ماهنامه علمى پژوهشى



mme.modares.ac.ir

کنترل آرایش ربات چرخدار دیفرانسیلی در تعقیب مسیرهای حرکت زمانی

على كيماسى خلجى

استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه خوارزمی، تهران تهران، صندوق پستى keymasi@khu.ac.ir ،15719-14911

چکیدہ	اطلاعات مقاله
کنترل آرایش گروهی رباتها در تعقیب مسیرهای حرکت زمانی یکی از مباحث مطرح در حوزه رباتیک است. استفاده از گروه رباتهای آرایش یافته نسبت به رباتهای جداگانه دارای مزایایی است که میتوان به بهرهوری استفاده از منابع، امکان همکاری رباتها، بالارفتن اطمینان و مقاومت بیشتر در برابر نقایص اشاره کرد؛ بنابراین آرایش کنترلی سیستمهای رباتیک چند عضوی و خودروهای هوشمند مورد توجه دانشمندان	مقاله پژوهشی کامل دریافت: 12 مرداد 1395 پذیرش: 27 شهریور 1395 ارائه در سایت: 05 آبان 1395
فراوانی قرار گرفته که در این مقاله به آن میپردازیم. نخست معادلات سینماتیکی و سینتیکی ربات متحرک دیفرانسیلی استخراج، مسیرهای حرکت زمانی مرجع برای ربات رهبر تولید و یک قانون کنترل سینماتیکی برای تعقیب مسیرهای مرجع ربات رهبر طراحی میشود. قانون کنترلی پیشنهاد شده ربات رهبر را به صورت مجانبی حول مسیرهای حرکت زمانی مرجع پایدار میسازد. یک الگوریتم کنترل دینامیکی برای تولید گشتاورهای عملگری توسط روش خطیسازی فیدبک طراحی میشود. در ادامه مسئله کنترل آرایش رباتها مورد بررسی قرار گرفته و الگوریتمی مناسب برای این منظور ارائه میشود تا رباتهای پیرو هنگام تعقیب مسیر توسط ربات رهبر در وضعیت مطوب نسبت به آن قرار گیرند، همچنین پایداری الگوریتمهای ارائه شده از روش لیاپانوف برای کنترلرهای سینماتیکی، دینامیکی و کنترل آرایش مورد بررسی قرار میگرد. در پایان نتایج بهدستآمده برای مسیرهای مرجع مختلف ارائه می شود که کارایی روش پیشنهادشده را نشان می دهد.	<i>کلید واژگان:</i> ربات متحرک چرخدار سیستمهای غیرهولونومیک تعقیب مسیرهای حرکت زمانی کنترل آرایش

Formation control of a differential drive wheeled robot in trajectory tracking

Ali Keymasi Khalaji

Department of Mechanical Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran *P.O.B. 15719-14911 Tehran, Iran, keymasi@khu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper Received 02 August 2016 Accepted 17 September 2016 Available Online 26 October 2016

Keywords: Wheeled mobile robot Nonholonomic systems Trajectory tracking Formation control

ABSTRACT

One of the main topics in the field of robotics is the formation control of the group of robots in trajectory tracking problem. Using organized robots has many advantages compared to using them individually. Among them the efficiency of using resources, the possibility of robots' cooperation, increasing reliability and resistance to defects can be pointed out. Therefore, formation control of multibody robotic systems and intelligent vehicles have attracted considerable attention, this is discussed in this paper. First, kinematic and kinetic equations of a differential drive wheeled robot are obtained. Then, reference trajectories for tracking problem of the leader robot are produced. Next, a kinematic control law is designed for trajectory tracking of the leader robot. The proposed controller steers the leader robot asymptotically, following reference trajectories. Subsequently, a dynamic control algorithm for generating system actuator toques is designed based on feedback linearization method. Afterwards, formation control of the robots has been considered and an appropriate algorithm is designed in order to organize the follower robots in the desired configurations, while tracking control of the wheeled robot. Furthermore, the stability of the presented algorithms for kinematic, dynamic and formation control laws is analyzed using Lyapunov method. Finally, obtained results for different reference paths are presented which represent the effectiveness of the proposed controller.

زمین مقید به قیود غیرهولونومیک است. این قیود در اثر غلتش خالص چرخها در حرکت رو به جلو و عدم لغزش در جهت جانبی به وجود میآیند. در مرجع [4] مدلسازی و ویژگیهای انواع مختلف رباتهای چرخدار ارائه شده و مورد بحث قرار گرفته است. برای عملکرد خودکار رباتهای متحرک چرخدار، مسائل کنترلی مختلفی در زمینه کنترل حرکت این سیستمها در تحقیقات مورد توجه قرار گرفته است. تعقیب مسیر در فضای کارتزین^ا [6,5]، پایدارسازی حول وضعیتهای مطلوب² [7,5] و تعقیب مسیرهای

1- مقدمه

امروزه کاربرد رباتهای متحرک در سیستمهای مهندسی در حال گسترش است. صنعت، کشاورزی و جنگلداری، معدنکاری، یزشکی و جراحی توسط رایانه، توان بخشی و مراقبت سلامت، تجسس و نجات، کاربردهای خانگی، استفاده در مکانهای خطرناک یا دور از دسترس و همچنین سرگرمی نمونههایی از این کاربردهاست؛ بنابراین مدلسازی و کنترل این سیستمها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است [1-3]. رباتهای متحرک چرخدار نمونهای از این سیستمهاست که به دلیل تماس میان چرخها با سطح

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Keymasi Khalaji, Formation control of a differential drive wheeled robot in trajectory tracking, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 11, pp. 103-112, 2016 (in Persian)



¹ Path following ² Point stabilization

Please cite this article using:

در این مقاله مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی مرجع آن مورد بررسی قرار گرفته و الگوریتمهای کنترلی مختلفی برای حل این مسئله پيشنهاد شده است. كنترل تطبيقي [11,10]، كنترل مود لغزشي [12,11]، كنترل بهينه [13]، كنترل پيشبين [14]، شبكههاى عصبى [16,15] و كنترل فازى [18,17] برخى از الگوريتمهاى ارائهشده است.

کنترل آرایش گروهی رباتها در تعقیب مسیرهای حرکت زمانی یکی از مباحث مطرح در این حوزه است. استفاده از گروه رباتهای آرایشیافته نسبت به رباتهای جداگانه دارای مزایایی است که از جمله آنها میتوان به بهرموری استفاده از منابع (مانند اشتراک استفاده از سنسورها)، امکان همکاری رباتها²، بالارفتن اطمینان و مقاومت بیشتر در برابر نقایص³ اشاره کرد؛ بنابراین آرایش کنترلی سیستمهای رباتیک چند عضوی⁴ و خودروهایی که به صورت هوشمند عمل میکنند مورد توجه دانشمندان فراوانی قرار گرفته است.

خواستگاه ایده کنترل آرایشیافته رباتها را میتوان در علوم زیستشناسی جستجو کرد. پژوهشگران علوم زیستی گونههایی از رفتارهای آرایشیافته را در طبیعت مشاهده کردهاند. ایشان دریافتند حیوانات گروههایی را تشکیل میدهند تا بتوانند یافتههایشان را در آن گروهها به صورت موثرتری تبادل کنند و ازاین شیوه بتوانند غذای بیشتری بیابند و خود را در برابر خطرات احتمالي محافظت كنند، [19]. از نكات قابل توجه زندگي اين حیوانات حفظ قلمرو شخصی و زندگی در یک فاصله مشخص از همسایگان همزمان با حضور در گروه است [20].

موارد فروانی از کاراتر بودن کاربرد چند ربات در حالت گروهی نسبت به کاربرد جداگانه چند ربات را می توان بیان کرد. ماموریتهای جستجو و نجات [22,21]، سیستمهای هدایت خودکار در بزرگراهها [23]، کنترل ترافیک هوایی [24] از جمله موارد کارایی آن است. استفاده در ارتش برای تجسس و تخريب معادن و غارها و شناسايي و تجسس در ميادين جنگي [25]، استفاده در مکانهای پرخطر مانند نیروگاههای هستهای و یا پاک کردن مواد شیمیایی سمی و خطرناک از جمله سایر کاربردهای تعدادی مجموعه رباتهای آرایشیافته است.

