ماهنامه علمى پژوهشى

اطلاعات مقاله مقاله پژوهشی کامل

دريافت: 31 مرداد 1395

پذيرش: 12 أَبِان 1395

كليد واژگان:

محيط همسانگرد ضريب شدت تنش

تنش گرمایی/رطوبتی

ارائه در سایت: 15 دی 1395

روش المان محدود توسعهيافته

روش المان محدود توسعه يافته

 2 محمدىاقر نظرى^{1}، حمىد ر حائى

1 - استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود * شاهرود صندوق پستى 3618785545، mbnazari@shahroodut.ac.ir

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مطالعه یک ترک ایستا در یک محیط گرمایی/رطوبتی همسانگرد تحت شوک گرمایی با

Mohammad Bagher Nazari^{*}, Hamid Rajaei

School of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran * P.O.B. 3618785545, Shahrood, Iran. mbnazri@shahroodut.ac.ir

isotropic media subjected to thermal shock

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper Received 21 August 2016 Accepted 02 November 2016 Available Online 04 January 2017

Keywords: Extended Finite Element Method (XFEM) Isotropic Materials Stress Intensity Factors (SIFs) Hygrothermal Loading

In this paper, the extended Finite Element Method (XFEM) is implemented to compute the Stress Intensity Factors (SIFs) for rectangular media subjected to a hygrothermal loading. In governing hygrothermoelasticity equations, the cross coupling of temperature and moisture fields and temperaturedependent diffusion in some cases are considered. Furthermore, an interaction integral for hygrothermal loading is developed to compute the stress intensity factors. The non uniform mesh of isoparametric eight-nod rectangular element is used in XFEM to decrease the absolute error in SIFs computations. In order to validate numerical results, the SIF of mode I is obtained analytically. The coupled governing equations are firstly decoupled in terms of new variables and then solved by the separation of variable method. According to the results, the moisture concentration gradient has a significant effect on the SIFs so should be considered in the model. Until temperature reaches its steady state, the cross coupling of temperature and moisture synchronizes their time variation which affects on the time variation of SIF. At the beginning of thermal shock, the SIF for shorter cracks is not necessarily less than the longer ones. Also, the mode I SIF for longer and inclined cracks is smaller. On the other hand, considering the moisture concentration as a temperature function increases the time required to reach the moisture steady state.

در حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک، برهم کنش مغناطیسی- مکانیکی در عملگرهای مگنتواستریک و برهمکنش گرما- الکتریکی در یمپهای گرمایی ترموالكتريك از آن جملهاند [1]. نوع ساختار اتمى و تخلخل سبب مى شود

برهمکنش همزمان چند میدان یکی از مسائلی است که در تولید و کاربرد تجهيزات با فن آورىهاى پيشرفته وجود دارد. برهم كنش الكتريكى -مكانيكى

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

1- مقدمه

M. B. Nazari, H. Rajaei, Extended Finite Element analysis of a stationary crack in hygrothermal isotropic media subjected to thermal shock, Modares Mechanical Engineering, Vol. 17, No. 1, pp. 56-66, 2017 (in Persian)

در این مقاله، برای محاسبه ضرایب شدت تنش در محیط همسانگرد مستطیلی که در معرض تنش های گرمایی و رطوبتی قرار دارد از روش المان

محدود توسعهیافته استفاده شده است. در معادلات حاکم هایگروترموالاستیسیته، کوپل دوطرفه میدانهای دما و رطوبت و در یک حالت، ضریب

پخش رطوبتی تابع دما در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش، روش انتگرال برهمکنش برای بارهای

گرمایی /رطوبتی توسعه داده شده است. در روش المان محدود توسعهیافته بهمنظور کاهش خطا، از المان های مستطیلی هشت گرهای ریز شونده،

به سمت نوک ترک، استفاده شده است. برای صحتسنجی نتایج عددی، ضریب شدت تنش برای ترک مود I با روش تابع وزنی نیز بهدست

آمده است. در حل تحلیلی، ابتدا معادلات هایگروترموالاستیسیته حاکم غیرکوپل شدهاند و پس از بیبعد سازی، از روش جداسازی متغیرها برای

حل آنها استفاده شده است. نتایج نشان میدهند گرادیان غلظت رطوبت تاثیر قابل توجهی روی ضریب شدت تنش دارد و باید در مدل مساله

لحاظ شود. قبل از رسیدن میدان دما به حالت پایا، کوپل دوطرفه میدانهای دما و رطوبت باعث همزمانی تغییرات این میدانها میشود و روی تغییر زمانی ضریب شدت تنش اثر میگذارد. بهطوریکه، در ابتدای اعمال شوک گرمایی ضریب شدت تنش برای ترکهای کوتاهتر مشابه بارگذاری گرمایی بزرگتر نیست. همچنین، با افزایش طول ترک و زاویه ترک مقدار ضریب شدت تنش مود I کاهش می بابد. از طرف دیگر، در

ABSTRACT

نظر گرفتن ضریب پخش رطوبتی بهصورت تابعی از دما، زمان لازم برای رسیدن به تعادل رطوبتی را افزایش میدهد.

Extended Finite Element analysis of a stationary crack in hygrothermal

Please cite this article using:

برخی مواد مثل مواد موکبها، فوم، بتن و غیره، دارای خصوصیات ترموسكوپيك- خصوصيات حساس به تغيير دما- و هاگروسكوپيك-خصوصیات حساس به رطوبت- باشند. در نظر گرفتن اثر دما و رطوبت در مدل این مواد، پاسخ ترمومکانیکی دقیقتر آنها را در پی دارد. معادلات حاکم بر میدان های گرما و رطوبت به صورت روابط ساختاری شار گرمایی و غلظت رطوبت و همچنین اثر آنها بر میدان الاستیک- به صورت رابطه ساختاری تنش- در معادلات حاکم ظاهر می شود. علاوهبر این، برهم کنش گرما و رطوبت بهصورت کوپل دوطرفه معادلات حاکم بر آنها نیز میتواند در نظر گرفته شود. این کوپل دوطرفه شامل انتقال گرما، به خاطر وجود گرادیان رطوبت (اثر دوفور) و تغییر غلظت رطوبت به خاطر وجود گرادیان دما (اثر سرت) است. زیکرس با توجه به شباهت مکانیزم انتشار گرما و رطوبت به بررسی شباهت روابط ساختاری گرما و رطوبت و شرایط مرزی آنها پرداخته است [2]. سی و همکاران اثر عبارتهای کوپل گرما و رطوبت بر تنشهای گذرا در یک صفحه مواد موکبی تحت تغییر دمای ناگهانی سطح را بررسی كردند. طبق اين نتايج، عبارتهاى كوپل مىتوانند باعث اختلاف 20 تا 80% تنشها نسبت به حالت غير كويل شوند [3]. تمبور نيز اثر عبارتهاى كويل گرما و رطوبت بر افزایش ناگهانی دما به صورت محلی را مطالعه کرد [4].

