز نتایج مطلوبی را ارائه می‌کند [۶]. از این‌رو با توجه به پیچیدگی‌های کمتر روش غیرخطی جزئی با شبکه ثابت نسبت به دیگر روش‌ها، و از این روش برای مدل‌سازی جریان سه‌بعدی دائم کاویتاسیون جزئی استفاده کرد [۷].

داد [۱۱] و پس از آن داوول و همکاران [۱۲] این بحث مروری را به‌طور جامع‌تری ارائه کردند. فلوره و همکاران نیز از مدل‌سازی رتبه کاسته برای حل جریان غیردائم و لزج در ردیف پره‌های کمپرسور استفاده کردند [۱۳].

اصفهانیان و بهبهانی‌نژاد با استفاده از روش المان مرزی از مدل‌سازی رتبه کاسته جهت تحلیل جریان‌های زیرصوتی بر روی هندسه‌های پیچیده بهره گرفتند [۱۴]. ایشان اذعان داشتند که تعداد مقادیر ویژه صفر مدل غیردائم دقیقاً با تعداد المان‌های روی جسم برابری می‌کند [۱۴، ۱۵]. در این حالت، برخی از این مودهای ویژه که برابر با تعداد المان‌های روی جسم می‌باشند، رفتاری شبه دائم از خود نشان داده و مدل رتبه کاسته بدون استفاده از تصحیح استاتیکی (حل مسأله در حالت شبه دائم) حتی به کمک تعداد مودهای بالا قادر به تعیین جواب‌های صحیح نمی‌باشد. به عبارتی روش رتبه کاسته بر مبنای المان‌های جسم و دنباله تنها با استفاده از تصحیح استاتیکی قادر به تحلیل مسائل می‌باشد. با استفاده از تصحیح استاتیکی، بخش شبه دائم مسأله در هر گام زمانی باید حل شده که نهایتاً منجر به کاهش چشمگیر کارایی روش رتبه کاسته می‌شود [۱۶]. بهبهانی‌نژاد و همکاران نشان دادند که چنانچه مدل رتبه کاسته تنها بر اساس مودهای دنباله طرح ریزی شود، نتایج قابل قبولی بدون نیاز به تصحیح استاتیکی به‌دست خواهد آمد [۱۶]. ایشان با استفاده از روش شبکه گردابه، تحلیل رتبه کاسته را برای بال‌های دوبعدی و سه‌بعدی انجام دادند [۱۶]. شاهوردی و همکاران نیز با استفاده از روش پیشنهادی بهبهانی‌نژاد و همکاران [۱۶]، مدل رتبه کاسته روش المان مرزی بر پایه چشمه و دابلت را پایه‌ریزی کردند [۱۷]. در ادامه محمدی و همکاران از نتایج ایشان بهره برده و از روش اجزای مرزی توسعه یافته و مدل‌های رتبه کاسته مبتنی بر آن، برای تحلیل آیرودینامیک حوزه زمان انواع ایرفویل و بال نازک در چند نوع حرکت ناپایا استفاده کردند [۱۸].

با توجه به موارد فوق ملاحظه می‌شود که تاکنون از مدل‌سازی رتبه کاسته برای تحلیل جریان غیردائم کاویناسیون جزئی استفاده نشده است. دلیل اصلی این امر ماهیت غیرخطی این پدیده و نیاز به فرایند تکرار در تحلیل مسأله می‌باشد. فرایند تکرار در هر گام زمانی منجر به تغییر در ماتریس‌های پایه (که مورد استفاده جهت استخراج مودهای ویژه‌اند) گشته و

با مطالعه‌ای بر پژوهش‌های مطرح شده می‌توان دریافت که استفاده از فرایند تکرار در تعیین جواب نهایی مسأله تاکنون امری اجتناب‌ناپذیر بوده است. به‌تازگی بهبهانی‌نژاد و چنگیزیان [۸]، روشی جدید جهت تحلیل و مدل‌سازی کاویناسیون جزئی معرفی کرده‌اند که می‌تواند بدون استفاده از گام‌های تکراری مشخصه‌های جریان از جمله طول کاویتی و ضریب برا را در جریان‌های غیردائم تعیین کند. این روش جدید بر اساس مدل غیرخطی جزئی با شبکه ثابت که پیشتر تشریح شد، پایه‌ریزی شده است.

تمامی مدل‌سازی‌های هیدرودینامیکی تشریح شده با استفاده از روش‌های متداول حل مسائل غیر دائم مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته‌اند. حال آن که مدل‌سازی رتبه کاسته^۱ با وجود نوپا بودن جای خود را در تحلیل‌های غیردائم آئرو‌دینامیکی باز کرده است. به عبارتی مدل‌سازی رتبه کاسته یک روش جدید و از نظر محاسباتی کارا در محاسبه جریان‌های غیردائم به حساب می‌آید که اخیراً برای محاسبه جریان‌های غیردائم حول ایرفویل‌ها، بال‌های تخت و ردیف پره‌های توربوماشین‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. در مدل‌سازی رتبه کاسته هدف، کاهش تعداد درجات آزادی مسائل عددی به‌گونه‌ای می‌باشد که دقت نهایی را تحت تاثیر چندانی قرار ندهد. این کار معمولاً با تبدیل فضای فیزیکی به یک فضای مودال که در آن تعداد کمی از درجات آزادی برای تخمین پاسخ سیستم مورد نیاز است، انجام می‌شود. با کاهش تعداد درجات آزادی سیستم، سرعت حل عددی با صرف هزینه محاسباتی کم، بالا می‌رود. حال جریان غیردائم و تراکم‌ناپذیر حول ایرفویل، ردیف پره و بال تخت سه‌بعدی را با استفاده از مدل‌سازی رتبه کاسته در حوزه زمانی تحلیل کرد [۹]. وی برای به‌دست آوردن مودهای ویژه جریان از شبکه گردابه غیردائم استفاده کرد و نشان داد که برای دستیابی به یک جواب دقیق نیاز به تصحیح استاتیکی^۲ است. رومانوفسکی و داوول [۱۰] بر مبنای معادله اوایلر از روش رتبه کاسته برای مدل‌سازی جریان زیرصوتی حول ناکا^۳ ۱۲ استفاده کردند. داوول قابلیت مودهای ویژه برای ساخت مدل‌های رتبه کاسته جریان‌های غیردائم را در قالب یک مقاله مروری مورد بحث قرار

1. ROM
2. Static Correction
3. NACA 0012

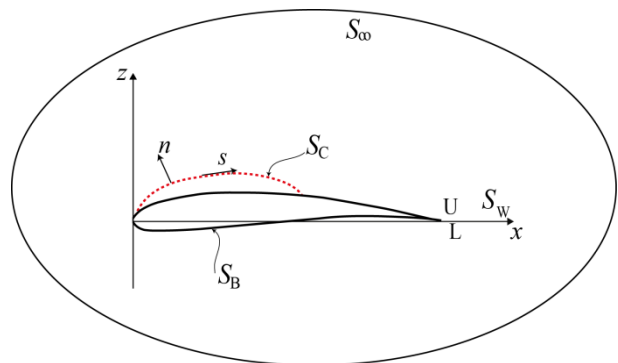
از این رو استخراج این مودها را ناممکن می سازد. در این مقاله بر پایه الگوریتم جدید بهبهانی نژاد و چنگیزیان [۸]، فرایند تکرار حذف شده و با ایجاد اصلاحاتی در مدل شاهوردی و همکاران [۱۷]، مدل رتبه کاسته جریان غیردائم کاویتاسیون جزئی بر روی ناکا ۱۶-۰۰۶ ارائه می شود. در این راستا ابتدا معادلات حاکم و شرایط مرزی مسأله تشریح شده و در ادامه فرمولاسیون مربوط به استخراج مدل رتبه کاسته جریان غیردائم کاویتاسیون جزئی، بر اساس المان های دنباله تشریح می شود. پس از استخراج مقادیر ویژه و بردارهای ویژه جریان، مدل سازی جریان های غیردائم مختلف انجام شده است. نتایج به دست آمده بررسی شده و نشان داده شده که روش حاضر به خوبی می تواند پارامترهای جریان غیردائم را پیش بینی کند. علاوه بر این کارایی محاسباتی الگوریتم جدید در مقایسه با روش متداول بررسی شده و مشخص شده است که روش جدید دارای هزینه محاسباتی بسیار ناچیز نسبت به روش های متداول بوده و علاوه بر این از دقت کافی نیز برخوردار می باشد.

