



## مطالعه یک ترک ایستا در یک محیط گرمایی/رطوبتی همسانگرد تحت شوک گرمایی با روش المان محدود توسعه یافته

محمدباقر نظری<sup>1\*</sup>، حمید رجائی<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود  
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود  
\* شاهرود صندوق پستی 3618785545، mbnazari@shahroodut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 31 مرداد 1395  
پذیرش: 12 آبان 1395  
ارائه در سایت: 15 دی 1395  
کلید واژگان:

### چکیده

در این مقاله، برای محاسبه ضرایب شدت تنش در محیط همسانگرد مستطیلی که در معرض تنش‌های گرمایی و رطوبتی قرار دارد از روش المان محدود توسعه یافته استفاده شده است. در معادلات حاکم هایگروترموالاستیسیته، کوپل دوطرفه میدان‌های دما و رطوبت و در یک حالت، ضریب پخش رطوبتی تابع دما در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش، روش انتگرال برهم‌کنش برای بارهای گرمایی/رطوبتی توسعه داده شده است. در روش المان محدود توسعه یافته به منظور کاهش خطا، از المان‌های مستطیلی هشت گره‌ای ریز شونده، به سمت نوک ترک، استفاده شده است. برای صحت‌سنجی نتایج عددی، ضریب شدت تنش برای ترک مود I با روش تابع وزنی نیز به دست آمده است. در حل تحلیلی، ابتدا معادلات هایگروترموالاستیسیته حاکم غیرکوپل شده‌اند و پس از بی‌بعد سازی، از روش جداسازی متغیرها برای حل آن‌ها استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهند گرادیان غلظت رطوبت تاثیر قابل توجهی روی ضریب شدت تنش دارد و باید در مدل مساله لحاظ شود. قبل از رسیدن میدان دما به حالت پایا، کوپل دوطرفه میدان‌های دما و رطوبت باعث هم‌زمانی تغییرات این میدان‌ها می‌شود و روی تغییر زمانی ضریب شدت تنش اثر می‌گذارد. به طوری که، در ابتدای اعمال شوک گرمایی ضریب شدت تنش برای ترک‌های کوتاه‌تر مشابه بارگذاری گرمایی بزرگتر نیست. همچنین، با افزایش طول ترک و زاویه ترک مقدار ضریب شدت تنش مود I کاهش می‌یابد. از طرف دیگر، در نظر گرفتن ضریب پخش رطوبتی به صورت تابعی از دما، زمان لازم برای رسیدن به تعادل رطوبتی را افزایش می‌دهد.

روش المان محدود توسعه یافته  
محیط همسانگرد  
ضریب شدت تنش  
تنش گرمایی/رطوبتی

## Extended Finite Element analysis of a stationary crack in hygrothermal isotropic media subjected to thermal shock

Mohammad Bagher Nazari\*, Hamid Rajaei

School of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran  
\* P.O.B. 3618785545, Shahrood, Iran. mbnazari@shahroodut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 21 August 2016  
Accepted 02 November 2016  
Available Online 04 January 2017

**Keywords:**  
Extended Finite Element Method (XFEM)  
Isotropic Materials  
Stress Intensity Factors (SIFs)  
Hygrothermal Loading

### ABSTRACT

In this paper, the extended Finite Element Method (XFEM) is implemented to compute the Stress Intensity Factors (SIFs) for rectangular media subjected to a hygrothermal loading. In governing hygrothermoelasticity equations, the cross coupling of temperature and moisture fields and temperature-dependent diffusion in some cases are considered. Furthermore, an interaction integral for hygrothermal loading is developed to compute the stress intensity factors. The non uniform mesh of isoparametric eight-nod rectangular element is used in XFEM to decrease the absolute error in SIFs computations. In order to validate numerical results, the SIF of mode I is obtained analytically. The coupled governing equations are firstly decoupled in terms of new variables and then solved by the separation of variable method. According to the results, the moisture concentration gradient has a significant effect on the SIFs so should be considered in the model. Until temperature reaches its steady state, the cross coupling of temperature and moisture synchronizes their time variation which affects on the time variation of SIF. At the beginning of thermal shock, the SIF for shorter cracks is not necessarily less than the longer ones. Also, the mode I SIF for longer and inclined cracks is smaller. On the other hand, considering the moisture concentration as a temperature function increases the time required to reach the moisture steady state.

### 1- مقدمه

در حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک، برهم‌کنش مغناطیسی- مکانیکی در عملگرهای مگنتواستریک و برهم‌کنش گرما- الکتریکی در پمپ‌های گرمایی ترموالکتریک از آن جمله‌اند [1]. نوع ساختار اتمی و تخلخل سبب می‌شود

برهم‌کنش هم‌زمان چند میدان یکی از مسائلی است که در تولید و کاربرد تجهیزات با فن‌آوری‌های پیشرفته وجود دارد. برهم‌کنش الکتریکی- مکانیکی

محدود با در نظر گرفتن کوپل میدان‌های دما، رطوبت و تنش را گزارش کرده‌اند. ابراهیمی و براتی [20] کمانش یک نانوتیتر را تحت میدان‌های دما و رطوبت بررسی کرده‌اند. لی و کیم [21] نیز رفتار پس‌کمانش صفحات مواد مرکب مدرج تحت تنش‌های گرمایی-رطوبتی را منتشر کرده‌اند. اکبرزاده و چن [22] برای یک استوانه پیزوالکتریک از مواد مرکب مدرج تنش‌های گرمایی-رطوبتی شعاعی را گزارش کرده‌اند. زنگور و همکارانش نیز در مورد خمش صفحات تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی گزارش‌هایی منتشر کرده‌اند. حل تحلیلی برای قطاعی از دایره با ضخامت متغیر با در نظر گرفتن میدان‌های غیرکوپل دما و رطوبت [23]، تحلیل صفحات مستطیلی از مواد مرکب مدرج [24] و توسعه تئوری برای صفحات روی بستر الاستیک در محیط گرمایی-رطوبتی [25] از جمله این تحقیقات است.

در این مقاله، ضرایب شدت تنش برای یک ترک لبه‌ای در محیط دوبعدی همسانگرد تحت بارگذاری رطوبتی/گرمایی با فرض کوپل دوطرفه میدان‌های دما-رطوبت محاسبه شده است. ناحیه حل با استفاده از المانهای هشت گره‌ای شبکه‌بندی شده است. مدل ترک به صورت غنی‌سازی گره‌های گوشه المان‌ها با توابع مناسب در تابع تقریب میدان جابجایی، دما و غلظت رطوبت لحاظ شده است. انتگرال برهم‌کنش برای بارگذاری گرمایی-رطوبتی توسعه داده شده و ضرایب شدت تنش با استفاده از آن استخراج شده‌اند. تمامی مراحل حل مسئله شامل المان‌بندی و حل معادلات مربوطه و استخراج نتایج با کد نویسی در نرم‌افزار MATLAB انجام شده است.

## 2- مدل‌سازی ترک با روش المان محدود توسعه یافته

امروزه کاربرد روش المان محدود در حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کاربرد گسترده‌ای دارد؛ اما در تحلیل مسائل مکانیک شکست، لزوم انطباق المان‌ها بر سطوح ترک، دشواری توصیف گرادیان شدید تنش در حوزه نوک ترک و انجام شبکه‌بندی مجدد در صورت رشد ترک از مشکلات استفاده از روش المان محدود کلاسیک است. در روش المان محدود توسعه یافته، ترک از هندسه مسئله حذف و ناحیه حل مستقل از ترک شبکه‌بندی می‌شود. به طوری که ناپیوستگی میدان جابجایی در سطح ترک و گرادیان میدان جابجایی حوزه نوک ترک به صورت محلی به تابع تقریب روش المان محدود اضافه می‌شود (مثل رابطه 1). در رابطه (1)، عبارت اول مربوط به تقریب روش المان محدود استاندارد است. عبارت دوم برای غنی‌سازی المان‌هایی که ترک آن‌ها را قطع می‌کند، به کار برده شده است. تابع  $H(x)$  تابع تعمیم‌یافته هویساید است. عبارت سوم جهت غنی‌سازی المان حاوی نوک ترک به کار برده می‌شود.

$$u^h(x) = \sum_n \phi_n(x) u_n + \sum_I \phi_I(x) H(x) b_I + \sum_{k \in J} \phi_k(x) \left( \sum_{l=1}^4 C_k^l F_l(x) \right) \quad (1)$$

در این رابطه  $I$  مربوط به گره‌های سطح ترک (در شکل 1 با دایره نشان داده شده است) و  $J$  مجموعه گره‌های مربوط به نوک ترک (در "شکل 1" با مربع نشان داده شده است) می‌باشد. توابع  $F_l(x)$  توابع غنی‌سازی حوزه نوک ترک است که به منظور رصد مناسب تکینگی میدان تنش در این ناحیه اضافه شده‌اند و برای مکانیک شکست الاستیک خطی، به صورت رابطه (2)، تعریف می‌شوند [26].

برخی مواد مثل مواد موکب‌ها، فوم، بتن و غیره، دارای خصوصیات ترموسکوپیک- خصوصیات حساس به تغییر دما- و هاگروسکوپیک- خصوصیات حساس به رطوبت- باشند. در نظر گرفتن اثر دما و رطوبت در مدل این مواد، پاسخ ترمومکانیکی دقیق‌تر آن‌ها را در پی دارد. معادلات حاکم بر میدان‌های گرما و رطوبت به صورت روابط ساختاری شار گرمایی و غلظت رطوبت و همچنین اثر آن‌ها بر میدان الاستیک- به صورت رابطه ساختاری تنش- در معادلات حاکم ظاهر می‌شود. علاوه بر این، برهم‌کنش گرما و رطوبت به صورت کوپل دوطرفه معادلات حاکم بر آن‌ها نیز می‌تواند در نظر گرفته شود. این کوپل دوطرفه شامل انتقال گرما، به خاطر وجود گرادیان رطوبت (اثر دوفور) و تغییر غلظت رطوبت به خاطر وجود گرادیان دما (اثر سرت) است. زیرکس با توجه به شباهت مکانیزم انتشار گرما و رطوبت به بررسی شباهت روابط ساختاری گرما و رطوبت و شرایط مرزی آن‌ها پرداخته است [2]. سی و همکاران اثر عبارت‌های کوپل گرما و رطوبت بر تنش‌های گذرا در یک صفحه مواد موکبی تحت تغییر دمای ناگهانی سطح را بررسی کردند. طبق این نتایج، عبارت‌های کوپل می‌توانند باعث اختلاف 20 تا 80% تنش‌ها نسبت به حالت غیرکوپل شوند [3]. تمبور نیز اثر عبارت‌های کوپل گرما و رطوبت بر افزایش ناگهانی دما به صورت محلی را مطالعه کرد [4].

