مجله مهندسی مکانیک مدرس، شهریور 1394، دوره 15، شماره 6، ص‌ص 299-308

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل استاتیک تیر کامپوزیتی با در نظر گرفتن اثرات برشی و استفاده از توابع چندجمله‌ای در روش کاهش ابعاد

اسماعیل غفاری[1]، جلیل رضایی پژند[2*]

1- دانشجوی دکترا، سازه هوافضا، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

*مشهد، صندوق پستی 9177948974، jrezaeep@um.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 15 فروردین 1394

پذیرش: 28 فروردین 1394

ارائه در سایت: 09 اردیبهشت 1394

کلید واژگان:

تیر کامپوزیتی

توابع اعوجاج

اثرات برش عرضی

ریلی-ریتز

المان محدود

چکیده

در این مقاله، تحلیل استاتیک تیر کامپوزیتی با استفاده از روش کاهش ابعاد و در نظر گرفتن اثرات برش عرضی در مقطع تیر مطرح می‌شود. در روش کاهش ابعاد با صرف نظر از حل سه‌بعدی مسئله، مدل الاستیسیته سه‌بعدی تیر، به حل دوبعدی مقطع و یک‌بعدی در راستای محور طولی شکسته می‌شود. جهت ارائه روش حل مقطع به صورت تحلیلی، از توابع چندجمله‌ای و روش ریلی- ریتز استفاده می‌شود. جهت دست‌یابی به سفتی‌های مقطع شامل سفتی‌های برشی، در حل دو بعدی مقطع، روش مجانبی تغییرات مورد استفاده قرار گرفته است. در روش مجانبی تغییرات به کمک پارامترهای کوچک مسئله (ابعاد مقطع نسبت به طول)، تابعی انرژی کرنشی تیر به صورت گام به گام براساس مرتبه‌های مختلف از پارامترهای کوچک تیر و استفاده از تئوری تغییرات کمینه می‌شود. با کمینه‌سازی تابعی انرژی کرنشی تیر در حل مقطع، توابع مختلف اعوجاج داخل و خارج صفحه محاسبه می‌شود. محاسبه توابع اعوجاج مقطع و اثرات برشی در تیرهای کامپوزیتی برخلاف بسیاری از تیرهای همسانگرد حائز اهمیت می‌باشد. در این مقاله با روش پیش‌رو تیرهای همسانگرد با هندسه‌های مختلف و تیرهای قوطی کامپوزیتی با چیدمان‌های متقارن و نامتقارن مورد بررسی قرار گرفته و نتایج ارائه شده با نتایج تئوری و تجربی سایر مقالات و المان‌محدود سه‌بعدی مورد مقایسه قرار گرفته است. با استفاده از روش کاهش ابعاد می‌توان با صرف هزینه محاسباتی و زمان بسیار کمتر از حل سه‌بعدی المان محدود و با دقت مناسب، به مدل‌سازی و بهینه‌سازی سازه‌هایی که به صورت تیر کامپوزیتی مدل می‌شوند، پرداخت.

Static analysis of composite beams with shear deformation effect using polynomial based dimensional reduction method

Esmaeel Ghafari, Jalil Rezaeepazhand*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
* P.O.B. 9177948974 Mashhad, Iran, jrezaeep@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 April 2015
Accepted 17 April 2015
Available Online 29 April 2015

Keywords:
Composite Beam
Warping Function
Transverse Shear Effect
Rayleigh-Ritz Method
Finite Element Method

ABSTRACT

This paper, presents the static analysis of composite beams with transverse shear effects using polynomial based dimensional reduction method. In dimensional reduction method, a three dimensional elasticity problem is split into a two dimensional cross section analysis and a one dimensional beam analysis. FEM is commonly used to analyze beam cross section in the literature. In this study, polynomial functions and Rayleigh-Ritz method are used to present an analytical procedure for two dimensional cross section analysis. Variational Asymptotic Method (VAM) is employed considering shear stiffnesses of composite beam cross section. VAM, asymptotically generates fully coupled cross section stiffness matrix. VAM benefits small parameters, related to characteristic length of cross section, to find stationary values of beam energy functional. By minimizing the energy functional with respect to warping, in and out of plane warping functions are acquired. In this article, isotropic beams with different cross section geometries and symmetric as well as anti-symmetric composite box beams are investigated. Presented results show appropriate correlation of the present study with theoretical and experimental results, as well as 3D Finite Element analysis. Using dimensional reduction method reduces the computing time and empowers researchers to design and optimize composite beam-like structures.

1- مقدمه

مدل‌سازی سازه‌های مهم و در حال توسعه مهندسی، مانند پره توربین بادی و پره دوّار هلیکوپتر با استفاده از تئوری تیرها انجام می‌شود. تئوری تیرها دارای پیشینه بسیار طولانی از قرن 16 میلادی بوده و مطالعه و پژوهش در رابطه با تئوری‌های پیشرفته تیر همچنان مورد توجه می‌باشد. بسیاری از سازه‌های تیر شکل پیشرفته، از مواد کامپوزیت ساخته می‌شوند. کامپوزیت‌ها دارای ویژگی‌های مادی قابل توجه، مانند امکان طراحی رفتار و نسبت مقاومت به وزن بالا می‌باشند. با توجه به رفتار جهتی مواد کامپوزیت و ناهمگن بودن

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

E. Ghafari, J. Rezaeepazhand, Static analysis of composite beams with shear deformation effect using polynomial based dimensional reduction method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 6, pp. 299-308, 2015 (In Persian)

تیرهای کامپوزیتی، تحلیل این سازه‌ها از پیچیدگی بالایی برخوردار است. با توجه به رفتارهای خاص سازه‌های تیر شکل کامپوزیتی، استفاده از تئوری‌های کلاسیک امکان‌پذیر نمی‌باشد. در نظر گرفتن ویژگی‌های غیرکلاسیک مختلف مانند اعوجاج‌های مقطع تیر کامپوزیتی و اثرات برش عرضی، جهت دست‌یابی به نتایج با دقت مناسب بسیار ضروری می‌باشد. جهت بهینه‌سازی و طراحی رفتار سازه کامپوزیتی، استفاده از ابزاری جهت تحلیل سریع و دقیق ضروری است. در نتیجه با توجه به هزینه محاسباتی سنگین المان‌محدود سه‌بعدی، استفاده از تئوری‌های تیر بسیار حائز اهمیت می‌باشد. تیرها سازه‌های سه-بعدی می‌باشند، در عین حال با توجه به ابعاد کوچکتر مقطع نسبت به بعد طولی، کاهش ابعاد مسئله و صرف نظر از حل سه‌بعدی الاستیسیته امکان‌پذیر است. جهت تحلیل سازه‌هایی مانند پره هلیکوپتر به ابزاری جهت تحلیل تیر کامپوزیتی با هندسه مقطع و ماده دلخواه و در نظر گرفتن حداکثر اثرات غیرکلاسیک نیاز است. ارائه تئوری تیرهای کامپوزیتی با هندسه مقطع دلخواه از دهه 1980 آغاز شد [1]. بخش اصلی این تئوری‌ها معطوف به محاسبه ثابت‌های سفتی مقطع تیر می‌باشد. از این نگاه تئوری‌های پیشرفته تیرهای کامپوزیتی به دو دسته حل عددی و تحلیلی مقطع تقسیم می‌شوند.

گیاوتو و همکاران [2] در سال 1983 روشی عددی جهت حل مقطع تیر کامپوزیتی با هندسه دلخواه مطرح کردند. خروجی کد معرفی شده در این مرجع، ماتریس سفتی 6×6 مقطع تیر با محاسبه اعوجاج‌های مختلف مقطع و اثرات برشی می‌باشد. شاخص‌ترین پژوهش در تحلیل تیر کامپوزیتی با هندسه مقطع و ماده دلخواه، حل عددی بر پایه المان‌محدود توسط هاجز و همکارانش می‌باشد که از سال 1992 [3-5] آغاز شده است. در این مطالعات، جهت کمینه‌سازی تابعی انرژی از روش ریاضی مجانبی تغییرات[1] استفاده می‌شود. این تئوری بدلیل استفاده از روش مجانبی تغییرات، دارای صحت مجانبی (عدم استفاده از فرضیات ساده‌سازی سینماتیکی) می‌باشد. تئوری بیان شده دارای حداکثر اثرات غیرکلاسیک در تحلیل تیرها بوده و در برنامه-ای با عنوان وَبز[2] معرفی شده است. از این برنامه در تحلیل‌های مختلف تیرهای کامپوزیتی، به طور گسترده استفاده شده است. وانگ و یو [6] در سال 2011 با استفاده از این تئوری مدلی جهت تحلیل مسائل حرارتی شامل تحلیل انتقال حرارت تماسی و تحلیل ترموالاستیک برای تیرهای کامپوزیتی ارائه کردند. دسته دیگری از تئوری‌ها معطوف به حل تحلیلی سطح مقطع می‌باشد. این تئوری‌ها عموماً دارای فرضیات ساده‌سازی سینماتیکی بوده و محدود به مقاطع با جداره‌های نازک می‌باشند [7-11]. کاندرا و همکاران [12] در سال 1990 به تحلیل تیر قوطی‌های مستطیلی کامپوزیت متقارن و نامتقارن پرداختند. مدل‌ها تحت بارهای خمشی، پیچشی و کششی مورد تست آزمایشگاهی قرار گرفته است. سینا و حدادپور [13] در سال 2014 ارتعاشات محوری-پیچشی تیر جدارنازک کامپوزیتی دوّار با پیچش ساختاری را مورد مطالعه قرار دادند. در این مقاله اعوجاج‌های اولیه و ثانویه در پیچش مقطع در نظر گرفته شده است.

در مقاله پیش‌رو حل تیر کامپوزیتی، با تفکیک مسئله سه‌بعدی به حل دوبعدی مقطع و یک‌بعدی در طول تیر انجام می‌شود. مدل تیر با استفاده از سینماتیک ارائه شده در مرجع [14] معرفی می‌شود. در مطالعه حاضر، برای نخستین بار تحلیل سطح مقطع تیر کامپوزیتی با اثر برش عرضی، با استفاده از روش تحلیلی ریلی-ریتز و توابع ساده چندجمله‌ای مطرح شده است. روش حاضر، با در نظر گرفتن اثرات غیرکلاسیک مختلف ارائه گردیده و برخلاف سایر مطالعات، با استفاده از چندجمله‌ای‌ها و بدون فرضیات ساده‌سازی سینماتیکی، حل تحلیلی مقطع را ارائه می‌دهد. در مرجع [15] تحلیل رفتار خمشی تیر ساندویچی با رویه کامپوزیتی با استفاده از روش ریتز و توابع چندجمله‌ای ارائه شده است. در مطالعه حاضر اثرات غیرکلاسیک مختلف مانند اعوجاج‌های داخل و خارج صفحه و اثرات برش عرضی محاسبه می‌شود. حل تحلیلی ارائه شده در این مقاله، فرآیند ایجاد شبکه در روش المان محدود روش‌های مشابه را حذف خواهد کرد. استفاده از روش کاهش ابعاد در تحلیل سازه‌های تیر شکل، با حفظ اثرات غیرکلاسیک مؤثر در تیر کامپوزیتی، زمان تحلیل را به شکل چشم‌گیری کاهش می‌دهد. در نتیجه روش حاضر مناسب جهت طراحی اولیه و بهینه‌سازی سازه‌های تیر شکل کامپوزیتی می‌باشد. مطالعه حاضر با در نظر گرفتن مرتبه‌های بالاتر انرژی کرنشی تیر و در نتیجه اثرات برش عرضی، تحلیل ارائه شده در مرجع [16] را بهبود داده است.