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

شما تیکی از یک هیدروفویل همراه با کاویته چسبیده به آن، در شکل ۱ ارائه شده است.

با فرض اینکه هیدروفویل با سرعت ثابت برابر با U_∞ (در راستای محور $-x$) در یک جریان با مولفه عمودی آزاد نسبت به محورهای مختصات متصل به هیدروفویل مطابق با رابطه (۱) به دست می آید.

$$\vec{V}_0(x, t) = (U_\infty, W_s + \Delta W f(x, t)) \quad (1)$$



شکل ۱ ناحیه محاسباتی کاویتاسیون جزئی دو بعدی

$$\frac{W_\infty(x, t)}{U_\infty} = \alpha_0 + \Delta \alpha f(x, t) \quad (2)$$

که در آن α_0 برابر با زاویه حمله جریان دائم و $\Delta \alpha$ دامنه تغییرات زاویه حمله در حالت غیردائم می باشد. با فرض جریان پتانسیل، رابطه (۳) برقرار است.

$$\vec{\nabla} \phi = \vec{V}_0 + \vec{\nabla} \phi \quad (3)$$

که ϕ و Φ متناظر با پتانسیل سرعت کل و پتانسیل اغتشاشی جریان می باشند. در خارج از مرزهای کاویته و هیدروفویل، پتانسیل اغتشاشی معادله لاپلاس (رابطه (۴)) را همراه با شرایط مرزی که در ادامه معرفی می شوند، ارضا می کند.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4)$$

با حل معادله (۴) همراه با شرایط مرزی متناظر، پتانسیل اغتشاشی محاسبه شده و به کمک آن می توان ضریب فشار را با استفاده از معادله برنولی در حالت غیردائم مطابق با رابطه (۵) تعیین کرد.

$$\frac{2}{U_\infty^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2 - |V_0|^2}{2} = -C_p \quad (5)$$

که C_p بیانگر ضریب فشار می باشد و مطابق با رابطه (۶) تعریف می شود. در رابطه مذکور p_∞ فشار جریان دور دست و p فشار جریان در نقطه دلخواه است.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (6)$$

رابطه (۴) یک معادله مقدار مرزی بوده و برای حل، نیازمند به تعریف شرایط مرزی بر روی کلیه مرزها است. مطابق با شکل ۱ مرزهای مسأله را می توان ۴ مرز مجزا در نظر گرفت. سطح تر شده (S_B) که بخشی از هیدروفویل بوده و در تماس با مایع می باشد، سطح کاویته (S_C)، سطح دنباله (S_W) و مرز بی نهایت (S_∞)، مرزهای ناحیه محاسباتی را تشکیل می دهند. اغتشاش ایجاد شده در جریان ناشی از وجود هیدروفویل می بایست در بی نهایت ناپدید شود. از این رو، شرط مرزی مطابق با رابطه (۷) روی این مرز اعمال می شود.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \phi = 0 \quad \text{روی } S_\infty \quad (7)$$

r فاصله هر نقطه از میدان جریان تا مرکز مختصات چسبیده به هیدروفویل است. بر روی سطح تر شده، جریان موازی با سطح بوده و شرط مرزی عدم نفوذپذیری سطح مطابق با رابطه

(۸) استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\vec{V}_0 \cdot \vec{n} \quad \text{روی } S_B \quad (8)$$

n بردار نرمال بر سطح بوده که به سمت میدان محاسباتی امتداد دارد. برای اعمال شرط مرزی بر روی دنباله از تئوری کلون و شرط کوتا بر روی لبه فرار استفاده می‌شود [۱۹]. بر اساس شرط کوتا، ورتیسیتته تولیدی در لبه فرار با استفاده از رابطه (۹) تعیین می‌شود.

$$(\Delta \phi)_{TE} = \phi_{TE}^U - \phi_{TE}^L \quad (9)$$

که زیر نویس TE اشاره به لبه فرار داشته و بالانویس U و L متناظر با سطوح بالایی و پائینی هیدروفویل در لبه فرار می‌باشند. بر اساس تئوری کلون، رابطه (۱۰) برای شرط مرزی روی دنباله استفاده می‌شود.

$$\Delta \phi_W(x, t) = \Delta \phi_{TE} \left(t - \frac{x - x_{TE}}{U_\infty} \right) \quad (10)$$

با توجه به شرط کوتا (رابطه (۹)) قدرت المان دنباله چسبیده به لبه فرار در هر گام زمانی مشخص می‌باشد. به عبارتی پس از تحلیل مسأله در هر گام زمانی قدرت این المان که از مجهولات مسأله است، تعیین می‌شود. در مدل سازی حاضر با صرف نظر از پیچش دنباله، فرض شده که این مقدار در گام‌های زمانی بعدی به المان‌های مجاور منتقل شده به صورتیکه در هر گام زمانی مقدار قدرت المان‌های دنباله از رابطه (۱۰) قابل محاسبه بوده و جزو معلومات مسأله می‌باشد. همچنین شایان ذکر است که مقدار اولیه قدرت المان‌های دنباله در مدل سازی حاضر از حل جریان دائم به دست آمده است.

همان گونه که پیش تر نیز اشاره شد، سطح کاویتی از ابتدا معلوم نیست. از این رو برای تعیین آن نیاز به استفاده از دو شرط مرزی دینامیک و سینماتیک می‌باشد. بر اساس شرط مرزی دینامیک، فشار در کلیه نقاط کاویتی ثابت و برابر با فشار بخار مربوطه است. با فرض ثابت بودن فشار در کاویتی می‌توان نشان داد که رابطه (۵) معادل با تعریف مقدار پتانسیل اغتشاشی بر روی کاویتی بوده و مطابق با رابطه (۱۱) به دست می‌آید [۷،۱].

$$\phi(s, t) = \phi_0(0, t) + \int_0^s \left[\sqrt{U_\infty^2 \sigma + |V_0|^2} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{V}_0 \cdot \vec{s} \right] ds \quad (11)$$

\vec{s} بردار یکه مماس به سطح کاویتی، مطابق با شکل ۱، ϕ_0

پتانسیل اغتشاشی در نقطه جدایش کاویتی ($s = 0$) و σ عدد کاوناسیون بوده که به مطابق با رابطه (۱۲) تعریف می‌شود.

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (12)$$

مقدار مجهول $\partial \phi / \partial t$ در رابطه (۱۱) به کمک مقادیر ϕ در زمان‌های قبلی تعیین می‌شود [۱]. شرط مرزی سینماتیک تضمین می‌کند که جریان موازی با سطح کاویتی حرکت کند. بر این اساس این شرط را می‌توان با توجه به ضخامت کاویتی (h) مطابق با رابطه (۱۳) ارائه کرد [۷،۶].

$$U_s \frac{\partial h}{\partial s} = U_n - \frac{\partial h}{\partial t} \quad (13)$$

U_n و U_s مؤلفه‌های سرعت مماس و عمود بر سطح کاویتی می‌باشند.

۳- مدل سازی عددی

در مقاله حاضر روش المان مرزی به عنوان ابزار تحلیل عددی معادله حاکم بر کاوناسیون جزئی در نظر گرفته شده است. با استفاده از تئوری گرین، با اعمال شرط مرزی در بی‌نهایت (S_∞)، رابطه (۴) را برای پتانسیل اغتشاشی در ناحیه محاسباتی می‌توان به شکل رابطه (۱۴) بازنویسی کرد [۲].

$$m\phi_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_B(t) \cup S_{B_C}(t)} \left[\phi(t) \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) - \ln r \frac{\partial \phi(t)}{\partial n} \right] ds + \int_{S_W(t)} \Delta \phi_W(t) \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) ds \quad (14)$$

r فاصله بین نقطه p تا المان مرزی ds . $m = 0.5$ اگر که نقطه p بر روی بخش صافی از سطح مرزی قرار گرفته باشد و انتگرال بر روی $S_B(t) \cup S_{B_C}(t)$ بر اساس انتگرال مقدار اصلی کوشی است.