گسیختگی سازه‌ها در اثر تنش‌های گرمایی-رطوبتی به دو صورت اعوجاج صفحه‌ها در اثر تغییر غلظت رطوبت در راستای ضخامت و ایجاد یا رشد ترک در سازه گزارش شده است. پاتل و همکاران به مطالعه پاسخ استاتیکی و دینامیکی مواد موکب چندلایه در محیط گرمایی-رطوبتی بر مبنای تئوری مراتب بالاتر پرداخته‌اند [5]. بهرامی و نوزیر تنش‌های گرمایی-رطوبتی بین لایه‌ای را بررسی کردند [6]. بن‌خدا و همکاران یک روش تحلیلی برای محاسبه تنش‌های گرمایی-رطوبتی در مواد موکب چندلایه با در نظر گرفتن تغییر خواص مکانیکی با تغییر دما و رطوبت را ارائه کردند [7]. هارت‌رانف و سی مسئله توزیع رطوبت و دما در یک صفحه کامپوزیت ضخیم با فرض کوپل بین دما و رطوبت را حل کردند [8]. خلیلی و حیدری به بررسی تأثیر ضخامت بر امکان وقوع ترک حین خشک شدن پرداخته‌اند [9]. سی و شی، دما و رطوبت یک‌بعدی و تنش‌های ناشی از آن را در یک صفحه بی‌نهایت که در معرض تغییر ناگهانی دما و رطوبت در سطح قرار گرفته را به دست آوردند [10]. توپال و دگ برای تحلیل ترک در مواد مرکب هدفمند با فرض بارگذاری گرمایی-رطوبتی پایا پرداخته‌اند؛ و نتیجه گرفته‌اند که اثرات هایگروسکوپیک بر رفتار شکست مهم بوده و باید در آنالیز شکست لحاظ شوند [11]. در این تحقیق، از کوپل میدان‌های گرما و رطوبت صرف نظر شده است. دگ و همکاران با استفاده از انتگرال‌های  $J_k$  به محاسبه ضرایب شدت تنش با در نظر گرفتن شرایط پایدار برای رطوبت و گرما و معادلات غیرکوپل در یک محیط مرکب هدفمند ارتوتروپیک پرداختند [12,13]. بنس و استفان [14] دیواره‌های بتنی تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی در دمای بالا را بررسی کرده‌اند. ایشان از روش المان محدود برای حل معادلات کوپل حاکم استفاده کرده‌اند. کنیوچک و همکاران [15] مدلی از بتن به صورت یک ماده متخلخل اشباع از آب ارائه و اثر شرایط گرمایی و رطوبتی را روی یخ‌زدگی بتن مطالعه کرده‌اند. احمد و همکارانش [16] اثر رطوبت روی استحکام به ضربه در سرعت‌های پایین برای مواد مرکب پلیمری تقویت‌شده با رشته‌های کربنی تک‌جهته را به صورت تجربی بررسی کرده‌اند. حسینی و همکارانش پخش رطوبت با معادله‌ای غیر از قانون فیک را در یک محیط دوبعدی محدود ترموالاستیک [17] و السنودینامیک [18] را بررسی کرده‌اند. همچنین، حسینی و قدیری‌راد [19] توزیع رطوبت و تنش را برای یک محیط دوبعدی

روابط ساختاری برای توزیع گرما (قانون فوریه)، رطوبت (قانون فیک) و تنش (قانون هوک) به شکل رابطه (7) است.

$$q = -k\nabla T \quad \text{ص}$$

$$J = -D_T \nabla C \quad \text{ب-7}$$

$$\sigma = D: (\varepsilon - \varepsilon^{th} - \varepsilon^{mo}) \quad \text{ج-7}$$

که در آن مقدار  $\varepsilon^{th}$  و  $\varepsilon^{mo}$  با استفاده از رابطه (8) به دست می آید.

$$\varepsilon^{th} = \zeta \Delta T \quad \text{الف-8}$$

$$\varepsilon^{mo} = \gamma \Delta C \quad \text{ب-8}$$

$$\zeta = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ج-8}$$

حالت تنش صفحه‌ای

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{د-8}$$

$$\zeta = (1 + \nu) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ه-8}$$

حالت کرنش صفحه‌ای

$$\gamma = (1 + \nu) \begin{Bmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{و-8}$$

در این روابط،  $D$  تانسور مرتبه چهارم الاستیک،  $k$  ماتریس هدایت گرمایی،  $\alpha$  ضریب انبساط گرمایی و  $\nu$  ضریب پواسون است. متغیرهای میدان،  $\varepsilon$  تانسور کرنش کل،  $\varepsilon^{th}$  تانسور کرنش گرمایی،  $\varepsilon^{mo}$  تانسور کرنش رطوبتی است. تانسور الاستیک (سفتی) در مواد همسانگرد به صورت رابطه (9)، برای حالت تنش صفحه‌ای و رابطه (10)، برای حالت کرنش صفحه‌ای، تعریف می‌شود.

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیک است. با در نظر گرفتن تابع تقریب به صورت رابطه (11)، فرم گسسته معادلات حاکم به صورت رابطه (11)، حاصل می‌شود.

$$Ku = F^{ext} \quad \text{الف-11}$$

$$C^{th,mo} \begin{Bmatrix} \dot{C} \\ \dot{T} \end{Bmatrix} + K^{th,mo} \begin{Bmatrix} C \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^{mo} \\ f^{th} \end{Bmatrix} \quad \text{ب-11}$$

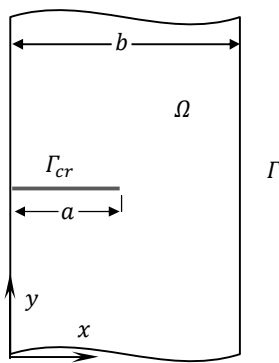


Fig. 2 Long enough substance with internal borders and crack under hydrothermal loading

شکل 2 جسم به اندازه کافی بلند، با مرزهای داخلی به همراه ترک تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (2)$$

### 3- روابط هایگروتروموالاستیسیته

معادلات حاکم هایگروتروموالاستیسیته، شامل معادله تعادل و معادلات حاکم بر توزیع گرما و رطوبت است. دو معادله آخر با به کار بردن قانون فیک، قانون فوریه، بقای جرم و بقای انرژی به دست می آید. جزئیات استخراج معادله کوپل حاکم بر توزیع رطوبت و دما به تفصیل در مرجع [27]، ذکر شده است؛ و در این جا نتیجه نهایی آن به شکل رابطه (3) بیان می‌شود.

$$D_T \nabla^2 C - \frac{\partial}{\partial t} (C - \lambda_1 T) = 0 \quad \text{الف-3}$$

$$\Omega \nabla^2 T - \frac{\partial}{\partial t} (T - \lambda_2 C) = 0 \quad \text{ب-3}$$

در رابطه (3)،  $\nabla^2$  عملگر لاپلاسین،  $T$  دما و  $C$  بیانگر غلظت رطوبت است.  $D$  و  $\Omega$  به ترتیب ضرایب پخش رطوبت و دما و همچنین،  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  ضرایب کوپلینگ می‌باشند. وابستگی ضریب نفوذ رطوبت به دما نیز به صورت رابطه تجربی (4) بیان می‌شود [3].

$$D = D_0 \exp(-E_0/RT) \quad (4)$$

که در آن،  $E_0$  انرژی موردنیاز برای نفوذ واحد جرم به نمونه،  $R$  ثابت عمومی گازها و  $T$  دمای مطلق می‌باشد. با در نظر گرفتن ضریب نفوذ رطوبت به صورت رابطه (4)، معادله کوپل حاکم بر رفتار رطوبت و دما به شکل رابطه (5)، نوشته می‌شود [3].

$$\nabla \cdot (D \nabla C) - \frac{\partial}{\partial t} (C - \lambda_1 T) = 0 \quad \text{الف-5}$$

$$\Omega \nabla^2 T - \frac{\partial}{\partial t} (T - \lambda_2 C) = 0 \quad \text{ب-5}$$

با توجه به "شکل 2"، صفحه مستطیلی به اندازه کافی بلند، به عنوان ناحیه حل  $\Omega$  و محصور به منحنی  $\Gamma$  در نظر گرفته شده است که تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی قرار دارد. شرایط مرزی و اولیه دما و رطوبت در جدول 1 نشان داده شده است. زیرنویس‌های  $a$  و  $f$  به ترتیب بیانگر حالت اولیه و نهایی هستند. معادلات تعادل، شرایط اولیه و مرزی مطابق رابطه (6) می‌باشد. در این روابط،  $n$  بردار یکه و رو به خارج روی مرز  $\Gamma$  است.

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{در } \Omega \quad \text{الف-6}$$

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{روی } \Gamma \quad \text{ب-6}$$

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{روی } \Gamma_{cr} \quad \text{ج-6}$$

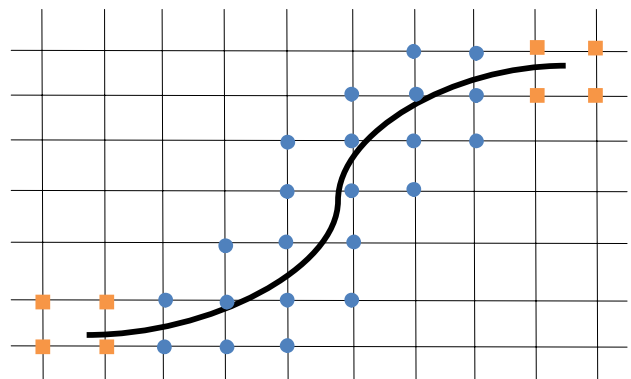


Fig. 1 Enrichment nodes in XFEM. Square: crack tip enrichment. Circle: Heaviside enrichment.