گسیختگی سازهها در اثر تنشهای گرمایی-رطوبتی به دو صورت اعوجاج صفحهها در اثر تغییر غلظت رطوبت در راستای ضخامت و ایجاد یا رشد ترک در سازه گزارش شده است. پاتل و همکاران به مطالعه پاسخ استاتیکی و دینامیکی مواد موکب چندلایه در محیط گرمایی-رطوبتی بر مبنای تئوری مراتب بالاتر پرداختهاند [5]. بهرامی و نوزیر تنشهای گرمایی-رطوبتی بین لایهای را بررسی کردند [6]. بنخدا و همکاران یک روش تحلیلی برای محاسبه تنشهای گرمایی-رطوبتی در مواد موکب چندلایه با در نظر گرفتن تغییر خواص مکانیکی با تغییر دما و رطوبت را ارائه کردند [7]. هارترانف و سی مسئله توزیع رطوبت و دما در یک صفحه کامپوزیت ضخیم با فرض کوپل بین دما و رطوبت را حل کردند [8]. خلیلی و حیدری به بررسی تأثیر ضخامت بر امکان وقوع ترک حین خشک شدن پرداختهاند [9]. سی و شی، دما و رطوبت یکبعدی و تنشهای ناشی از آن را در یک صفحه بینهایت که در معرض تغییر ناگهانی دما و رطوبت در سطح قرارگرفته را بهدست آوردند [10]. توپال و دگ برای تحلیل ترک در مواد مرکب هدفمند با فرض بارگذاری گرمایی-رطوبتی پایا پرداختهاند؛ و نتیجه گرفتهاند که اثرات هایگروسکوپیک بر رفتار شکست مهم بوده و باید در آنالیز شکست لحاظ شوند [11]. در این تحقیق، از کوپل میدان های گرما و رطوبت صرفنظر شده است. دگ و همکاران با استفاده از انتگرالهای J_k به محاسبه ضرایب شدت تنش با در نظر گرفتن شرایط پایدار برای رطوبت و گرما و معادلات غیر کوپل در یک محیط مرکب هدفمند ارتوتروپیک پرداختند [13,12]. بنس و استفان [14] دیوارههای بتنی تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی در دمای بالا را بررسی كردهاند. ايشان از روش المان محدود براى حل معادلات كويل حاكم استفاده كردهاند. كنيوچك و همكاران [15] مدلى از بتن بهصورت يك ماده متخلخل اشباع از آب ارائه و اثر شرایط گرمایی و رطوبتی را روی یخزدگی بتن مطالعه کردهاند. احمد و همکارانش [16] اثر رطوبت روی استحکام به ضربه در سرعتهای پایین برای مواد مرکب پلیمری تقویتشده با رشتههای کربنی تکجهته را بهصورت تجربی بررسی کردهاند. حسینی و همکارانش پخش رطوبت با معادلهای غیر از قانون فیک را در یک محیط دوبعدی محدود ترموالاستیک [17] و الاسنودینامیک [18] را بررسی کردهاند. همچنین، حسینی و قدیریراد [19] توزیع رطوبت و تنش را برای یک محیط دوبعدی

محدود با درنظر گرفتن کوپل میدانهای دما، رطوبت و تنش را گزارش کردهاند. ابراهیمی و براتی [20] کمانش یک نانوتیر را تحت میدانهای دما و رطوبت بررسی کردهاند. لی و کیم [21] نیز رفتار پس کمانش صفحات مواد مرکب مدرج تحت تنشهای گرمایی-رطوبتی را منتشر کردهاند. اکبرزاده و چن [22] برای یک استوانه پیزوالکتریک از مواد مرکب مدرج تنشهای گرمایی- رطوبتی شعاعی را گزارش کردهاند. زنکور و همکارانش نیز در مورد خمش صفحات تحت بارگذاری گرمایی- رطوبتی گزارشهایی منتشر کردهاند. حل تحلیلی برای قطاعی از دایره باضخامت متغیر با در نظر گرفتن میدانهای غیر کوپل دما و رطوبت [23]، تحلیل صفحات مستطیلی از مواد مرکب مدرج [24] و توسعه تئوری برای صفحات روی بستر الاستیک در محیط گرمایی-رطوبتی [25] ازجمله این تحقیقات است.

در این مقاله، ضرایب شدت تنش برای یک ترک لبهای در محیط دوبعدی همسانگرد تحت بارگذاری رطوبتی/گرمایی با فرض کوپل دوطرفه میدانهای دما-رطوبت محاسبه شده است. ناحیه حل با استفاده از المانهای هشت گرهای شبکهبندی شده است. مدل ترک بهصورت غنیسازی گرههای گوشه المانها با توابع مناسب در تابع تقریب میدان جابجایی، دما و غلظت رطوبت لحاظ شده است. انتگرال برهم کنش برای بارگذاری گرمایی- رطوبتی توسعه داده شده و ضرایب شدت تنش با استفاده از آن استخراج شدهاند. تمامی مراحل حل مسئله شامل المانبندی و حل معادلات مربوطه و

2- مدلسازی ترک با روش المان محدود توسعه یافته

امروزه کاربرد روش المان محدود در حل عددی معادلات دیفرانسیل پارهای کاربرد گستردهای دارد؛ اما در تحلیل مسائل مکانیک شکست، لزوم انطباق المانها بر سطوح ترک، دشواری توصیف گرادیان شدید تنش در حوزه نوک ترک و انجام شبکهبندی مجدد در صورت رشد ترک از مشکلات استفاده از روش المان محدود کلاسیک است. در روش المان محدود توسعهیافته، ترک از هندسه مسئله حذف و ناحیه حل مستقل از ترک شبکهبندی میشود. بهطوری که ناپیوستگی میدان جابجایی در سطح ترک و گرادیان میدان اضافه میشود (مثل رابطه 1). در رابطه (1)، عبارت اول مربوط به تقریب روش المان محدود استاندارد است. عبارت دوم برای غنیسازی المانهایی که روش المان محدود استاندارد است. عبارت دوم برای غنیسازی المانهای که مویساید است. عبارت سوم جهت غنیسازی المان حوی ترک به کار هویساید است. عبارت سوم جهت غنیسازی المان حاک برده میشود.

$$u^{h}(x) = \sum_{n} \phi_{n}(x) u_{n} + \sum_{l} \phi_{l}(x) H(x) b_{l}$$
$$+ \sum_{k \in J} \phi_{k}(x) \left(\sum_{l=1}^{4} C_{k}^{l} F_{l}(x)\right)$$
(1)

در این رابطه I مربوط به گرههای سطح ترک (در شکل I با دایره نشان داده شده است) و J مجموعه گرههای مربوط به نوک ترک (در "شکل I" با مربع نشان داده شده است) میباشد. توابع $F_l(x)$ توابع غنی سازی حوزه نوک ترک است که به منظور رصد مناسب تکینی میدان تنش در این ناحیه اضافه شده اند و برای مکانیک شکست الاستیک خطی، به صورت رابطه (2). تعریف می شوند [26].

57

$$\{F_l(r,\theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos\frac{\theta}{2}, \\ \sqrt{r} \sin\theta \sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin\theta \cos\frac{\theta}{2} \right\}$$
(2)

3- روابط هايگروترموالاستيسيته

معادلات حاکم هایگروترموالاستیسیته، شامل معادله تعادل و معادلات حاکم بر توزیع گرما و رطوبت است. دو معادله آخر با به کار بردن قانون فیک، قانون فوریه، بقای جرم و بقای انرژی بهدست میآید. جزئیات استخراج معادله کوپل حاکم بر توزیع رطوبت و دما بهتفصیل در مرجع [27]، ذکر شده است؛ و در اینجا نتیجه نهایی آن به شکل رابطه (3) بیان میشود.

در رابطه (3)،
$$\nabla^2$$
 عملگر لاپلاسین، T دما و C بیانگر غلظت رطوبت
است. D و Ω به ترتیب ضرایب پخش رطوبت و دما و همچنین، $\lambda_1 \delta_2$
ضرایب کوپلینگ میباشند. وابستگی ضریب نفوذ رطوبت به دما نیز به صورت
رابطه تجربی (4) بیان می شود [3].

$$D = D_0 \exp(-E_0 / RT) \tag{4}$$

که در آن، E_0 انرژی موردنیاز برای نفوذ واحد جرم به نمونه، R ثابت عمومی گازها و T دمای مطلق میباشد. با در نظر گرفتن ضریب نفوذ رطوبت بهصورت رابطه (4)، معادله کوپل حاکم بر رفتار رطوبت و دما به شکل رابطه (5)، نوشته می شود [3].

$$\nabla \cdot (D\nabla C) - \frac{\partial}{\partial t} (C - \lambda_1 T) = \mathbf{0}$$
 (i.e., 5)

$$\mathfrak{D}\nabla^2 T - \frac{\partial}{\partial t} (T - \lambda_2 C) = \mathbf{0}$$
 (-, -5)

با توجه به "شکل 2"، صفحه مستطیلی بهاندازه کافی بلند، بهعنوان ناحیه حل Ω و محصور به منحنی T در نظر گرفته شده است که تحت بارگذاری گرمایی_ رطوبتی قرار دارد. شرایط مرزی و اولیه دما و رطوبت در جدول 1 نشان داده شده است. زیرنویسهای $\mathbf{i} \in f$ به ترتیب بیانگر حالت اولیه و نهایی هستند. معادلات تعادل، شرایط اولیه و مرزی مطابق رابطه (6)

میباشد. در این روابط،
$$n$$
 بردار یکه و رو به خارج روی مرز Γ است.
(6- الف) Ω در $\sigma = \mathbf{0}$ در $\sigma.n = \mathbf{0}$ روی $\sigma.n = \mathbf{0}$ روی Γ_{cr} (-6) $\sigma.n = \mathbf{0}$ روی Γ_{cr}



Fig. 1 Enrichment nodes in XFEM. Square: crack tip enrichment. Circle: Heaviside enrichment.