برای تعیین عددی مقادیر مجهولات مسأله، مرزهای S_B ، S_{B_C} و S_W به کمک المان‌های ثابت گسسته سازی می‌شوند. بر این اساس، مقادیر ϕ و $\partial \phi / \partial n$ در طول هر یک از المان‌ها ثابت فرض شده‌اند. از این رو استفاده از روش هم‌مکانی رابطه (۱۵) را برای نقاط مرزی مسأله نتیجه می‌دهد [۷،۵].

$$\phi_p = \sum_{j=1}^{NB+NC} A_{pj} \phi_j + \sum_{j=1}^{NB+NC} B_{pj} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j$$

گرفته است. به عنوان مثال با فرض این که $h(s)$ بیانگر ارتفاع کاویته از سطح هیدروفویل باشد، با توجه به فیزیک مسأله این ارتفاع در انتهای کاویته $(s = l_c)$ برابر با طول کاویته می‌بایست صفر شده و به عبارتی کاویته در انتها بسته شود. در روش‌های متداول یک فرایند تکراری مکانی در هر گام زمانی انجام شده تا طول نهایی کاویته (متناظر با $h(l_c) = 0$) به دست آید. فرایند تکرار مکانی با یک حدس اولیه از طول کاویته آغاز می‌شود. پس از آن، معادله (۱۵) به کمک شرایط مرزی مربوطه حل شده و توزیع مقادیر مجهول ϕ و $\partial\phi/\partial n$ بر روی سطح ترشده و کاویته تعیین می‌شود. سپس با استفاده از شرط مرزی سینماتیک (رابطه (۱۳)) ارتفاع کاویته، $h(s)$ ، تعیین می‌شود. اگر ضخامت کاویته در $s = l_c$ به سمت صفر میل کند، رابطه (۲۰) برقرار است.

$$|h(l_c)| = \varepsilon \leq \varepsilon_a \quad (20)$$

که ε_a یک خطای کوچک قابل قبول بوده و با برقراری رابطه (۲۰) حل همگرا شده و طول به دست آمده طول نهایی کاویته می‌باشد [۷ و ۱]. در غیر این صورت متناسب با علامت $h(l_c)$ ، طول اولیه کم و یا زیاد شده تا طول نهایی تعیین شود.

بهبهانی نژاد و چنگیزیان اخیراً روشی را ارائه کرده‌اند که بدون استفاده از فرایند تکرار قادر به تعیین مشخصه‌های کاویته می‌باشد [۸]. ایده اصلی آنها بر اساس تغییرات ضخامت انتهای کاویته $(h(l_c))$ نسبت به طول حدس زده می‌باشد. ایشان نشان دادند که تغییرات $h(l_c)$ نسبت به طول کاویته برای هر عدد کاویتاسیون و هندسه هیدروفویل مستقل از شرایط جریان اعم از زاویه حمله و فرکانس حرکت غیردائم بوده و رفتاری خطی از خود نشان می‌دهد.

با استفاده از روش بهبهانی نژاد و چنگیزیان [۸]، تابعیت زمانی مرزهای S_C و S_B در رابطه (۱۴) حذف می‌شود. با استفاده از طول حدسی اولیه یکسان در هر گام زمانی، مرزهای S_C و S_B معلوم بوده و از این‌رو درایه‌های ماتریس‌های A و B در رابطه (۱۵) ثابت می‌باشند. در این حالت با استفاده از قضیه گرین و اعمال شرایط مرزی، با تعریف بردار μ مطابق با رابطه (۲۱)، رابطه (۲۲) نتیجه می‌شود.

$$\mu = \begin{Bmatrix} \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{NB} \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{NC} \\ \Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \dots, \Delta\phi_{NW} \end{Bmatrix}_{NB+NC+NW} \quad (21)$$

$$H\mu^{n+1} + G\mu^n = w^{n+1} \quad (22)$$

$$+ \sum_{j=1}^{NW} A_{pj} \Delta\phi_j, \quad p = 1, 2, \dots, NB + NC \quad (15)$$

NB ، NC و NW برابر با تعداد المان‌های درگیر بر روی سطح ترشده، سطح کاویته و دنباله می‌باشند. علاوه بر این، A_{pj} و B_{pj} ضرایب تاثیر المان‌ها بوده که از رابطه (۱۶) و (۱۷) به دست می‌آیند. با توجه به حل مسأله دوبعدی، در رابطه (۱۶) و (۱۷)، S_j در حالت دوبعدی طول المان مرزی J ام می‌باشد.

$$A_{pj} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) ds_j \quad (16)$$

$$B_{pj} = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_j} \ln r ds_j \quad (17)$$

و S_j در حالت دوبعدی طول المان مرزی J ام می‌باشد. محاسبه انتگرال‌های فوق برای درایه‌های غیر قطر اصلی به کمک روش‌های عددی چون گوس و یا روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر است [۱۹]. محاسبه درایه‌های قطر اصلی (اثر چشمه‌ها و دابلت‌ها بر روی المانی که روی آن قرار دارند) انتگرال‌های فوق را تکین می‌کند. در این حالت با استفاده از روش تحلیلی و بر مبنای مقدار اصلی کوشی می‌توان مقدار A_{jj} و B_{jj} را مطابق با رابطه (۱۸) و (۱۹) به دست آورد [۱۹، ۱۵].

$$A_{jj} = 0 \quad (18)$$

$$B_{jj} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{S_j}{2} \right) \left[\ln \left(\frac{1}{\frac{S_j}{2}} \right) + 1 \right] \quad (19)$$

با توجه به شرط مرزی دینامیک (رابطه (۱۱))، ϕ_j بر روی سطح کاویته معلوم است. از طرف دیگر به کمک شرط مرزی عدم نفوذپذیری سطح (رابطه (۸)) مقادیر $\partial\phi/\partial n$ بر روی سطح هیدروفویل، معلوم می‌باشد. $\Delta\phi$ نیز در معادله (۱۵) بر اساس شرط کوتا و تئوری کلونین معلوم است. از این‌رو تعداد مجهولات مسأله مشتمل بر NB مقدار مجهول ϕ بر روی سطح ترشده و NC مقدار مجهول $\partial\phi/\partial n$ بر سطح کاویته می‌باشد. با توجه به تعداد معلومات (NB مقدار معلوم $\partial\phi/\partial n$ بر روی سطح ترشده و NC مقدار معلوم ϕ بر روی کاویته) مسأله قابل حل بوده و مقدار مجهولات به کمک رابطه (۱۵) تعیین می‌شوند.