روشهای گوناگونی برای کنترل شکل آرایشی رباتهای هوشمند به کار گرفته شده است. در حالت کلی این روشها درپی ایجاد آرایش مطلوب از راه هماهنگ کردن هرچه بیشتر رباتها هستند. روش های مورد استفاده برای کنترل آرایش را میتوان به سه دسته کلی روش ساختار مجازی⁶ [27,26]، روش رفتار مبنا⁶ [28-30] و روش راهنما- پيرو⁷ [32,31] تقسيم كرد.

روش راهنما- پیرو از میان روشهای یادشده توجه محققان زیادی را به خود جلب كرده است. سادگى، قابليت اعتماد بالا و نياز نداشتن به دانش و محاسبات یک پارچه در سیستم از مهم ترین مزایای این روش است [33]، همچنین حجم محاسبات این روش کم بوده و قابلیت پیادهسازی بههنگام بر سیستم را فراهم میکند. وابستگی نداشتن پیروها به مسیرهای مرجع از دیگر مزایای این روش است و آرایش ربات به صورت کامل توسط موقعیت ربات رهبر تعیین میشود. در روش راهنما- پیرو میتوان ازمدلهای زاویه- فاصله و

يا فاصله- فاصله استفاده كرد. در مدل زاويه- فاصله رباتها به صورت حلقه یک زنجیر کنترل می شوند که در آن هر ربات از یک ربات پیروی می کند. در مدل فاصله- فاصله هر ربات از دو ربات به طور همزمان پیروی میکند. آرایش گروهی رباتها میتواند در اشکال گوناگونی چون خطی و ستونی، گوهای و غیره شکل گیرد. در مرجع [34] مدلی کنترلی با استفاده از تئوری گرافها برای گروهی از رباتها ارائه شده است که میتواند آرایشی مناسب برای عبور از میان موانع به وجود آورد. در مرجع [35] روشی بر مبنای میدانهای برداری برای کنترل آرایش رباتهای چرخدار و در مرجع [36] نیز الگوریتمی به روش مود لغزشی- فازی ارائه شده است.

اغلب پژوهشهای انجام گرفته در این حوزه ارائه کنترلرهای سینماتیکی به همراه کنترل حلقه باز برای ربات رهبر بوده است، ولی در حرکتهای با سرعت بالا و در صورت وجود جرمها و اینرسیهای غیرقابل چشمپوشی نیاز به کنترل دینامیکی برای تولید گشتاورهای عملگری وجود دارد که کمتر در این حوزه مورد توجه قرار گرفته است. کنترل همزمان حلقه بسته سینماتیکی و دینامیکی برای حرکت رهبر و کنترل آرایش حلقه بسته به صورت یک پارچه در کارهای پیشین کمتر بررسی شده است. دیفرانسیلی به تفصیل برای ربات دو چرخ در این مقاله طراحی شده است. طراحیهای صورت گرفته با تغییرات محدودی به سایر سیستمهای غیرهولونومیک نیز تعمیم پذیر است.

در روش راهنما پیرو که در این مقاله بررسی شده است، یکی از رباتهای گروه بهعنوان راهنما در نظر گرفته می شود و سایر رباتها موظف به ییروی از راهنما هستند. به این ترتیب مسئله هدایت آرایشیافته رباتها تبدیل به دو مسئله سادهتر می شود. یکی مسئله تعقیب مسیر توسط راهنمای گروه و دیگری مسئله حفظ ارایش توسط سایر رباتهای گروه است. رباتهای پیرو جهت تشکیل و حفظ نظام آرایش مطلوب موظف به تنظیم موقعیت خود با توجه به موقعیت راهنماست. بدین ترتیب برای تعیین یک مانور آرایشی تنها نیاز است که حرکت راهنما و مکان نسبی میان ربات راهنما و ربات پیرو مشخص شود.

ابتدا مدل سینماتیکی ربات متحرک چرخدار استخراج و مسیرهای حرکت مرجع برای تعقیب ربات رهبر تولید شده است، سپس یک قانون كنترل سينماتيكي براي تعقيب مجانبي مسيرهاي مرجع ربات رهبر طراحي و پایداری آن از روش لیاپانوف تحلیل شده است. در ادامه یک کنترلر دینامیکی برای ربات رهبر برای تولید گشتاورهای عملگری مورد نیاز طراحی شده است. مسئله کنترل آرایش رباتهای رهبر و پیرو تحلیل شده و بر مبنای محاسبات صورت گرفته ورودیهای کنترلی لازم برای رباتهای پیرو به منظور حفظ آرایش خود نسبت به ربات رهبر در فرایند تعقیب مسیرهای حرکت زمانی انجام پذيرفته است. نتايج بهدستآمده نشاندهنده كارايي الگوريتم كنترلي طراحی شده است.

در این مقاله یک الگوریتم کنترل آرایش برای رباتهای دو چرخ دیفرانسیلی در تعقیب مسیرهای حرکت زمانی ارائهشده و نتایج حاصل از قانون کنترلی طراحی شده ارائه گردیده که متضمن دستاوردهایی به شرح زیر است.

- طراحی یک قانون کنترل سینماتیکی فیدبک حالت برای رباتهای رهبر-پیرو از نوع دیفرانسیلی
- طراحی یک قانون کنترل دینامیکی خطیسازی فیدبک جهت تولید گشتاورهای عملگری برای رباتهای رهبر-پیرو
- طراحى الگوريتمي مناسب براي مسئله كنترل آرايش رباتهاي رهبر- پیرو در ضمن تعقیب مسیرهای حرکت مرجع

DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.25.8

حرکت زمانی [9,8] نمونههایی از مسائل مطرح در این زمینه است.

¹ Trajectory tracking Robot Parallelism

Fault tolerant

Multi-Agent Robotic Systems

Virtual Structure approach

⁵Behavior Based approach

⁷Leader- Follower approach

تحلیل پایداری قوانین کنترلی ارائهشده و ارائه نتایج حاصل از آن

2- توصيف سيستم و مدلسازى

سیستم مورد نظر همان گونه که در شکل 1 نمایش داده شده یک ربات چرخدار دیفرانسیلی است. چرخهای دیفرانسیلی ربات با عملگرهای مجزا مجهز شده و یک چرخ کروی نیز برای حفظ پایداری آن استفاده شده است. نقطه C نشاندهنده مرکز جرم ربات، $\varphi_r \ e_1 \ p$ به ترتیب نمایشدهنده جابهجایی زاویه ای چرخهای سمت راست و چپ ربات، a فاصله میان نقاط Pجابهجایی زاویه ای چرخهای سمت راست و چپ ربات، مناف فاصله میان نقاط Pماست. این پارامترها در شکل 1 نمایش داده شدهاند. وضعیت ربات متحرک با بردار مختصات تعمیم یافته $T(\theta \ y \ \theta) = q$ نشان داده میشود که در آن (x, y) مختصات نقطه P و θ جهت گیری ربات نسبت به دستگاه مرجع را نشان میدهد.

فرضیات یادشده در زیر برای حرکت ربات متحرک در نظر گرفته شده است.

- 1. حرکت ربات صفحهای است.
- 2. چرخهای ربات در جهت جانبی لغزش نمی کنند.
- 3. چرخهای ربات در حرکت رو به جلو غلتش خالص میکند.

وجود قیدهای غیرهولونومیک به دلیل غلتش بدون لغزش چرخها روی زمین بحث اصلی در سینماتیک روباتهای متحرک چرخدار است. این قیدها از یک رابطه میان مختصات تعمیمیافته و سرعتهای تعمیمیافته تشکیل می شوند. این رابطه نسبت به سرعتهای تعمیمیافته خطی و به صورت رابطه (1) است.

$$\mathcal{A}^{\mathrm{T}}(q)\dot{q} = \mathbf{0} \tag{2}$$

m در آن (*A*(G) ماتریس قیدی n .n × m تعداد قیدهای سیستم و m تعداد مختصات تعمیمیافته سیستم است.

ربات متحرک چرخدار دارای دیفرانسیلی ماتریس قیدی از رابطه (3) بهدست میآید.