شکل 1 غنی سازی گره‌ها در روش المان محدود توسعه یافته، مربع: غنی سازی با توابع نوک ترک. دایره: غنی سازی با تابع پله‌ای

جدول 1 شرایط اولیه و مرزی برای دما و رطوبت

شرط اولیه	شرط مرزی
$T(x, 0) = T_i$	$T(0, t) = T_f$
$C(x, 0) = C_i$	$C(0, t) = C_f$
	$T(b, t) = T_i$
	$C(b, t) = C_i$

کمکی، انتگرال برهم‌کنش به‌صورت رابطه (18) به‌دست می‌آید [28].

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{ij}) q_j dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1j} - W_{,1}^{int}) q dA \quad (18)$$

مشتق  $W^{int}$  نسبت به  $x_1$  به‌صورت رابطه (19) بیان می‌شود [28].

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} u_{i,j1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,j1} + \left( \frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{expl} \quad (19)$$

عبارت آخر رابطه (19) به شکل رابطه (20) به دست می‌آید.

$$\left( \frac{\partial W^{int}}{\partial x_1} \right)_{expl} = \frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)} \frac{\partial(\Delta C)}{\partial x_1} \quad (20)$$

چگالی انرژی کرنشی برهم‌کنش با جایگذاری معادله ساختاری برحسب

کرنش کل ( $\epsilon$ )، اختلاف دما ( $\Delta T$ ) و غلظت رطوبت ( $\Delta C$ )، قابل بیان است.

$$W^{int} = \sigma_{ik} \epsilon_{ik}^{aux} = \sigma_{11} \epsilon_{11}^{aux} + \sigma_{22} \epsilon_{22}^{aux} + 2\sigma_{12} \epsilon_{12}^{aux} = (C_{11} \epsilon_{11} + C_{12} \epsilon_{22} + 2C_{13} \epsilon_{12}) \epsilon_{11}^{aux} + (C_{21} \epsilon_{11} + C_{22} \epsilon_{22} + 2C_{23} \epsilon_{12}) \epsilon_{22}^{aux} + 2(C_{31} \epsilon_{11} + C_{32} \epsilon_{22} + 2C_{33} \epsilon_{12}) \epsilon_{12}^{aux} - (C_{11} \zeta_1 + C_{12} \zeta_2 + C_{13} \zeta_3) \Delta T \epsilon_{11}^{aux} - (C_{21} \zeta_1 + C_{22} \zeta_2 + C_{23} \zeta_3) \Delta T \epsilon_{22}^{aux} - 2(C_{31} \zeta_1 + C_{32} \zeta_2 + C_{33} \zeta_3) \Delta T \epsilon_{12}^{aux} - (C_{11} \gamma_1 + C_{12} \gamma_2 + C_{13} \gamma_3) \Delta C \epsilon_{11}^{aux} - (C_{21} \gamma_1 + C_{22} \gamma_2 + C_{23} \gamma_3) \Delta C \epsilon_{22}^{aux} - 2(C_{31} \gamma_1 + C_{32} \gamma_2 + C_{33} \gamma_3) \Delta C \epsilon_{12}^{aux} \quad (21)$$

با توجه به رابطه (21)

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} = -(C_{11} \zeta_1 + C_{12} \zeta_2 + C_{13} \zeta_3) \epsilon_{11}^{aux} - (C_{21} \zeta_1 + C_{22} \zeta_2 + C_{23} \zeta_3) \epsilon_{22}^{aux} - 2(C_{31} \zeta_1 + C_{32} \zeta_2 + C_{33} \zeta_3) \epsilon_{12}^{aux} \quad (22)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)} = -(C_{11} \gamma_1 + C_{12} \gamma_2 + C_{13} \gamma_3) \epsilon_{11}^{aux} - (C_{21} \gamma_1 + C_{22} \gamma_2 + C_{23} \gamma_3) \epsilon_{22}^{aux} - 2(C_{31} \gamma_1 + C_{32} \gamma_2 + C_{33} \gamma_3) \epsilon_{12}^{aux} \quad (23)$$

رابطه‌های (22) و (23) به‌صورت زیر ساده می‌شوند.

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)} = -\zeta_i \sigma_i^{aux} \quad (24)$$

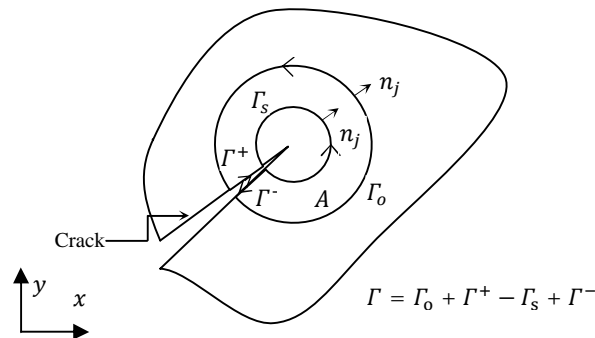


Fig. 3 Conversion of the contour integral into an equivalent domain integral (EDI)

شکل 3 تبدیل فرم کانتوری انتگرال  $J$  به فرم ناحیه‌ای

در این روابط  $K$  ماتریس سفتی کل مدل است،  $T, u$  و  $C$  بردار مجهولات گره‌ای است؛ که در آن، مجهولات مربوط به درجات آزادی استاندارد و درجات آزادی مربوط به غنی‌سازی هر گره (در صورت وجود) به‌طور متوالی قرار گرفته است. در رابطه (11-الف)،  $F^{ext}$  بردار نیروهای خارجی اعمال شده به گره‌ها بوده و شامل نیروهای مکانیکی، گرمایی و رطوبتی است.

$$F^{ext} = F^m + F^{th} + F^{mo} \quad (12)$$

در این‌جا، برای حل گسسته معادلات کوپل توزیع گرما و رطوبت از روش ضمنی کرانک-نیکلسون استفاده شده است. این روش، از لحاظ عددی پایداری نامشروط و حجم محاسبات کمتری نسبت به روش‌های چند مرحله‌ای دارد. علاوه بر این، این روش دارای دقت مرتبه دوم از گام زمانی است. رطوبت و دمای گره‌ها در هر گام زمانی براساس رطوبت و دمای گره‌ای در گام زمانی قبلی به‌صورت رابطه (13) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & [2C^{th,mo} + K^{th,mo} \Delta t] \left\{ \frac{C_n}{T_n} \right\} \\ & = \Delta t \left( \left\{ \frac{f_{n-1}^{mo}}{f_{n-1}^{th}} \right\} + \left\{ \frac{f_n^{mo}}{f_n^{th}} \right\} \right) \\ & + [2C^{th,mo} - K^{th,mo} \Delta t] \left\{ \frac{C_{n-1}}{T_{n-1}} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

#### 4- انتگرال برهم‌کنش

روش‌های انرژی مانند انتگرال  $J$  یک رهیافت کارآمد و قوام‌دار برای محاسبه عددی ضرایب شدت تنش است. انتگرال برهم‌کنش، در واقع نتیجه برهم‌کنش دو حالت بارگذاری مستقل (یک میدان اصلی و یک میدان کمکی) و قابل قبول، برای سازه حاوی ترک است که در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته پدید می‌آید.

در این بخش انتگرال برهم‌کنش برای مواد همسانگرد تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی بیان می‌شود. با کاربرد قضیه دیورژانس و در نظر گرفتن تابع پیوسته  $q$  با مقدار 1 روی مرز داخلی و صفر روی مرز خارجی، انتگرال ناحیه‌ای معادل برای انتگرال  $J$  به‌صورت رابطه (14) بیان می‌شود [28].

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_j dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j})_j q dA \quad (14)$$

که در آن  $A$  ناحیه محصور به منحنی  $\Gamma$  است (شکل 3). برای یک سیستم خطی، انتگرال  $J$  برای اعمال هم‌زمان بارگذاری‌های اصلی و کمکی به‌صورت رابطه (15) است [28].

$$J^s = J + J^{aux} + M \quad (15)$$

که در آن  $J$  و  $J^{aux}$  به ترتیب مقدار انتگرال  $J$  برای حالت اصلی و کمکی است و  $M$  انتگرال برهم‌کنش است که به‌صورت رابطه (16) به‌دست می‌آید [28].

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j}) q_j dA + \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1j} - W^{int} \delta_{1j})_j q dA \quad (16)$$

که در آن،  $W^{int}$  تابع چگالی انرژی کرنشی برهم‌کنش است و به‌صورت رابطه (17) تعریف می‌شود [28].

$$W^{int} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \epsilon_{ik}^{aux} + \sigma_{ik}^{aux} \epsilon^m) \quad (17)$$

رابطه (17) شامل دو عبارت جداگانه است. با اعمال مشتق در رابطه دوم و با توجه به رابطه تعادل ( $\sigma_{ij,j} = 0$ ) و رابطه سازگاری میدان‌های اصلی و

و در حل عددی ضریب پخش رطوبت تابعی از دما در نظر گرفته شده است. در نمودارها زمان مطابق رابطه (32) بی بعد شده است.

$$t^* = \frac{\Omega t}{b^2} \quad (32)$$

### 6- حل تحلیلی در باریکه حاوی ترک عمود بر لبه

در این بخش، ضریب شدت تنش برای ترکی عمود بر لبه یک باریکه با روش تحلیلی تابع وزنی به دست می آید. بدین جهت ابتدا میدان های دما، رطوبت و تنش در باریکه بدون ترک به دست می آید. سپس ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی به دست می آید.