از آنجا که سطح کاویته (نقطه شروع و انتها) از ابتدا نامعلوم است، ارضای کامل شرایط مرزی به سادگی حاصل نمی‌شود. از این‌رو تحلیل کاویتاسیون جزئی همان گونه که پیشتر نیز اشاره شد، عمدتاً توسط روش‌های تکراری انجام

بزرگترین مقادیر ویژه است که این بردارها ستون‌های این ماتریس را تشکیل می‌دهند. همچنین v بردار مختصات موده‌های نرمال بوده که در واقع بیان‌کننده ابعاد فضای مودال مورد استفاده می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۲۸) در معادله (۲۲) و ضرب طرفین در Y^T ، با استفاده از خواص تعامد (روابط (۲۶) و (۲۷)) معادله غیر وابسته (۲۹) حاصل می‌شود.

$$v^{n+1} - Zv^n = Y^T W^{n+1} \quad (29)$$

از آنجا که سمت چپ رابطه فوق قطری است، برای تعیین بردار v در هر گام زمانی نیازی به حل دستگاه معادلات وابسته نیست. علاوه بر این به کمک رابطه فوق می‌توان جواب کلی مسأله را تنها با معلوم بودن تعدادی از موده‌های اصلی حرکت به دست آورد. معادله (۲۹) به دلیل خاصیت تعامد موده‌های ویژه یک سیستم غیر وابسته و با بعد M که $M \ll NB + NC$ می‌باشد. با محاسبه v در هر گام زمانی می‌توان با استفاده از رابطه (۲۸)، μ را به راحتی محاسبه کرد. حال نشان داد که استفاده از مدل‌سازی رتبه کاسته تنها در صورت بهره‌گیری از تصحیح استاتیکی، از دقت قابل قبولی برخوردار است [۹]. دلیل این امر وجود مقادیر ویژه صفر به تعداد المان‌های روی جسم در مقادیر ویژه است [۱۱]. برای رفع این مشکل، بهبهانی‌نژاد و همکاران [۱۶] روشی جدیدی را ارائه کردند که مقادیر ویژه صفر را حذف کرده و تعداد مقادیر ویژه آن برابر با مقادیر ویژه غیر صفر روش قبلی می‌باشد. در ادامه بر مبنای کار ایشان و شاهوردی و همکاران [۱۷]، فرمولاسیون مدل‌سازی رتبه کاسته جریان غیردائم کاویناسیون جزئی تشریح می‌شود.

چنانچه $\mu_{B,C}$ در برگیرنده مقادیر مجهول دابلت‌های روی جسم (ϕ_i) و چشمه‌های روی کاویتی (σ_i) باشد و μ_W مشتمل بر مقادیر مجهول دنباله باشد، بردار μ را مطابق با رابطه (۳۰) نیز می‌توان در نظر گرفت.

$$\mu = \begin{Bmatrix} \mu_{B,C} \\ \mu_W \end{Bmatrix}, \quad \mu_{B,C} = \begin{Bmatrix} \phi_B \\ \sigma_C \end{Bmatrix} \quad (30)$$

در این حالت معادله (۲۲) مطابق با رابطه (۳۱) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_{B,C} \\ \mu_W \end{Bmatrix}^{n+1} + \begin{Bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_{B,C} \\ \mu_W \end{Bmatrix}^n = \begin{Bmatrix} w \\ 0 \end{Bmatrix}^{n+1} \quad (31)$$

بنابراین می‌توان رابطه (۳۲) و همچنین (۳۳) را نتیجه گرفت.

$$H_{11}\mu_{B,C}^{n+1} + H_{12}\mu_W^{n+1} + G_{11}\mu_{B,C}^n + G_{12}\mu_W^n = w^{n+1} \quad (32)$$

H و G ماتریس‌های معلوم بوده که در برگیرنده ضرایب تأثیر و شرط مرزی روی دنباله می‌باشند. W نیز بردار معلومی است که به کمک دیگر شرایط مرزی تعیین می‌شود. شایان ذکر است که در حل به روش تکراری نیز می‌توان معادله‌ای مطابق با رابطه (۲۲) به دست آورد تنها با این تفاوت که در حالت تکراری دیگر ماتریس‌های H و G ثابت نبوده و درایه‌های آنها در فرایند تکرار و در هر گام زمانی متفاوت است. به این ترتیب با استفاده از روند غیر تکراری بهبهانی‌نژاد و چنگیزیان [۸]، می‌توان فرم مطلوب جهت استخراج مدل رتبه کاسته را مطابق با رابطه (۲۲) به دست آورد.

۴- مدل‌سازی رتبه کاسته

با در نظر گرفتن قسمت همگن معادله (۲۲) و با قرار دادن $z_i = e^{\lambda_i t}$ در معادله حاصل و در نظر گرفتن $z_i = e^{\lambda_i t}$ مسأله عمومی مقدار ویژه مطابق با رابطه (۲۳) تشکیل می‌شود [۱۴].

$$z_i H X_i + G X_i = 0 \quad (23)$$

که z_i ، λ_i امین مقدار ویژه و X_i بردار ویژه متناظر با آن می‌باشد. به طور عمومی تر می‌توان رابطه (۲۴) را در نظر گرفت.

$$H X Z + G X = 0 \quad (24)$$

که Z یک ماتریس قطری است که قطر آن را مقادیر ویژه تشکیل می‌دهند. همچنین X ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای ویژه سمت راست تشکیل می‌دهند. به همین ترتیب بردارهای ویژه سمت چپ نیز با حل مسأله مقدار ویژه مطابق با رابطه (۲۵) به دست می‌آیند.

$$H^T Y Z + G^T Y = 0 \quad (25)$$

که Y ماتریسی است که ستون‌های آن را بردارهای ویژه سمت چپ تشکیل می‌دهند. بردارهای ویژه سمت راست و چپ شرایط تعامد ارائه شده در رابطه (۲۶) و (۲۷) را ارضا می‌کنند.

$$Y^T H X = I \quad (26)$$

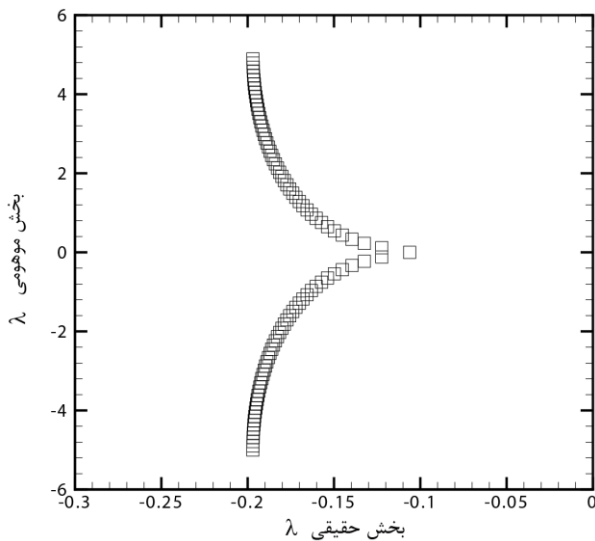
$$Y^T G X = -Z \quad (27)$$

در ادامه همان گونه که در مسائل دینامیک سازه متداول می‌باشد، حرکت دینامیکی سیال مطابق با رابطه (۲۸) توسط مجموعی از موده‌های حرکتی بیان می‌شود.

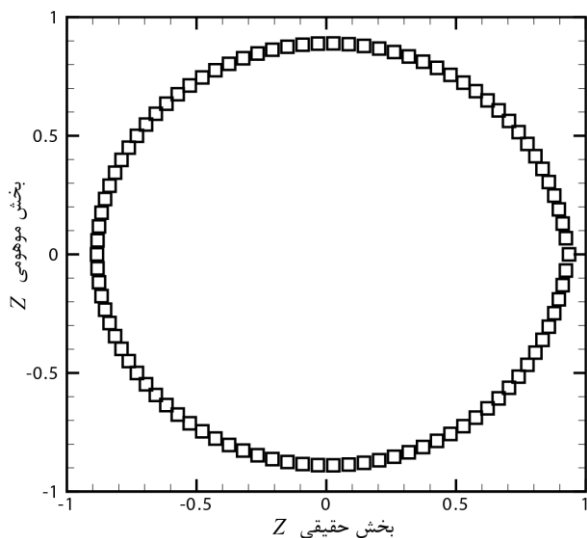
$$\mu = X v \quad (28)$$

که در آن X شامل M بردار ویژه سمت راست، متناظر با

مقادیر ویژه وجود ندارند.