 $\mathcal{A}^{\mathrm{T}}(q) = (\sin \theta - \cos \theta \quad \mathbf{0}) \tag{3}$ (3) (3) (4) (3) (4) (4) (4) (4) (4) (5) (5) (5) (6)

$$\mathcal{S}^{\mathrm{T}}(q)\mathcal{A}^{\mathrm{T}}(q) = \mathbf{0} \tag{4}$$

ماتریس $S(\mathcal{G})$ برای ربات متحرک چرخدار دیفرانسیلی به صورت رابطه (5) بهدست میآید.

$$\mathcal{S}(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \mathbf{0} \\ \sin \theta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$
(5)



Fig. 1 Differential drive wheeled mobile robot

شکل 1ربات متحرک چرخدار دیفرانسیلی و پارامترهای سیستم

مدل سینماتیکی به صورت رابطه (6) بهدست خواهد آمد.
$$\dot{q} = S(q)w$$
 (6)

که در آن $T = (\mathcal{U} \ \omega)^T$ بردار ورودیهای سینماتیکی مستقل سیستم، $\mathcal{U} = (\mathcal{U} \ \omega)^T$ بردار ورودیهای سینماتیکی مستقل سیستم، \mathcal{U} سرعت خطی نقطه P و ω سرعت زاویهای ربات است. این ورودیها با سرعتهای دورانی چرخهای دیفرانسیلی به صورت رابطه (7) مرتبط است.

$$\begin{cases} u = \frac{r}{2} \left(\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l \right) \\ \omega = \frac{r}{2b} \left(\dot{\phi}_r - \dot{\phi}_l \right) \end{cases}$$
(7)

شعاع چرخهای دارای عملگر ربات، b نصف فاصله میان چرخهای γ ربات، ϕ_l و $\dot{\phi}_l$ به ترتیب سرعتهای زاویهای چرخهای سمت راست و چپ دارای عملگر ربات است.

3- تعقیب مسیرهای حرکت زمانی

تعقیب مسیرهای حرکت زمانی یکی از مسائل مربوط به کنترل حرکت رباتهای متحرک خودکار به حساب می رود. در این مسئله مطلوب این است که ربات متحرک با آغاز از یک شرایط اولیه مشخص به یک مسیر دلخواه در فضای کارتزین برسد و با یک زمان بندی مشخص آن را تعقیب کند. حالتهای سیستم یا تابعی از آنها از نظر ریاضی یک سری حالتها یا توابع مطلوب را تعقیب می کند؛ بنابراین طراحی ورودیهای کنترلی سیستم باید به گونهای باشد که خطای تعقیب $(x - x_r, y - y_r)$ با گذشت زمان به مبدأ میل کند، که (x, y) مختصات نقطه P در دستگاه اینرسی است. هدف این بخش طراحی بردار ورودیهای کنترلی w برای نزدیک کردن نقطه P به بخش طراحی بردار ورودیهای کنترلی w برای نزدیک کردن نقطه P به

4- تولید مسیرهای حرکت مرجع

0)

فرض می کنیم مسیر مرجع در فضای کارتزین که باید توسط ربات تعقیب شود به صورت رابطه (8) بیان شود.

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \tag{8}$$

ما میخواهیم این مسیر را به فضای متغیرهای ربات نگاشت دهیم. در این صورت مسیرهای زمانی تولید شده برای ربات قابل پیمایش خواهند بود. با استفاده از روابط (6,5) میتوان رابطه (9) را بهدست آورد.

$$u = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{9}$$

همچنین
$$heta$$
 را میتوان به صورت رابطه (10) محاسبه کرد.

$$\theta = \operatorname{atan2}\{\dot{y}, \dot{x}\} \tag{1}$$

atan2 معکوس تابع تانژانت در یک دور کامل است.

$$\omega = \dot{\theta}(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{u^2(t)}$$
(11)

حال خروجی مطلوب سیستم را در دستگاه مختصات کارتزین به صورت $x_r = x_r(t)$, $y_r = y_r(t)$ بیان می کنیم که اندیس r برای نشان دادن متغیرهای سیستم روی مسیر مرجع استفاده شده است. از معادلات $\omega_r(t)$ $u_r(t)$, $\theta_r(t)$ مرجع (مانی مرجع ($\theta_r(t)$, $u_r(t)$ مارجع محاسبه می شوند.

ورودىھاى $\theta_r(t)$, $y_r(t)$, $x_r(t)$ ورودىھاى $\theta_r(t)$, $y_r(t)$, $y_r(t)$ ورودىھاى سينماتىكى مرجع $\omega_r(t)$, $\omega_r(t)$

105

یکنواخت¹ است.

ویژگی 2 ورودی سینماتیکی مرجع u_r دارای علامت معین (مثبت یا منفی) بوده و وقتی t به بینهایت میل می کند، ورودی های سینماتیکی مرجع $\omega_r(t)$ بوده و میل نمی کنند.

5- قانون كنترل سينماتيكي

معادلات خطای سیستم برای کنترل تعقیب مسیرهای حرکت زمانی براساس روندی که توضیح داده خواهد شد را تشکیل می شود. اگر این معادلات خطا در مبدأ پایدار شوند مسیرهای حرکت زمانی ربات متحرک حول مسیرهای حرکت زمانی مرجع پایدار و بدین ترتیب مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی مرجع ربات متحرک حل می شود.

هدف طراحی قانون کنترل فیدبک $u = u(q_{i}, \dot{q}_{i}, q_{r_{i}}v)$ برای ربات چرخدار دیفرانسیلی است به طوری که خطای تعقیب $\tilde{q} = q - q_{r} = \tilde{q}$ در مبدأ پایدار شود. این کنترلر از نوع سینماتیکی و ورودیهای آن سرعتهای خطی و دورانی است. مفروض است که متغیرهای وضعیت ربات در هر لحظه از زمان با سنسورها اندازه گیری میشوند و فیدبکهای کنترلی توسط این متغیرها تولید میشود. در ادامه حل این مسأله کنترلی ارائه می گردد.

یک بردار خطای نگاشتیافته در نظر می گیریم که براساس رابطه (12) تعریف شده است.

$$e=T(\theta_r) e \tag{12}$$

ماتریس تبدیل (*T*(θ_r متغیرهای خطای تعقیب را به یک فضای جدید نگاشت میدهد و به صورت رابطه (13) تعریف میشود.

$$\mathcal{T}(\theta_r) = \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r & \mathbf{0} \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$
(13)

بنابراین رابطه (14) را گونه یادشده در زیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{pmatrix} = \mathcal{T}(\theta_r) \begin{pmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ \theta - \theta_r \end{pmatrix}$$
(14)

حال از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق میگیریم تا دینامیک خطای تعقیب به صورت رابطه (15) بهدست آید.

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_{x} \\ \dot{e}_{y} \\ \dot{e}_{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{r} \sin \theta_{r} & \dot{\theta}_{r} \cos \theta_{r} & \mathbf{0} \\ -\dot{\theta}_{r} \cos \theta_{r} & -\dot{\theta}_{r} \sin \theta_{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{r} \\ y - y_{r} \\ \theta - \theta_{r} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos \theta_{r} & \sin \theta_{r} & \mathbf{0} \\ -\sin \theta_{r} & \cos \theta_{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{x}_{r} \\ \dot{y} - \dot{y}_{r} \\ \dot{\theta} - \dot{\theta}_{r} \end{pmatrix}$$

$$(15)$$

معادلات دیفرانسیل خطای تعقیب به صورت رابطه (16) با سادهسازی روابط بالا محاسبه می شود.

$$\begin{cases}
\dot{e}_x = \omega_r e_y + u \cos e_\theta - u_r \\
\dot{e}_y = -\omega_r e_x + u \sin e_\theta \\
\dot{e}_\theta = \omega - \omega_r
\end{cases}$$
(16)

e = معادلات خطای تعقیب یادشده را میتوان به صورت کلی e (e,q_r,v_r,v) نوشت.

در نتیجه دینامیک خطای تعقیب یک سیستم غیرخطی است. هدف طراحی قانون کنترل فیدبک $v = v(q, \dot{q}, q_r, v_r)$ به گونهای است که دینامیک خطای غیرخطی و شاید متغیر با زمان بالا در مبدأ پایدار شود. در این صورت حرکت ربات با آغاز از یک شرایط اولیه به مسیرهای حرکت زمانی مرجع همگرا می شود.