2- مدل سه‌بعدی تیر

جهت معرفی مدل سه‌بعدی تیر، لازم است کرنش‌های سه‌بعدی تیر تعریف شوند. اساس روش کاهش ابعاد، تعریف کرنش‌های سه‌بعدی برحسب کرنش-های یک‌بعدی، مربوط به خط مرجع تیر و توابع اعوجاج مقطع (تغییر شکل سه‌بعدی تیر) است. با محاسبه توابع اعوجاج برحسب کرنش‌های یک‌بعدی خط مرجع تیر، مدل سه‌بعدی، تبدیل به مسئله یک‌بعدی تیر با حفظ اثرات سه‌بعدی خواهد شد. کرنش‌های یک‌بعدی (منتجه‌های کرنش) مربوط به خط مرجع، ϵ به صورت رابطه (1) تعریف می‌شود.

$$\epsilon = [\gamma_1 \quad \kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

در رابطه بالا γ_1 کرنش کششی، κ_1 کرنش پیچشی و κ_2 و κ_3 کرنش‌های خمشی در جهات x_2 و x_3 مطابق مختصات تیر در شکل 1 می‌باشند. همچنین اعوجاج مقطع با اجزاء ω_1، اعوجاج خارج صفحه و ω_2 و ω_3 دو اعوجاج داخل صفحه سطح مقطع در جهات x_2 و x_3، در رابطه (2) بیان شده است.

$$\omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

با فرض کوچک بودن تانسور دوران محلی، کرنش سه‌بعدی برای تیر به صورت رابطه (3) حاصل می‌شود [17].

$$G = G_\epsilon \epsilon + G_h \omega + G_l \omega' \tag{3}$$

در رابطه بالا $(\ )'$ جهت نمایش مشتق نسبت به مختصه x_1 می‌باشد، همچنین:

$$G_h = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$G_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad G_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

ویژگی‌ها و رفتار سازه الاستیک در تابعی انرژی آن، به طور کامل نهفته است. انرژی کرنشی تیر سه‌بعدی، با استفاده از رابطه (5) قابل بیان می‌باشد.

$$U = \frac{1}{2}\int_L \left\{ \int_s G^{\mathrm{T}} \mathcal{D}\, G \; dx_2 dx_3 \right\} dx_1 \tag{5}$$

1- VAM
2- VABS

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.6.27.3]

در رابطه (5) s سطح مقطع، L طول تیر و $\mathcal{D}$ ماتریس سفتی مادی 6×6 اجزاء سطح مقطع است. مسئله سه‌بعدی الاستیسیته سازه، کمینه‌کردن تابعی (5) جهت محاسبه توابع مجهول اعوجاج می‌باشد. برای جلوگیری از حرکت جسم صلب مقطع، لازم است قیدهایی برای تغییر شکل‌ها به صورت رابطه (6) در نظر گرفته شود [17].

$$\int_s (\omega_i)\ dx_2 dx_3 = 0$$
$$\int_s (x_2\omega_3 - x_3\omega_2)\ dx_2 dx_3 = 0 \qquad (6)$$

3- کاهش ابعاد مسئله سه‌بعدی

تابعی انرژی (5) برحسب انتگرال سه‌گانه از متغیرهای مستقل x_1 ، x_2 و x_3 می‌باشد. استفاده از روش‌های معمول در حساب تغییرات جهت کمینه کردن تابعی انرژی فوق امکان پذیر بوده اما موجب ایجاد دستگاه معادلات با مشتق‌های جزئی پیچیده خواهد شد. لذا جهت ساده‌سازی کمینه‌سازی تابعی انرژی و امکان حل مقطع تیر با هندسه دلخواه، توابع مجهول اعوجاج به صورت رابطه (7) تفکیک می‌گردد.

$$\omega(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)N(x_2, x_3) \qquad (7)$$

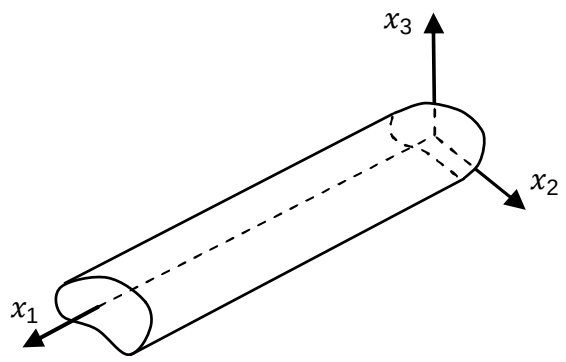
در رابطه (7)، $N(x_2, x_3)$ توابع حدسی مورد نیاز در روش ریلی-ریتز می‌باشد. $P(x_1)$ نیز ماتریس ضرایب مجهول است. با توجه به معین بودن توابع N، مجهول مسئله حساب تغییرات تابعی انرژی، به ضرایب مجهول P که تنها تابعی از مختصه طولی x_1 می‌باشد، تبدیل شده است. در مقالات مرتبط [5] عموماً از روش المان‌محدود و ایجاد شبکه دوبعدی در سطح مقطع جهت تفکیک توابع مجهول اعوجاج استفاده می‌شود. با جای‌گذاری رابطه (7) در عبارت انرژی سه‌بعدی (5)، رابطه (8) حاصل می‌شود.

$$2U = \int_L \{\epsilon^{\mathrm{T}} D_{\epsilon\epsilon}\epsilon + P^{\mathrm{T}} D_{hh}\, P + P'^{\mathrm{T}} D_{ll} P' + 2P^{\mathrm{T}} D_{h\epsilon}\epsilon + 2P^{\mathrm{T}} D_{hl} P' + 2P'^{\mathrm{T}} D_{l\epsilon}\epsilon\}\ dx_1 \qquad (8)$$

که:

$$D_{\epsilon\epsilon} = \int_s G_\epsilon^{\mathrm{T}}\, \mathcal{D} G_\epsilon\, dx_2 dx_3$$
$$D_{hh} = \int_s [G_h N]^{\mathrm{T}}\, \mathcal{D}[G_h N]\, dx_2 dx_3$$
$$D_{ll} = \int_s [G_l N]^{\mathrm{T}}\, \mathcal{D}[G_l N]\, dx_2 dx_3$$
$$D_{h\epsilon} = \int_s [G_h N]^{\mathrm{T}}\, \mathcal{D} G_\epsilon\, dx_2 dx_3$$
$$D_{hl} = \int_s [G_h N]^{\mathrm{T}}\, \mathcal{D}[G_l N]\, dx_2 dx_3$$
$$D_{l\epsilon} = \int_s [G_l N]^{\mathrm{T}}\, \mathcal{D} G_\epsilon\, dx_2 dx_3 \qquad (9)$$

با کمینه‌سازی مستقیم رابطه (8)، معادله دیفرانسیلی مرتبه دو ایجاد می‌شود. جهت یافتن نقاط سکون رابطه (8) تحت قیدهای (6) می‌توان از روش ریاضی مجانبی تغییرات استفاده کرد. روش مجانبی تغییرات برای اولین بار توسط



شکل 1 دستگاه مختصات مقطع تیر

بردیچوسکی [18] معرفی شد و از آن در حل میله ناهمسانگرد نیز استفاده کرد. این روش با بهره بردن از کمیت‌های کوچک موجود، کمینه‌سازی را به صورت گام به گام، با استفاده از تابعی مسئله با درجات مختلف از کمیت کوچک فرض شده، انجام می‌دهد. با استفاده از روش مجانبی تغییرات، از ایجاد معادلات دیفرانسیلی در فرآیند کمینه‌سازی تابعی انرژی، جهت یافتن توابع مجهول اعوجاج، جلوگیری می‌شود.

کمیت‌های کوچک مسئله ε و h/l در نظر گرفته می‌شوند که ε پارامتر بزرگترین اندازه کرنش‌های یک‌بعدی و h اندازه مشخصه سطح مقطع و l مشخصه طول موج تغییر شکل در راستای محوری تیر می‌باشند. با توجه به فرض $\varepsilon \ll 1$ و $h/l \ll 1$ برای تیرها، می‌توان تمامی توابع مجهول اعوجاج را براساس h و ε به صورت رابطه (10) بسط داد [17].

$$\omega = \omega_0(\varepsilon) + \omega_1\left(\varepsilon\, h/l\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon\, h^2/l^2\right) \qquad (10)$$

در نتیجه به شکل ساده‌تر، ماتریس ضرایب مجهول به صورت رابطه (11) در نظر گرفته می‌شود.

$$P = P_0(h^0) + P_1(h^1) + \mathrm{O}(h^2) \qquad (11)$$

همچنین مشتق P_k نسبت به مختصه طولی، از یک مرتبه بالاتر نسبت به P_k در نظر گرفته می‌شود [17].

با توجه به توضیحات بیان شده تابعی انرژی در رابطه (8) از مرتبه $\mathrm{O}(\varepsilon^2)$ به صورت رابطه (12) حاصل می‌شود.

$$2U_0 = \int_L \left\{P_0^{\mathrm{T}} D_{hh}\, P_0 + 2\, P_0^{\mathrm{T}} D_{h\epsilon}\epsilon + \epsilon^{\mathrm{T}} D_{\epsilon\epsilon}\epsilon\right\}\ dx_1 \qquad (12)$$

با استفاده از روش‌های معمول در حساب تغییرات، تابعی (12) تحت قیدهای (6)، با استفاده از ضرب‌کننده‌های لاگرانژی قابل کمینه‌سازی می‌باشد. با انجام محاسبات لازم ماتریس مجهول P_0 به شکل رابطه (13)، بر حسب کرنش یک‌بعدی ϵ، محاسبه می‌شود.

$$P_0 = \hat{P}_0\epsilon \qquad (13)$$

همچنین رابطه انرژی تا مرتبه $\mathrm{O}\left(\varepsilon^2\, h^2/l^2\right)$ به صورت رابطه (14) حاصل می‌شود [17].

$$2U_1 = \int_L \{P_0^{\mathrm{T}} D_{hh}\, P_0 + 2\, P_0^{\mathrm{T}} D_{h\epsilon}\epsilon + \epsilon^{\mathrm{T}} D_{\epsilon\epsilon}\epsilon + 2P_0^{\mathrm{T}} D_{hl} P_0' + 2P_0'^{\mathrm{T}} D_{l\epsilon}\epsilon + P_1^{\mathrm{T}} D_{hh} P_1 + 2P_1^{\mathrm{T}} D_{hl} P_0' + 2P_0^{\mathrm{T}} D_{hl} P_1' + 2P_1'^{\mathrm{T}} D_{l\epsilon}\epsilon + P_0'^{\mathrm{T}} D_{ll} P_0'\}\ dx_1 \qquad (14)$$

با انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء از رابطه (14) می‌توان مشتق‌های ماتریس مجهول P_1 را حذف کرد. این کار به‌دلیل ارائه حل برای ناحیه میانی مجاز می‌باشد. رابطه (14) با انتگرال‌گیری و حذف عبارت‌های ثابت به رابطه (15) تبدیل می‌شود.

$$2\overline{U}_1 = \int_L \left\{P_1^{\mathrm{T}} D_{hh} P_1 + 2P_1^{\mathrm{T}}\left(D_{hl}\hat{P}_0 - D_{hl}^{\mathrm{T}}\hat{P}_0 - D_{l\epsilon}\right)\epsilon'\right\}\ dx_1 \qquad (15)$$

تابعی انرژی (15) نیز مشابه رابطه (12) با استفاده از تئوری تغییرات و بدون ایجاد معادله دیفرانسیلی ماتریسی، قابل کمینه‌سازی نسبت به ماتریس ضرایب مجهول P_1 می‌باشد. در نتیجه ماتریس P_1 به صورت رابطه (16) حاصل می‌شود.

$$P_1 = \hat{P}_1\epsilon' \qquad (16)$$

با استفاده از روابط (13) و (16)، توابع سه‌بعدی اعوجاج برحسب کرنش‌های یک‌بعدی ϵ محاسبه می‌شوند. با استفاده از این روابط، انرژی کرنشی سه‌بعدی

تیر، برحسب متغیرهای یک‌بعدی قابل بیان است. در نتیجه مسئله سه‌بعدی تیر کامپوزیتی با حفظ اثرات سه‌بعدی به مسئله یک‌بعدی تبدیل می‌شود. انرژی یک‌بعدی تیر در رابطه (17) بیان شده است [5].