شکل ۲ مقادیر ویژه جریان غیردائم کاپیتاسیون جزئی در صفحه λ



شکل ۳ مقادیر ویژه جریان غیردائم کاپیتاسیون جزئی در صفحه Z

علاوه بر این ملاحظه می‌شود که با استفاده از روش شاهوردی و همکاران [۱۷]، مقادیر ویژه صفر که در این مسأله مربوط به المان‌های کاپیتی و جسم می‌باشند، به طور کلی حذف شده‌اند. از این‌رو برای تحلیل جریان غیردائم کاپیتاسیون جزئی دیگر نیازی به استفاده از تصحیح استاتیکی نمی‌باشد. زاویه حمله هیدروفویل در جریان غیر دائم مطابق با رابطه (۴۰) در نظر گرفته شده است.

$$\alpha(x, t) = 4 + \sin\left(2k\frac{x}{c} - \omega t\right) \quad (40)$$

می‌توان نشان داد که G_{11} و G_{12} برابر با صفر بوده و از این‌رو با استفاده از رابطه (۳۲)، معادله (۳۴) نتیجه می‌شود.

$$H_{11}\mu_{B,C}^{n+1} + H_{12}\mu_W^{n+1} = w^{n+1} \quad (34)$$

$$\rightarrow \mu_{B,C}^{n+1} = H_{11}^{-1}w^{n+1} - H_{11}^{-1}H_{12}\mu_W^{n+1}$$

همچنین می‌توان نشان داد که H_{21} نیز برابر با صفر بوده و از این‌رو با جایگذاری رابطه (۳۴) در رابطه (۳۳) و مقادیر عملیات ریاضی، معادله (۳۵) حاصل می‌شود.

$$[H_{22}]\mu_W^{n+1} + [G_{22} - G_{21}H_{11}^{-1}H_{12}]\mu_W^n = -H_{11}^{-1}G_{21}w^n \quad (35)$$

رابطه (۳۵) را مطابق با معادله (۳۶) می‌توان بازآرایی نمود. متغیرهای استفاده شده در معادله (۳۶) در رابطه (۳۷) تا (۳۹) معرفی شده‌اند.

$$H_{new}\mu_W^{n+1} + G_{new}\mu_W^n = w_{new}^{n+1} \quad (36)$$

$$H_{new} = H_{22} \quad (37)$$

$$G_{new} = G_{22} - G_{21}H_{11}^{-1}H_{12} \quad (38)$$

$$w_{new}^{n+1} = -H_{11}^{-1}H_{21}w^{n+1} - H_{11}^{-1}G_{21}w^n \quad (39)$$

با توجه به این که رابطه (۳۶) تنها بر اساس μ_W مرتب شده است، دیگر مقادیر ویژه صفری وجود نخواهد داشت. از این‌رو انتظار می‌رود که بتوان بدون استفاده از تصحیح استاتیکی، مدل رتبه کاسته جریان کاپیتاسیون جزئی را استخراج کرد.

۵- بحث و بررسی نتایج

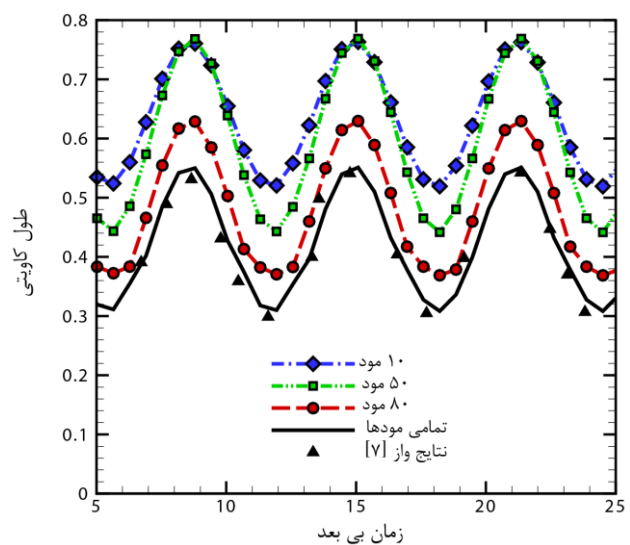
در این بخش نتایج مدل‌سازی رتبه‌کاسته جریان غیردائم کاپیتاسیون جزئی ارائه می‌شود. هندسه هیدروفویل در این تحلیل‌ها ناکا ۱۶-۰۰۶ در نظر گرفته شده است. هیدروفویل با ۴۰۰ المان مرزی با توزیع کسینوسی و دنباله با ۱۰۰ المان شبکه‌بندی شده‌اند. عدد کاپیتاسیون در مدل‌سازی‌های انجام گرفته در این مقاله برابر با ۱ و طول اولیه کاپیتی برابر با ۰/۴ وتر لحاظ شده است [۸]. بر این اساس ماتریس‌های H_{new} و G_{new} تشکیل شده و مقادیر ویژه و بردارهای ویژه محاسبه شده‌اند. شکل ۲ و شکل ۳ این مقادیر را در صفحه λ و صفحه Z ارائه می‌کنند.

با توجه به شکل ۳ ملاحظه می‌شود که تمامی مقادیر ویژه جریان درون دایره واحد قرار گرفته‌اند. همچنین قسمت حقیقی تمامی λ ها منفی بوده و از این‌رو می‌توان دریافت که حل عددی بر اساس مقادیر ویژه پایدار بوده و ترم‌های ناپایداری در

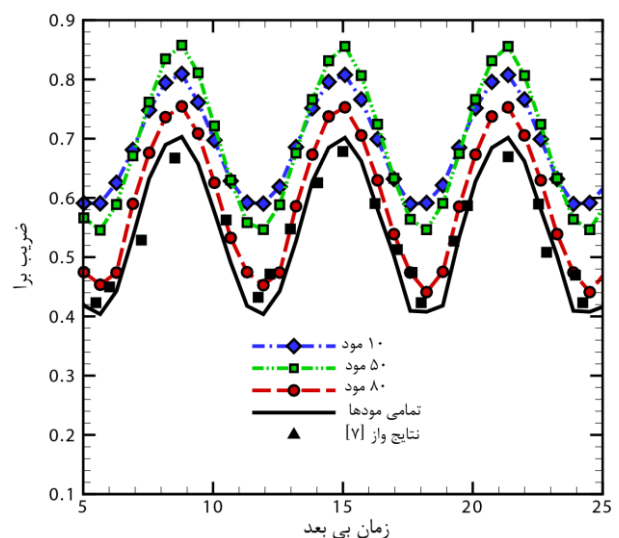
مطابق با شکل های ۴ و ۵ ملاحظه می شود که استفاده از مدهای مختلف، نتایج مختلفی را به همراه خواهد داشت. به هر میزان که تعداد مدهای انتخابی بیشتر باشد، نتایج به مقادیر ارائه شده در پژوهش های پیشین نزدیک تر می شود. در نهایت ملاحظه می شود که انتخاب تمامی مدهای جریان با دقت بسیار خوبی قادر به پیش بینی رفتار کاویتی است. در این حالت بیشینه خطا در محاسبه طول کمتر از ۳ درصد و در محاسبه ضریب برا کمتر از ۵ درصد می باشد.

شرط استفاده از تمامی مدها برای دستیابی به نتایج قابل قبول در جریان کاویناسیون جزئی، تا حدودی با نتایج شاهوردی و همکاران [۱۷] متفاوت است. ایشان در تحلیل جریان غیردائم بدون کاویتی ملاحظه کردند که تنها با استفاده از تعداد اندکی از مدهای جریان می توان نتایج قابل قبولی در تحلیل مسائل غیردائم به دست آورد. با بررسی بیشتر این پدیده مشاهده شد که در روش ایشان (استفاده از المان های دنباله جهت تعیین مجهولات) استفاده از مدهای کمتر نمی تواند شرط کلون را ارضا کند. به عبارتی قدرت دابلت های دنباله آن گونه که مورد انتظار است، در گام های زمانی به المان های مجاور منتقل نشده و قدرت آنها در طی زمان تغییر می کند. نتایج نشان می دهند که تحلیل غیردائم جریان بدون کاویتی حساسیت آنچنانی به این پدیده نداشته و از این رو تنها با استفاده از مدهای اندک می توان نتایج قابل قبولی به دست آورد [۱۷]. در حالت وجود کاویتی از آنجا که قدرت دابلت های دنباله تاثیر زیادی در توزیع فشار بر روی هیدروفویل و تشکیل یا عدم تشکیل کاویتی دارند، استفاده از مدهای کمتر منجر به تولید خطا در محاسبات شده و از این رو پیش بینی دقیق طول کاویتی را مختل می کند. در نتیجه این خطا، توزیع فشار ناشی از کاویتی بر هیدروفویل نیز تغییر کرده و نهایتاً منجر به محاسبه ضریب برای نادرست می شود. همانگونه که قبلاً نیز اشاره شد جهت رفع این پدیده می بایست از کلیه مدهای مسئله استفاده کرد. تعداد این مدها محدود به تعداد المان های دنباله بوده که به طور طبیعی از تعداد المان های جسم کمتر می باشند. همچنین وابسته نبودن رابطه (۲۹) منجر به عدم نیاز به حل معادلات به هم پیوسته می شود. از این رو، دو مورد ذکر شده بیانگر این مطلب می باشند که استفاده از مدل رتبه کاسته پیشنهادی با وجود استفاده از تمامی مدها، همچنان