برای محاسبه قانون کنترلی $v = (u, \omega)^{\mathrm{T}}$ به گونهای که بردار خطای

استفاده شده است؛ بنابراین در مبدأ پایدار کند از تغییر مختصات $(e_x, e_y, e_{\theta})^{\mathrm{T}}$ استفاده شده است؛ بنابراین $(e_x, e_y, e_{\theta}, u, \omega) \rightarrow (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3, w_1, w_2)$ استفاده شده است؛ بنابراین تغییر متغیرهای حالت $\mathcal{Z}_3 = \operatorname{tan} e_{\theta}$ $\mathcal{Z}_2 = e_y$ $\mathcal{Z}_1 = e_x$ و تغییر متغیرهای حالت $\mathcal{Z}_3 = \operatorname{tan} e_{\theta}$ $\mathcal{Z}_2 = e_y$ $\mathcal{Z}_1 = e_x$ روی سیستم متغیرهای ورودی $w_2 = \mathrm{d}\mathcal{Z}_3/\mathrm{d}t$ $w_1 = u\cos e_{\theta} - u_r$ روی سیستم اعمال می شود.

به گونهای است کر یی ورودی یکی عمری ۲ مرو 2 مرو برای سیستم (۲۰) به گونهای است که تک تک متغیرهای $\mathbf{3} = \mathbf{1} \to \mathbf{3}$ مول صفر پایدار شود. بدین منظور ورودی های w_1 و w_2 به صورت رابطه (18) پیشنهاد می شود.

عمید می کنور می (۵۰) سیسمبر می کند. (17) را حول مبدأ پایداری مجانبی می کند.

(19) اثبات. برای این منظور از تابع مثبت معین \mathcal{V}_1 براساس رابطه (19) استفاده می شود.

$$\mathcal{V}_{1} = \frac{1}{2} \left(k_{1} z_{1}^{2} + \frac{k_{2}}{k_{3}} z_{2}^{2} + \frac{1}{k_{3}} z_{3}^{2} \right)$$
(19)
amin and the set of the set of

$$\dot{\mathcal{V}}_{1} = k_{1}z_{1}\dot{z}_{1} + \frac{k_{2}}{k_{3}}z_{2}\dot{z}_{2} + \frac{1}{k_{3}}z_{3}\dot{z}_{3} = k_{1}z_{1}(\omega_{r}z_{2} + w_{1}) + \frac{k_{2}}{k_{3}}z_{2}(-\omega_{r}z_{1} + (u_{r} + w_{1})z_{3}) + \frac{1}{k_{3}}z_{3}w_{2}$$
(20)

عبارت $[z_3 - k_3] u_r | z_3 | v_r | 2_3 پیدارساز و برای پایدارکردن <math>[z_3 + v_r]$ رفته است. سایر جملات برای تبدیل مشتق تابع لیاپانوف به یک تابع حداقل منفی نیمه معین به کار رفتهاند. مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف v_1 با این انتخابها برای ورودیهای سیستم به صورت رابطه (21) خواهد بود.

$$\dot{\mathcal{V}}_1 = -|u_r| \left\{ k_1 z_1 + \frac{k_2}{k_3} z_2 z_3 \right\}^2 - |u_r| z_3^2$$
⁽²¹⁾

همان گونه که ملاحظه می شود مشتق تابع مثبت معین \mathcal{V}_1 با انتخاب بهرههای کنترلی مثبت یک تابع منفی نیمه معین است؛ بنابراین \mathcal{V}_1 یک تابع افزایشی نیست و (**3 – 1 : i**) ت*ک* کران دار کلی² است. مشتق تابع لیاپانوف منفی نیمه معین شد و بنابراین نمی توان پایداری مجانبی سیستم را نتیجه گرفت. با استفاده از ویژگی 1، \mathcal{U}_1 , پیوسته و مشتق آن کران دار کلی است. برای رسیدن به پایداری مجانبی سیستم از لم باربالات³ استفاده می کنیم [37]. در واقع باید ثابت شود که مشتق دوم تابع لیاپانوف کراندار است. با لیاپانوف \mathcal{V}_1 به صورت رابطه (22) محاسبه می شود.

$$\begin{split} \ddot{\mathcal{V}}_{1} &= -\left\{k_{1}z_{1} + \frac{k_{2}}{k_{3}}z_{2}z_{3}\right\}^{2}\dot{u}_{r}\frac{u_{r}}{|u_{r}|} - 2|u_{r}|\left\{k_{1}z_{1} + \frac{k_{2}}{k_{3}}z_{2}z_{3}\right\}\\ &\left\{k_{1}(\omega_{r}z_{2} + w_{1}) + \frac{k_{2}}{k_{3}}(-\omega_{r}z_{1} + (u_{r} + w_{1})z_{3})z_{3} + \frac{k_{2}}{k_{3}}z_{2}w_{2}\right\}\\ &- z_{3}^{2}\dot{u}_{r}\frac{u_{r}}{|u_{r}|} - 2|u_{r}|z_{3}w_{2} \qquad (22)\\ &\cdot 1 \quad (3) \quad (3)$$

ورودیهای سینماتیکی مرجع $\omega_{
m r}$ و مشتقات آنها پیوسته و کراندار

¹Uniformely Bounded

²Globally bounded ³Barbalat Lemma

مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1395، دورہ 16، شمارہ 11

یکنواخت و طبق ویژگی 2r، 2 u_r دارای علامت معین (مثبت یا منفی) و کاملا مشخص است که $\ddot{\mathcal{V}}_1$ کراندار بوده و طبق لم باربالات وقتی t به بی نهایت میل می کند \mathcal{V}_1 به صفر میل خواهند کرد و در نتیجه سیستم پایدار مجانبی است [38].

با جای گذاری از ورودی های کنترلی روابط (18) در تغییر متغیرهای سیستم، ورودی های سینماتیکی u و w را به دست می دهد. این ورودی های کنترلر سینماتیکی بهعنوان فرمان های کنترلی برای طراحی کنترلر دینامیکی فرض می شوند و بنابراین در ادامه به صورت ($u_c = (u_c - \omega_c)$ نمایش داده می شوند.

6- مدل دینامیکی ربات چرخدار

معادلات دینامیکی ربات چرخدار از طریق روش لاگرانژ به صورت رابطه (23) بهدست میآید.

 $\mathcal{M}(q) \ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q}) = \mathcal{B}(q) \tau + \mathcal{A}^{\mathrm{T}}(q) \lambda$ (23) $\mathcal{C}(q, \dot{q}) \in \mathsf{c} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c}$ $\mathcal{D} = \mathsf{c} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c}$ $\mathcal{D} = \mathcal{D} = \mathcal{D} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c}$ $\mathcal{D} = \mathcal{D} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c}$ $\mathcal{D} = \mathcal{D} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c}$ $\mathcal{D} = \mathcal{D} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c}$ $\mathcal{D} = \mathcal{D} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c} \times \mathsf{c}$ $\mathcal{D} = \mathcal{D} \times \mathsf{c} \times \mathsf$

$$\mathcal{M}(q) = \begin{bmatrix} m & \mathbf{0} & -a m \sin \theta \\ \mathbf{0} & m & a m \cos \theta \\ -a m \sin \theta & a m \cos \theta & I_{\theta} \end{bmatrix}$$
$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -a m \cos \theta & \dot{\theta}^2 \\ -a m \sin \theta & \dot{\theta}^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{B}(q) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ b & -b \end{bmatrix}$$
(24)

که در آن *m* جرم ربات، *I*₀ ممان اینرسی جرمی ربات حول محور عمود بر صفحه حرکت، *a* فاصله میان مرکز جرم ربات و نقطه میانی چرخهای دیفرانسیلی و *۲* معرف شعاع چرخهای ربات است.

برای حذف مضارب لاگرانژ روش مکمل متعامد طبیعی میتواند استفاده شود [39]. در حقیقت مضارب لاگرانژ را میتوان با ضرب رابطه (23) در $\mathcal{S}^{\mathrm{T}}(\mathcal{G})$ از سمت چپ و استفاده از رابطه (4) حذف کرد و رابطه (25) را به صورت زیر بهدست آورد.