شکل 1 غنیسازی گرهها درروش المان محدود توسعهیافته، مربع: غنیسازی با توابع نوک ترک. دایره: غنیسازی با تابع پلهای

روابط ساختاری برای توزیع گرما (قانون فوریه)، رطوبت (قانون فیک) و تنش (قانون هوک) به شکل رابطه (7) است.

$$q = -k\nabla T$$
 ص $J = -D_T \nabla C$ (ب-7)

$$\sigma = D: (\varepsilon - \varepsilon^{\text{th}} - \varepsilon^{\text{mo}}) \qquad (\varepsilon - 7)$$

که در آن مقدار
$$\varepsilon^{\text{th}} = \varepsilon^{\text{th}}$$
 با استفاده از رابطه (8) بهدست می اید.
 $\varepsilon^{\text{th}} = \zeta \Delta T$ (4- الف)

$$\varepsilon^{\rm m} = \zeta \Delta T$$

$$\varepsilon^{\rm mo} = \gamma \Delta C \qquad (-8)$$

$$\zeta = \begin{cases} \alpha \\ \alpha \\ \mathbf{0} \end{cases}$$
 (z-8)

$$\gamma = \begin{cases} \beta \\ \beta \\ 0 \end{cases}$$
 (3-8)

$$\gamma = (1 + v) \begin{cases} \beta \\ \beta \\ 0 \end{cases} (v + 1) = \gamma$$

در این روابط، D تانسور مرتبه چهارم الاستیک، k ماتریس هدایت گرمایی، α ضریب انبساط گرمایی و v ضریب پواسون است. متغیرهای میدان، \mathcal{F} تانسور کرنش کل، \mathcal{F}^{th} تانسور کرنش گرمایی، \mathcal{F}^{mo} تانسور کرنش رطوبتی است. تانسور الاستیک (سفتی) در مواد همسانگرد به صورت رابطه (9)، برای حالت تنش صفحهای و رابطه (10)، برای حالت کرنش صفحهای، تعریف می شود.

$$C = \frac{E}{1 - v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - v)}{2} \end{bmatrix}$$
(9)
$$C = \frac{E}{(1 + v)(1 - 2v)} \begin{bmatrix} (1 - v) & v & 0 \\ v & (1 - v) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - 2v)}{2} \end{bmatrix}$$
(10)

که در آن E مدول الاستیک است. با در نظر گرفتن تابع تقریب بهصورت رابطه (1)، فرم گسسته معادلات حاکم بهصورت رابطه (11)، حاصل می شود.

$$Ku = F^{\text{ext}}$$

$$C^{\text{th}_\text{mo}} \left\{ \begin{matrix} \dot{C} \\ \dot{T} \end{matrix} \right\} + K^{\text{th}_\text{mo}} \left\{ \begin{matrix} C \\ T \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} f^{\text{mo}} \\ f^{\text{th}} \end{matrix} \right\}$$

$$(-, -11)$$



Fig. 2 Long enough substance with internal borders and crack under hygrothermal loading

شکل 2 جسم بهاندازه کافی بلند، با مرزهای داخلی به همراه ترک تحت بارگذاری گرمایی_ رطوبتی

مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1396، دورہ 17، شمارہ 1

DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.1.28.8

58

 $C(b,t) = C_i$

در این روابط K ماتریس سفتی کل مدل است، T، u و T بردار مجهولات گرهای است؛ که در آن، مجهولات مربوط به درجات آزادی استاندارد و درجات آزادی مربوط به غنیسازی هر گره (در صورت وجود) بهطور متوالی قرار گرفته است. در رابطه (11- الف)، F^{ext} بردار نیروهای خارجی اعمال شده به گرهها بوده و شامل نیروهای مکانیکی، گرمایی و رطوبتی است. $F^{\text{ext}} = F^{\text{m}} + F^{\text{th}} + F^{\text{mo}}$ (12)

ر اینجا، برای حل گسسته معادلات کوپل توزیع گرما و رطوبت از روش ضمنی کرانک_نیکلسون استفادهشده است. این روش، از لحاظ عددی پایداری نامشروط و حجم محاسبات کمتری نسبت به روشهای چند مرحلهای دارد. علاوهبر این، این روش دارای دقت مرتبه دوم از گام زمانی است. رطوبت و دمای گرهها در هر گام زمانی براساس رطوبت و دمای گرهای در گام زمانی قبلی بهصورت رابطه (13) به دست میآید.

$$2C^{\text{th}_mo} + K^{\text{th}_mo}\Delta t] {C_n \atop T_n}$$

$$= \Delta t \left({f_{n-1}^{\text{tm}} \atop f_{n-1}^{\text{th}}} + {f_n^{\text{mo}} \atop f_n^{\text{th}}} \right)$$

$$+ \left[2C^{\text{th}_mo} - K^{\text{th}_mo}\Delta t \right] {C_{n-1} \atop T_{n-1}}$$
(13)

4- انتگرال برهم کنش

روشهای انرژی مانند انتگرال *I*یک رهیافت کارآمد و قوامدار برای محاسبه عددی ضرایب شدت تنش است. انتگرال برهمکنش، در واقع نتیجه برهمکنش دو حالت بارگذاری مستقل (یک میدان اصلی و یک میدان کمکی) و قابلقبول، برای سازه حاوی ترک است که در انتگرالهای پایستار الاستیسیته پدید میآید.

در این بخش انتگرال برهمکنش برای مواد همسانگرد تحت بارگذاری گرمایی-رطوبتی بیان میشود. با کاربرد قضیه دیورژانس و در نظر گرفتن تابع پیوسته q با مقدار 1 روی مرز داخلی و صفر روی مرز خارجی، انتگرال ناحیهای معادل برای انتگرال J بهصورت رابطه (14) بیان میشود [28].

$$J = \int_{A} (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j}) q_{ij} dA$$

+
$$\int_{A} (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j})_{ij} q dA$$
 (14)

که در آن A ناحیه محصور به منحنی T است (شکل 3). برای یک سیستم خطی، انتگرال J برای اعمال همزمان بارگذاریهای اصلی و کمکی بهصورت رابطه (15) است [28].

$$s = J + J^{aux} + M \tag{15}$$

که در آن J^{aux} و J^{aux} به ترتیب مقدار انتگرال J برای حالت اصلی و کمکی است و M انتگرال برهم کنش است که به صورت رابطه (16) به دست می آید [28].

$$M = \int_{A} (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j}) q_{ij} dA$$
$$+ \int_{A} (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{1j})_{ij} dA$$
(16)

که در ان،۳ⁱⁿ تابع چگالی انرژی کرنشی برهمکنش است و بهصورت رابطه (17) تعریف میشود [28]. 1

$$W^{\text{int}} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{\text{aux}} + \sigma_{ik}^{\text{aux}} \varepsilon^{\text{m}})$$
(17)

رابطه (17) شامل دو عبارت جداگانه است. با اعمال مشتق در رابطه دوم (17) و با توجه به رابطه تعادل ($\sigma_{ij,i} = \mathbf{0}$) و رابطه سازگاری میدانهای اصلی و

جدول 1 شرایط اولیه و مرزی برای دما و رطوبت

 Table 1 Initial and boundary conditions for temperature and humidity

 شرط اوليه
 شرط مرزى

 T(0,t) = T_f $T(x, 0) = T_i$
 $C(0,t) = C_f$ $C(x, 0) = C_i$
 $T(b,t) = T_i$ $C(x, 0) = C_i$

كمكى، انتگرال برهم كنش به صورت رابطه (18) به دست مى آيد [28].

$$M = \int_{A} (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{ij}) q_{,j} dA$$

$$+ \int_{A} (\sigma_{ij} u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1j} - W_{,1}^{int}) q dA \qquad (18)$$

$$am u_{i,1j} - W_{,1}^{int} u_{i,1j} dA$$

$$(18)$$

$$\frac{W^{\text{int}}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} u_{i,j1}^{\text{aux}} + \sigma_{ij}^{\text{aux}} u_{i,j1} + \left(\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial x_1}\right)_{\text{expl}}$$
(19)

$$\left(\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial x_1}\right)_{\text{expl}} = \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial (\Delta T)} \frac{\partial (\Delta T)}{\partial x_1} + \frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial (\Delta C)} \frac{\partial (\Delta C)}{\partial x_1}$$
(20)