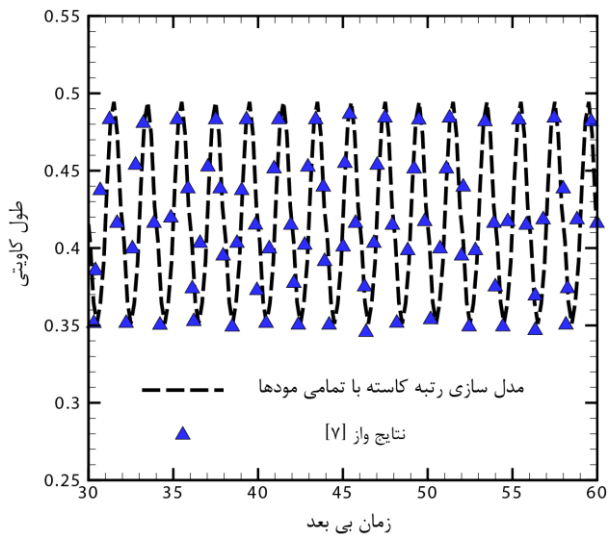
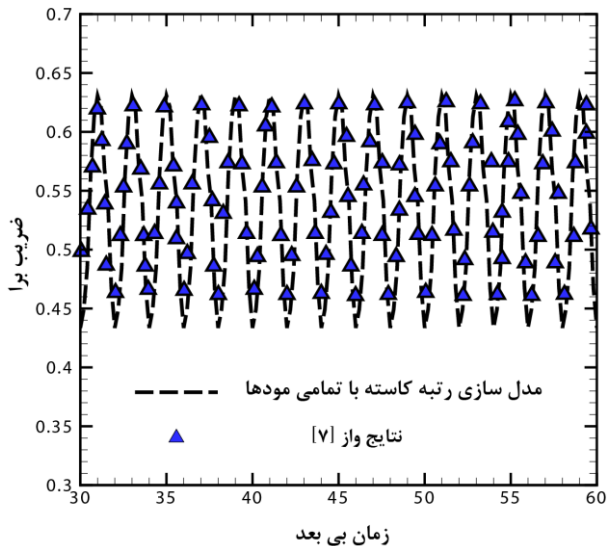
که فرکانس حرکت نوسانی، c و وتر هیدروفویل و ω فرکانس $k = \omega c / 2U_{\infty}$ فرکانس بی بعد می باشد. این نوع جریان یکی از حالت های متداول جریان عبوری از هیدروفویل ها است [۷، ۶]. با استفاده از مقادیر ویژه محاسبه شده در قسمت قبل و با انتخاب تعداد مدهای مختلف، تغییرات زمانی طول کاویتی و ضریب برا بر روی هیدروفویل به دست آمده و این نتایج در بخشی از سیکل حرکتی در شکل های ۴ و ۵ ارائه شده است. فرکانس بی بعد برابر با 0.5 و زمان بی بعد برابر با $T = U_{\infty} t / c$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۴ تغییرات زمانی طول کاویتی به ازای مدهای ویژه مختلف ($\sigma = 1$ و $k = 0.5$)



شکل ۵ تغییرات زمانی ضریب برا به ازای مدهای ویژه مختلف ($\sigma = 1$ و $k = 0.5$)

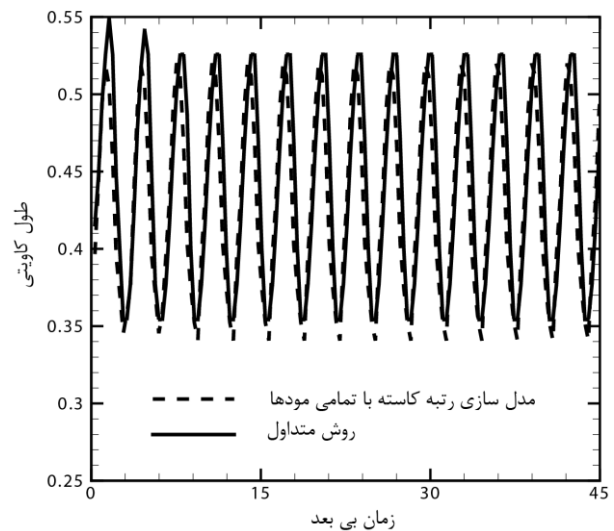
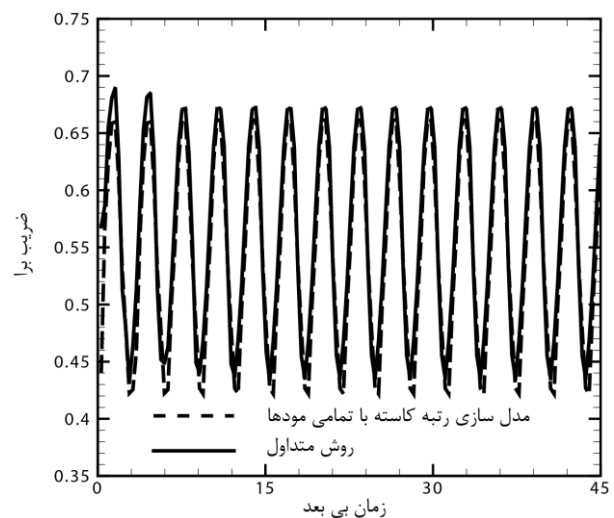
شکل ۸ تغییرات زمانی طول کاویتی ($\sigma = 1$ و $k = \pi/2$)شکل ۹ تغییرات زمانی ضریب برا ($\sigma = 1$ و $k = \pi/2$)

علاوه بر محاسبه تغییرات زمانی طول کاویتی و ضریب برا، تغییرات شکل کاویتی در گام‌های زمانی مختلف نیز محاسبه شده و در شکل ۱۰ در مقایسه با نتایج واز [۷] ارائه شده است. این تغییرات در سیکل آخر حرکت (سیکل ۱۶) و در فرکانس بی بعد $k = 1$ محاسبه شده‌اند. با توجه به شکل ۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی با دقت بسیار مناسب قادر به پیش‌بینی شکل کاویتی در گذر زمان نیز می‌باشد.

همچنین جهت نشان‌دادن تاثیر کاویتاسیون بر توزیع فشار روی هیدروفویل، ضریب فشار با فرض وجود کاویتی و نیز عدم وجود کاویتی به‌ازای $\omega t = 15 \times 360^\circ + 120^\circ$ در شکل ۱۱ ارائه شده است.

توجیه‌پذیر است.