 $\overline{\mathcal{M}}_{1}(q) \dot{v} + \overline{\mathcal{M}}_{2}(q) v + \overline{\mathcal{C}}(q, \dot{q}) = \overline{\mathcal{B}}(q) \tau$ (25) $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}$

$$\overline{\mathcal{M}}_1(q) = S^{\mathrm{T}}(q) \mathcal{M}(q)S(q) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_2(q) = S^{\mathrm{T}}(q) \mathcal{M}(q)S(q) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\overline{B}(q) = S^{\mathrm{T}}(q) B(q) \in \Re^{2 \times 2}$$
(26)

همچنین میتوان بردار گشتاورهای سیستم را به صورت روابط (28,27) نوشت.

$$\tau = \mathcal{M}_{1}^{\dagger}(q) \dot{v} + \mathcal{M}_{2}^{\dagger}(q) v + \mathcal{C}^{\dagger}(q, \dot{q})$$
(27)

$$\Sigma_{P} c_{1} \tilde{c}_{1} \tilde{c}_{2} \tilde{c}_{$$

$$\mathcal{M}_{1}^{\dagger}(q) = \overline{\mathcal{B}}^{-1}(q) \ \overline{\mathcal{M}}_{1}(q)$$

$$\mathcal{M}_{2}^{\dagger}(q) = \overline{\mathcal{B}}^{-1}(q) \ \overline{\mathcal{M}}_{2}(q)$$

$$\mathcal{C}^{\dagger}(q, \dot{q}) = \overline{\mathcal{B}}^{-1}(q) \ \bar{\mathcal{C}}(q, \dot{q})$$

(28)

7- قانون کنترل دینامیکی گشتاور محاسبه شده

در این قسمت یک قانون کنترل دینامیکی بر مبنای خطیسازی فیدبک برای

ربات متحرک چرخدار طراحی میشود. خطای تعقیب کنترلر دینامیکی به صورت رابطه (29) در نظر گرفته میشود. (29) $\mathcal{E} = w_c - w$ که در آن \mathcal{U}_c رفرمانهای کنترلی سینماتیکی است که در قسمت پیشین طراحی شد. هدف این قسمت طراحی گشتاورهای عملگری جهت پایدارسازی خطاهای تعقیب حول مبداست. حال قانون کنترلی (30) پیشنهاد پایدارسازی خطاهای تعقیب حول مبداست. حال قانون کنترلی (30) پیشنهاد میشود. $\tau = \mathcal{M}_2^{\dagger}(q) v + \mathcal{M}_1^{\dagger}(q) \dot{v}_c + \mathcal{C}^{\dagger}(q, q)$

$$+\mathcal{M}_{1}^{+}(q) \mathcal{K} \mathcal{E}$$
(30)
$$(30)$$

در ان $\mathcal{K}=\mathsf{diag}(k_1\|\mathcal{E}\|,k_2)$ ماتریس بهره قطری مثبت معین کنترلر است.

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}^{\mathrm{T}} \mathcal{E} \tag{31}$$

$$\dot{\nu}_{\mathbf{z}} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}} \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}} (\dot{\nu}_{\mathrm{c}} - \dot{\nu})$$
(32)

$$\mathcal{V}_{\mathbf{z}} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}} \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}} (\dot{\nu}_{\mathrm{c}} - \dot{\nu})$$
(32)

$$\mathcal{V}_{\mathbf{z}} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}} \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{\mathrm{T}} (\dot{\nu}_{\mathrm{c}} - \dot{\nu})$$
(32)

 $\dot{\mathcal{V}}_{\mathbf{z}} = -\mathcal{E}^{\mathrm{T}} \,\mathcal{K} \,\mathcal{E} \tag{34}$

مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف در نظر گرفته شده منفی معین است. در نتیجه خطاهای تعقیب با استفاده از قانون کنترلی طراحی شده به سمت مبدأ میل می کند و ربات متحرک چرخدار به صورت مجانبی فرمان های کنترلی را دنبال خواهد کرد.

8- کنترل آرایش ربات چرخدار

در این قسمت به معرفی و طراحی کنترل آرایش ربات چرخدار دیفرانسیلی می پردازیم. در مدل هندسی ارائه شده در این پژوهش فرض شده است که رباتها از سنسورهای اسکن لیزری برای یافتن موقعیت نسبی یکدیگر استفاده می کنند. به این ترتیب هر ربات قادر است فاصله و زاویه خط واصل میان خود و رهبر گروه را در هر لحظه بیابد. برای انعطاف پذیری بیشتر مدل ارائه شده از هندسه زاویه- فاصله استفاده شده است. به این مفهوم که برای مشخص شدن موقعیت مطلوب هر کدام از رباتهای گروه کافی است فاصله ربات تا رهبر و زاویه خط واصل میان آنها با راستای افق مشخص شود. با استفاده از این هندسه می توان تمامی انواع نظامهای آرایشی را توصیف کرد.

مرکز جرم را جهت بیان ریاضی مسئله بهعنوان نقطهای مرجع از ربات برای کنترل آرایش در نظر می گیریم. ربات پیرو **i**-ام با توجه به شکل 2 با مختصات وضعیت $T_{i}(\mu, \mu)$ $\xi_i = (x_{c_i} \quad y_{c_i} \quad \theta_i)$ مختصات وضعیت $(x_{c_i} \quad y_{c_i} \quad \theta_i)$ و غرین آرایش مطلوب دارای مختصات وضعیت $(x_{c_i} \quad y_{c_i} \quad \theta_i)$ است. بدین منظور ورودیهای مختصات وضعیت رات پیرو باید به گونهای تعیین شود که فاصله و زاویه کنترلی برای هدایت ربات پیرو که در شکل به ترتیب با پارامترهای i_i و i_i نشان داده شدهاند، به مقادیر متناظر مطلوب خود یعنی i_i^h و i_i^h همگرا شوند.

بر اساس شکل 2 مختصات تعمیمیافته ربات پیرو **آ**-ام به صورت رابطه (35) قابل بیان است.

DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.25.8

$$\frac{\mathbf{d}\mathbf{e}_i}{\mathbf{dt}} = \dot{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\theta}_i) \left(\xi_i^d - \xi_i \right) + \mathcal{T}(\boldsymbol{\theta}_i) \left(\dot{\xi}_i^d - \dot{\xi}_i \right)$$
(43)

$$\mathbf{dI}_i^d / \mathbf{dt} = \mathbf{d} \boldsymbol{\varphi}_i^d / \mathbf{d} = \mathbf{d} \boldsymbol{\varphi}_i^d / \mathbf$$

$$\frac{\mathbf{d}\mathbf{e}_{i}}{\mathbf{d}t} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_{i}) & -l_{i}^{d} \sin(\phi_{i}^{d} + \theta - \theta_{i}) \\ \sin(\theta - \theta_{i}) & l_{i}^{d} \cos(\phi_{i}^{d} + \theta - \theta_{i}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ + \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{e}_{iy} \\ \mathbf{0} & -(a + \mathbf{e}_{ix}) \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_{i} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \omega_{i}^{d} \end{pmatrix}$$
(44)

در روابط بالا ورودیهای کنترل ارایش *µ* و ω_i باید به گونهای طراحی شوند که دینامیک خطا حول مبدأ پایدار مجانبی شود. بدین منظور با استفاده از روش خطیسازی فیدبک جملات غیرخطی در حد امکان حذف میشود؛ بنابراین ورودیهای کنترلی به صورت رابطه (45) انتخاب می شود.

$$v_{i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_{i}) & -l_{i}^{d} \sin(\phi_{i}^{d} + \theta - \theta_{i}) \\ \frac{1}{a} \sin(\theta - \theta_{i}) & \frac{l_{i}^{d}}{a} \cos(\phi_{i}^{d} + \theta - \theta_{i}) \end{pmatrix}$$

$$v + \begin{pmatrix} \beta_{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\beta_{2}}{a} & \frac{\beta_{3}}{a} \end{pmatrix}^{\mathbb{e}_{i}} \qquad (45)$$

$$c. \quad \text{i.i.} \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3}, \text{ i.i.} \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3}, \text{ i.i.} \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf$$

(44) قضیه . قانون کنترلی رابطه (45) برای سیستم دینامیکی رابطه (44) بردار جانون کنترلی میسازد.

(45) اثبات. دینامیک خطای سیستم با اعمال ورودیهای کنترلی رابطه (45) به صورت رابطه (46) خواهد بود.