#### 1-6 توزیع دما و رطوبت در باریکه بدون ترک

یک صفحه همسانگرد با عرض محدود و به اندازه کافی بلند مانند "شکل 2"، با فرض عدم وجود ترک و شرایط تنش صفحه ای تحت بار گرمایی/رطوبتی در نظر گرفته می شود. دستگاه معادلات حاکم دما و رطوبت برای باریکه با فرض خصوصیات مستقل از دما به صورت زیر است.

$$D \frac{\partial C(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} (C(x, t) - \lambda_1 T(x, t)) = 0 \quad (33-الف)$$

$$\Omega \frac{\partial T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} (T(x, t) - \lambda_2 C(x, t)) = 0 \quad (33-ب)$$

دستگاه معادلات (33) با استفاده از تغییر متغیر زیر به شکل رابطه بی بعد (35) خواهد بود.

$$T^*(x, t) = \frac{T(x, t) - T_i}{T_i - T_f} \quad (34-الف)$$

$$C^*(x, t) = \frac{C(x, t) - C_i}{\lambda_1 (T_i - T_f)} \quad (34-ب)$$

که در آن  $T^*(x, t)$  و  $C^*(x, t)$  دما و رطوبت بی بعد است.

$$D \frac{\partial C^*(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} (C^*(x, t) - T^*(x, t)) \quad (35-الف)$$

$$\Omega \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} (T^*(x, t) - \lambda_1 \lambda_2 C^*(x, t)) \quad (35-ب)$$

در روابط فوق،  $T_i$  و  $C_i$  به ترتیب دما و رطوبت مرجع و  $T_f$  دما در لبه سمت چپ است. شرایط مرزی و اولیه حاکم بر مسئله به شکل رابطه (36) تعریف می شود.

$$T^*(0, t) = -1 \quad T^*(b, t) = 0 \quad (36-الف)$$

$$C^*(b, t) = 0 \quad C^*(0, t) = 0 \quad (36-ب)$$

$$T^*(x, t) = 0 \quad C^*(x, t) = 0 \quad (36-ج)$$

دستگاه معادلات کوپل (35) را می توان به صورت دو معادله مستقل برحسب یک ترکیب خطی از  $DC^*$  و  $\Omega T^*$  به صورت  $s_1 \Omega T^* + DC^*$  بیان کرد. مقدار  $s_1$  در ادامه به دست خواهد آمد. برای این منظور، معادله بی بعد دوم در  $s_1$  ضرب شده و با معادله اول به صورت رابطه (37) جمع می شوند.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (s_1 \Omega T^*(x, t) + DC^*(x, t)) = \frac{\partial}{\partial t} [(1 - s_1) T^*(x, t) + (1 - s_1 \lambda_1 \lambda_2) C^*(x, t)] \quad (37)$$

در این معادله برای به دست آوردن یک معادله با طبیعت پخش ساده برحسب  $s_1 \Omega T^* + DC^*$  می بایست رابطه (38) برقرار باشد.

$$\frac{s_1 - 1}{\Omega s_1} = \frac{1 - s_1 \lambda_1 \lambda_2}{D} = d_1^2 \quad (38)$$

در این صورت، معادله (37) به شکل رابطه (39) بیان می شود.

$$\frac{\partial^2 F_1(x, t)}{\partial x^2} = d_1^2 \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial t} \quad (39)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial (\Delta C)} = -\gamma_i \sigma_i^{aux} \quad (25)$$

با جایگذاری دو رابطه به دست آمده در رابطه (18) فرم نهایی انتگرال برهم کنش برای بارگذاری گرمایی-رطوبتی به صورت رابطه (26) به دست می آید.

$$M = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{ij}) q_{,j} dA + \int_A \left( (\zeta_i \sigma_i^{aux}) + \frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_1} \right) q dA + \int_A \left( (\gamma_i \sigma_i^{aux}) + \frac{\partial (\Delta C)}{\partial x_1} \right) q dA \quad (26)$$

رابطه بین انتگرال برهم کنش و ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  در مواد همسانگرد به صورت زیر است [29].

$$M = \frac{2}{\bar{E}} (K_I K_{II}^{aux} + K_{II}^{aux} K_{II}) \quad (27-الف)$$

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad \text{کرنش صفحه ای} \quad (27-ب)$$

$$\bar{E} = E \quad \text{تنش صفحه ای} \quad (27-ج)$$

با انتخاب مناسب میدان های کمکی (مود I و مود II) ضرایب شدت تنش  $K_I$  و  $K_{II}$  از رابطه (28) به دست می آیند. همچنین میدان های جابه جایی کمکی برای ماده همسانگرد به صورت روابط (29) و (30) تعریف می شوند [26].

$$(K_I^{aux} = 1, K_{II}^{aux} = 0) \longrightarrow K_I = \frac{\bar{E}}{2} M^{(1)} \quad (28-الف)$$

$$(K_I^{aux} = 0, K_{II}^{aux} = 1) \longrightarrow K_{II} = \frac{\bar{E}}{2} M^{(2)} \quad (28-ب)$$

$$u(x, y) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (29)$$

$$v(x, y) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (30)$$

که در این روابط  $K_I$  و  $K_{II}$  مقدار ضریب شدت تنش و مقدار  $\mu$  و  $\kappa$  طبق رابطه (31) تعریف می شوند.

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (31-الف)$$

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad \text{تنش صفحه ای} \quad (31-ب)$$

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{کرنش صفحه ای} \quad (31-ج)$$

### 5- توصیف مسئله

به عنوان مسئله موردی، صفحه ای مستطیلی شامل یک ترک لبه ای مطالعه می شود. (مطابق شکل 2). برای حل عددی صفحه ای با طول  $h = 4$  و عرض  $b = 1$  واحد و برای حل تحلیلی صفحه به صورت یک باریکه با عرض  $b = 1$  و طول به اندازه کافی بلند (بی نهایت) فرض می شود. ابتدا صفحه در دمای یکنواخت  $T_i$  و غلظت رطوبت یکنواخت  $C_i$  قرار دارد. بارگذاری گرمایی به صورت کاهش ناگهانی دمای لبه شامل ترک صفحه (سمت چپ) از دمای اولیه تا  $T_f$  در نظر گرفته می شود. در حالی که، دما در لبه دیگر (سمت راست) در مقدار اولیه ثابت نگه داشته می شود. رطوبت در لبه های چپ و راست نیز در مقدار اولیه نگه داشته می شود. تمامی لبه های دیگر عایق گرمایی و رطوبتی در نظر گرفته می شود. در حل تحلیلی خصوصیات ماده مستقل از دما

6-2- محاسبه تنش

با توجه به این که صفحه به قدر کافی بلند، شرایط تنش صفحه‌ای و عدم وجود بارگذاری مکانیکی در نظر گرفته شده است.

$$\sigma_{xx}(x, t) = 0 \quad (50-الف)$$

$$\sigma_{zz}(x, t) = 0 \quad (50-ب)$$

$$\sigma_{ij}(x, t) = 0, \quad i \neq j \quad (i, j = x, y) \quad (50-ج)$$

با جایگزینی مقادیر فوق در معادله سازگاری:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (51)$$

با حل این معادله، کرنش به صورت رابطه (52) به دست می‌آید.

$$\varepsilon_{yy}(x, t) = A(t)x + B(t) \quad (52)$$

با به کار بردن قانون هوک، تنش به شکل رابطه (53) به دست آمده است.

$$\sigma_{yy}(x, t) = E[A(t)x + B(t) - \alpha \Delta T(x, t) - \beta \Delta C(x, t)] \quad (53)$$

که در آن، با توجه به این که جسم تحت بارگذاری مکانیکی قرار ندارد؛ ضرایب  $A(t)$  و  $B(t)$  از تعادل نیرو و گشتاور به صورت رابطه (54) به دست می‌آید.

$$\int_0^b \sigma_{yy}(x, t) dx = 0 \quad (54-الف)$$

$$\int_0^b \sigma_{yy}(x, t) x dx = 0 \quad (54-ب)$$

در نتیجه،

$$A(t) = \frac{-6}{b^2} (T_0 - T_f) \left\{ \alpha \int_0^b T^*(x, t) dx + \lambda_1 \beta \int_0^b C^*(x, t) dx + \frac{2}{b} \left[ \alpha \int_0^b T^*(x, t) x dx + \lambda_1 \beta \int_0^b C^*(x, t) x dx \right] \right\}$$

$$B(t) = \frac{(T_0 - T_f)}{b^2} \left\{ \alpha \int_0^b T^*(x, t) x dx + \lambda_1 \beta \int_0^b C^*(x, t) x dx \right\} - \frac{b}{3} A(t) \quad (55)$$

6-3- محاسبه ضریب شدت تنش

روش تابع وزنی یک ابزار مؤثر برای تعیین ضریب شدت تنش با توجه به توزیع تنش در جسم بدون ترک است. اگر تابع وزنی برای یک جسم دارای ترک معلوم باشد، با انتگرال گیری از حاصل ضرب تابع وزنی و توزیع تنش در جسم بدون ترک روی سطح ترک می‌توان ضریب شدت تنش را به دست آورد. ضریب شدت تنش برای صفحه‌ای حاوی ترک عمود لبه‌ای مطابق "شکل 2"، با استفاده از تابع وزنی توسط انتگرال عددی رابطه (56) قابل بیان است [30].

$$K_I = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left(1 - \frac{a}{b}\right)^{-\frac{3}{2}} \int_0^a -\frac{\sigma_{yy}(x, t) F(x, a)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (56)$$

تابع وزنی  $F(x, a)$  در پیوست آورده شده است.