چگالی انرژی کرنشی برهمکنش با جایگذاری معادله ساختاری برحسب

$$W^{\text{int}} = \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{\text{aux}} = \sigma_{11} \varepsilon_{11}^{\text{aux}} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^{\text{aux}} + \mathbf{2} \sigma_{12} \varepsilon_{12}^{\text{aux}} = (\mathbf{G}_{11}\varepsilon_{11} + \mathbf{G}_{12}\varepsilon_{22} + \mathbf{2}\mathbf{C}_{13}\varepsilon_{12})\varepsilon_{11}^{\text{aux}} + (\mathbf{C}_{21}\varepsilon_{11} + \mathbf{G}_{22}\varepsilon_{22} + \mathbf{2}\mathbf{C}_{23}\varepsilon_{12})\varepsilon_{22}^{\text{aux}} + \mathbf{2}(\mathbf{G}_{31}\varepsilon_{11} + \mathbf{G}_{32}\varepsilon_{22} + \mathbf{2}\mathbf{C}_{33}\varepsilon_{12})\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - (\mathbf{G}_{11}\zeta_{1} + \mathbf{G}_{22}\zeta_{2} + \mathbf{2}\mathbf{G}_{33}\zeta_{12})\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - (\mathbf{G}_{11}\zeta_{1} + \mathbf{G}_{22}\zeta_{2} + \mathbf{C}_{33}\zeta_{3})\Delta T\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - (\mathbf{G}_{21}\zeta_{1} + \mathbf{G}_{22}\zeta_{2} + \mathbf{C}_{23}\zeta_{3})\Delta T\varepsilon_{22}^{\text{aux}} - \mathbf{2}(\mathbf{G}_{31}\zeta_{1} + \mathbf{G}_{32}\zeta_{2} + \mathbf{G}_{33}\zeta_{3})\Delta T\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - (\mathbf{G}_{11}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{12}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{13}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - (\mathbf{G}_{21}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{22}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{23}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - (\mathbf{G}_{21}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{32}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{33}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{31}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{32}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{33}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{31}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{32}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{33}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{31}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{32}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{33}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{31}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{32}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{33}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{11}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{22}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{33}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{11}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{32}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{33}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{11}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{12}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{13}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{11}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{22}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{33}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{11}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{12}\gamma_{2} + \mathbf{G}_{13}\gamma_{3}\gamma_{3})\Delta C\varepsilon_{12}^{\text{aux}} - \mathbf{G}_{12}(\mathbf{G}_{11}\gamma_{1} + \mathbf{G}_{12}\gamma_{2}\gamma$$

$$\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial (\Delta T)} = -(\mathbf{C}_{11}\zeta_1 + \mathbf{C}_{12}\zeta_2 + \mathbf{C}_{13}\zeta_3)\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - (\mathbf{C}_{21}\zeta_1 + \mathbf{C}_{22}\zeta_2 + \mathbf{C}_{23}\zeta_3)\varepsilon_{22}^{\text{aux}} - 2(\mathbf{C}_{31}\zeta_1 + \mathbf{C}_{32}\zeta_2 + \mathbf{C}_{33}\zeta_3)\varepsilon_{12}^{\text{aux}}$$
(22)

$$\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial (\Delta C)} = -(\mathbf{C}_{11}\gamma_1 + \mathbf{C}_{12}\gamma_2 + \mathbf{C}_{13}\gamma_3)\varepsilon_{11}^{\text{aux}} - (\mathbf{C}_{21}\gamma_1 + \mathbf{C}_{22}\gamma_2 + \mathbf{C}_{23}\gamma_3)\varepsilon_{22}^{\text{aux}} - 2(\mathbf{C}_{31}\gamma_1 + \mathbf{C}_{32}\gamma_2 + \mathbf{C}_{33}\gamma_3)\varepsilon_{12}^{\text{aux}}$$
(23)
(1) (1) (1) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2)

$$\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial (\Delta T)} = -\zeta_i \sigma_i^{\text{aux}} \tag{24}$$



Fig. 3 Conversion of the contour integral into an equivalent domain integral (EDI)

$$\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial (\Delta C)} = -\gamma_i \sigma_i^{\text{aux}}$$
(25)

با جایگذاری دو رابطه بهدستآمده در رابطه (18) فرم نهایی انتگرال برهم کنش برای بارگذاری گرمایی-رطوبتی به صورت رابطه (26) به دست میآید. $M = \int (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{int} \delta_{ij}) q_{,j} dA$

+
$$\int_{A} \left(\left(\zeta_{i} \sigma_{i}^{aux} \right) + \frac{\partial \left(\Delta T \right)}{\partial x_{1}} \right) q dA$$

+ $\int_{A} \left(\left(\gamma_{i} \sigma_{i}^{aux} \right) + \frac{\partial \left(\Delta C \right)}{\partial x_{1}} \right) q dA$ (26)

رابطه بین انتگرال برهمکنش و ضرایب شدت تنش K_I و K_I در مواد همسانگرد بهصورت زیر است [29].

$$E = \frac{1}{1 - v^2}$$

$$\overline{E} = E$$

$$E = E$$

با انتخاب مناسب میدانهای کمکی (مود I و مود II) ضرایب شدت تنش $K_{\rm II}$ و $I_{\rm II}$ از رابطه (28) به دست میآیند. همچنین میدانهای جابهجایی $K_{\rm II}$ و $K_{\rm II}$ از رابطه (28) به میسانگرد به مورت روابط (29) و (30) تعریف می شوند [26].

$$(K_1^{\text{aux}} = \mathbf{1}, K_{\text{II}}^{\text{aux}} = \mathbf{0}) \longrightarrow K_{\text{I}} = \frac{\overline{E}}{\mathbf{2}} M^{(1)}$$

$$(K_1^{\text{aux}} = \mathbf{0}, K_{\text{II}}^{\text{aux}} = \mathbf{1}) \longrightarrow K_{\text{II}} = \frac{L}{2} M^{(2)} \qquad (\because -28)$$

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{2\pi}{2\pi}} \cos(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa - 1 + 2\sin(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} + \frac{K_{\text{II}}}{\frac{2\pi}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 + 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix}$$
(29)
$$v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{K_{\text{I}}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \begin{bmatrix} \kappa + 1 - 2\cos^2(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{\text{II}}}{\frac{r}{2\pi}} \sin(\frac{2\pi}{2}) \end{bmatrix} - \frac{K_{I$$

$$\frac{K_{\rm II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$
(30)
که در این روابط K_{\rm II} و K_{\rm II} مقدار فریب شدت تنش و مقدار μ و K طبق

که در این روابط ۲۸ و ۸_۱۱ مقدار صریب سدت نکش و مقدار µ و ۸۰ رابطه (31) تعریف می شوند.

$$\iota = \frac{E}{2(1+v)} \tag{-31}$$

5- توصيف مسئله

بهعنوان مسئله موردی، صفحهای مستطیلی شامل یک ترک لبهای مطالعه می شود. (مطابق شکل 2). برای حل عددی صفحهای با طول $\mathbf{4} = \mathbf{4}$ و عرض می شود. (مطابق شکل 2). برای حل عددی صفحه یا با طول $\mathbf{4} = \mathbf{4}$ و عرض $\mathbf{5} = \mathbf{4}$ واحد و برای حل تحلیلی صفحه به صورت یک باریکه با عرض theright of the edge of

$$\mathbf{t}^* = \frac{\mathfrak{D}t}{b^2} \tag{32}$$

6- حل تحلیلی در باریکه حاوی ترک عمود بر لبه

در این بخش، ضریب شدت تنش برای ترکی عمود بر لبه یک باریکه با روش تحلیلی تابع وزنی بهدست می آید. بدینجهت ابتدا میدانهای دما، رطوبت و تنش در باریکه بدون ترک بهدست می آید. سپس ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی بهدست می آید.