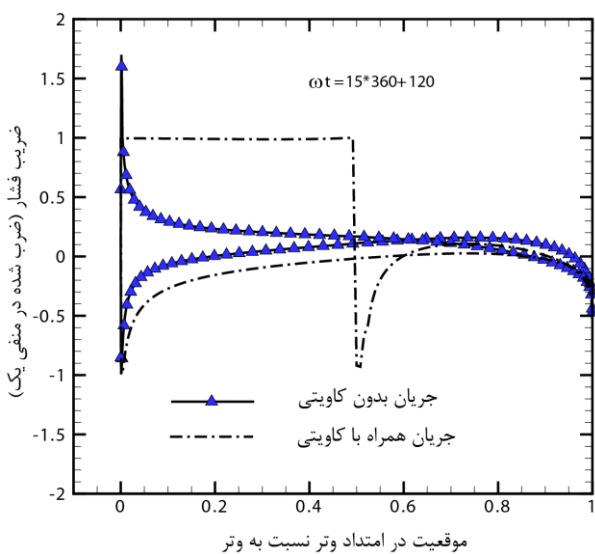
برای ارائه توانایی روش ارائه شده در تحلیل مسائل مختلف، تغییرات زمانی طول کاویتی و ضریب برا در جریان‌هایی با فرکانس بی‌بعد $k = 1$ و $k = \pi/2$ محاسبه و در شکل‌های ۶ تا ۹ ارائه شده است. با توجه به شکل‌های ۶ تا ۹ ملاحظه می‌شود که روش ارائه شده به‌خوبی می‌تواند تغییرات زمانی طول کاویتی و نیز ضریب برا را به‌ازای مقادیر مختلف فرکانس بی‌بعد، محاسبه کند. بیشینه خطا در مدل‌سازی‌های انجام شده کمتر از ۳ درصد می‌باشد.

شکل ۶ تغییرات زمانی طول کاویتی ($\sigma = 1$ و $k = 1$)شکل ۷ تغییرات زمانی ضریب برا ($\sigma = 1$ و $k = 1$)

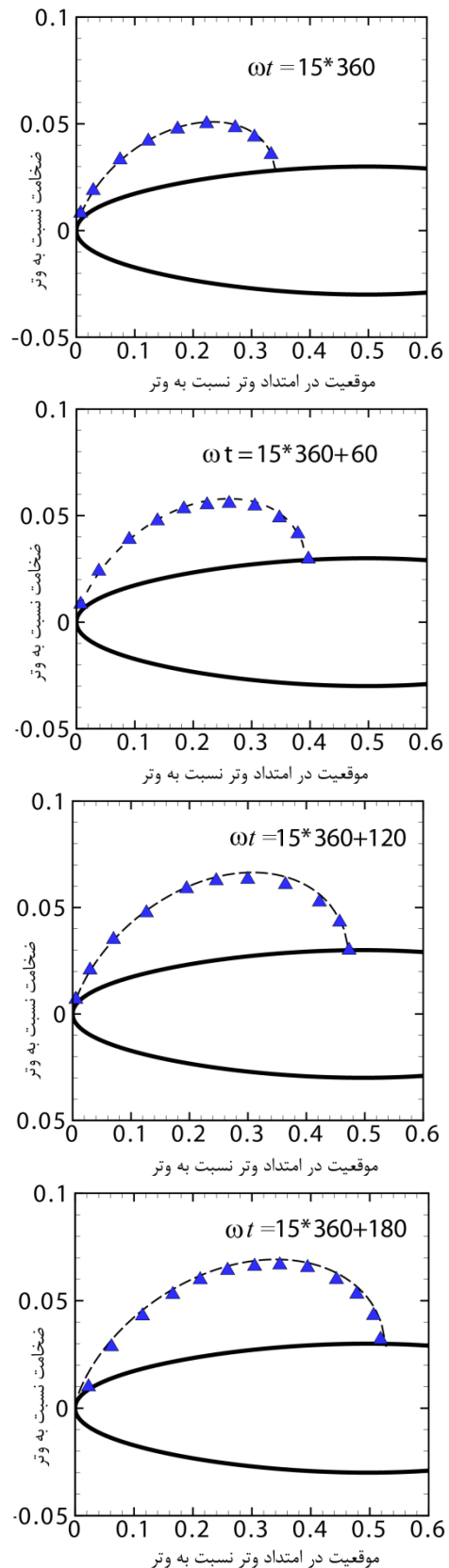
مطابق با شکل ملاحظه می‌شود که پیدایش کاویتاسیون تغییر چشمگیری در توزیع فشار بر روی هیدروفویل را منجر می‌شود. در مسئله مورد نظر، کاویتی در ناحیه با عدد کاویتاسیون بالاتر از ۱ شروع شده و مطابق با شکل مشاهده می‌شود که با تشکیل کاویتی، محدوده آن به نواحی با عدد کاویتاسیون کمتر نیز می‌تواند گسترش یابد. به عبارتی با توجه به شکل ۱۱ ملاحظه می‌شود که در تحلیل جریان بدون کاویتی، تنها بخش کوچکی از سطح بالای هیدروفویل شرایط تشکیل کاویتی را دارا بوده، در صورتی که با تشکیل کاویتی نزدیک به نیمی از سطح هیدروفویل درون کاویتی احاطه می‌شود.

با اطمینان از صحت کارکرد روش ارائه شده در فرکانس‌های مختلف، عملکرد این روش در یکی دیگر از جریان‌های متداول نوسانی مورد بررسی قرار گرفته است. در این جریان، هیدروفویل با زاویه حمله $\alpha = 4 \pm 0.5$ در حال نوسان بوده و فرکانس بی‌بعد جریان برابر با 0.5 در نظر گرفته شده است. شکل ۱۲ و ۱۳ تغییرات زمانی طول کاویتی و ضریب برا را در این جریان نشان می‌دهند.

شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نشان می‌دهند که روش رتبه کاسته قادر به پیش‌بینی صحیح رفتار سیال در این حرکت نوسانی نیز می‌باشد. در این حالت بیشینه خطا در محاسبه طول کاویتی و ضریب برا کمتر از ۵ درصد است.



شکل ۱۱ تاثیر تشکیل کاویتاسیون بر توزیع ضریب فشار در مقایسه با جریان بدون کاویتی ($k = 1$ و $\sigma = 1$)



شکل ۱۰ تغییرات زمانی شکل کاویتی، خط چین نتایج روش پیشنهادی، نشانه‌ها نتایج و از [۷] ($k = 1$ و $\sigma = 1$)

شده است.

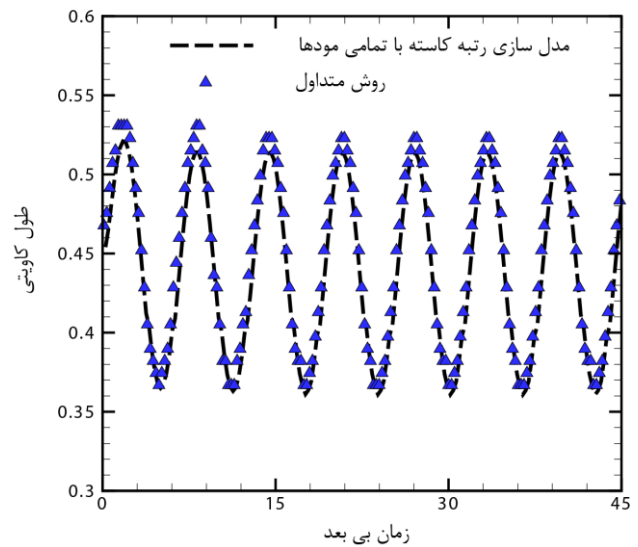
جدول ۱ زمان محاسباتی (ثانیه) و کارایی محاسباتی مدل رتبه کاسته

$k = \pi/2$	$k = 1$	$k = 0.5$	
۴۵	۴۰/۸	۳۱/۴	T_{conv}
۴	۴/۵	۴/۸	T_{rom}
%۹۰	%۸۹	%۸۵	η