7- نتایج عددی

7-1- باریکه دارای ترک لبه‌ای عمود تحت شوک گرمایی

با حل رابطه (38)، متغیر  $s_1$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$s_1 = \frac{(\Delta - D) \pm \sqrt{(\Delta - D)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 \Delta D}}{2\lambda_1 \lambda_2 \Delta} \quad (40)$$

شرایط اولیه و مرزی معادله (39) با توجه به شرایط مرزی و اولیه اصلی مسئله به شکل رابطه (41) است

$$F_1(0, t) = -\Delta s_1 \quad (41-الف)$$

$$F_1(b, t) = 0 \quad (41-ب)$$

$$F_1(x, 0) = 0 \quad (41-ج)$$

به طور مشابه، معادله دوم بی بعد در  $-s_2$  ضرب شده و با معادله اول به صورت رابطه (42)، جمع می‌شود.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (-s_2 \Delta T^*(x, t) + DC^*(x, t)) = \frac{\partial}{\partial t} [(1 + s_2) T^*(x, t) + (1 + s_2 \lambda_1 \lambda_2) C^*(x, t)] \quad (42)$$

در این معادله، برای به دست آوردن یک معادله پخش ساده بر حسب  $-s_2 \Delta T^*(x, t) + DC^*(x, t)$  می‌بایست رابطه (43) برقرار باشد.

$$\frac{s_2 + 1}{\Delta s_2} = \frac{1 + s_2 \lambda_1 \lambda_2}{D} = d_2^2 \quad (43)$$

در این صورت معادله (42) به شکل رابطه (44) بیان می‌شود.

$$\frac{\partial^2 F_2(x, t)}{\partial x^2} = d_2^2 \frac{\partial F_2(x, t)}{\partial t} \quad (44)$$

با حل رابطه (43)، متغیر  $s_2$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$s_2 = \frac{(D - \Delta) \pm \sqrt{(\Delta - D)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 \Delta D}}{2\lambda_1 \lambda_2 \Delta} \quad (45)$$

شرایط اولیه و مرزی معادله (44) با استفاده از شرایط مرزی و اولیه اصلی مسئله به صورت رابطه (46) به دست می‌آید.

$$F_2(0, t) = \Delta s_2 \quad (46-الف)$$

$$F_2(b, t) = 0 \quad (46-ب)$$

$$F_2(x, 0) = 0 \quad (46-ج)$$

اکنون دستگاه معادلات کوپل (33) به صورت دستگاه معادلات غیر کوپل حاصل از معادلات (39) و (44) بیان شده است. با حل این دستگاه با روش جداسازی متغیرها، با توجه به شرایط اولیه و مرزی هر کدام، مقدار  $F_1(x, t)$  و  $F_2(x, t)$  مطابق با رابطه (47) خواهد بود.

$$F_1(x, t) = \frac{\Delta s_1}{b} x - \Delta s_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Delta s_1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{b d_1}\right)^2 t} \quad (47-الف)$$

$$F_2(x, t) = -\frac{\Delta s_2}{b} x + \Delta s_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\Delta s_2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{b d_2}\right)^2 t} \quad (47-ب)$$

با معلوم بودن توابع  $F_1(x, t)$  و  $F_2(x, t)$  می‌توان مقدار دما و رطوبت بی بعد را با حل دستگاه زیر به دست آورد.

$$\begin{cases} F_1(x, t) = s_1 \Delta T^*(x, t) + DC^*(x, t) \\ F_2(x, t) = -s_2 \Delta T^*(x, t) + DC^*(x, t) \end{cases} \quad (48)$$

فرم نهایی میدان‌های دما و رطوبت به فرم رابطه (49)، حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} T^*(x, t) = \frac{F_1(x, t) - F_2(x, t)}{\Delta(s_1 + s_2)} \\ C^*(x, t) = \frac{s_2 F_1(x, t) + s_1 F_2(x, t)}{D(s_1 + s_2)} \end{cases} \quad (49)$$

بدون وجود رطوبت تفاوت دارد.

روند افزایشی ضریب شدت تنش برای ترک  $a/b = 0.2$  تا زمان

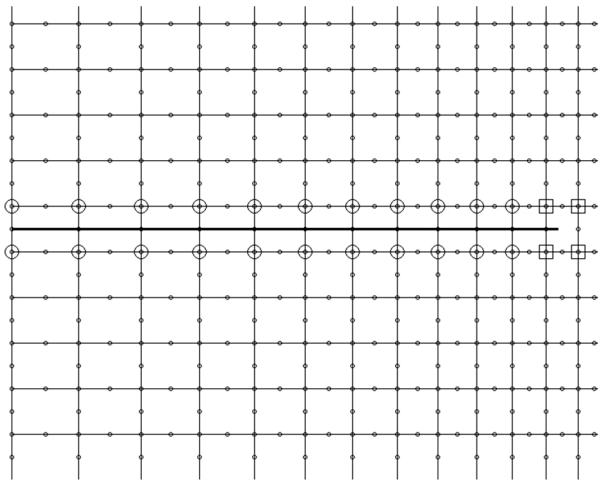


Fig. 4 Eight-node network elements with edge crack and enriched nodes  
شکل 4 شبکه المانی هشت گره‌ای به همراه ترک لبه‌ای و گره‌های غنی شده

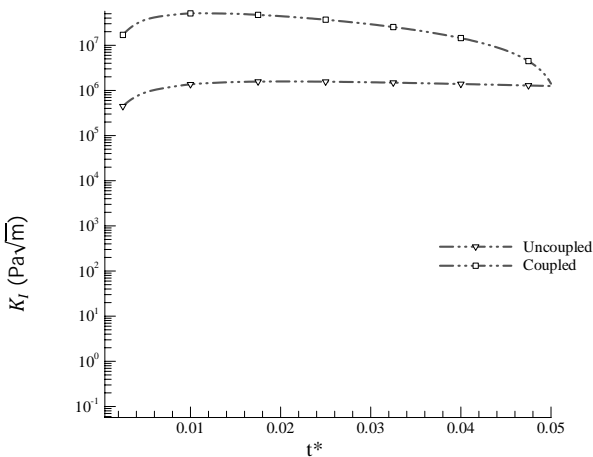


Fig. 5 Coupled and uncoupled maximum SIF in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading

شکل 5 نمودار ضریب شدت تنش بیشینه  $K_I$  کوپل و غیرکوپل برحسب زمان در یک صفحه همسانگرد

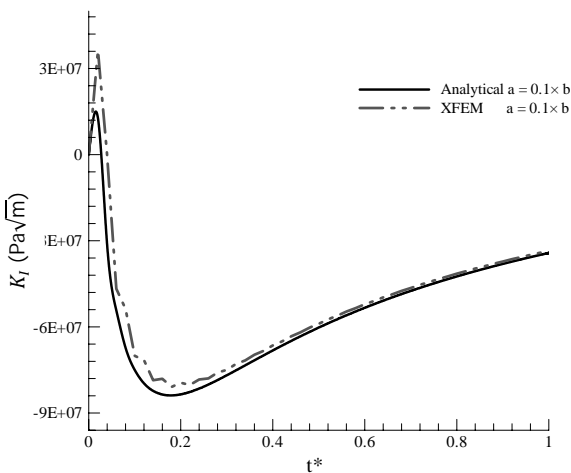


Fig. 6 time variation of SIF for a crack with length of  $0.1 \times b$   
شکل 6 نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  برحسب زمان برای طول ترک  $0.1 \times b$

برای صفحه‌های شامل یک ترک لبه‌ای عمودی، خصوصیات زیر مطابق مرجع [31] در نظر گرفته شده است:

$$k = 7.78 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{hr} \quad D = 7.78 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{hr} \quad \nu = 0.3$$

$$\alpha = 31.3 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}^\circ\text{C} \quad \beta = 2.68 \times 10^{-3} \text{ cm/cm} \% \text{H}_2\text{O}$$

$$\lambda_2 = 0.5 \text{ cm}^3/\text{g}^\circ\text{C}, \quad E = 64.3 \text{ GPa}, \quad \lambda_1 = 0.5 \text{ g/cm}^3^\circ\text{C}$$

برای صفحه، شبکه المانی  $60 \times 240$  شامل المان‌های هشت‌گره‌ای ریز

شونده، مطابق با "شکل 4"، در نظر گرفته شده است. استفاده از المان‌های با مرتبه بالا باعث کاهش خطای مطلق در محاسبه ضرایب شدت تنش می‌شود. در نظر گرفتن شبکه المانی ریز شونده به سمت نوک ترک نیز کاهش درجات آزادی مدل گسسته را در پی دارد.

در ابتدا اثر در نظر گرفتن رطوبت در معادلات حاکم بر ضریب شدت تنش مود I بررسی شده است. مقدار ضریب شدت تنش برای حالت کوپل میدان‌های دما و رطوبت با حالت غیرکوپل مقایسه شده است. با توجه به این‌که شرایط مرزی به صورت تغییر دمای لبه شامل ترک صفحه در نظر گرفته شده است؛ در حالت غیرکوپل میدان رطوبت تغییر نمی‌کند و بر میدان تنش و ضریب شدت تنش اثری ندارد. در "شکل 5" تغییرات ضریب شدت تنش برای بازه کوتاهی از زمان نشان داده شده است که ضریب شدت تنش بیشینه در این بازه اتفاق می‌افتد. مطابق شکل، ضریب شدت تنش بیشینه در حالت کوپل و غیرکوپل به ترتیب برابر  $42$  و  $1.67$  ( $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ) است که اهمیت در نظر گرفتن رطوبت در مدل مسئله را نشان می‌دهد. مقدار تحلیلی ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی نیز محاسبه شده است. تغییرات زمانی ضریب شدت تنش برای طول ترک‌های  $a/b = 0.1$  آمده و با نتایج روش تحلیلی در "شکل‌های 6، 7 و 8" مقایسه شده است. هر سه نمودار، با اعمال شوک گرمایی ضریب شدت تنش تا یک مقدار بیشینه سریعاً افزایش می‌یابد و سپس با سرعت کمتری به صفر و مقادیر منفی می‌رسد که ترک بسته می‌شود.