$$2U_1 = \int_L \{\epsilon^{\mathrm{T}} A \epsilon + 2\epsilon^{\mathrm{T}} B \epsilon' + \epsilon'^{\mathrm{T}} C \epsilon' + 2\epsilon^{\mathrm{T}} D \epsilon''\} \; dx_1 \qquad (17)$$

که:

$$\begin{aligned} A &= \hat{P}_0^{\mathrm{T}} D_{h\epsilon} + D_{\epsilon\epsilon} \\ B &= \hat{P}_0^{\mathrm{T}} D_{hl} \hat{P}_0 + D_{l\epsilon}^{\mathrm{T}} \hat{P}_0 \\ C &= \hat{P}_1^{\mathrm{T}} (D_{hl} + D_{hl}^{\mathrm{T}}) \hat{P}_0 + \hat{P}_1^{\mathrm{T}} D_{l\epsilon} + \hat{P}_0^{\mathrm{T}} D_{ll} \hat{P}_0 \\ D &= D_{l\epsilon}^{\mathrm{T}} \hat{P}_1 + \hat{P}_0^{\mathrm{T}} D_{hl} \hat{P}_1 \end{aligned} \qquad (18)$$

رابطه انرژی یک‌بعدی تیر (17)، به صورت مستقیم قابل استفاده می‌باشد، اما به دلیل وجود مشق‌های کرنش، حل این مدل شامل شرایط مرزی پیچیده و غیرضروری خواهد بود. در نتیجه، حذف مشتق‌های کرنش‌های یک‌بعدی و تبدیل سفتی‌ها به فرم استاندارد تیموشنکو، در بخش بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

4- تبدیل به مدل تیموشنکو

برای رهایی از ترم‌های مشتق کرنش در عبارت انرژی (17)، به طور معمول از تغییر متغیر و یا معادلات تعادل استفاده می‌شود. در این مقاله مشابه مرجع [19] از معادلات تعادل استفاده خواهد شد. با توجه به رابطه انرژی کرنشی به فرم تیموشنکو (19)، لازم است کرنش‌های کلاسیک یک‌بعدی در رابطه (17) و مشتق‌های آن‌ها، برحسب کرنش‌های برشی موجود در عبارت انرژی تیموشنکو بدست آید.

$$2U = \int_L \left\{ \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X_{4\times4} & Y_{4\times2} \\ Y_{4\times2}{}^{\mathrm{T}} & Z_{2\times2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} \right\} dx_1 \qquad (19)$$

در رابطه بالا $\gamma = [2\gamma_{12} \quad 2\gamma_{13}]^{\mathrm{T}}$ کرنش‌های برشی مقطع تیر در راستای x_2 و x_3 می‌باشند. با توجه به مرتبه انرژی کرنشی مورد استفاده، می‌توان از فرم خطی معادلات تعادل یک‌بعدی در رابطه (20) استفاده کرد [17].

$$\begin{aligned} F' &= 0 \\ M' + QF &= 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

در رابطه (20)، $F = [F_1 \quad F_2 \quad F_3]^{\mathrm{T}}$ و $M = [M_1 \quad M_2 \quad M_3]^{\mathrm{T}}$ منتجه‌های نیرو و ممان مقطع در جهات اصلی و $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ می‌باشد. همچنین رابطه نیرو-کرنش (21) در ناحیه میانی تیر صادق است.

$$[F_1 \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad F_2 \quad F_3]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} X_{4\times4} & Y_{4\times2} \\ Y_{4\times2}{}^{\mathrm{T}} & Z_{2\times2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} \qquad (21)$$

در نتیجه با استفاده از روابط (20) و (21)، مشتق کرنش‌های یک‌بعدی، برحسب کرنش‌های برشی γ و ϵ قابل محاسبه است. با توجه به طولانی بودن روند محاسبات از ارائه جزئیات این بخش صرف نظر می‌شود. روند کامل محاسبات در مرجع [19] بیان شده است. ماتریس‌های سفتی مجهول X، Y و Z از رابطه (22) قابل محاسبه خواهد بود.

$$\begin{aligned} Z &= \left(Q_1^{\mathrm{T}} A^{-1} (C - B^{\mathrm{T}} A^{-1} B) A^{-1} Q_1\right)^{-1} \\ Y &= B^{\mathrm{T}} A^{-1} Q_1 Z \\ X &= Y Z^{-1} Y^{\mathrm{T}} + A \end{aligned} \qquad (22)$$

در رابطه بالا $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ است. همان‌طور که اشاره شد با محاسبه مشتق‌های کرنش در رابطه (17)، برحسب کرنش‌های برشی و کلاسیک، رابطه انرژی یک‌بعدی به فرم تیموشنکو به صورت رابطه (23) نیز قابل بازآرایی می‌باشد.

$$2U = \int_L \left\{ \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{13} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{13} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} \right\} dx_1 \qquad (23)$$

در مدل تیموشنکو رابطه (23)، C_{11} سفتی کششی، C_{22} و C_{33} سفتی‌های برشی در جهات x_2 و x_3، C_{44} سفتی پیچشی، C_{55} و C_{66} سفتی‌های خمشی در جهات x_2 و x_3 می‌باشند. همچنین سایر سفتی‌ها در رابطه بالا کوپل‌های مربوط به درجات آزادی بیان شده هستند. به طور مثال C_{14} سفتی کوپل کششی-پیچشی است. با دست‌یابی به ماتریس C موجود در رابطه (23) ویژگی‌های سطح مقطع تیر حاصل شده و با این ماتریس و کمک تئوری‌های یک‌بعدی تیر، می‌توان به تحلیل تیر پرداخت. همان‌طور که بیان شد ماتریس سفتی مقطح محاسبه شده دارای اثرات غیرکلاسیک مختلف مانند اعوجاج-های داخل و خارج صفحه و اثرات برش عرضی بوده و برای تیر با هندسه مقطع و ماده دلخواه قابل محاسبه می‌باشد، در عین حال امکان تحلیل تیر را با استفاده از ابزارهای یک‌بعدی با سرعت بالا فراهم می‌سازد. مدل ارائه شده به‌دلیل فرم انرژی کرنشی یک‌بعدی نهایی، تیموشنکو خوانده می‌شود. این مدل‌سازی با حذف فرضیات ساده‌سازی سینماتیکی و در نظر گرفتن تغییر شکل‌های سه‌بعدی کاملاً متفاوت از تئوری اولیه تیموشنکو است.

5- تخمین المان محدود در مدل یک‌بعدی تیر

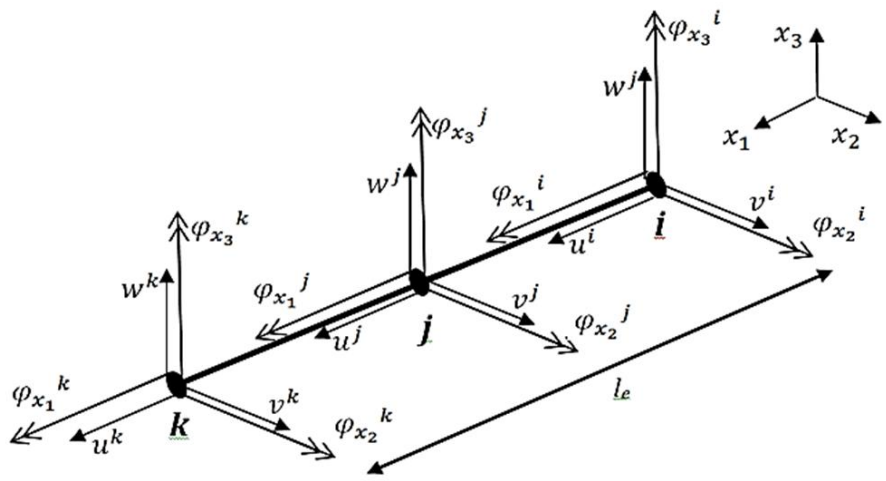
با استفاده از ماتریس سفتی مقطع تیر C و انرژی یک‌بعدی (23) می‌توان به ماتریس سفتی المان تیر دست یافت. انرژی کرنشی یک‌بعدی المان تیر به صورت رابطه (24) بیان می‌شود.

$$2U^e = \int_{l_e} \{\Gamma^{\mathrm{T}} C \, \Gamma\} \, dx_1 \qquad (24)$$

در رابطه (24)، $\Gamma = [\gamma_1 \quad 2\gamma_{12} \quad 2\gamma_{13} \quad \kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3]^{\mathrm{T}}$ می‌باشد. اگر کرنش‌های موجود در رابطه (24) برحسب درجات آزادی المان تیر بیان شود، ماتریس سفتی المان تیر به آسانی قابل محاسبه خواهد بود. برای مدل المان-محدود تیر به فرم تیموشنکو با توجه به وجود سفتی برای درجات آزادی برشی و جلوگیری از اثر نامطلوب قفل برشی، از المان سه‌گره‌ای استفاده می‌شود [20]. این المان در هر گره دارای 6 درجه آزادی شامل سه تغییر شکل جابه‌جایی (u، v و w) و سه تغییر زاویه مقطع (φ_{x_1}، φ_{x_2} و φ_{x_3}) به ترتیب در راستای محورهای x_1، x_2 و x_3 طبق شکل 2 می‌باشند. در نتیجه در مجموع 18 درجه آزادی برای المان در نظر گرفته می‌شود. در این مدل به جای متغیرهای خمشی φ_{x_2} و φ_{x_3}، کرنش‌های برشی $2\gamma_{12}$ و $2\gamma_{13}$ با استفاده از چندجمله‌ای‌ها تخمین زده می‌شود [20]، اما درجات آزادی نهایی هر نقطه از المان مشابه مدل کلاسیک [16] شامل سه جابه‌جایی، پیچش و دو خمش در راستای جهات اصلی است. در نتیجه توابع چند جمله‌ای زیر جهت تقریب تغییر درجات آزادی در طول المان استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 {x_1}^2 \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 {x_1}^2 + \alpha_7 {x_1}^3 \\ w &= \alpha_8 + \alpha_9 x_1 + \alpha_{10} {x_1}^2 + \alpha_{11} {x_1}^3 \\ \varphi_{x_1} &= \alpha_{12} + \alpha_{13} x_1 + \alpha_{14} {x_1}^2 \\ 2\gamma_{12} &= \alpha_{15} + \alpha_{16} x_1 \\ 2\gamma_{13} &= \alpha_{17} + \alpha_{18} x_1 \end{aligned} \qquad (25)$$

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.6.27.3]



شکل 2 المان سه‌گره‌ای تیر با 18 درجه آزادی

برای تیر به فرم تیموشنکو کرنش‌های برشی و کلاسیک خطی در رابطه (26) ارائه شده است [20].

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = u' \\
&\kappa_1 = \varphi_{x_1}{}', \quad \kappa_2 = \varphi_{x_2}{}', \quad \kappa_3 = \varphi_{x_3}{}' \\
&2\gamma_{12} = v' - \varphi_{x_3} \\
&2\gamma_{13} = w' + \varphi_{x_2}
\end{aligned} \tag{26}$$

با استفاده از روابط کرنش-جابه‌جایی (26)، درجات آزادی خمشی تیر به صورت رابطه (27) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\varphi_{x_2} = \alpha_{17} + \alpha_{18}x_1 - \alpha_9 - 2\alpha_{10}x_1 - 3\alpha_{11}{x_1}^2 \\
&\varphi_{x_3} = -\alpha_{15} - \alpha_{16}x_1 + \alpha_5 + 2\alpha_6 x_1 + 3\alpha_7{x_1}^2
\end{aligned} \tag{27}$$

ماتریس ستونی درجات آزادی المان تیر به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\delta = [&u^i \quad v^i \quad w^i \quad {\varphi_{x_1}}^i \quad {\varphi_{x_2}}^i \quad {\varphi_{x_3}}^i \\
&u^j \quad v^j \quad w^j \quad {\varphi_{x_1}}^j \quad {\varphi_{x_2}}^j \quad {\varphi_{x_3}}^j \\
&u^k \quad v^k \quad w^k \quad {\varphi_{x_1}}^k \quad {\varphi_{x_2}}^k \quad {\varphi_{x_3}}^k]^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{28}$$

همچنین ماتریس ضرایب مجهول α در رابطه (29) بیان شده است.