5-1- توزیع دما و رطوبت در باریکه بدون ترک

یک صفحه همسانگرد با عرض محدود و به اندازه کافی بلند مانند "شکل 2"، با فرض عدم وجود ترک و شرایط تنش صفحهای تحت بار گرمایی/طوبتی در نظر گرفته میشود. دستگاه معادلات حاکم دما و رطوبت برای باریکه با فرض خصوصیات مستقل از دما بهصورت زیر است.

$$\Box \frac{\partial T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} (T(x,t) - \lambda_2 C(x,t)) = \mathbf{0}$$
 (.-33)

دستگاه معادلات (33) با استفاده از تغییر متغیر زیر به شکل رابطه

یی بعد (35) خواهد بود.

$$T^{*}(x,t) = \frac{T(x,t) - T_{i}}{T_{i} - T_{f}}$$
(34)
$$C^{*}(x,t) = \frac{C(x,t) - C_{i}}{\lambda_{1}(T_{i} - T_{f})}$$
(-34)

$$D\frac{\partial \mathbf{C}^*(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{C}^*(x,t) - \mathbf{T}^*(x,t))$$
(i.i.)

$$\mathfrak{O}\frac{\partial \mathbf{I}^{*}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x^{2}} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{T}^{*}(\boldsymbol{x},t) - \lambda_{1}\lambda_{2}\mathbf{C}^{*}(\boldsymbol{x},t)) \qquad (-35)$$

در روابط فوق، T_i و*C*i به ترتیب دما و رطوبت مرجع و T_f دما در لبه سمت چپ است. شرایط مرزی و اولیه حاکم بر مسئله به شکل رابطه (36) تعریف میشود.

 $\mathbf{T}^*(\mathbf{0},t) = -\mathbf{1} \qquad \mathbf{T}^*(b,t) = \mathbf{0} \qquad (14)$

$$C^{*}(b,t) = 0$$
 $C^{*}(0,t) = 0$ (--36)

$$T^{*}(x,t) = 0$$
 $C^{*}(x,t) = 0$ (z - 36)

دستگاه معادلات کوپل (35) را میتوان بهصورت دو معادله مستقل برحسب یک ترکیب خطی از DC و DT = OT بهصورت $s_1 OT + DC$ بیان کرد. مقدار s_1 در ادامه بهدست خواهد آمد. برای این منظور، معادله بی بعد دوم در s_1 ضرب شده و با معادله اول بهصورت رابطه (37)، جمع می شوند.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (s_1 \mathfrak{D} \mathbf{T}^*(x, t) + D \mathfrak{C}^*(x, t)) = \frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{1} - s_1) \mathbf{T}^*(x, t) + (\mathbf{1} - s_1 \lambda_1 \lambda_2) \mathfrak{C}^*(x, t)]$$
(37)
c, list only and the relation of th

در حسب *S₁ D**T*** + D**C** می بایست رابطه (38) برقرار باشد.

$$\frac{s_1 - \mathbf{1}}{\Omega s_1} = \frac{\mathbf{1} - s_1 \lambda_1 \lambda_2}{D} = d_1^2$$
(38)

در این صورت، معادله (37) به شکل رابطه (39) بیان می شود.

$$\frac{\partial^2 F_1(x,t)}{\partial x^2} = d_1^2 \frac{\partial F_1(x,t)}{\partial t}$$
(39)

با حل رابطه (38)، متغير s₁ بهصورت زير بهدست مىآيد.

$$s_1 = \frac{(\mathfrak{D} - D) \pm \sqrt{(\mathfrak{D} - D)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2 \mathfrak{D} D}}{2\lambda_1 \lambda_2 \mathfrak{D}}$$
(40)

شرایط اولیه و مرزی معادله (39) با توجه به شرایط مرزی و اولیه اصلی مسئله به شکل رابطه (41) است

$$F_1(\mathbf{0}, t) = -\mathfrak{O}S_1 \tag{41}$$

$$F_1(b,t) = \mathbf{0} \tag{(-41)}$$

$$F_1(x, 0) = 0$$
 (-41)

بهطور مشابه، معادله دوم بیبعد در s₂- ضرب شده و با معادله اول بهصورت رابطه (42**)، ج**مع میشود.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (-s_2 \mathfrak{O} \mathbf{T}^* (x, t) + D \mathfrak{C}^* (x, t)) = \frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{1} + s_2) \mathbf{T}^* (x, t) + (\mathbf{1} + s_2 \lambda_1 \lambda_2) \mathfrak{C}^* (x, t)]$$
(42)

$$\frac{s_2 + 1}{\Omega s_2} = \frac{1 + s_2 \lambda_1 \lambda_2}{D} = d_2^2$$
(43)

$$\frac{\partial T_2(x,t,y)}{\partial x^2} = d_2^2 \frac{\partial T_2(x,t,y)}{\partial t}$$
(44)
$$u = \int \int dx^2 dx + \int dx +$$

$$s_{2} = \frac{(D - \mathfrak{D}) \pm \sqrt{(\mathfrak{D} - D)^{2} + 4\lambda_{1}\lambda_{2}\mathfrak{D}D}}{2\lambda_{1}\lambda_{2}\mathfrak{D}}$$
(45)

شرایط اولیه و مرزی معادله (44) با استفاده از شرایط مرزی و اولیه اصلی مسئله بهصورت رابطه (46) به دست میآید.

$$F_2(\mathbf{0}, t) = \mathfrak{O}s_2 \tag{46}$$

$$F_2(b,t) = \mathbf{0} \tag{46}$$

$$F_2(x, 0) = 0$$
 (z-46)

اکنون دستگاه معادلات کوپل (33) بهصورت دستگاه معادلات غیرکوپل حاصل از معادلات (39) و (44) بیانشده است. با حل این دستگاه با روش جداسازی متغیرها، با توجه به شرایط اولیه و مرزی هرکدام، مقدار ($F_1(x,t)$ و $F_2(x,t)$ مطابق با رابطه (47) خواهد بود.

$$F_1(x,t) = \frac{\mathfrak{D}S_1}{b} x - \mathfrak{D}S_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mathfrak{D}S_1}{n\pi} \sin(\frac{n\pi x}{b}) e^{-(\frac{n\pi}{bd_1})^2 t}$$
(jult -47)

$$F_{2}(x,t) = -\frac{\mathfrak{O}s_{2}}{b}x + \mathfrak{O}s_{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\mathfrak{O}s_{2}}{n\pi} \sin(\frac{n\pi x}{b})e^{-(\frac{n\pi}{bd_{2}})^{2}t} \quad (-47)$$

با معلوم بودن توابع F₁(x,t) و F₂(x,t) میتوان مقدار دما و رطوبت بیبعد را با حل دستگاه زیر بهدست آورد.

$$\begin{cases} F_{1}(x,t) = s_{1} \mathfrak{D} T^{*}(x,t) + D \mathfrak{C}^{*}(x,t) \\ F_{2}(x,t) = -s_{2} \mathfrak{D} T^{*}(x,t) + D \mathfrak{C}^{*}(x,t) \\ \text{is a single of a sing$$

$$\mathbf{T}^{*}(x,t) = \frac{\nabla(s_{1}+s_{2})}{\nabla(s_{1}+s_{2})}$$
$$\mathbf{C}^{*}(x,t) = \frac{s_{2}F_{1}(x,t) + s_{1}F_{2}(x,t)}{D(s_{1}+s_{2})}$$
(49)

مهندسی مکانیک مدرس، فروردین 1396، دورہ 17، شمارہ 1

6-2- محاسبه تنش

با توجه به این که صفحه بهقدر کافی بلند، شرایط تنش صفحهای و عدم وجود بارگذاری مکانیکی در نظر گرفته شده است.

$$\sigma_{xx}(x,t) = 0 \tag{(4.50)}$$

$$\sigma_{zz}(x,t) = 0 \tag{(-50)}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad i \neq j \ (i, j = x, y) \tag{(z-50)}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} = \mathbf{0}$$
(51)

$$\begin{aligned} z_{yy}(x,t) &= A(t)x + B(t) \end{aligned} \tag{52} \\ y_{yy}(x,t) &= E[A(t)x + B(t) - \alpha\Delta T(x,t) - \beta\Delta C(x,t)] \end{aligned}$$

که در آن، با توجه به این که جسم تحت بارگذاری مکانیکی قرار ندارد؛ ضرایب (A(t) و (B(t) از تعادل نیرو و گشتاور بهصورت رابطه (54) بهدست میآید.

$$\int \sigma_{yy}(x,t) \, dx = \mathbf{0} \tag{54}$$

$$\int \sigma_{yy}(x,t)x \, dx = 0 \qquad (-54)$$

در نتيجه،

$$A(t) = \frac{-6}{b^2} (T_0 - T_f) \left\{ \alpha \int_0^b \mathbf{T}^* (x, t) \, dx + \lambda_1 \beta \int_0^b \mathbf{C}^* (x, t) \, dx + \frac{2}{b} \left[\alpha \int_0^b \mathbf{T}^* (x, t) x \, dx + \lambda_1 \beta \int_0^b \mathbf{C}^* (x, t) x \, dx \right] \right\}$$
$$B(t) = \frac{(T_0 - T_f)}{b^2} \left\{ \alpha \int_0^b \mathbf{T}^* (x, t) x \, dx + \lambda_1 \beta \int_0^b \mathbf{C}^* (x, t) x \, dx + \lambda_1 \beta \int_0^b \mathbf{C}^* (x, t) x \, dx \right\}$$