برای تحلیل دقیق‌تر تغییرات ضریب شدت تنش، میدان‌های دما و رطوبت بی‌بعد و همچنین تنش، در زمان‌های  $t^* = 0.02$  و  $t^* = 0.26$  برای طول ترک  $a/b = 0.2$ ، که ماکزیمم و مینیمم ضریب شدت تنش در آن رخ می‌دهد به ترتیب در "شکل‌های 9، 10 و 11" رسم شده است. نمودارها با در نظر گرفتن  $\Delta t = 0.02$  رسم شده است. درصد خطای نسبی حل عددی برای ترک  $a/b = 0.2$ ، 2.6% برای قسمت مینیمم نمودار و 4.7% برای قسمت ماکزیمم نمودار و همچنین برای ترک  $a = 0.3 \times b$ ، 3.16% برای قسمت مینیمم نمودار و 8% برای قسمت ماکزیمم نمودار محاسبه شده است. با توجه به کاهش خطای بیشینه ضریب شدت تنش برای طول ترک  $a/b = 0.2$  با گام زمانی 0.001 به کمتر از 1% (در شکل 5 آمده است)، به نظر می‌رسد یکی از عوامل خطا در نمودارهای ضریب شدت تنش مقدار گام زمانی برای حل معادلات کوپل دما و رطوبت باشد. در لحظات اولیه بارگذاری، گرادیان دما باعث ایجاد گرادیان میدان رطوبت با همان سرعت می‌شود. درحالی‌که، سرعت تغییر میدان رطوبت پس از رسیدن میدان دما به حالت پایا کاهش می‌یابد. میدان‌های گذرای دما و رطوبت باعث افزایش ضریب شدت تنش بخصوص در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی می‌شوند. این اثر در توزیع تنش صفحه در "شکل 11" دیده می‌شود. البته در ابتدا تنش در ناحیه باریکی نزدیک لبه شامل ترک فشاری است که با گذشت زمان این ناحیه عریض‌تر می‌شود. این تغییرات باعث کاهش ضریب شدت تنش برای ترک‌های کوتاه می‌شود که با رفتار ترک‌ها تحت شوک گرمایی

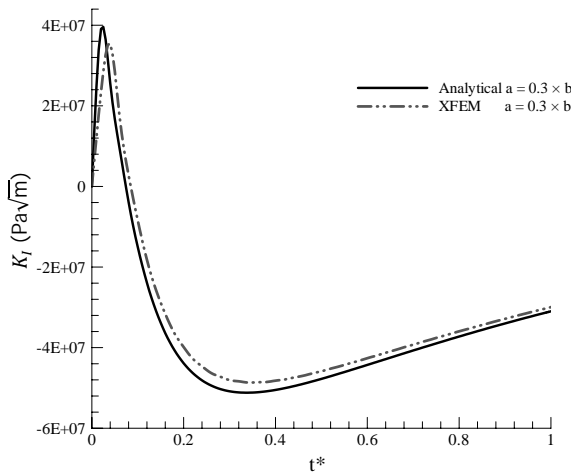


Fig. 8 time variation of SIF for a crack with length of  $0.3 \times b$   
شکل 8 نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب زمان برای طول ترک  $0.3 \times b$

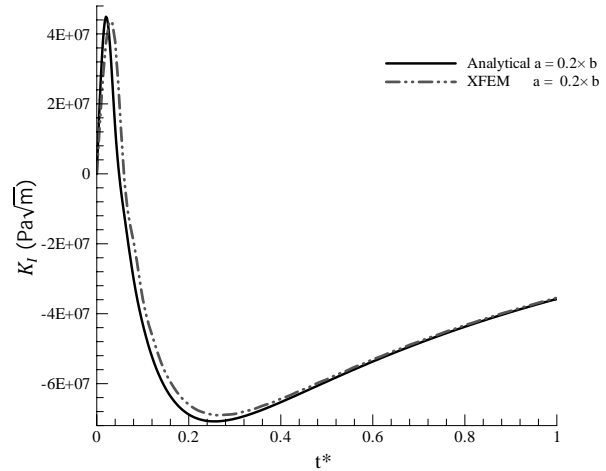


Fig. 7 time variation of SIF for a crack with length of  $0.2 \times b$   
شکل 7 نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  بر حسب زمان برای طول ترک  $0.2 \times b$

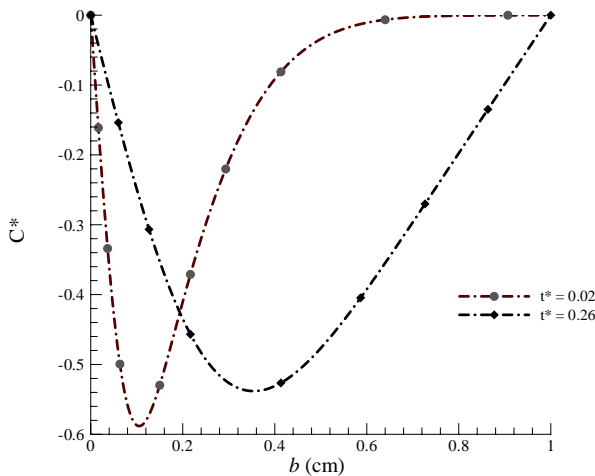


Fig. 9 Dimensionless moisture in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading

شکل 9 نمودار رطوبت بی بعد در عرض یک صفحه همسانگرد و تغییر دما در لبه

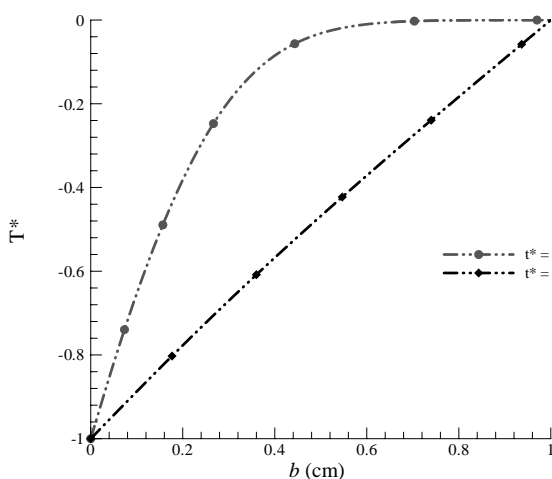


Fig. 10 Dimensionless temperature in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading

شکل 10 نمودار دمای بی بعد در عرض یک صفحه همسانگرد و تغییر دما در لبه

همچنین، به منظور مشخص شدن میزان حساسیت جوابها به تعداد المانها، ضریب شدت تنش ترک با  $a/b = 0.2$  برای شبکه بندی  $60 \times 240$

$t^* = 0.02$  ادامه دارد. سپس تا زمان  $t^* = 0.26$  روند کاهشی پیدا خواهد کرد. پس از این زمان دما تغییری نداشته و به حالت پایا رسیده است. با این حال، انتشار رطوبت در ماده همچنان تا رسیدن به تعادل رطوبتی مطابق با "شکل 9"، ادامه خواهد داشت. با توجه به نمودار دمای بی بعد، با شروع تغییر دما در لبه سمت چپ سایر نقاط جسم کاهش دما را تجربه کرده و برای هر نقطه در صفحه  $\partial T^*/\partial t < 0$  خواهد بود. تا لحظه  $t^* = 0.26$ ، که دما به حالت پایدار رسیده است این نرخ منفی تغییرات دما با توجه با رابطه (3-الف)، معادل وجود یک چاه رطوبتی در معادله توزیع رطوبت خواهد بود. برای زمانهای پس از  $t^* = 0.26$  دما به حالت پایا رسیده است و  $\partial T^*/\partial t = 0$  خواهد بود. بنابراین، چاه رطوبتی ناشی از نرخ تغییر دما از معادله توزیع رطوبت حذف خواهد شد. این امر باعث تغییر توزیع رطوبت به شکل غیرکوپیل شده و رطوبت به آرامی و با توجه به توزیع جدید آن به سمت حالت پایا میل خواهد کرد. اثر این تغییر به شکل نزول آرام ضریب شدت تنش به سمت صفر تا زمان تعادل رطوبتی بروز می کند. از آنجایی که این زمان با توجه به رابطه (56)، طولانی و توزیع دما مدت ها قبل به حالت پایدار رسیده است؛ توزیع رطوبت تنها عامل مؤثر بر ضریب شدت تنش خواهد بود. علاوه بر این، به خاطر کوپیل بودن متقابل رطوبت و دما اثر نرخ توزیع رطوبت بر روی دما نیز قابل بیان خواهد بود. برخلاف دما که نرخ تغییر آن همواره منفی است، نرخ تغییر رطوبت برای زمانهای قبل از  $t^* = 0.02$  منفی ( $\partial C^*/\partial t < 0$ )، و برای زمانهای بعد از آن مثبت است ( $\partial C^*/\partial t > 0$ ).

نرخ منفی رطوبت متقابلاً نقش چاه گرمایی برای توزیع دما را خواهد داشت. وجود چاه گرمایی باعث افزایش ضریب شدت تنش در قسمتی که این ضریب مثبت است، می شود. در بازه زمانی که  $\partial T^*/\partial t > 0$  است، رطوبت نقش چشمه گرمایی را در معادله توزیع دما، با توجه به رابطه (3-ب)، ایفا خواهد کرد. وجود چشمه گرمایی در معادله توزیع دما باعث می شود دما دیرتر از حالت غیرکوپیل - با توجه با رابطه (56) - به حالت پایا برسد. تغییر شدید ضریب شدت تنش با توجه به تفاوت زیاد کرنش های رطوبتی در قیاس با کرنش های گرمایی قابل بیان است. در بازه ای که گرما نقش چاه رطوبتی دارد، مقدار  $\Delta C^*$  زیاد است و با توجه به اختلاف زیاد کرنش های یاد شده - طبق رابطه (8) - و تأثیر این پارامترها بر انتگرال برهمکنش - طبق رابطه (26) - کاهش ضریب شدت تنش و نقش کنترل کننده رطوبت قابل توجیه است.



شبکه المانی  $60 \times 240$  شامل المان‌های هشت گره‌ای ریز شونده (مطابق با شکل 14)، در نظر گرفته شده است. در این حالت مقدار ضریب شدت تنش برای طول ترک  $a = 0.2 \times b$  و  $45$  و  $60$  درجه در "شکل 15"، رسم شده است. همچنین مقدار ضریب شدت تنش مود دوم، برای زوایای ذکر شده در "شکل 16"، رسم گردیده است.