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_{18}]^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

با تعریف ماتریس‌های T، S و R در رابطه (30)، کرنش‌ها براساس ماتریس درجات آزادی بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\delta = T\,\alpha \\
&\Gamma = S\,\alpha \\
&\Gamma = S\,T^{-1}\,\delta = R\,\delta
\end{aligned} \tag{30}$$

ماتریس 18×18 T تابع مختصات گره‌ای المان و ماتریس 6×18 S تابع مختصه x_1 است. رابطه انرژی کرنشی المان U^e و ماتریس 18×18 سفتی المان تیر K^e، از رابطه (31) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&U^e = \frac{1}{2}\delta^{\mathrm{T}}\left\{\int_{l_e} R^{\mathrm{T}}\,C\,R\;dx_1\right\}\delta \\
&K^e = \int_{l_e} R^{\mathrm{T}}\,C\,R\;dx_1
\end{aligned} \tag{31}$$

6- نتایج و بحث

جهت بررسی روش ارائه شده در تحلیل سطح مقطع، ابتدا تیر همسانگرد با مقطع مربعی با ویژگی‌های هندسی و مادی جدول 1، با استفاده از کد تهیه شده در نرم‌افزار متلب با عنوان آبسا[1] بررسی می‌شود.

1- ABSA-Analytical Beam Sectional Analysis

در تحلیل این سطح مقطع از توابع چندجمله‌ای رابطه (32) برای هر یک توابع مجهول اعوجاج استفاده می‌شود [21].

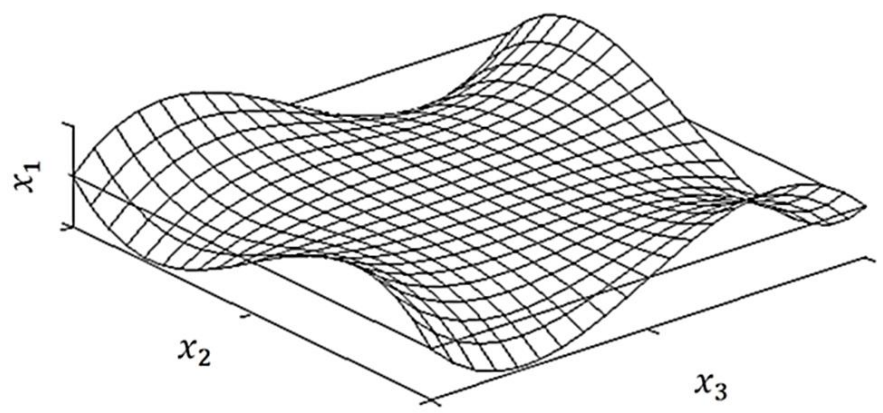
$$\bar{N}(x_2,x_3) \equiv \begin{Bmatrix}
1 & x_2 & x_3 & & & \\
 & x_2^2 & x_3^2 & x_2x_3 & & \\
 & x_2^3 & x_3^3 & x_2x_3^2 & x_2^2x_3 & \\
 & x_2^4 & x_3^4 & x_2x_3^3 & x_2^2x_3^2 & x_2^3x_3 \\
 & & & x_2x_3^4 & x_2^2x_3^3 & x_2^3x_3^2 & x_2^4x_3 \\
 & & & & x_2^2x_3^4 & x_2^3x_3^4 & x_2^4x_3^2 \\
 & & & & & x_2^3x_3^4 & x_2^4x_3^3 \\
 & & & & & & x_2^4x_3^4
\end{Bmatrix} \tag{32}$$

حل دوبعدی مقطع برای ناحیه میانی تیر بوده و مستقل از طول و شرایط مرزی سازه انجام می‌شود. توابع اعوجاج نیز ویژگی ذاتی یک سطح مقطع خاص می‌باشد. با توجه به روابط بیان شده در بخش‌های قبل، توابع اعوجاج وابسته به کرنش‌های یک‌بعدی بدست می‌آید. در نتیجه به طور مثال می‌توان با صفر قرار دادن همه کرنش‌های یک‌بعدی کلاسیک به جز کرنش پیچشی (κ_1)، شکل اعوجاج در اثر کرنش پیچشی مقطع را بدست آورد. در شکل 3 اعوجاج خارج صفحه در اثر کرنش پیچشی مقطع مربعی نشان داده شده است. در شکل 4 اعوجاج داخل صفحه مقطع مربعی در اثر کرنش خمشی در جهات x_3 رسم شده است. همچنین در شکل 5 اعوجاج مقطع در اثر کرنش برشی (قابل محاسبه برحسب کرنش‌های کلاسیک در مقطع همسانگرد) در راستای x_2 رسم شده است. این اعوجاج از نوع خارج سطح بوده و نشان دهنده اثر برش عرضی در مقطع می‌باشد که به واسطه آن مقطع از حالت عمود بر خط مرجع تیر خارج می‌شود. در جدول 2 سفتی‌های این مقطع به روش تحلیلی حاضر، با حل المان‌محدود مقطع در مرجع [22] مقایسه شده که نشان دهنده تشابه کامل نتایج با استفاده از توابع چندجمله‌ای (32) تا مرتبه 4 می‌باشد.

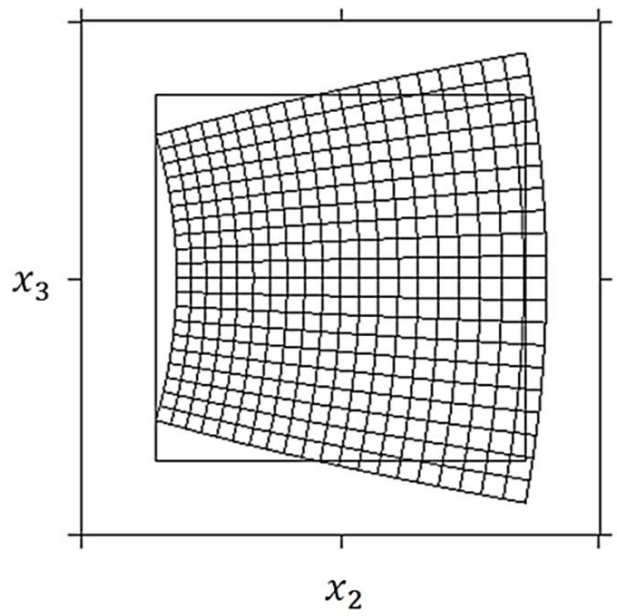
با توجه به اهمیت محاسبه اعوجاج پیچشی در مقاطع غیر دایره‌ای، سفتی پیچشی مقطع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع و بیضوی با خواص ماده جدول 1، در جدول 3 با حل دقیق [23] مقایسه شده است. مقطع مثلثی به طول ضلع 12/7 mm و مقطع بیضی شکل با نیم‌قطر بزرگ 12/7 mm و نیم-قطر کوچک 6/35 mm می‌باشد.

جدول 1 ویژگی‌های مادی و هندسی مقطع همسانگرد [22]

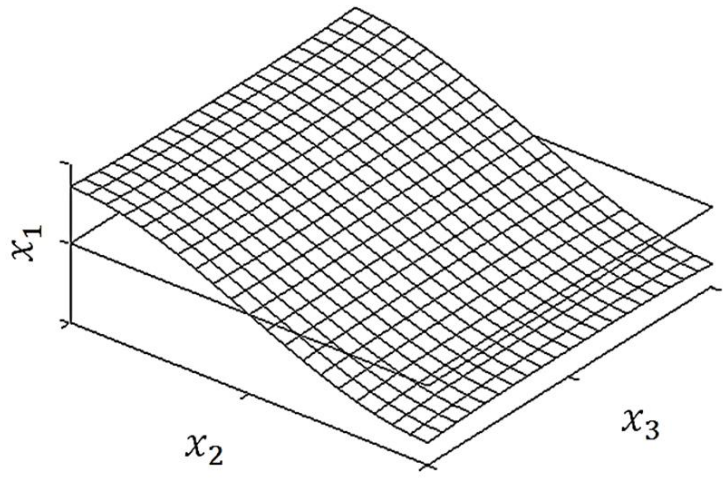
هندسه مقطع	12.7 mm × 12.7 mm
ماده	E=179 GPa , ν=0.3



شکل 3 شکل تابع اعوجاج مقطع مربعی در اثر کرنش پیچشی



شکل 4 شکل تابع اعوجاج مقطع مربعی در اثر کرنش خمشی



شکل 5 شکل تابع اعوجاج مقطع مربعی در اثر کرنش برشی

جدول 2 مقایسه درایه‌های ماتریس سفتی مقطع مربعی با مرجع [22]

سفتی‌های غیرصفر	مطالعه حاضر	[22]
C_{11}(N)	$2/89\times10^{7}$	$2/89\times10^{7}$
C_{22}(N)	$9/21\times10^{6}$	$9/21\times10^{6}$
C_{33}(N)	$9/21\times10^{6}$	$9/21\times10^{6}$
C_{44}(N.m²)	$2/52\times10^{2}$	$2/52\times10^{2}$
C_{55}(N.m²)	$3/87\times10^{2}$	$3/87\times10^{2}$
C_{66}(N.m²)	$3/87\times10^{2}$	$3/87\times10^{2}$

جدول 3 مقایسه سفتی پیچشی مقطع‌های مثلثی و بیضی با مرجع [23]

هندسه مقطع	سفتی پیچشی - C_{44}(N.m²)	
	مطالعه حاضر	[23]
مثلث متساوی‌الاضلاع	$3/87\times10^{1}$	$3/87\times10^{1}$
بیضی	$5/62\times10^{2}$	$5/62\times10^{2}$

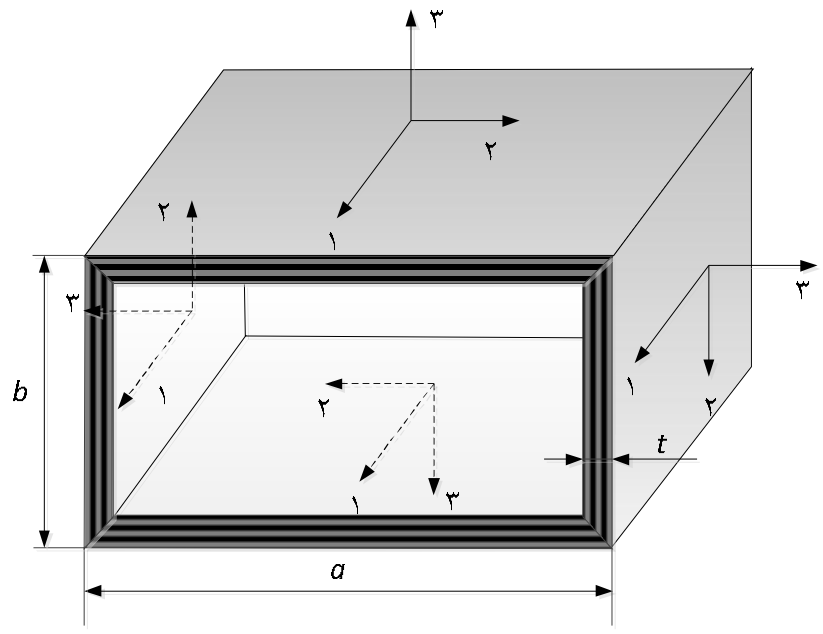
در ادامه تیرهای کامپوزیتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابعاد تیرها در جدول 4 مطابق شکل 6، با ویژگی‌های مادی تک‌لایه‌های کامپوزیتی به ضخامت mm 0/127 مطابق با جدول 5 در نظر گرفته شده است. هر دیواره تیر قوطی کامپوزیتی شامل 6 تک‌لایه با شیوه چیدمان ارائه شده در جدول 6 می‌باشد.