6-3- محاسبه ضريب شدت تنش

روش تابع وزنی یک ابزار مؤثر برای تعیین ضریب شدت تنش با توجه به توزیع تنش در جسم بدون ترک است. اگر تابع وزنی برای یک جسم دارای ترک معلوم باشد، با انتگرالگیری از حاصل ضرب تابع وزنی و توزیع تنش در جسم بدون ترک روی سطح ترک میتوان ضریب شدت تنش را بهدست آورد. ضریب شدت تنش برای صفحه ای حاوی ترک عمود لبه ای مطابق "شکل 2"، با استفاده از تابع وزنی توسط انتگرال عددی رابطه (56) قابل بیان است [30].

$$K_{I} = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \left(1 - \frac{a}{b}\right)^{-\frac{3}{2}} \int_{0}^{a} -\frac{\sigma_{yy}(x,t)F(x,a)}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} dx$$
(56)
rites equation of the second secon

7- <mark>نتایج عددی</mark> 1-7- باریکه دارای ترک لبهای عمود تحت شوک گرمایی

برای صفحهای شامل یک ترک لبهای عمودی، خصوصیات زیر مطابق مرجع [31] در نظر گرفته شده است:

 $k = 7.78 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{hr } D = 7.78 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{hr } v = 0.3$ $\alpha = 31.3 \times 10^{-6} \text{cm/cm} \circ C \beta = 2.68 \times 10^{-3} \text{cm/cm} \% H_2 o$ $\lambda_2 = 0.5 \text{ cm}^3 \circ C/g \cdot E = 64.3 \text{ GPa} \cdot \lambda_1 = 0.5 \text{ g/cm}^3 \circ C$ μ_1 , μ_2 , μ_2 , μ_3 , μ_4 , μ_3 , μ_4 , μ_4 , μ_5 , μ_6 , μ_1 , μ_2 , μ_2 , μ_3 , μ_4 , $\mu_$

در ابتدا اثر در نظر گرفتن رطوبت در معادلات حاکم بر ضریب شدت تنش مود I بررسی شده است. مقدار ضریب شدت تنش برای حالت کوپل میدان های دما و رطوبت با حالت غیر کوپل مقایسه شده است. با توجه به این که شرایط مرزی به صورت تغییر دمای لبه شامل ترک صفحه در نظر گرفته شده است؛ در حالت غیرکوپل میدان رطوبت تغییر نمی کند و بر میدان تنش و ضریب شدت تنش اثری ندارد. در "شکل 5" تغییرات ضریب شدت تنش برای بازه کوتاهی از زمان نشان داده شده است که ضریب شدت تنش بیشینه در این بازه اتفاق میافتد. مطابق شکل، ضریب شدت تنش بیشینه در حالت کویل و غیرکوپل بهترتیب برابر (MPa (m) 42 و 1.67 است که اهمیت در نظر گرفتن رطوبت در مدل مسئله را نشان میدهد. مقدار تحلیلی ضريب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنى نيز محاسبه شده است. a/b = 0.1 تغييرات زمانی ضريب شدت تنش برای طول ترکهای و a/b = 0.3 و a/b = 0.3 با استفاده از المان محدود توسعه یافته به دست آمده و با نتایج روش تحلیلی در "شکلهای 6، 7 و 8" مقایسه شده است. در هر سه نمودار، با اعمال شوک گرمایی ضریب شدت تنش تا یک مقدار بیشینه سريعا افزايش مي يابد و سپس با سرعت كمترى به صفر و مقادير منفى مى-رسد که ترک بسته میشود.

برای تحلیل دقیقتر تغییرات ضریب شدت تنش، میدانهای دما و رطوبت بی بعد و همچنین تنش، در زمان های 0.02 = * او 0.26 = * برای طول ترک 0.2 = a/b، که ماکزیمم و مینیمم ضریب شدت تنش در آن رخ میدهد به ترتیب در "شکلهای 9، 10 و11" رسم شده است. نمودارها با در نظر گرفتن Δt=0.02 رسم شده است. درصد خطای نسبی حل عددی برای ترک 0.2 **= 2.6%، 2.6%** برای قسمت مینیمم نمودار و **4.7%** برای قسمت ماکزیمم نمودار و همچنین برای ترک $b \times a = 0.3 \times b$ ، ماکزیمم نمودار و م مینیمم نمودار و 8% برای قسمت ماکزیمم نمودار محاسبه شده است. با توجه به کاهش خطای بیشینه ضریب شدت تنش برای طول ترک a/b = 0.2 با گام زمانی 0.001 به کمتر از 1% (در شکل 5 آمده است)، بهنظر میرسد یکی از عوامل خطا در نمودارهای ضریب شدت تنش مقدار گام زمانی برای حل معادلات کوپل دما و رطوبت باشد. در لحظات اولیه بار گذاری، گرادیان میدان دما باعث ایجاد گرادیان میدان رطوبت با همان سرعت می شود. در حالی که، سرعت تغییر میدان رطوبت پس از رسیدن میدان دما به حالت پایا کاهش می یابد. میدان های گذرای دما و رطوبت باعث افزایش ضریب شدت تنش بخصوص در زمانهای ابتدایی اعمال شوک گرمایی میشوند. این اثر در توزیع تنش صفحه در "شکل 11" دیده میشود. البته در ابتدا تنش در ناحیه باریکی نزدیک لبه شامل ترک فشاری است که با گذشت زمان این ناحیه عریضتر می شود. این تغییرات باعث کاهش ضریب شدت تنش برای ترکهای کوتاه میشود که با رفتار ترکها تحت شوک گرمای

بدون وجود رطوبت تفاوت دارد.









Fig. 5 Coupled and uncoupled maximum SIF in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading

شکل 5 نمودار ضریب شدت تنش بیشینه *K*_I کوپل و غیر کوپل برحسب زمان در یک صفحه همسانگر د



Fig. 6 time variation of SIF for a crack with length of **0.1** × *b* **0.1** × *b* نمودار ضریب شدت تنش K_I برحسب زمان برای طول ترک *b*



 Fig. 8 time variation of SIF for a crack with length of 0.3 × b

 0.3 × b
 سکل 8 نمودار ضریب شدت تنش *K*₁ برحسب زمان برای طول ترک



Fig. 9 Dimensionless moisture in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading







شکل 10 نمودار دمای بیبعد در عرض یک صفحه همسانگرد و تغییر دما در لبه

همچنین، به منظور مشخص شدن میزان حساسیت جوابها به تعداد المانها، ضریب شدت تنش ترک با a/b = 0.2، برای شبکهبندی 240×60



 Fig. 7 time variation of SIF for a crack with length of 0.2 × b

 شکل 7 نمودار ضریب شدت تنش *K_I* برحسب زمان برای طول ترک b

0.02 = *t ادامه دارد. سپس تا زمان 0.26 = *t روند کاهشی پیدا خواهد کرد. پس از این زمان دما تغییری نداشته و به حالت پایا رسیده است. با این حال، انتشار رطوبت در ماده همچنان تا رسیدن به تعادل رطوبتی مطابق با "شکل 9"، ادامه خواهد داشت. با توجه به نمودار دمای بیبعد، با شروع تغییر دما در لبه سمت چپ سایر نقاط جسم کاهش دما را تجربه کرده و برای هر نقطه در صفحه $\partial t < \partial t$ ، خواهد بود. تا لحظه 0.26 = t. که دما به حالت پایدار رسیده است این نرخ منفی تغییرات دما با توجه با رابطه (3-الف)، معادل وجود یک چاه رطوبتی در معادله توزیع رطوبت خواهد بود. برای زمانهای پس از 0.26 = الادما به حالتیایا رسیده است و نرخ تغییر دما از $\partial \mathbf{T}^*/\partial t = \mathbf{0}$ خواهد بود. بنابراین، چاه رطوبتی ناشی از نرخ تغییر دما از معادله توزيع رطوبت حذف خواهد شد. اين امر باعث تغيير توزيع رطوبت به شکل غیرکوپل شده و رطوبت بهآرامی و با توجه به توزیع جدید آن به سمت حالت پایا میل خواهد کرد. اثر این تغییر به شکل نزول آرام ضریب شدت تنش به سمت صفرتا زمان تعادل رطوبتی بروز میکند. از آنجایی که این زمان با توجه به رابطه (56)، طولانی و توزیع دما مدتها قبل به حالت پایدار رسیده است؛ توزیع رطوبت تنها عامل مؤثر بر ضریب شدت تنش خواهد بود. علاوه بر این، به خاطر کوپل بودن متقابل رطوبت و دما اثر نرخ توزیع رطوبت بر روی دما نیز قابلبیان خواهد بود. برخلاف دما که نرخ تغییر آن همواره منفی است، نرخ تغییر رطوبت برای زمان های قبل از 0.02 = * منفی $(\partial \mathbf{C}^* / \partial t < \mathbf{0})$ ، و برای زمان های بعد از آن مثبت است ($\mathbf{0} < d\mathbf{C}^* / \partial t$).