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \omega_i & \mathbf{0} \\ -\omega_i & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \mathbf{0} & -\frac{\beta_2}{a} & -\frac{\beta_3}{a} \end{pmatrix} \mathfrak{E}_i \\
+ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{1}{a}\sin(\theta - \theta_i) & -\frac{l_i^d}{a}\cos(\phi_i^d + \theta - \theta_i) \end{pmatrix} \\
\mathfrak{v} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \omega_i^d \end{pmatrix} \tag{46}$$

زاویه مطلوب ربات پیرو در تمام فرایند کنترل به دلیل وجود قید غیرهولونومیک نمی تواند ثابت باشد و باید به گونه ای انتخاب شود که دینامیک بالا را پایدار مجانبی سازد؛ بنابراین می توان به صورت مشابه براساس روش خطی سازی فیدبک با حذف برخی از جملات غیرخطی روابط را ساده تر کرد و انتخاب رابطه (47) مناسب به نظر می رسد.

$$\omega_i^d = \frac{-}{a} \\ \left\{ u \sin(\theta - \theta_i) + l_i^d \omega \cos(\phi_i^d + \theta - \theta_i) + 2 \beta_2 e_{iy} \right\}$$
(47)

$$+ \frac{1}{2} \left\{ u \sin(\theta - \theta_i) + \frac{1}{2} e_{iy} \right\}$$
(47)

$$+ \frac{1}{2} e_{iy} \left\{ e_{iy} \right\}$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \omega_i & \mathbf{0} \\ -\omega_i & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \mathbf{0} & -\frac{\beta_2}{a} & -\frac{\beta_3}{a} \end{pmatrix} \mathbf{e}_i$$
(48)

اکنون تابع کاندیدای لیاپانوف (49) برای تحلیل پایداری پیشنهاد

مىشود.

$$\mathcal{V}_{3} = \frac{1}{2} \mathbb{e}_{i}^{\mathrm{T}} \mathrm{diag} \left(\left[\frac{\beta_{2}}{\beta_{3}a}, \frac{\beta_{2}}{\beta_{3}a}, \mathbf{1} \right] \right) \mathbb{e}_{i}$$

$$\tag{49}$$

است. با عناصر قطری تعیین شده است. با مناصر قطری تعیین شده است. با محاسبه مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف بالا رابطه (50) را خواهیم داشت.

$$\xi_{i} = \begin{pmatrix} x_{i} \\ y_{i} \\ \theta_{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + l_{i} \cos(\phi_{i} + \theta) + a \cos \theta \\ y + l_{i} \sin(\phi_{i} + \theta) + a \sin \theta \\ \theta_{i} \end{pmatrix}$$
(35)

همچنین مختصات تعمیمیافته مطلوب پیرو *i*-ام به صورت رابطه (36) قابل بیان است.

$$\xi_i^d = \begin{pmatrix} x_i^d \\ y_i^d \\ \theta_i^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + l_i^d \cos(\phi_i^d + \theta) + a \cos \theta \\ y + l_i^d \sin(\phi_i^d + \theta) + a \sin \theta \\ \theta \end{pmatrix}$$
(36)

فاصله نسبی ربات رهبر و پیرو را برحسب مؤلفههای ان میتوان به صورت رابطه (37) بیان کرد.

$$l_{i} = \sqrt{l_{ix}^{2} + l_{iy}^{2}}$$
(37)

این مؤلفهها برحسب متغیرهای سیستم مطابق شکل 2 به صورت رابطه (38) قابل بیان است.

$$l_{ix} = x - a \cos \theta_i - x_i = -l_i \cos (\phi_i + \theta)$$

$$l_{iy} = y - a \sin \theta_i - y_i = -l_i \sin(\phi_i + \theta)$$
(38)

برای زاویه نسبی
$$\psi_i$$
 نیز می نوان مطابق شکل 2 رابطه (۶۶) را نوشت.
 $\phi_i = \operatorname{atan2}\{l_{iy}, l_{ix}\} - \theta_i + \pi$
(39)

برای بهدست آوردن دینامیک آرایش سیستم با مشتق گیری از l_i و ϕ_i و با سادهسازی رابطه (40) را خواهیم داشت.

$$\frac{dl_i}{dt} = -u \cos \phi_i + u_i \cos \alpha_i + a \,\omega_i \sin \alpha_i$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \frac{1}{l_i^2} \{u \sin \phi_i - u_i \sin \alpha_i + a \,\omega_i \cos \alpha_i\} - \omega$$

$$\alpha_i = \phi_i + \theta - \theta_i \quad (40)$$

حال بردار خطای کنترل آرایش سیستم به صورت رابطه (41) تعریف می شود.

$$\mathbb{e}_{i} = \mathcal{T}(\theta_{i})(\xi_{i}^{d} - \xi_{i})$$
(41)

با استفاده از روابط (38) خطای کنترل آرایش را میتوان به صورت رابطه



Fig. 2. Formation control of a differential drive wheeled robot شکل 2 کنترل آرایش ربات متحرک چرخدار دیفرانسیلی

Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28]

$$\dot{\mathcal{V}}_{3} = -\mathbb{e}_{i}^{\mathrm{T}} \mathrm{diag}\left(\left[\frac{\beta_{2}\beta_{1}}{\beta_{3}a}, \frac{\beta_{2}^{2}}{\beta_{3}a}, \frac{\beta_{3}}{a}\right]\right) \mathbb{e}_{i}$$
(50)

بنابراین مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف در نظر گرفته شده منفی معین است. در نتیجه خطاهای کنترل آرایش با استفاده از قانون کنترلی طراحیشده به سمت مبدأ میل میکند و رباتهای پیرو به صورت مجانبی آرایش مطلوب خود را دنبال خواهند کرد.

9- نتايج بەدست آمدە

در این قسمت نتایج حاصل از اعمال الگوریتم کنترلی جهت بررسی کارایی کنترلر پیشنهادی روی یک ربات چرخدار رهبر و دو ربات پیرو ارائه می شود. مشخصات هندسی و مقادیر پارامترهای سیستم در جدول 1 و پارامترهای کنترلی نیز در جدول 2 ارائه شده است. مطلوب است که ربات رهبر مسیر مرجع مورد نظری را دنبال کند و همزمان رباتهای پیرو در موقعیتی مشخص نسبت به آن قرار گیرند.

پارامترهای هندسی ربات ارائهشده در جدول 1 بر اساس پارامترهای مدل آزمایشگاهی مورد استفاده در مرجع [10] انتخاب شده است. درباره پارامترهای کنترلی ارائهشده در جدول 2 نیز بهرههای کنترلی برای برآوردهکردن پایداری سیستم حلقه بسته مقادیر مثبتی فرض شدهاند. بهرههای کنترلی بزرگتر به عملکرد مناسبتر قانون کنترلی و بهرههای کوچکتر به عملکرد نامناسبتر سیستم حلقه بسته (پاسخهای نوسانی، زمان نشست بالاتر و فراجهش در پاسخهای سیستم و ...) منتهی میشوند. از سوی دیگر بهرههای کنترلی بزرگتر منجر به ورودیهای کنترلی بالاتری خواهد شد و برعکس؛ بنابراین بهرههای کنترلی برای داشتن همزمان عملکرد مناسب هرزمان عملکرد سیستم حلقه بسته و ...) منتهی میشوند. از سوی شده و برودیهای کنترلی بزرگتر منجر به ورودیهای کنترلی بالاتری خواهد شده و مرودیهای کنترلی معقول با استفاده از روش سعی و خطا و بررسی هرزمان عملکرد سیستم حلقه بسته و مقدار ورودیهای کنترلی انتخاب شدهاند. از آنجایی که پایداری مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی (روابط شده د. از آنجایی که پایداری مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی (روابط

جدول 1 مقادیر پارامترهای سیستم

Table 1 System parameters			
مقدار	توصيف	پارامتر	
0.9	جرم ربات	m	
0.0035	ممان اينرسي	Ι	
0.026	شعاع چرخھا	r	
0.1190	فاصله بین چرخهای ربات	2b	
0.029	طول PC	а	

جدول 2 پارامترهای کنترلی

Table 2 Control parameter	ers	
مقدار	توصيف	پارامتر
20, 60, 10	بهرههای کنترلر سینماتیکی	$k_3 k_2 k_1$
2, 50	بهرههای کنترلر دینامیکی	$k_2 \ k_1$
2, 5, 1	بهرههای کنترلر آرایش	eta_3 , eta_2 , eta_1
0.1, 0.05	پارامترهای کنترل آرایش 1	$l^d_2 \ l^d_1$
$-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$	پارامترهای کنترل آرایش 1	$\phi^d_2 \ \phi^d_1$
0.2, 0.1	پارامترهای کنترل آرایش 2	$l^d_2 \ l^d_1$
$-\theta_r \cdot -\pi - \theta_r$	پارامترهای کنترل آرایش 2	ϕ^d_2 ϕ^d_1
0.1, 0.1	پارامترهای کنترل آرایش 3	$l^d_2 \ l^d_1$
$-\frac{\pi}{2}-\theta_r$, $-\frac{\pi}{2}-\theta_r$	پارامترهای کنترل آرایش 3	$\phi^d_2 \ \phi^d_1$

خطاهای تعقیب مسیر ربات رهبر و خطاهای کنترل آرایش ربات با شروع از شرایط اولیه مختلف و با گذشت زمان محدودی حول صفر همگرا شده و پاسخهای گذرای سیستم از بین رفته، آرایش مطلوب در تعقیب مسیرهای حرکت مرجع دنبال شود.