جدول 4 ابعاد مقطع تیر کامپوزیتی

عرض بیرونی	ارتفاع بیرونی	ضخامت دیواره	طول تیر
a=24/21 mm	b=13/46 mm	t=0/762 mm	L=762 mm

جدول 5 ویژگی مادی تک‌لایه‌ها [22]

	مقطع نامتقارن	مقطع متقارن
E_{11}	142 GPa	142 GPa
$E_{22}=E_{33}$	9/8 GPa	9/8 GPa
$G_{12}=G_{13}$	6/0 GPa	6/0 GPa
G_{23}	4/8 GPa	4/8 GPa
$v_{12}= v_{13}$	0/3	0/42
v_{23}	0/34	0/42



شکل6 تیر قوطی کامپوزیتی و دستگاه‌های محلی دیواره‌ها [16]

جدول 6 لایه‌چینی مقطع تیر کامپوزیتی

مقطع	دیواره بالا	دیواره پایین	دیواره راست	دیواره چپ
نامتقارن	$[\theta]_6$	$[\theta]_6$	$[\theta]_6$	$[\theta]_6$
متقارن	$[-\theta]_6$	$[\theta]_6$	$[-\theta / \theta]_3$	$[\theta / -\theta]_3$

چیدمان‌های مقطع متقارن و نامتقان مورد نظر عامل ایجاد سفتی‌های کوپل متفاوت در این دو مقطع می‌باشد. در مقطع نامتقارن، درجات آزادی کششی با پیچشی و برشی با خمشی دارای کوپل مادی است. همچنین مقطع متقارن دارای سفتی‌های کوپل کششی-برشی، برشی-برشی، پیچشی-خمشی و خمشی-خمشی می‌باشد. بررسی دقیق مقدار و نوع سفتی‌های کوپل مقطع تیر کامپوزیتی امکان پیش‌بینی رفتار سازه در تحلیل‌های مختلف را فراهم می‌سازد. علاوه بر این با انتخاب نوع چیدمان و زاویه فایبر مناسب در مقطع، می‌توان رفتار دلخواه سازه را طراحی کرد. در جدول 7 سفتی‌های مقطع تیر قوطی کامپوزیتی نامتقارن با زاویه فایبر 15 درجه، به روش تحلیلی ریلی-ریتز و استفاده از توابع چندجمله‌ای به فرم رابطه (32) تا توان 8، ارائه شده است. نتایج با روش عددی المان‌محدود در تحلیل سطح مقطع در مرجع [5] مقایسه شده است. همچنین میزان خطا از طریق رابطه (100×|مرجع-روش حاضر|/مرجع) محاسبه می‌شود. دقت کلی سفتی‌های مقطع با استفاده از مجموعه کامل توابع چندجمله‌ای به فرم رابطه (32) و اصلاح انتگرال‌گیری، نسبت به مرجع [16] بهبود یافته است. در جدول 8 سفتی‌های مقطع متقارن با استفاده از روش پیش‌رو و توابع چندجمله‌ای تا مرتبه 10، با مرجع [22] مقایسه شده است. با توجه به این جدول‌ها، سفتی‌های مقطع نامتقارن از دقت بالایی نسبت به روش حل المان‌محدود دوبعدی مقطع در مرجع [5] برخوردار است. همچنین در مقطع متقارن سفتی‌های اصلی با بزرگی غالب، از دقت مناسبی برخودار می‌باشند، که با ارائه تغییر شکل تیر با این مقطع، بررسی می‌شود.

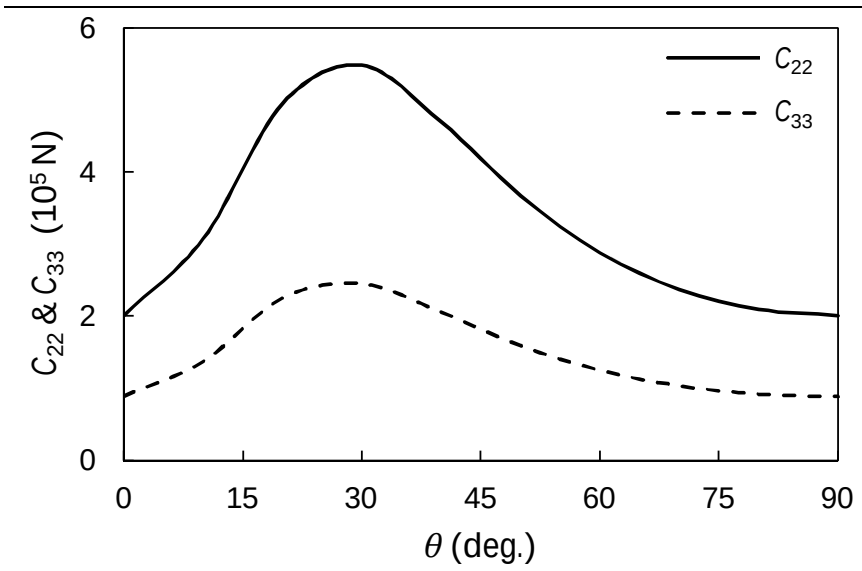
تغییرات سفتی‌های برشی مقطع نامتقارن با زاویه فایبر در شکل 7 نشان داده شده است. با توجه به این شکل در نزدیک زاویه فایبر θ=30° حداکثر و در زوایای صفر و 90 درجه کمترین سفتی برشی برای مقطع نامتقارن بروز می‌کند. با افزایش سفتی برشی، کرنش برشی کاهش یافته و مدل کلاسیک بدون اثرات برشی، نتایج نزدیکتری به مدل تیموشنکو ارائه می‌دهد. همچنین در سفتی‌های بزرگتر اختلاف بین سفتی‌های برشی در جهات x_2 و x_3 افزایش می‌یابد. در شکل 8 تغییرات سفتی کوپل برشی-خمشی مقطع فوق با تغییر زاویه فایبر θ رسم شده است. با توجه به شکل، حدود θ =20° حداکثر کوپل برشی-خمشی اتفاق افتاده و در نتیجه اعمال سفتی برشی در این حالت حائز اهمیت بیشتری است. در زوایای فایبر بزرگتر از 75 درجه اثر کوپل مادی سفتی‌های برشی بر خمش تیر قابل صرف نظر می‌باشد.

جدول 7 اجزاء ماتریس سفتی مقطع قوطی کامپوزیتی نامتقارن با زاویه θ=15°

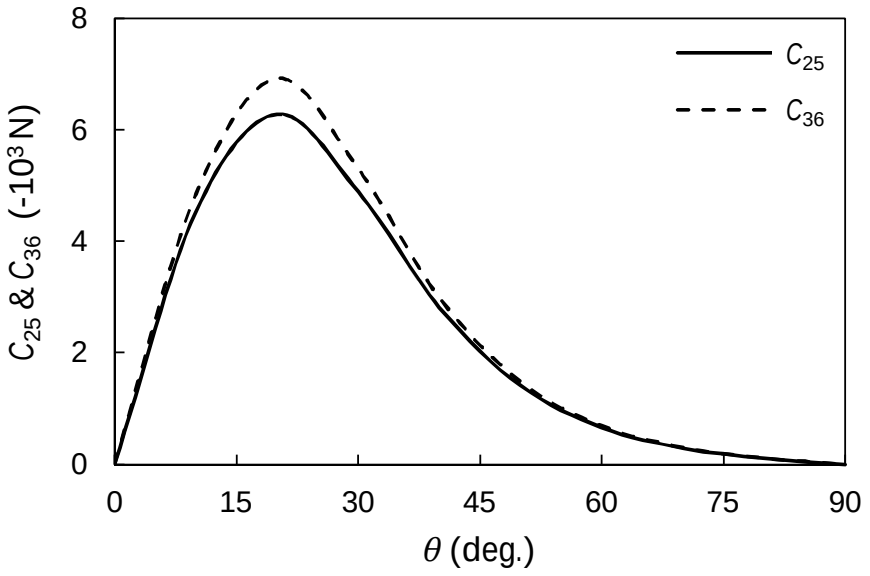
سفتی‌های غیرصفر	روش حاضر	المان‌محدود [5]	میزان خطا (%)
C_{11}(N)	$6/40\times10^{6}$	$6/39\times10^{6}$	0/16
C_{14}(N.m)	$1/22\times10^{4}$	$1/21\times10^{4}$	0/83
C_{22}(N)	$4/07\times10^{5}$	$4/01\times10^{5}$	1/5
C_{25}(N.m)	$-5/88\times10^{3}$	$-5/88\times10^{3}$	0
C_{33}(N)	$1/84\times10^{5}$	$1/75\times10^{5}$	5/1
C_{36}(N.m)	$-6/40\times10^{3}$	$-6/37\times10^{3}$	0/47
C_{44}(N.m²)	$4/87\times10^{1}$	$4/82\times10^{1}$	1/0
C_{55}(N.m²)	$1/90\times10^{2}$	$1/90\times10^{2}$	0
C_{66}(N.m²)	$4/95\times10^{2}$	$4/95\times10^{2}$	0

جدول 8 اجزاء ماتریس سفتی مقطع قوطی کامپوزیتی متقارن با زاویه θ=15°

سفتی‌های غیرصفر	روش حاضر	المان‌محدود [22]	میزان خطا (%)
C_{11}(N)	$6/13\times10^{6}$	$6/09\times10^{6}$	0/66
C_{12}(N)	$-8/28\times10^{5}$	$-8/18\times10^{5}$	1/2
C_{13}(N)	$-8/89\times10^{2}$	$-5/83\times10^{2}$	52
C_{22}(N)	$4/05\times10^{5}$	$3/93\times10^{5}$	3/0
C_{23}(N)	$3/07\times10^{2}$	$3/19\times10^{2}$	3/8
C_{33}(N)	$1/81\times10^{5}$	$1/73\times10^{5}$	4/6
C_{44}(N.m²)	$4/98\times10^{1}$	$4/88\times10^{1}$	2/0
C_{45}(N.m²)	$5/10\times10^{1}$	$5/05\times10^{1}$	0/99
C_{46}(N.m²)	-0/824	-1/00	17/6
C_{55}(N.m²)	$1/71\times10^{2}$	$1/70\times10^{2}$	0/59
C_{56}(N.m²)	-0/732	-1/06	31
C_{66}(N.m²)	$4/12\times10^{2}$	$4/05\times10^{2}$	1/7



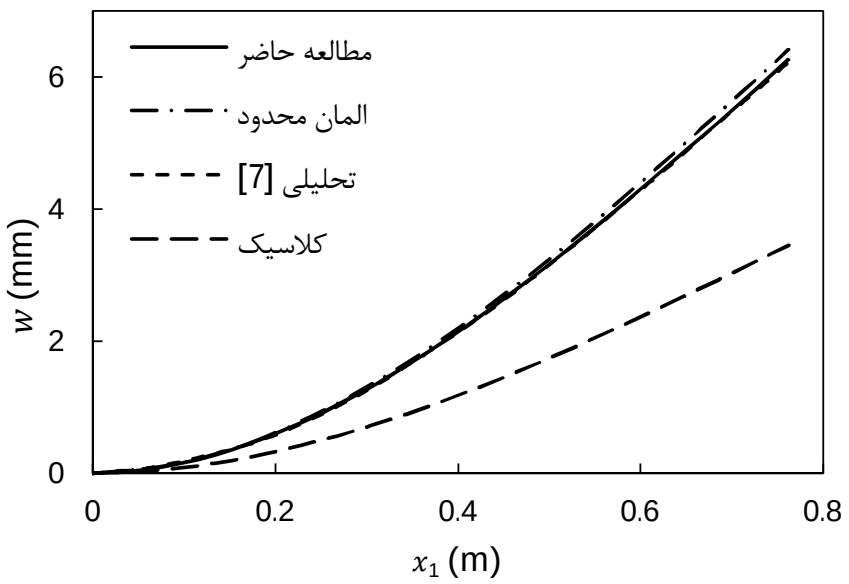
شکل 7 تغییرات سفتی‌های برشی مقطع نامتقارن با تغییر زاویه فایبر