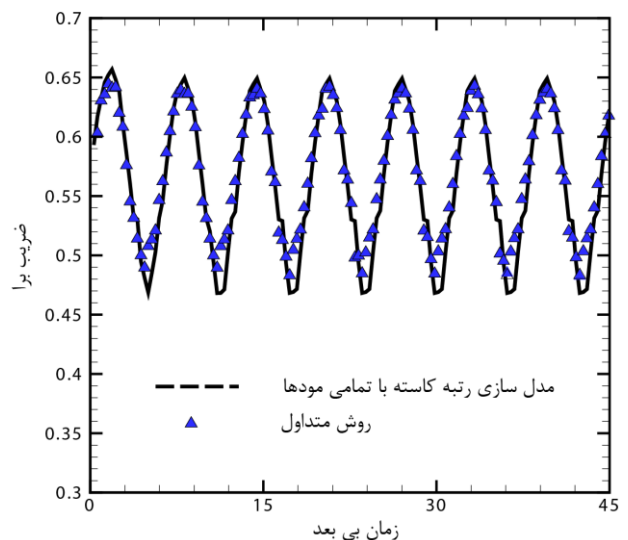
این محاسبات توسط یک کامپیوتر دوهسته‌ای با قدرت پردازش ۲۱۰۰ مگاهرتز و حافظه ۲ گیگابایت انجام شده‌اند. همان گونه که در جدول ۱ نیز مشاهده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی کاملاً کارا تر از روش متداول بوده و این روش جدید بیش از ۸۵ درصد از زمان لازم برای محاسبات را کاهش می‌دهد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل رتبه کاسته جریان غیردائم کاپیتاسیون جزئی ارائه شد. برای استخراج بردارها و مقادیر ویژه، معادلات حاکم تنها بر اساس تعیین مجهولات بر روی دنباله بازنویسی شدند. به این ترتیب مقادیر ویژه صفر حذف شده و بدون استفاده از تصحیح استاتیکی مدل‌سازی رتبه کاسته انجام شد. در مدل‌سازی به روش رتبه کاسته ملاحظه شد که تنها با استفاده از تمامی مودها می‌توان به نتایج با دقت بالا دست یافت. دلیل این امر ماهیت معادلات تغییر یافته می‌باشد زیرا معادلات جدید در صورت استفاده از تنها بخشی از مودها، قادر به ارضای شرط کلون نمی‌باشند. کارایی روش ارائه شده برای مقادیر مختلف فرکانس بی‌بعد و نیز در جریان‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که با استفاده از تمامی مودها، روش ارائه شده قادر به پیش‌بینی رفتار جریان در حالت‌های مختلف می‌باشد. بیشینه خطا در حالت‌های مورد بررسی کمتر از ۵ درصد است. علاوه بر این نتایج بیانگر این موضوع بوده که روش پیشنهادی زمان محاسباتی را به میزان بیش از ۸۵٪ نسبت به روش متداول کاهش می‌دهد. با توجه به توانایی‌های ذکر شده، می‌توان نتیجه گرفت که مدل جدید یک ابزار توانمند در مدل‌سازی جریان‌های غیردائم کاپیتاسیون جزئی می‌باشد.



شکل ۱۲ تغییرات زمانی طول کاپیتی ($k = \alpha = 4 \pm 0.5$)
($\sigma = 1$ و 0.5)



شکل ۱۳ تغییرات زمانی ضریب برا ($k = 0.5, \alpha = 4 \pm 0.5$)
($\sigma = 1$)

در نهایت، کارایی محاسباتی مدل رتبه کاسته با مقایسه زمان محاسباتی مورد نیاز هر دو روش (مدل رتبه کاسته و روش متداول) مورد بررسی قرار گرفته است. کارایی الگوریتم (η) طبق رابطه (۴۱) تعریف می‌شود.

$$\eta = \frac{|T_{conv} - T_{rom}|}{T_{conv}} \times 100 \quad (41)$$

که T_{rom} زمان محاسباتی مدل رتبه کاسته و T_{conv} زمان محاسباتی روش متداول است. در جدول ۱ زمان محاسباتی هر دو روش در تحلیل جریان غیردائم در فرکانس‌های مختلف ارائه

۷- تشکر و قدردانی

نگارندگان از دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل حمایت‌های مرتبط با این پژوهش تشکر و قدردانی می‌کنند.

۸- مراجع

- [9] Hall, K. C., "Eigenanalysis of Unsteady Flows About Airfoils, Cascades, and Wings", *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 12, 1994, pp. 2426-2432.
- [10] Romanowski, M. C., and Dowell, E. H., "Reduced Order Euler Equations for Unsteady Aerodynamic Flows: Numerical Techniques", *AIAA Paper* 96-0528, Jan. 1996.
- [11] Dowell, E. H., "Eigenmode Analysis in Unsteady Aerodynamics: Reduced Order Models", *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 8, 1996, pp. 1578-1588.
- [12] Dowell, E. H., Hall, K. C., and Romanowski, M. C., "Eigenmode Analysis in Unsteady Aerodynamics: Reduced Order Models", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 50, No. 6, 1997, pp. 371-385.
- [13] Florea, R., Hall, K. C., and Cizmas, P. G., "Reduced-Order Modeling of Unsteady Viscous Flow in a Compressor Cascade", *AIAA Journal*, Vol. 36, 1998, pp. 1039-1048.
- [14] Esfahanian, V., and Behbahani-Nejad, M., "Reduced Order Modeling of Unsteady Flows About Complex Configurations Using the Boundary Element Method", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 124, No. 4, 2002, pp. 988-993.
- [15] Behbahani-Nejad, M., *Reduced Order Modeling of 3D Unsteady Flows Using Fluid Eigenmodes and Boundary Element Method*, PhD. Dissertation, Mechanical Engineering Dept., Univ. of Tehran, Tehran, Iran, March 2002.
- [16] Behbahani-Nejad, M., Haddadpour, H., Esfahanian, V., "Reduced-Order Modeling of Unsteady Flows Without Static Correction Requirement", *Journal of Aircraft*, Vol. 42, No. 4, 2005, pp. 882-886.
- [17] Shahverdi, H., Nobari, A.S., Behbahani-Nejad, M., Haddadpour, H., "An Efficient Reduced-Order Modeling Approach Based on Fluid Eigenmodes and Boundary Element Method", *Journal of Fluid and Structure*, Vol. 23, 2007, pp. 143-153.
- [18] M. Mohammadi amin, B. Ghadiri, H. Hadadpour, boundary integral equations for solving Time domain and reduced rank modeling of unsteady aerodynamics thin wings, *Journal of Aeronautical Engineering*, Vol.13, No.1, pp.39-51, 2011, (In Persian)
- [19] Katz, J. and Plotkin, A., *Low-Speed Aerodynamics*, Second Ed., Cambridge University Press, 2001.
- [1] Fine, N., *Non-linear Analysis of Cavitating Propellers in Nonuniform Flow*, PhD. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology – MIT, 1992.
- [2] Kinnas, S.A. and Fine, N.E., "A Numerical Nonlinear Analysis of the Flow Around Two- and Three-Dimensional Partially Cavitating Hydrofoils", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 254, 1993, pp. 151-181.
- [3] Pyo, S.W. and Suh, J.C., "Modified Split Panel Method Applied to the Analysis of Cavitating Propellers", *Journal of Ship & Ocean Engineering*, Vol. 4, No. 2, 2000, pp. 1-10.
- [4] Salvatore, F. and Esposito, P. G., "Numerical Analysis of Cavitating Propellers Including Viscous Effects", *In Proceeding of 8th International Symposium on Practical Design of Ships and Mobile Units*, 2001, pp. 705-711.
- [5] Lee, H. and Kinnas, S.A., "Application of a BEM in the Prediction of Unsteady Blade Sheet and Developed Tip Vortex Cavitation on Marine Propellers", *Journal of Ship Research*, Vol. 48, No. 1, 2004, pp. 15-30.
- [6] Vaz, G., Bosschers, J. and Compos, J., "Two Dimensional Modelling of Partial Cavitation with BEM. Analysis of Several Models", *In Proceedings of the 5th International Symposium on Cavitation (CAV 2003)*, Japan, 2003.
- [7] Vaz, G., *Modelling of Sheet Cavitation on Hydrofoils and Marine Propellers using Boundary Element Methods*, PhD. Dissertation, IST, UTL, Lisbon, Portugal, 2005.
- [8] Behbahani-Nejad, M. and Changizian, M., "A Fast Non-Iterative Algorithm to Predict Unsteady Partial Cavitation", *In Proceedings of the 8th International Symposium on Cavitation (CAV 2012)*, Singapore, 2012.