مسیر حرکت ربات رهبر، رباتهای پیرو و مسیر مرجع 1 در صفحه حرکت در شکل 3، سیگنالهای خطای کنترلی برای تعقیب مسیر ربات رهبر و کنترل آرایش رباتهای پیرو در شکل 4 ترسیم و در شکلهای 5 و 6 نیز به ترتیب ورودیهای کنترلی سینماتیکی و دینامیکی ارائه شده است.

در شکل 3 مشاهده میشود که مسیر مرجع خطی در صفحه کارتزین توسط ربات رهبر با شروع از یک شرایط اولیه خارج از مسیر به خوبی دنبال شده است. به همین شکل دو ربات پیرو پس از پاسخ گذرای خود در فواصل تعیین شده آرایش مطلوب خود را گرفتهاند.

با مقایسه شکلهای 3 و 4 نیز کاملا مشخص است که پیرو 1 با خطای اولیهای حدود 1 متر، پیرو 2 با خطای اولیهای حدود 2 متر، و ربات رهبر با خطای اولیهای در حدود 0.25 متر شروع به حرکت کرده و در زمانی حدود 7.5 ثانیه تقریبا خطاهای کنترلی از بین رفته است و رباتها آرایش مطلوب خود را در تعقیب مسیر خطی در فضای کارتزین گرفتهاند.



Fig. 3 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 1 in planar motion (formation 1) $\,$

شکل 3 مسیر حرکت ربات رهبر، رباتهای پیرو و مسیر مرجع 1 در صفحه حرکت (آرایش 1)



Fig. 4 Error signals for the tracking control of the leader and formation control of the followers

شکل 4 سیگنالهای خطای کنترلی برای تعقیب مسیر ربات رهبر و کنترل آرایش رباتهای پیرو



Fig. 5 Kinematic control inputs for the leader and follower robots شکل 5 ورودی های کنترلی سینماتیکی برای ربات رهبر و رباتهای پیرو



Fig. 6 Dynamic control inputs for the leader and follower robots شکل 6 ورودی های کنترلی دینامیکی برای ربات رهبر و رباتهای پیرو

ورودیهای کنترلی هموار و دارای مقادیر و دامنه تغییرات و سرعت تغییرات معقولی است و در زمان t = 0 مقدار ورودیها دارای پرش نیست. این موضوع نشاندهنده انتخاب مناسب بهرههای کنترلی است که ورودیهای کنترلی مناسبی با داشتن عملکرد مناسب سیستم حلقه بسته داشته باشیم.

در شکل 7 مسیر حرکت ربات رهبر، رباتهای پیرو و مسیر مرجع 2 در صفحه حرکت نشان داده شدهاند. در شکل 8 سیگنالهای خطای کنترلی برای تعقیب مسیر ربات رهبر و کنترل آرایش رباتهای پیرو ترسیم شده است. در شکل 9 نیز مسیر حرکت ربات رهبر، رباتهای پیرو و مسیر مرجع 3 در صفحه حرکت نشان داده شدهاند.

با توجه به شکل 7 مسیر مرجع مربعی با گوشههای منحنی در صفحه کارتزین توسط ربات رهبر با شروع از یک شرایط اولیه خارج از مسیر به خوبی دنبال شده است. به این ترتیب دو ربات پیرو آرایش مطلوب خود را پس از پاسخ گذرای خود در فواصل تعیینشده گرفتهاند.

با مقایسه شکلهای 7 و 8 نیز کاملا مشخص است که پیرو 1 با خطای اولیهای حدود 0.7 متر، پیرو 2 با خطای اولیهای حدود 1.15 متر و ربات رهبر با خطای اولیهای در حدود 0.2 متر شروع به حرکت کرده و در زمانی حدود 12 ثانیه تقریبا خطاهای کنترلی از بین رفته است و رباتها آرایش مطلوب خود را در تعقیب مسیر خطی در فضای کارتزین گرفتهاند.

با توجه به شکل 9 مسیر سینوسی سوار بر یک دایره در صفحه کارتزین توسط ربات رهبر با شروع از یک شرایط اولیه خارج از مسیر به درستی دنبال شده است. دو ربات پیرو نیز آرایش مطلوب را پس از پاسخ گذرای خود در

فواصل تعيين شده گرفتهاند.

در شکلهای 10 و 11 مسیر حرکت ربات رهبر، رباتهای پیرو و مسیرهای مرجع در صفحه حرکت با دو آرایش متفاوت نشان داده شدهاند.

از مقایسه دو آرایش نیز کاملا مشخص است مسیر مرجع در فضای کارتزین برای رباتهای پیرو در راستاهای افقی و عمودی گسترش پیدا کرده است و الگوریـتم ارائه شده عملکرد مناسبی را نشان میدهد.

نتایج بهدستآمده نشان میدهد الگوریتم کنترل دینامیکی عملکرد مناسبی در کنترل آرایش ربات متحرک چرخدار دیفرانسیلی در تعقیب مسیرهای مرجع زمانی از خود نشان میدهد. همان گونه که مشاهده می شود ربات رهبر خود را برای مسیرهای مرجع مختلف با شروع از شرایط اولیه و پس از زمانی محدود به مسیر مرجع رسانده و در حاشیه مناسبی از آن قرار گرفته است. خطاهای کنترلی همان گونه که با اثبات پایداری در مراحل مختلف طراحی الگوریتم کنترل انتظار می فت با گذشت زمان به صفر همگرا شده و از بین می روند. در نتیجه رباتهای پیرو در آرایش تعیین شده مطلوب خود در وضعیت مورد نظر نسبت به مسیر مرجع قرار می گیرند. ورودی های کنترلی تولید شده دارای مقادیر مناسبی است و در محدوده معقولی به عنوان



Fig. 7 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 2 in planar motion (formation 1)

شکل 7 مسیر حرکت ربات رهبر، رباتهای پیرو و مسیر مرجع 2 در صفحه حرکت (آرایش 1)



Fig. 8 Error signals for the tracking control of the leader and formation control of the followers

شکل 8 سیگنالهای خطای کنترلی برای تعقیب مسیر ربات رهبر و کنترل آرایش رباتهای پیرو

DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.25.8

Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-28

حرکت یک ربات چرخدار بهعنوان یک سیستم غیرخطی، کم عملگر و غیرهولونومیک ارائه شده است. نخست معادلات دینامیکی سیستم استخراج، مسیرهای حرکت مرجع مناسب برای ربات رهبر تولید و یک کنترلر سینماتیکی براساس فیدبک حالتهای سیستم برای ربات رهبر طراحی شد. در ادامه یک قانون کنترل دینامیکی برای تولید گشتاورهای عملگری ربات رهبر به روش خطیسازی فیدبک طراحی شد. سپس مسئله کنترل آرایش رباتها مورد بررسی قرار گرفت و الگوریتمی مناسب برای آن پیشنهاد شد تا رباتهای پیرو هنگام تعقیب مسیر توسط ربات رهبر در وضعیت مطلوبی نسبت به آن قرار گیرند، همچنین پایداری قانون کنترلی از طریق روش لیاپانوف برای کنترلرهای سینماتیکی، دینامیکی و الگوریتم کنترل آرایش بررسی شد. نتایج بهدستآمده کارآمد بودن روش ارائهشده برای کنترل آرایش مجموعه رباتها در تعقیب مسیرهای زمانی مرجع مختلف را تأیید