نرخ منفی رطوبت متقابلاً نقش چاه گرمایی برای توزیع دما را خواهد داشت. وجود چاه گرمایی باعث افزایش ضریب شدت تنش در قسمتی که این ضریب مثبت است، میشود. در بازه زمانی که $\mathbf{0} < \mathbf{\delta}\mathbf{T}^*/d\mathbf{f}$ است، رطوبت نقش چشمه گرمایی را در معادله توزیع دما، با توجه به رابطه (3-ب)، ایفا خواهد کرد. وجود چشمه گرمایی در معادله توزیع دما باعث میشود دما دیرتر از حالت غیرکوپل- با توجه با رابطه (56)- به حالتپایا برسد. تغییر شدید ضریب شدت تنش با توجه با رابطه (56)- به حالتپایا برسد. تغییر شدید ضریب شدت تنش با توجه به تفاوت زیاد کرنشهای رطوبتی در قیاس دارد، مقدار * $\mathbf{\Delta}\mathbf{C}$ زیاد است و با توجه به اختلاف زیاد کرنشهای یاد شده -طبق رابطه (8)- و تأثیر این پارامترها بر انتگرال برهمکنش -طبق رابطه (26)- کاهش ضریب شدت تنش و نقش کنترلکننده رطوبت قابل توجیه است.



Fig. 11 Stress in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading

شکل 11 نمودار تنش در عرض یک صفحه همسانگرد و تغییر دما در لبه

و 290×75 در "شکل 12"، مقایسه شده است. نتایج هر دو شبکه برای طول ترک موردنظر انطباق قابل قبولی با یکدیگر دارند.

7-2- ترک لبهای زاویهدار برای ماده همسانگرد

صفحهای دوبعدی با که دارای ترک لبهای مایل است (مطابق شکل 13) در نظر گرفته میشود. دمای لبه چپ صفحه از مقدار اولیه $2^{\circ} 21 = 1$. تا دمای $2^{\circ} 0 = T_f$ سرد میشود. دما در لبه سمت راست در مقدار اولیه ثابت نگهداشته میشود. رطوبت در لبه سمت چپ و سمت راست، در مقدار اولیه نگهداشته میشود. رطوبت در لبه سمت چپ و سمت راست، در مقدار اولیه دیگر عایق گرمایی-رطوبتی در نظر گرفته شده است. خصوصیات ماده با توجه به مرجع [10]، در نظر گرفته نظر گرفته شده است. حصوصیات ماده با توجه به مرجع [10]، در نظر گرفته شده است. $D_0 = 1.53 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{hr}$. v = 0.33. E = 64.3 GPa شده است. $B_0 = 1.53 \times 10^4 \text{ cal/gr mol}$ ، $\alpha = 31.3 \times 10^{-6} \text{ cm/cm}^{\circ}$ C $\lambda_2 = 0.5 \text{ cm}^3$. C/g $\beta = 2.68 \times 10^{-3} \text{ cm/cm} \text{ %H}_2$ O $\lambda_2 = 0.5 \text{ cm}^3$. C/g



Fig. 12 The first mode SIF for different meshes شکل 12 نمودار ضریب شدت تنش K_I برحسب زمان برای شبکه بندی مختلف

شبکه المانی 240×60 شامل المانهای هشت گرهای ریز شونده (مطابق با شکل 14)، در نظر گرفته شده است. در این حالت مقدار ضریب شدت تنش برای طول ترک $d \times b = 0$ ، برای زوایای صفر، 30، 45 و 60 درجه در "شکل 15"، رسم شده است. همچنین مقدار ضریب شدت تنش مود دوم، برای زوایای ذکر شده در "شکل 16"، رسم گردیده است.

در این مثال ضریب پخش رطوبتی، تابع دما مطابق با رابطه (4)، در نظر گرفته شده است، این امر باعث افزایش زمان لازم برای رسیدن به حالت پایای رطوبتی و صفر شدن ضریب شدت تنش میشود، چرا که با توجه به رابطه (4) در هر گام زمانی دما نسبت به حالت مرجع کاهش یافته و به دنبال آن ضریب پخش رطوبتی نیز کاهش مییابد، (نمایش چگونگی این کاهش در "شکل 17"، آورده شده است)، بنابراین زمان بیشتری طول میکشد که رطوبت به حالت پایا برسد. در این حالت، طول دوره زمانی که در آن نرخ تغییر رطوبت نقش چشمه گرمایی را ایفا میکند افزایش یافته و با توجه به مطالب قبلی این امر باعث افزایش ضریب شدت تنش میگردد. با توجه به شکل 15"، مشاهده میشود که با افزایش زاویه ترک مقدار بیشینه ضریب شدت تنش و همچنین زمان وقوع آن کاهشیافته است. شار گرمایی و رطوبتی که در غیاب ترک به صورت افقی حرکت میکند؛ با بیشتر شدن زاویه تمایل ترک، دارای مولفه کوچکتری در راستای ترک است که کاهش ضریب



Fig. 13 Long enough substance with internal borders and angled crack under hygrothermal loading

شکل 13 جسم بهاندازه کافی بلند، با مرزهای داخلی به همراه ترک زاویهدار تحت بارگذاری گرمای<u>ی ر</u>طوبتی





Fig. 15 The first mode SIF, in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading with different crack angles

شکل 15 نمودار ضریب شدت تنش K_I برحسب زمان در یک صفحه همسانگرد برای زوایای مختلف ترک



Fig. 16 The second mode SIF, in an isotropic plate with an edge crack under hygrothermal loading with different crack angles **شکل 16** نمودار ضریب شدت تنش K_{II} برحسب زمان در یک صفحه همسانگرد برای زوایای مختلف ترک

شدت تنش مود I را در پی دارد. مقادیر بیشینه ضریب شدت تنش مود اول و زمان وقوع آن، برای ترک با زوایای مختلف در جدول 2، نشان داده شده است. همچنین با توجه به "شکل 16"، مقدار ضریب شدت تنش مود دوم، با افزایش زاویه ترک افزایش خواهد یافت.

8- نتيجه گيري

در این مقاله، ضرایب شدت تنش در یک صفحه مستطیلی شامل ترک لبهای تحت بارگذاری گرمایی و رطوبتی با روش المان محدود توسعهیافته محاسبه شده است. در معادلات حاکم، کویل دوطرفه دما و رطوبت در نظر گرفته شده و انتگرال برهم کنش برای لحاظ کردن اثر رطوبت به همراه دما توسعه داده شده است. از نتایج مقاله می توان به موارد زیر اشاره کرد:

به خاطر کوپل دوطرفه میدانهای دما و رطوبت، اعمال شرایط مرزی دمایی منجر به گرادیان رطوبت در صفحه میشود. در زمانهای اولیه اعمال شوک گرمایی، میدانهای دما و رطوبت



Fig. 17 Moisture diffusion coefficient changes according to temperature

شکل 17 نمودار تغییرات ضریب پخش رطوبت در برابر دما

جدول 2 زمان و مقدار بیشینه ضریب شدت تنش برای زوایای مختلف

Table 2 Time and amount of maximum stress intensity factors for different angles

بیشینه ضریب شدت تنش (Pa√m)	زمان	زاويه ترک
1.4277 × 10⁸	0.033	0°
1.2251 × 10⁸	0.025	30 °
1.1854 × 10 ⁸	0.02	45 °
6.5134 × 10 ⁷	0.0181	60°

بصورت همزمان تغییر میکنند و بر میدان تنش اثر میگذارند. البته ميدان دما سريعتر از ميدان رطوبت به حالت پايا مىرسد و اثر آن روی میدان تنش حذف میشود.