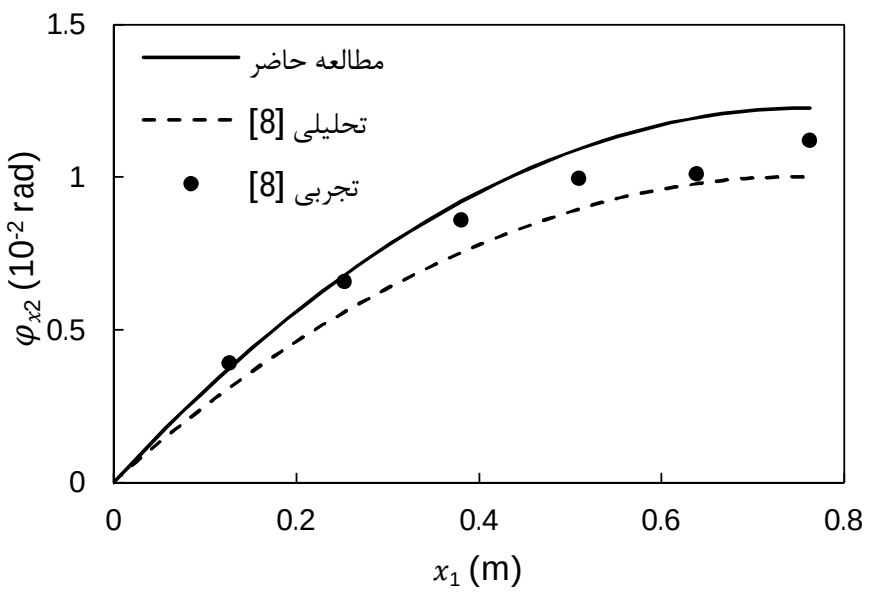
شکل 8 تغییرات سفتی‌های کوپل برشی-خمشی مقطع نامتقارن با تغییر زاویه فایبر

در شکل 9 تغییر شکل عرضی مقطع نامتقارن با زاویه فایبر 15 درجه، در طول تیر، تحت بار برشی F_3=4/4482 N در انتها، رسم و با نتایج تحلیلی مرجع [7] مقایسه شده است. مدل کلاسیک با صرف نظر از اثرات برشی در شکل نشان داده شده است که بیان‌گر خطای قابل ملاحظه‌ای می‌باشد. در شکل 10 تغییر زاویه خمشی این تیر تحت بار عرضی، با نتایج تحلیلی و تجربی مرجع [8] مقایسه شده است.

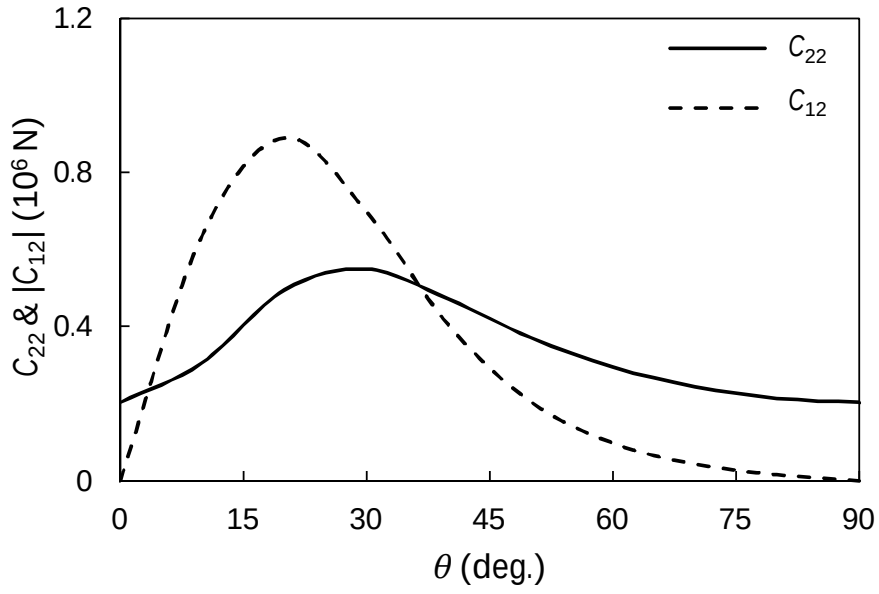
در شکل 11 سفتی برشی و کوپل کششی-برشی برای مقطع متقارن با تغییر زاویه فایبر نشان داده شده است. مشابه قبل با بررسی تغییرات سفتی کوپل، اهمیت در نظر گرفتن کوپل مادی در تیر کامپوزیتی روشن می‌شود.



شکل 9 جابه‌جایی عرضی در طول تیر نامتقارن با θ=15° تحت بار برشی

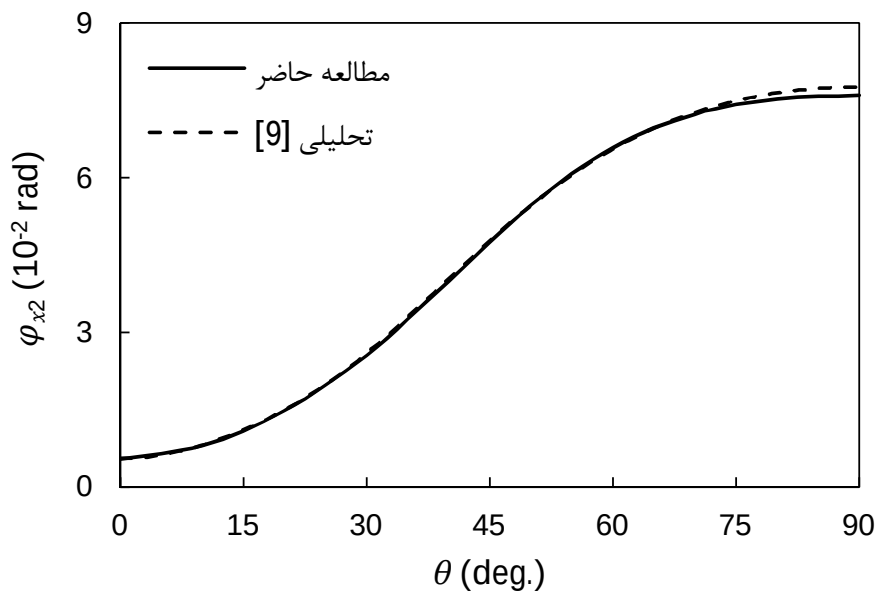


شکل 10 تغییر زاویه خمشی در طول تیر نامتقارن با θ=15° تحت بار برشی

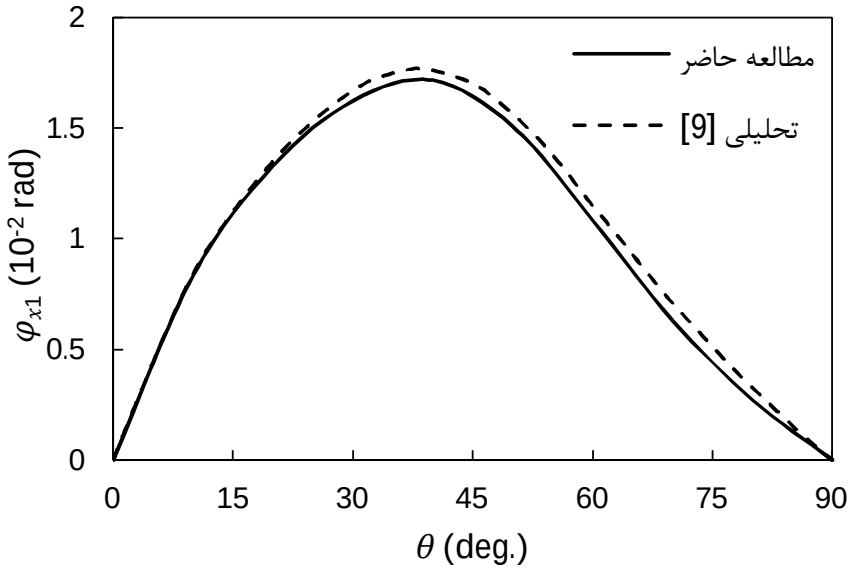


شکل 11 سفتی‌های برشی و کوپل کششی-برشی مقطع متقارن با تغییر زاویه فایبر

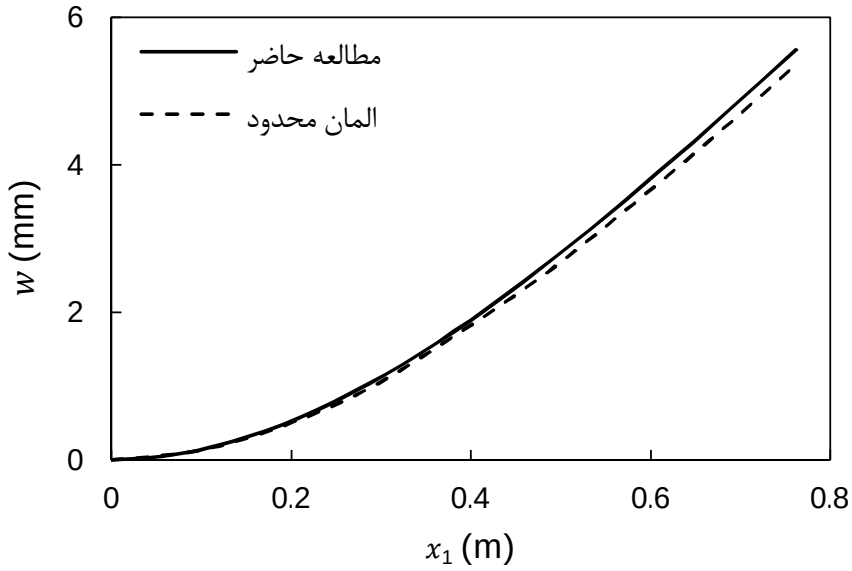
در شکل‌های 12 و 13 به ترتیب تغییر زاویه خمشی و پیچشی انتهای تیر با چیدمان مقطع متقارن در زوایای فایبر مختلف تحت بار برشی N 4/4482 با مرجع [9] مقایسه شده که از همگرایی خوبی برخوردار است. تغییر شکل پیچشی در تیر متقارن به‌دلیل وجود کوپل مادی خمشی-پیچشی در این تیر می‌باشد. با توجه به بزرگی سفتی این کوپل که در حدود سفتی خمشی تیر است، پیچش تیر تحت بارهای برشی و خمشی قابل ملاحظه بوده و صرف نظر از آن موجب خطا در تشخیص رفتار تیر خواهد شد. در شکل‌های 14 و 15 برای تیر متقارن، خیز عرضی در طول تیر، به ترتیب برای زاویه فایبر 15 و 30 درجه تحت بار عرضی بیان شده، رسم شده است. نتایج با مدل المان-محدود سه‌بعدی در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده که از همگرایی خوبی برخوردار است. با توجه به استفاده از تیرهای کامپوزیتی جدار نازک در سازه-هایی مانند بال هواپیما و پره توربین و طول بلند آن‌ها، استفاده از حل المان-محدود سه‌بعدی مستلزم استفاده از تعداد المان بسیار زیاد و صرف زمان و هزینه محاسباتی بالا می‌باشد. با استفاده از روش حاضر با توجه به استفاده از ماتریس سفتی مقطع با اثرات غیرکلاسیک سه‌بعدی، در یک مدل یک‌بعدی، در زمان بسیار کمتر، نتایج با دقت قابل قبول نسبت به مدل‌های سه‌بعدی المان‌محدود حاصل می‌شود. ویژگی‌های مدل استفاده شده در نرم‌افزار تجاری آباکوس در مرجع [16] اشاره شده است. همچنین در شکل‌های 16 و 17 نیز برای تیر متقارن تحت ممان خمشی N.m M_2=0/11 در انتهای تیر، به ترتیب دارای زاویه فایبر 15 و 30 درجه، تغییر شکل عرضی در طول تیر با مدل المان‌محدود در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است.