11- مراجع

- A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Dynamic modeling and tracking control of a car with n trailers, *Multibody System Dynamics*, Vol. 37, No. 2, pp. 211-225, 2016.
- [2] A. Keymasi Khalaji, M. Rahimi Bidgoli, S. A. A. Moosavian, Non-modelbased control for a wheeled mobile robot towing two trailers *Multi-body Dynamics*, Vol. 229, No. 1, pp. 97-108, 2015.
- [3] A. K. Khalaji, S. A. A. Moosavian, Stabilization of a tractor-trailer wheeled robot, *Mechanical Science and Technology*, Vol. 30, No. 1, pp. 421-428, 2016.
- [4] G. Campion, G. Bastin, B. Dandrea Novel, Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 12, No. 1, pp. 47-62, 1996.
- [5] C. Samson, Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 1, pp. 64-77, 1995.
- [6] L. Chang Boon, W. Danwei, GPS-Based path following control for a car-like wheeled mobile robot with skidding and slipping, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 16, No. 2, pp. 340-347, 2008.
- [7] P. Morin, C. Samson, Control of nonlinear chained systems: From the Routh-Hurwitz stability criterion to time-varying exponential stabilizers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 45, No. 1, pp. 141-146, 2000.
- [8] F. N. Martins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli-Filho, T. F. Bastos-Filho, An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking, *Control Engineering Practice*, Vol. 16, No. 11, pp. 1354-1363, 2008.
- [9] C.-Y. Chen, T.-H. S. Li, Y.-C. Yeh, C.-C. Chang, Design and implementation of an adaptive sliding-mode dynamic controller for wheeled mobile robots, *Mechatronics*, Vol. 19, No. 2, pp. 156-166, 2009.
- [10] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Robust Adaptive Controller for a Tractor-Trailer Mobile Robot, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 19, No. 3, pp. 943 - 953, 2014.
- [11] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Adaptive sliding mode control of a wheeled mobile robot towing a trailer, *Systems and Control Engineering*, Vol. 229, No. 2, pp. 169-183, 2015.
- [12] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, fuzzy sliding mode control law for a wheeled mobile robot towing a trailer, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 4, pp. 91-98, 2014. (in Persian فارسى)
- [13] H. Chih-Lyang Hwang Chih-Lyang, C. Li-Jui Chang Li-Jui, Trajectory tracking and obstacle avoidance of car-like mobile robots in an intelligent space using mixed H2/H∞; decentralized control, *IEEE ASME Trans Mechatron*, Vol. 12, No. 3, pp. 345-352, 2007.
- [14] G. Klančar, I. Škrjanc, Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 55, No. 6, pp. 460-469, 2007.
- [15] J. Ye, Adaptive control of nonlinear PID-based analog neural networks for a nonholonomic mobile robot, *Neurocomputing*, Vol. 71, No. 7–9, pp. 1561-1565, 2008.
- [16] J. Ye, Tracking control for nonholonomic mobile robots: Integrating the analog neural network into the backstepping technique, *Neurocomputing*, Vol. 71, No. 16–18, pp. 3373-3378, 2008.
- [17] C.-Y. Chen, T.-H. S. Li, Y.-C. Yeh, EP-based kinematic control and adaptive fuzzy sliding-mode dynamic control for wheeled mobile robots, *Information Sciences*, Vol. 179, No. 1–2, pp. 180-195, 2009.
- [18] C. Chian-Song, L. Kuang-Yow, Hybrid fuzzy model-based control of nonholonomic systems: A unified viewpoint, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 16, No. 1, pp. 85-96, 2008.
- [19] T. Balch, R. C. Arkin, Behavior-based formation control for multirobot



Fig. 9 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 3 in planar motion (formation 1)

شکل 9 مسیر حرکت ربات رهبر، رباتهای پیرو و مسیر مرجع 3 در صفحه حرکت (آرایش 1)



Fig. 10 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 3 in planar motion (formation 2)

شکل 10 مسیر حرکت ربات رهبر، رباتهای پیرو و مسیر مرجع 3 در صفحه حرکت (آرایش 2)



Fig. 11 Motion path for the leader robot, the followers and the reference path 2 in planar motion (formation 3)

شکل 11 مسیر حرکت ربات رهبر، رباتهای پیرو و مسیر مرجع 2 در صفحه حرکت (آرایش 3)

10- نتیجه گیری

در این مقاله روشی جدید برای کنترل آرایش دینامیکی در تعقیب مسیرهای

DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.11.25.8

Technique, International Journal of Computers, Communications & Control (IJCCC), Vol. 3, No. 3, pp. 179-184, 2008.

- [30] A. Bazoula, H. Maaref, Fuzzy Separation Bearing Control for Mobile Robots Formation, Proceedings of the World Academy of Science, Engineering and
- Technology, Vol. 23, pp. 1-7, 2007.
 [31] L. Xiaohai, X. Jizong, C. Zijun, Backstepping based multiple mobile robots formation control, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots* and Systems (IROS 2005), Edmonton, Canada, August 2-4, 2005.
- [32] J. Sanchez, R. Fierro, Sliding mode control for robot formations, in Proceeding of, 438-443.
- [33] L. Consolini, F. Morbidi, D. Prattichizzo, M. Tosques, Leader-follower formation control of nonholonomic mobile robots with input constraints, Automatica, Vol. 44, No. 5, pp. 1343-1349, 2008.
 [34] J. P. Desai, J. P. Ostrowski, V. Kumar, Modeling and control of formations
- of nonholonomic mobile robots, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 17, No. 6, pp. 905-908, 2001.
- [35] J. W. Kwon, D. Chwa, Hierarchical formation control based on a vector field method for wheeled mobile robots, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 28, No. 6, pp. 1335-1345, 2012.
- [36] Y. H. Chang, C. W. Chang, C. L. Chen, C. W. Tao, Fuzzy sliding-mode formation control for multirobot systems: design and implementation, *IEEE* Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), Vol. 42, No. 2, pp. 444-457, 2012.
- [37] J. J. Slotine, W. Li, Applied Nonlinear Control, pp. 57-76, New Jersey: Prentice-Hall International, 1991.
- [38] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, pp. 167-191, New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [39] S. K. Saha, J. Angeles, Dynamics of Nonholonomic Mechanical Systems Using a Natural Orthogonal Complement, Applied Mechanics, Vol. 58, No. 1, pp. 238-243, 1991.

teams, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 14, No. 6, pp. 926-939, 1998

- [20] J. M. Cullen, E. Shaw, H. A. Baldwin, Methods for measuring the threedimensional structure of fish schools, Animal Behaviour, Vol. 13, No. 4, pp. 534-543, 1965.
- [21] R. R. Murphy, Human-robot interaction in rescue robotics, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews), Vol. 34, No. 2, pp. 138-153, 2004.
- [22] I. R. Nourbakhsh, K. Sycara, M. Koes, M. Yong, M. Lewis, S. Burion, Human-robot teaming for search and rescue, IEEE Pervasive Computing, Vol. 4, No. 1, pp. 72-79, 2005. [23] A. Y. S. Lam, Y. W. Leung, X. Chu, Autonomous-vehicle public
- transportation system: scheduling and admission control, IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, Vol. 17, No. 5, pp. 1210-1226, 2016.
- [24] K. Margellos, J. Lygeros, Toward 4-D trajectory management in air traffic control: a study based on monte carlo simulation and reachability analysis, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 21, No. 5, pp. 1820-1833, 2013.
- [25] D. Voth, A new generation of military robots, IEEE Intelligent Systems, Vol. 19, No. 4, pp. 2-3, 2004. [26] M. Egerstedt, H. Xiaoming, Formation constrained multi-agent control, *IEEE*
- Transactions on Robotics and Automation, Vol. 17, No. 6, pp. 947-951, 2001.
- [27] W. Ren, R. Beard, Decentralized Scheme for Spacecraft Formation Flying via the Virtual Structure Approach, Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 27, No. 1, pp. 73-82, 2004.
- [28] H. Yamaguchi, A distributed motion coordination strategy for multiple nonholonomic mobile robots in cooperative hunting operations, Robotics and Autonomous Systems, Vol.3, No. 4, pp. 2984-2991, 2003.
 [29] A. Bazoula, H. Maaref, Formation Control of Multi-Robots via Fuzzy Logic