در این مثال ضریب پخش رطوبتی، تابع دما مطابق با رابطه (4)، در نظر گرفته شده است، این امر باعث افزایش زمان لازم برای رسیدن به حالت پایای رطوبتی و صفر شدن ضریب شدت تنش می‌شود، چرا که با توجه به رابطه (4) در هر گام زمانی دما نسبت به حالت مرجع کاهش یافته و به دنبال آن ضریب پخش رطوبتی نیز کاهش می‌یابد، (نمایش چگونگی این کاهش در "شکل 17"، آورده شده است)، بنابراین زمان بیشتری طول می‌کشد که رطوبت به حالت پایا برسد. در این حالت، طول دوره زمانی که در آن نرخ تغییر رطوبت نقش چشمه گرمایی را ایفا می‌کند افزایش یافته و با توجه به مطالب قبلی این امر باعث افزایش ضریب شدت تنش می‌گردد. با توجه به "شکل 15"، مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه ترک مقدار بیشینه ضریب شدت تنش و همچنین زمان وقوع آن کاهش یافته است. شار گرمایی و رطوبتی که در غیاب ترک به صورت افقی حرکت می‌کند؛ با بیشتر شدن زاویه تمایل ترک، دارای مولفه کوچکتری در راستای ترک است که کاهش ضریب

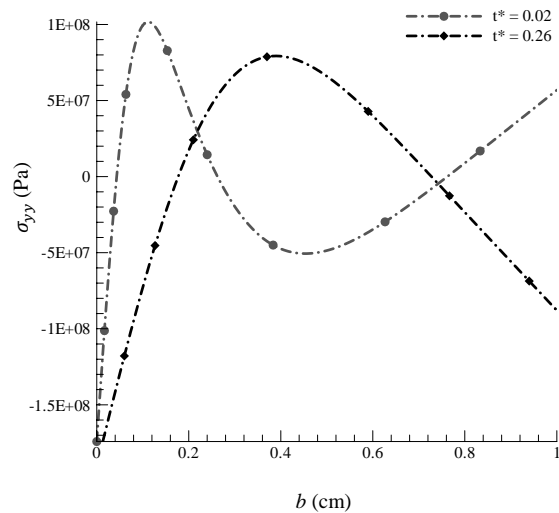


Fig. 11 Stress in an isotropic plate with an edge crack under hydrothermal loading

شکل 11 نمودار تنش در عرض یک صفحه همسانگرد و تغییر دما در لبه

و  $75 \times 290$  در "شکل 12"، مقایسه شده است. نتایج هر دو شبکه برای طول ترک موردنظر انطباق قابل قبولی با یکدیگر دارند.

### 2-7- ترک لبه‌ای زاویه‌دار برای ماده همسانگرد

صفحه‌ای دوبعدی با که دارای ترک لبه‌ای مایل است (مطابق شکل 13) در نظر گرفته می‌شود. دمای لبه چپ صفحه از مقدار اولیه  $T_i = 21^\circ\text{C}$  تا دمای  $T_f = 0^\circ\text{C}$  سرد می‌شود. دما در لبه سمت راست در مقدار اولیه ثابت نگه‌داشته می‌شود. رطوبت در لبه سمت چپ و سمت راست، در مقدار اولیه  $C_i = 0.1$  ثابت نگه‌داشته می‌شود. لبه‌های دیگر عایق گرمایی-رطوبتی در نظر گرفته شده است. خصوصیات ماده با توجه به مرجع [10]، در نظر گرفته شده است.  $D_0 = 1.53 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{hr}$ ،  $\nu = 0.33$ ،  $E = 64.3 \text{ GPa}$ ،  $E_0 = 1.25 \times 10^4 \text{ cal/gr mol}$ ،  $\alpha = 31.3 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}^\circ\text{C}$ ،  $\lambda_2 = 0.5 \text{ cm}^3 \cdot ^\circ\text{C/g}$ ،  $\beta = 2.68 \times 10^{-3} \text{ cm/cm \%H}_2\text{O}$ ،  $\lambda_1 = 0.5 \text{ g/cm}^3^\circ\text{C}$  بی بعد شده است. در این مثال، زمان مطابق رابطه (32) بی بعد شده است.

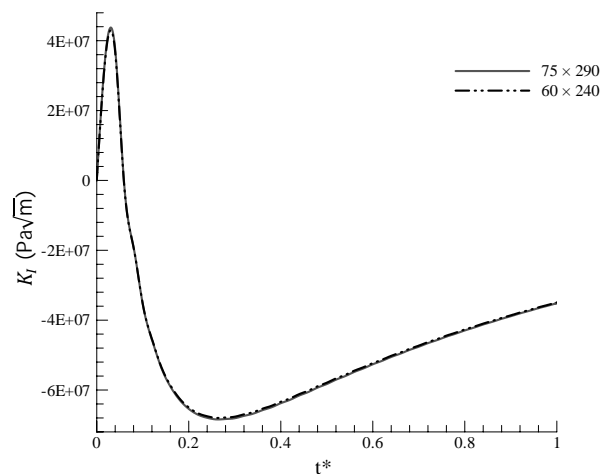


Fig. 12 The first mode SIF for different meshes

شکل 12 نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  برحسب زمان برای شبکه بندی مختلف

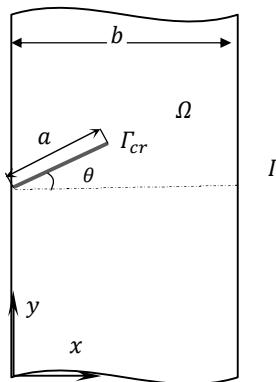


Fig. 13 Long enough substance with internal borders and angled crack under hydrothermal loading

شکل 13 جسم به اندازه کافی بلند، با مرزهای داخلی به همراه ترک زاویه‌دار تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی

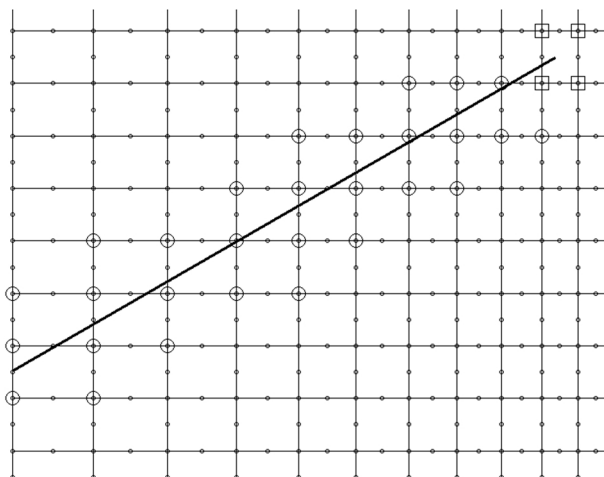


Fig. 14 Eight-node elements with edge crack and enriched nodes

شکل 14 شبکه المانی هشت گره‌ای به همراه ترک لبه‌ای زاویه‌دار و گره‌های غنی شده

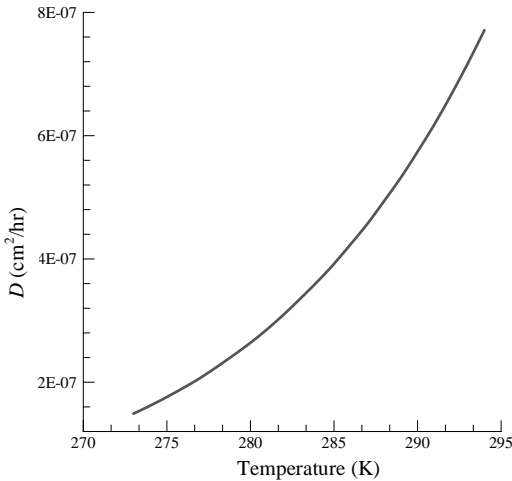


Fig. 17 Moisture diffusion coefficient changes according to temperature

شکل 17 نمودار تغییرات ضریب پخش رطوبت در برابر دما

جدول 2 زمان و مقدار بیشینه ضریب شدت تنش برای زوایای مختلف

Table 2 Time and amount of maximum stress intensity factors for different angles

بیشینه ضریب شدت تنش (Pa√m)	زمان	زاویه ترک
$1.4277 \times 10^8$	0.033	0°
$1.2251 \times 10^8$	0.025	30°
$1.1854 \times 10^8$	0.02	45°
$6.5134 \times 10^7$	0.0181	60°

بصورت همزمان تغییر می کنند و بر میدان تنش اثر می گذارند. البته میدان دما سریع تر از میدان رطوبت به حالت پایا می رسد و اثر آن روی میدان تنش حذف می شود.

- لحاظ شدن میدان رطوبت باعث می شود ضریب شدت تنش از جمله بیشینه آن به طور قابل توجهی بزرگ تر از حالتی باشد که فقط اثر میدان دما در نظر گرفته می شود.

- ضریب شدت تنش مود I برای ترک های بلندتر و با زاویه تمایل بیشتر مقدار کمتری است. همچنین، با افزایش زاویه تمایل ترک، ضریب شدت تنش مود II افزایش پیدا می کند.