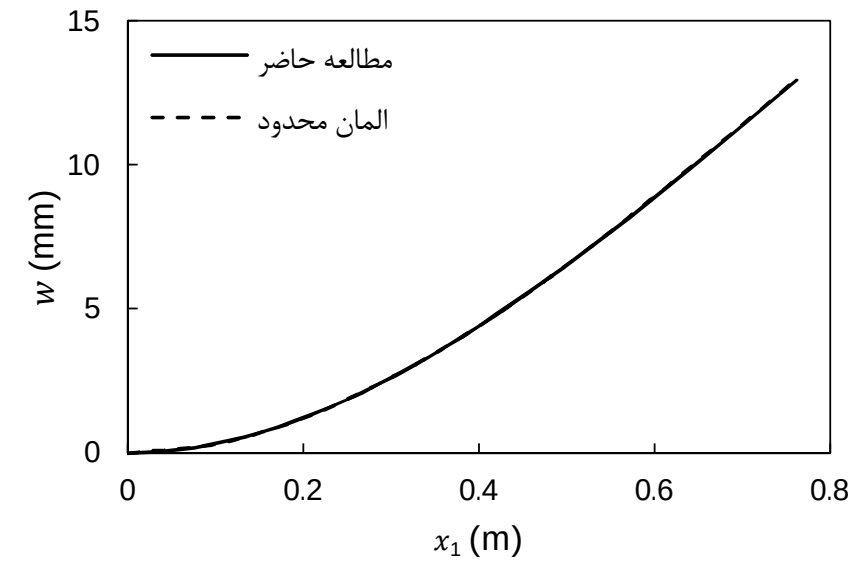
شکل 12 تغییر زاویه خمشی انتهای تیر متقارن تحت بار برشی



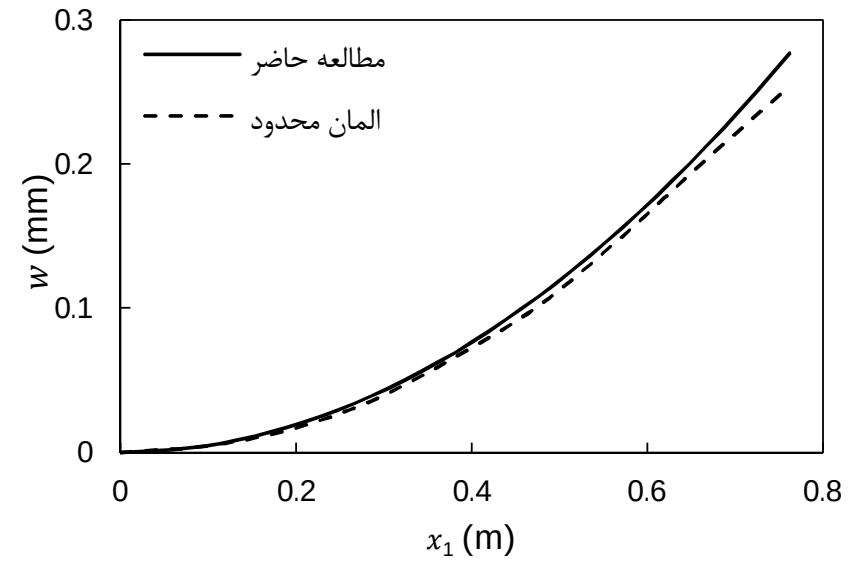
شکل 13 تغییر زاویه پیچشی انتهای تیر متقارن تحت بار برشی



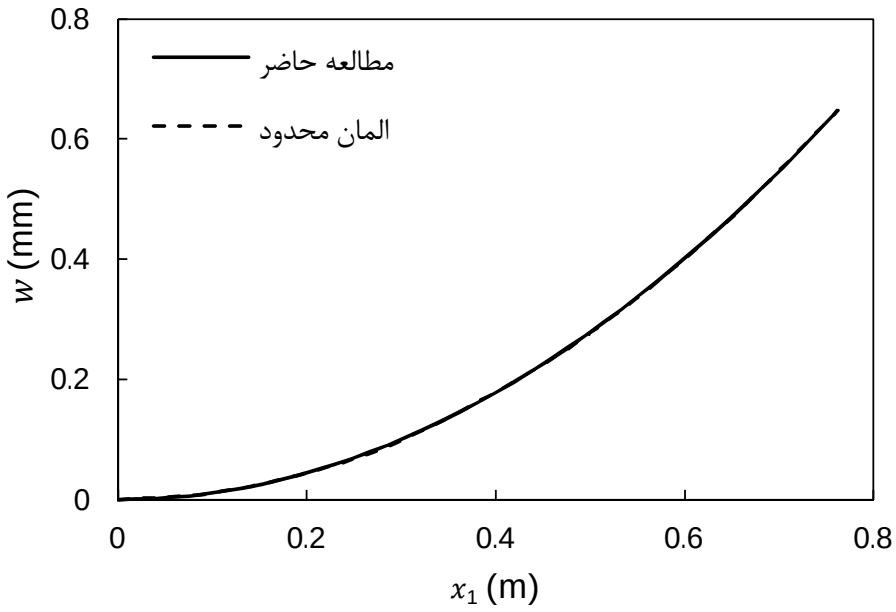
شکل 14 جابه‌جایی عرضی در طول تیر متقارن با θ=15° تحت بار برشی



شکل 15 جابه‌جایی عرضی در طول تیر متقارن با θ=30° تحت بار برشی

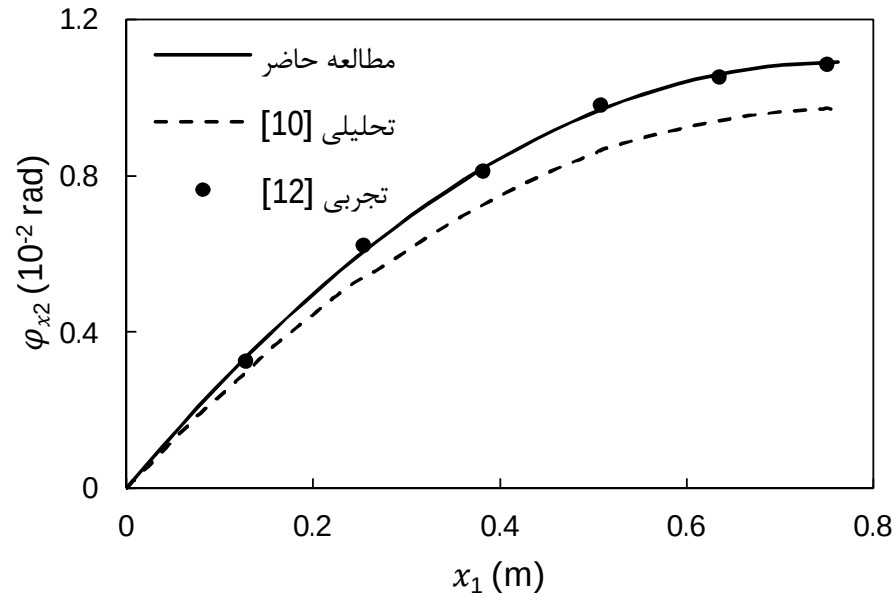


شکل 16 جابه‌جایی عرضی در طول تیر متقارن با θ=15° تحت ممان خمشی

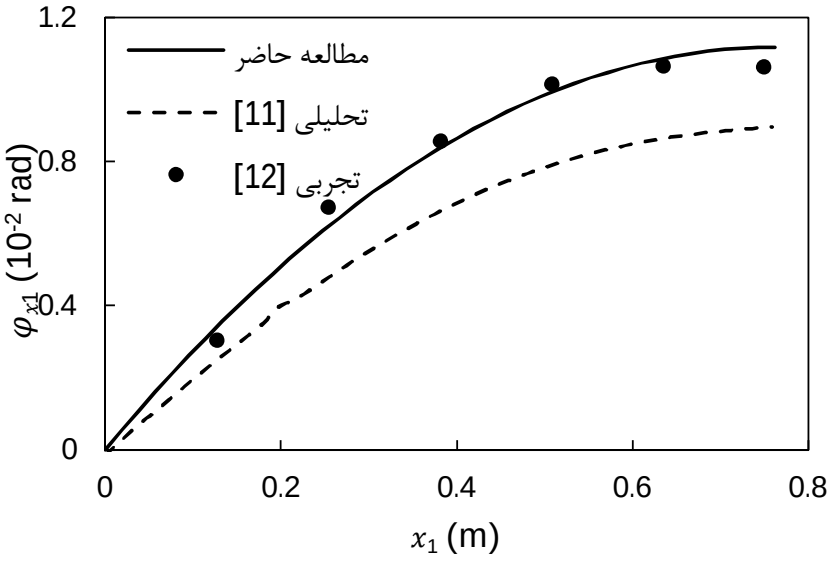


شکل 17 جابه‌جایی عرضی در طول تیر متقارن با θ=30° تحت ممان خمشی

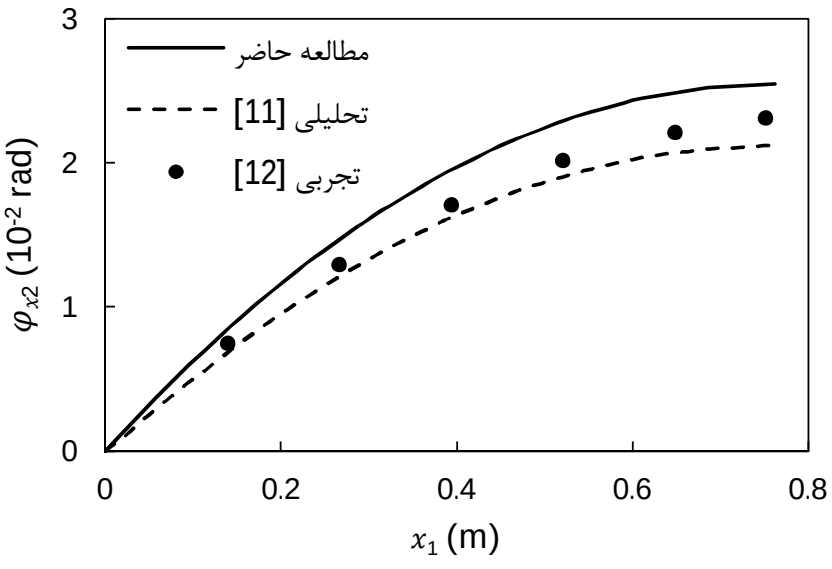
در شکل 18 تغییر زاویه خمشی تیر متقارن با زاویه فایبر 15 درجه، تحت بار برشی مشابه مدل‌های قبل، در طول تیر رسم شده است. مطالعه حاضر با نتایج تجربی [12] و تحلیلی [10] مقایسه شده که از همگرایی خوبی با نتایج تجربی برخوردار است. در شکل 19 تغییر زاویه پیچشی این تیر تحت بارگذاری برشی در انتهای تیر نشان داده شده است. همان‌طور که بیان شد، علت پیچش تیر متقارن تحت بار برشی وجود کوپل خمشی-پیچشی می‌باشد. بررسی این تغییر شکل‌ها در سازه‌هایی مانند پره هلیکوپتر، بال هواپیما و پره توربین باد که موجب تغییر زاویه حمله در اثر بارهای خمشی می‌شود، حائز اهمیت است. در شکل‌های 20 و 21 نیز به ترتیب تغییر زاویه خمشی و پیچش در طول تیر متقارن با زاویه فایبر 30 درجه تحت بار برشی در انتها نشان داده شده است. دقت مناسب زاویه پیچشی در طول تیر، نشان گر محاسبه دقیق سفتی کوپل خمشی-پیچشی می‌باشد. در شکل‌های 22 و 23 نیز تغییر زاویه خمشی و پیچش، برای تیر متقارن با زاویه فایبر 45 درجه با نتایج تجربی و تحلیلی [10-12] مقایسه شده است. با توجه به شکل‌های ارائه شده، نتایج تغییر شکل، برای زاویه فایبر کوچک‌تر، همگرایی مناسب‌تری با نتایج تجربی نشان می‌دهد. با توجه به کاربرد سازه‌های تیر شکل کامپوزیتی، استفاده از زاویه فایبر کوچک‌تر و در نتیجه سفتی خمشی بزرگتر، می‌تواند مطلوب می‌باشد.