- لحاظ شدن میدان رطوبت باعث می شود ضریب شدت تنش از جمله بیشینه آن بهطور قابل توجهی بزرگتر از حالتی باشد که فقط اثر میدان دما در نظر گرفته میشود.
- ضریب شدت تنش مود I برای ترکهای بلندتر و با زاویه تمایل بیشتر مقدار کمتری است. همچنین، با افزایش زاویه تمایل ترک، ضريب شدت تنش مود II افزايش ييدا مي كند.

9- پیوست: تابع وزنی استفاده شده در محاسبه ضریب شدت تنش

$$F(x,a) = f_0 + f_1\left(\frac{x}{a}\right) + f_2\left(\frac{x}{a}\right)^2 + f_3\left(\frac{x}{a}\right)^3$$

$$f_0 = 0.46 + 3.06\tilde{a} + 0.84(1 - \tilde{a})^5 + 0.66\tilde{a}^2(1 - \tilde{a})^2$$

$$f_1 = -3.52\tilde{a}^2$$

$$f_2 = 6.17 - 28.22\tilde{a} + 34.54\tilde{a}^2 - 14.39\tilde{a}^3 - (1 - \tilde{a})^{1.5} - 5.88(1 - \tilde{a})^5 - 2.64\tilde{a}^2(1 - \tilde{a})^2$$

$$f_3 = -6.63 + 25.16\tilde{a} - 31.04\tilde{a}^2 + 14.41\tilde{a}^3 + 2(1 - \tilde{a})^{1.5} + 5.04(1 - \tilde{a})^5 + 1.98\tilde{a}^2(1 - \tilde{a})^2$$

$$\tilde{a} = \frac{a}{b}$$

10- مراجع

- [1] A. Szekeres, Cross-coupled heat and moisture transport: part 1-theory, Journal of Thermal Stresses, Vol. 35, No. 1, pp. 248-268, 2012.
- A. Szekeres, Analogy between heat and moisture: Thermo-hygro-mechanical tailoring of composites by taking into account the second sound phenomenon, Computers & Structures, Vol. 76, No. 1, pp. 145-152, 2000.
- [3] G. C. Sih, M. T. Shih, S. C. Chou, Transient hygrothermal stresses in composites: coupling of moisture and heat with temperature varying

using the meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 82, No. 1, pp. 74–80, 2014.

- [18] S. M. Hosseini, J. Sladek, and V. Sladek, Two Dimensional Analysis of Coupled Non-Fick Diffusion-elastodynamics Problems in Functionally Graded Materials Using Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Method, *Applied Mathematics and Computation.*, Vol. 268, No. 1, pp. 937–946, 2015.
- [19] S. M. Hosseini, M. H. Ghadiri Rad, Application of meshless local integral equations for two-dimensional transient coupled hygrothermoelasticity analysis: Moisture and thermoelastic wave propagations under shock loading, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 39, No. 1, pp. 1–15, 2016.
- [20] F. Ebrahimi, M. R. Barati, Hygrothermal buckling analysis of magnetically actuated embedded higher order functionally graded nanoscale beams considering the neutral surface position, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 39, No. 10, pp. 1210–1229, 2016.
- [21] C.-Y. Lee and J.-H. Kim, Hygrothermal postbuckling behavior of functionally graded plates, *Composite Structures*, Vol. 95, No. 1, pp. 278– 282, 2013.
- [22] A. H. Akbarzadeh, Z. T. Chen, Hygrothermal stresses in one-dimensional functionally graded piezoelectric media in constant magnetic field, *Composite Sructures*, Vol. 97, No. 1, pp. 317–331, 2013.
- [23] D. S. Mashat, A. M. Zenkour, Hygrothermal bending analysis of a sectorshaped annular plate with variable radial thickness, *Composite Structures*, Vol. 113, No. 1, pp. 446–458, 2014.
- [24] A. Zenkour, Hygrothermal Analysis of Exponentially Graded Rectangular Plates, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 7, No. 7, pp. 687–700, 2013.
- [25] S. A. Al Khateeb, A. M. Zenkour, A refined four-unknown plate theory for advanced plates resting on elastic foundations in hygrothermal environment, *Composite Structures*, Vol. 111, No. 1, pp. 240–248, 2014.
- Composite Structures, Vol. 111, No. 1, pp. 240–248, 2014.
 [26] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 45, No. 5, pp. 601–620, 1999.
- [27] R. J. Hartranft, G. C. Sih, The influence of the soret and dufour effects on the diffusion of heat and moisture in solids, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 18, No. 12, pp. 1375–1383, Jan. 1980.
- [28] J.-H. Kim, G. H. Paulino, T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 11, pp. 1463–1494, 2003.
- [29] J. F. Yau, S. S. Wang, H. T. Corten, A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, No. 2, pp. 335–341, 1980.
- [30] B. L. Wang, J. E. Li, Thermal shock resistance of solids associated with hyperbolic heat conduction theory, *In Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol. 469, No. 2153, p. 20120754, 2013.
- [31] W.-J. Chang, T.-C. Chen, C.-I. Weng, Transient hygrothermal stresses in an infinitely long annular cylinder: coupling of heat and moisture, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 14, No. 4, pp. 439–454, 1991.

diffusivity, International Journal of Engineering Science, Vol. 18, No. 1, pp. 19–42, 1980.

- [4] Y. Tambour, On local temperature overshoots due to transport coupling of heat and moisture in composite materials, *Journal of composite materials*, Vol. 18, No. 5, pp. 478–494, 1984.
- [5] B. P. Patel, M. Ganapathi, D. P. Makhecha, Hygrothermal effects on the structural behaviour of thick composite laminates using higher-order theory, *Composite Structures*, Vol. 56, No. 1, pp. 25–34, 2002.
 [6] A. Bahrami, A. Nosier, Interlaminar hygrothermal stresses in laminated
- [6] A. Bahrami, A. Nosier, Interlaminar hygrothermal stresses in laminated plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 25, pp. 8119–8142, 2007.
- [7] A. Benkhedda, A. Tounsi, Effect of temperature and humidity on transient hygrothermal stresses during moisture desorption in laminated composite plates, Composite Structures, Vol. 82, No. 4, pp. 629–635, 2008.
- [8] R. J. Hartranft, G. C. Sih, The influence of coupled diffusion of heat and moisture on the state of stress in a plate, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 16, No. 1, pp. 44–56, 1980.
- [9] K. Khalili, M. Heydari, The effect of thickness on the possibility of cracks in the drying process, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 103–116, 2012. (in Persian فارسى)
- [10] G. C. Sih, M. T. Shih, Hygrothermal stress in a plate subjected to antisymmetric time-dependent moisture and temperature boundary conditions, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 3, No. 3, pp. 321–340, 1980.
- [11] S. Topal, S. Dag, Mixed-mode hygrothermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using J-Integral, proceedingsof the twelfth Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, ASME 2014, Copenhagen, Denmark, 2014.
- [12] S. Dag, E. E. Arman, B. Yildirim, Computation of thermal fracture parameters for orthotropic functionally graded materials using J k-integral, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 25, pp. 3480– 3488, 2010.
- [13] S. Dag, B. Yildirim, O. Arslan, E. E. Arman, Hygrothermal fracture analysis of orthotropic materials using J k-Integral, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 35, No. 7, pp. 596–613, 2012.
- [14] M. Beneš, R. Štefan, Hygro-thermo-mechanical analysis of spalling in concrete walls at high temperatures as a moving boundary problem, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 85, No. 1, pp. 110– 134, 2015.
- [15] M. Koniorczyk, D. Gawin, B. A. Schrefler, Modeling evolution of frost damage in fully saturated porous materials exposed to variable hygro-thermal conditions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 297, No. 1, pp. 38–61, 2015.
- [16] F. Ahmad, J.-W. Hong, H. S. Choi, M. K. Park, Hygro effects on the low-velocity impact behavior of unidirectional CFRP composite plates for aircraft applications, *Composite Structures*, Vol. 135, No. 1, pp. 276–285, 2016.
- [17] S. M. Hosseini, J. Sladek, V. Sladek, Two dimensional transient analysis of coupled non-Fick diffusion-thermoelasticity based on Green-Naghdi theory