### 9- پیوست: تابع وزنی استفاده شده در محاسبه ضریب شدت تنش

$$F(x, a) = f_0 + f_1 \left(\frac{x}{a}\right) + f_2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + f_3 \left(\frac{x}{a}\right)^3$$

$$f_0 = 0.46 + 3.06\tilde{a} + 0.84(1 - \tilde{a})^5 + 0.66\tilde{a}^2(1 - \tilde{a})^2$$

$$f_1 = -3.52\tilde{a}^2$$

$$f_2 = 6.17 - 28.22\tilde{a} + 34.54\tilde{a}^2 - 14.39\tilde{a}^3 - (1 - \tilde{a})^{1.5} - 5.88(1 - \tilde{a})^5 - 2.64\tilde{a}^2(1 - \tilde{a})^2$$

$$f_3 = -6.63 + 25.16\tilde{a} - 31.04\tilde{a}^2 + 14.41\tilde{a}^3 + 2(1 - \tilde{a})^{1.5} + 5.04(1 - \tilde{a})^5 + 1.98\tilde{a}^2(1 - \tilde{a})^2$$

$$\tilde{a} = \frac{a}{b}$$

### 10- مراجع

- [1] A. Szekeres, Cross-coupled heat and moisture transport: part 1—theory, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 35, No. 1, pp. 248–268, 2012.
- [2] A. Szekeres, Analogy between heat and moisture: Thermo-hydro-mechanical tailoring of composites by taking into account the second sound phenomenon, *Computers & Structures*, Vol. 76, No. 1, pp. 145–152, 2000.
- [3] G. C. Sih, M. T. Shih, S. C. Chou, Transient hygrothermal stresses in composites: coupling of moisture and heat with temperature varying

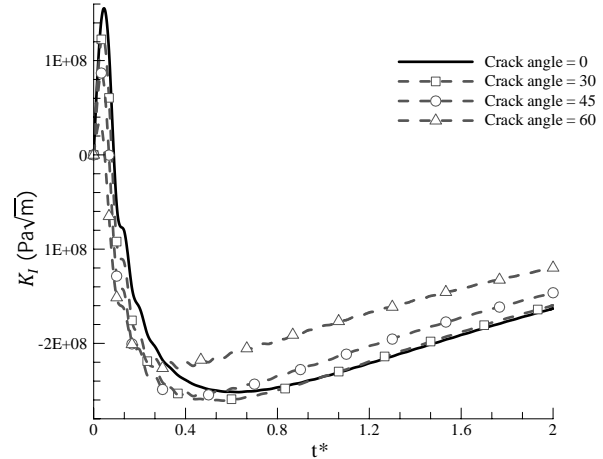


Fig. 15 The first mode SIF, in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading with different crack angles

شکل 15 نمودار ضریب شدت تنش  $K_I$  برحسب زمان در یک صفحه همسانگرد برای زوایای مختلف ترک

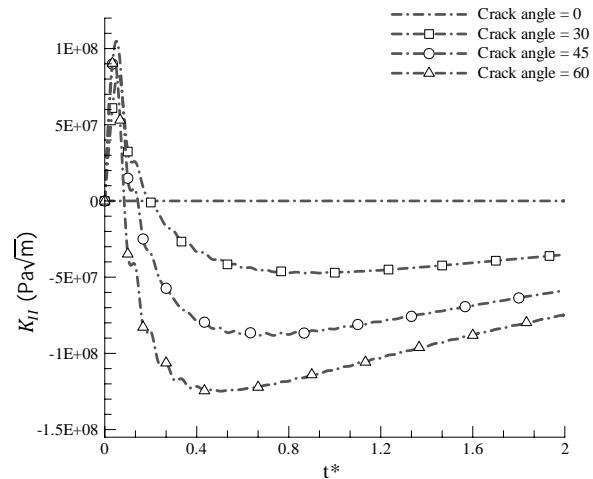


Fig. 16 The second mode SIF, in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading with different crack angles

شکل 16 نمودار ضریب شدت تنش  $K_{II}$  برحسب زمان در یک صفحه همسانگرد برای زوایای مختلف ترک

شدت تنش مود I را در پی دارد. مقادیر بیشینه ضریب شدت تنش مود اول و زمان وقوع آن، برای ترک با زوایای مختلف در جدول 2، نشان داده شده است. همچنین با توجه به "شکل 16"، مقدار ضریب شدت تنش مود دوم، با افزایش زاویه ترک افزایش خواهد یافت.

### 8- نتیجه گیری

در این مقاله، ضرایب شدت تنش در یک صفحه مستطیلی شامل ترک لبه ای تحت بارگذاری گرمایی و رطوبتی با روش المان محدود توسعه یافته محاسبه شده است. در معادلات حاکم، کوپل دوطرفه دما و رطوبت در نظر گرفته شده و انتگرال برهم کنش برای لحاظ کردن اثر رطوبت به همراه دما توسعه داده شده است. از نتایج مقاله می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- به خاطر کوپل دوطرفه میدان های دما و رطوبت، اعمال شرایط مرزی دمایی منجر به گرادیان رطوبت در صفحه می شود. در زمان های اولیه اعمال شوک گرمایی، میدان های دما و رطوبت

- using the meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 82, No. 1, pp. 74–80, 2014.
- [18] S. M. Hosseini, J. Sladek, and V. Sladek, Two Dimensional Analysis of Coupled Non-Fick Diffusion-elastodynamics Problems in Functionally Graded Materials Using Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 268, No. 1, pp. 937–946, 2015.
- [19] S. M. Hosseini, M. H. Ghadiri Rad, Application of meshless local integral equations for two-dimensional transient coupled hygrothermoelasticity analysis: Moisture and thermoelastic wave propagations under shock loading, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 39, No. 1, pp. 1–15, 2016.
- [20] F. Ebrahimi, M. R. Barati, Hygrothermal buckling analysis of magnetically actuated embedded higher order functionally graded nanoscale beams considering the neutral surface position, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 39, No. 10, pp. 1210–1229, 2016.
- [21] C.-Y. Lee and J.-H. Kim, Hygrothermal postbuckling behavior of functionally graded plates, *Composite Structures*, Vol. 95, No. 1, pp. 278–282, 2013.
- [22] A. H. Akbarzadeh, Z. T. Chen, Hygrothermal stresses in one-dimensional functionally graded piezoelectric media in constant magnetic field, *Composite Structures*, Vol. 97, No. 1, pp. 317–331, 2013.
- [23] D. S. Mashat, A. M. Zenkour, Hygrothermal bending analysis of a sector-shaped annular plate with variable radial thickness, *Composite Structures*, Vol. 113, No. 1, pp. 446–458, 2014.
- [24] A. Zenkour, Hygrothermal Analysis of Exponentially Graded Rectangular Plates, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 7, No. 7, pp. 687–700, 2013.
- [25] S. A. Al Khateeb, A. M. Zenkour, A refined four-unknown plate theory for advanced plates resting on elastic foundations in hygrothermal environment, *Composite Structures*, Vol. 111, No. 1, pp. 240–248, 2014.
- [26] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 45, No. 5, pp. 601–620, 1999.
- [27] R. J. Hartranft, G. C. Sih, The influence of the soret and dufour effects on the diffusion of heat and moisture in solids, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 18, No. 12, pp. 1375–1383, Jan. 1980.
- [28] J.-H. Kim, G. H. Paulino, T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 11, pp. 1463–1494, 2003.
- [29] J. F. Yau, S. S. Wang, H. T. Corten, A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, No. 2, pp. 335–341, 1980.
- [30] B. L. Wang, J. E. Li, Thermal shock resistance of solids associated with hyperbolic heat conduction theory, *In Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol. 469, No. 2153, p. 20120754, 2013.
- [31] W.-J. Chang, T.-C. Chen, C.-I. Weng, Transient hygrothermal stresses in an infinitely long annular cylinder: coupling of heat and moisture, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 14, No. 4, pp. 439–454, 1991.
- diffusivity, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 18, No. 1, pp. 19–42, 1980.
- [4] Y. Tambour, On local temperature overshoots due to transport coupling of heat and moisture in composite materials, *Journal of composite materials*, Vol. 18, No. 5, pp. 478–494, 1984.
- [5] B. P. Patel, M. Ganapathi, D. P. Makhecha, Hygrothermal effects on the structural behaviour of thick composite laminates using higher-order theory, *Composite Structures*, Vol. 56, No. 1, pp. 25–34, 2002.
- [6] A. Bahrami, A. Nosier, Interlaminar hygrothermal stresses in laminated plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 25, pp. 8119–8142, 2007.
- [7] A. Benkhedda, A. Tounsi, Effect of temperature and humidity on transient hygrothermal stresses during moisture desorption in laminated composite plates, *Composite Structures*, Vol. 82, No. 4, pp. 629–635, 2008.
- [8] R. J. Hartranft, G. C. Sih, The influence of coupled diffusion of heat and moisture on the state of stress in a plate, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 16, No. 1, pp. 44–56, 1980.
- [9] K. Khalili, M. Heydari, The effect of thickness on the possibility of cracks in the drying process, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 103–116, 2012. (in Persian فارسی)
- [10] G. C. Sih, M. T. Shih, Hygrothermal stress in a plate subjected to antisymmetric time-dependent moisture and temperature boundary conditions, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 3, No. 3, pp. 321–340, 1980.
- [11] S. Topal, S. Dag, Mixed-mode hygrothermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using J-Integral, *proceedings of the twelfth Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, ASME 2014*, Copenhagen, Denmark, 2014.
- [12] S. Dag, E. E. Arman, B. Yildirim, Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using J k-integral, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 25, pp. 3480–3488, 2010.
- [13] S. Dag, B. Yildirim, O. Arslan, E. E. Arman, Hygrothermal fracture analysis of orthotropic materials using J k-Integral, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 35, No. 7, pp. 596–613, 2012.
- [14] M. Beneš, R. Štefan, Hygro-thermo-mechanical analysis of spalling in concrete walls at high temperatures as a moving boundary problem, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 85, No. 1, pp. 110–134, 2015.
- [15] M. Koniorczyk, D. Gawin, B. A. Schrefler, Modeling evolution of frost damage in fully saturated porous materials exposed to variable hygro-thermal conditions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 297, No. 1, pp. 38–61, 2015.
- [16] F. Ahmad, J.-W. Hong, H. S. Choi, M. K. Park, Hygro effects on the low-velocity impact behavior of unidirectional CFRP composite plates for aircraft applications, *Composite Structures*, Vol. 135, No. 1, pp. 276–285, 2016.
- [17] S. M. Hosseini, J. Sladek, V. Sladek, Two dimensional transient analysis of coupled non-Fick diffusion–thermoelasticity based on Green–Naghdi theory