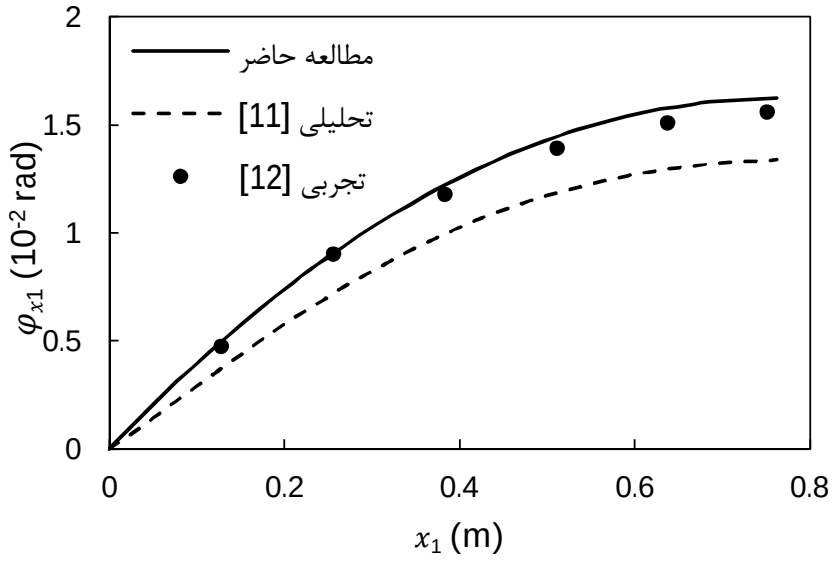
شکل 18 تغییر زاویه خمشی در طول تیر متقارن با θ=15° تحت بار برشی



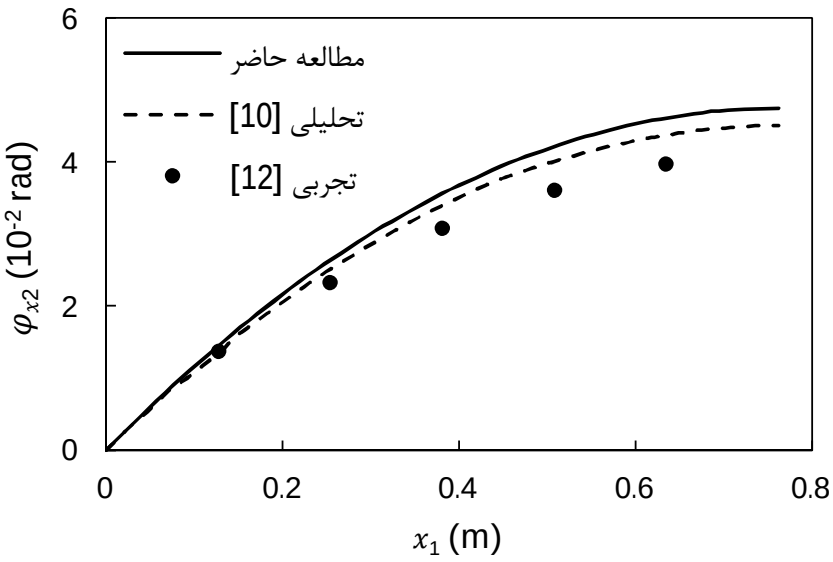
شکل 19 تغییر زاویه پیچشی در طول تیر متقارن با θ=15° تحت بار برشی



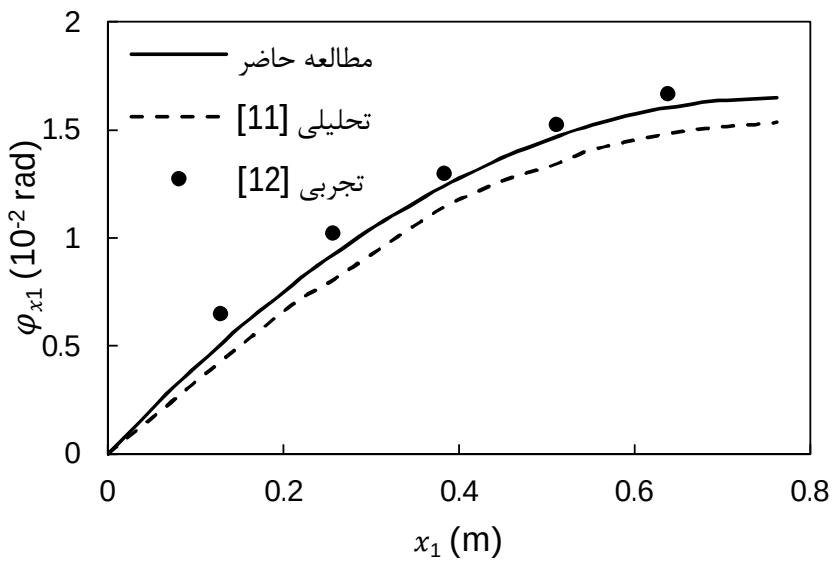
شکل 20 تغییر زاویه خمشی در طول تیر متقارن با θ=30° تحت بار برشی



شکل 21 تغییر زاویه پیچشی در طول تیر متقارن با θ=30° تحت بار برشی



شکل 22 تغییر زاویه خمشی در طول تیر متقارن با θ=45° تحت بار برشی



شکل 23 تغییر زاویه پیچشی در طول تیر متقارن با θ=45° تحت بار برشی

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل استاتیک تیر کامپوزیتی با در نظر گرفتن اثرات غیرکلاسیک مختلف مانند برش عرضی، تمامی کوپل‌های مادی بین درجات آزادی مقطع تیر، اثر تغییر شکل‌های سه‌بعدی مقطع با عنوان اعوجاج‌های داخل و خارج صفحه انجام شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در این تحقیق، امکان استفاده از توابع ساده چندجمله‌ای در روش ریلی-ریتز، برای حل سطح مقطع تیر کامپوزیتی و همسانگرد با اثر برش عرضی، با دقتی قابل قبول فراهم است. در نتیجه می‌توان در تحلیل این سازه‌ها فرآیند ایجاد شبکه در حل عددی مقطع را حذف نمود. همچنین با توجه به نتایج ارائه شده (شکل 9)، در برخی از هندسه‌ها و چیدمان‌های تیر کامپوزیتی، در نظر گرفتن اثر برش عرضی بسیار حائز اهمیت بوده و صرف نظر کردن از آن می-تواند خطایی در حد کمیت پاسخ ایجاد کند. با توجه به نسبت منظری بزرگ بسیاری از سازه‌های تیر شکل کامپوزیتی، استفاده از مدل المان محدود سه-بعدی، هزینه محاسباتی بالایی خواهد داشت. روش ارائه شده با انجام حل دو-بعدی در مقطع و استفاده از مدل ساده یک‌بعدی در طول تیر، امکان حل سریع با دقت قابل قبول را فراهم می‌سازد. نتایج روش حاضر برای تیر همسانگرد و کامپوزیتی با چیدمان‌های مختلف مقطع، با نتایج عددی، تحلیلی، تجربی و المان‌محدود سه‌بعدی مقایسه شده که از همگرایی مناسبی برخوردار است.

8- مراجع

[1] W. Yu, M. Blair, GEBT: A general-purpose nonlinear analysis tool for composite beams, *Composite Structures,* Vol. 94, No. 9, pp. 2677-2689, 2012.
[2] V. Giavotto, M. Borri, P. Mantegazza, G. Ghiringhelli, V. Carmaschi, G. Maffioli, F. Mussi, Anisotropic beam theory and applications, *Computers & Structures,* Vol. 16, No. 1, pp. 403-413, 1983.
[3] D. H. Hodges, A. R. Atilgan, C. E. Cesnik, M. V. Fulton, On a simplified strain energy function for geometrically nonlinear behaviour of anisotropic beams, *Composites Engineering,* Vol. 2, No. 5, pp. 513-526, 1992.
[4] W. Yu, V. V. Volovoi, D. H. Hodges, X. Hong, Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis, *AIAA journal,* Vol. 40, No. 10, pp. 2105-2112, 2002.
[5] W. Yu, D. H. Hodges, J. C. Ho, Variational asymptotic beam sectional analysis–an updated version, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 59, pp. 40-64, 2012.
[6] Q. Wang, W. Yu, Variational-asymptotic modeling of the thermoelastic behavior of composite beams, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 9, pp. 2330-2339, 2011.
[7] S. N. Jung, V. Nagaraj, I. Chopra, Refined structural model for thin-and thick-walled composite rotor blades, *AIAA journal,* Vol. 40, No. 1, pp. 105-116, 2002.
[8] E. C. Smith, I. Chopra, Formulation and evaluation of an analytical model for composite box-beams, *Journal of the American Helicopter Society,* Vol. 36, No. 3, pp. 23–35, 1990.
[9] V. V. Volovoi, D. H. Hodges, Single-and multicelled composite thin-walled beams, *AIAA journal,* Vol. 40, No. 5, pp. 960-965, 2002.
[10] C. Kim, S. R. White, Thick-walled composite beam theory including 3D elastic effects and torsional warping, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 34, No. 31-32, pp. 4237-4259, 1997.
[11] Z. Qin, L. Librescu, On a shear-deformable theory of anisotropic thin-walled beams: further contribution and validations, *Composite Structures,* Vol. 56, No. 4, pp. 345-358, 2002.
[12] R. Chandra, A. D. Stemple, I. Chopra, Thin-walled composite beams under bending, torsional, and extensional loads, *Journal of Aircraft,* Vol. 27, No. 7, pp. 619-626, 1990.
[13] S. Sina, H. Haddadpour, Axial–torsional vibrations of rotating pretwisted thin walled composite beams, *International Journal of Mechanical Sciences,* Vol. 80, pp. 93-101, 2014.
[14] D. A. Danielson, D. H. Hodges, Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 54, pp. 258-262, 1987.
[15] S. Dariushi, M. Sadighi, Analysis of composite sandwich beam with enhanced nonlinear high order sandwich panel theory, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 16, pp. 1-8, 2015. (In Persian)
[16] E. Ghafari, J. Rezaeepazhand, Static analysis of composite box beams by dimensional reduction method, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 14, No. 16, pp. 367-374, 2015. (In Persian)
[17] B. Popescu, D. H. Hodges, On asymptotically correct Timoshenko-like anisotropic beam theory, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 37, pp. 535-558, 1999.
[18] V. Berdichevskii, Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics,* Vol. 43, No. 4, pp. 664-687, 1979.
[19] J. C. Ho, W. Yu, D. H. Hodges, Energy transformation to generalized Timoshenko form by the variational asymptotic beam sectional analysis, *in Proceeding of 51st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference,* April 12–15, Orlando, Florida, 2010.
[20] A. H. Sheikh, O. T. Thomsen, An efficient beam element for the analysis of laminated composite beams of thin-walled open and closed cross sections, *Composite Science and Technology,* Vol. 68, pp. 2273–2281, 2008.
[21] E. Ghafari, *Analysis of 3D Composite Beams Using Dimensional Reduction Method,* MSc Thesis, Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, 2014. (In Persian)
[22] W. Yu, D. H. Hodges, V. V. Volovoi, C. E. S. Cesnik, On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams, *Journal of Solids and Structures,* Vol. 39, No. 19, pp. 5101–5121, 2002.
[23] M. H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications and Numerics,* Second Edittion, Boston: Academic Press, 2009.