مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر 1394، دوره 15، شماره 7، ص‌ص 261-273

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

مدل‌سازی خودکار گسترش ترک در اندرکنش با حفره و مرز ناهمگن بدون مش‌بندی مجدد

رضا نادری[1*]، عبدالغفور خادم‌الرسول[2]

1- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

*شاهرود، 3619995161، r_naderi@shahroodut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27بهمن 1393

پذیرش: 02 خرداد 1394

ارائه در سایت: 19 خرداد 1394

کلید واژگان:

اجزای محدود توسعه یافته

روش مجموعه تراز

مرز ناهمگن

حفره

گسترش ترک

چکیده

روش اجزای محدود توسعه یافته روشی جدید بر پایه غنی‌سازی پیکره‌بندی واحد ناپیوسته در فضای تقریب اجزای محدود استاندارد می‌باشد. علیرغم پیشرفت‌هایی که در نرم افزارهای تولید شبکه اجزای محدود بوجود آمده است، کماکان تعویض و بروز رسانی شبکه اجزای محدود در خلال فرایند گسترش ترک بسیار مشکل و پیچیده باقی مانده است. زمانی چنین موضوعی پیچیده‌تر خواهد شد که چندین ناپیوستگی و مرز داخلی ناهمگن، در دامنه فیزیکی مسأله که با المان‌های محدود گسسته‌سازی شده وجود داشته باشد. روش اجزای محدود توسعه یافته در ترکیب با روش مجموعه تراز می‌تواند بر این مشکل فایق آید. در این مطالعه، ترک‌های از پیش تعریف شده و مرزهای داخلی، شامل حفره و مرز ناهمگن به کمک توابع مجموعه تراز تولید می‌شود. به علاوه اثر اندرکنش مرزهای داخلی بر الگوی گسترش ترک مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین مقادیر فاکتور شدت تنش در مود مرکب از طریق انتگرال اندرکنش که بر پایه انتگرال مستقل از مسیر J بدست آمده است، محاسبه می‌شوند. مثال‌های عددی که در این مطالعه مورد بررسی قرار می‌گیرند با دیدگاه کاربرد مهندسی در طراحی اجزای حاوی ناپیوستگی با لحاظ نمودن شکست می‌باشند. نتایج بدست آمده نشان دهنده تأثیرات متفاوت مرزهای داخلی نرم، سخت و حفره داخلی بر مسیر رشد ترک می‌باشند.

Fully Automatic Crack Propagation Modeling in Interaction with Void and Inclusion without Remeshing

Reza Naderi*, Abdolghafoor Khademalrasoul

Department of Civil Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.
*P.O.B. 3619995161. Shahrood, Iran, r_naderi@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 16 February 2015
Accepted 23 May 2015
Available Online 09 June 2015

Keywords:
Extended Finite Element Method
Level Set Method
Inclusions
Void
Crack propagation

ABSTRACT

Extended finite element method (X-FEM) has recently emerged as an approach to implicitly create a discontinuity based on discontinuous partition of unity enrichment (PUM) of the standard finite element approximation spaces. Despite considerable progress in mesh generation, updating finite element mesh during crack propagation remains extremely heavy and difficult. This problem becomes more complicated when there are many discontinuities in the finite element domain. However, the extended finite element method (X-FEM) in combination with level set method (LSM) could overcome this cumbersome issue. In this contribution, predefined cracks and internal boundaries are created using level set functions and also the effects of soft/hard inclusions (interfaces) and voids are considered on crack propagation schemes. In fact, the interaction of crack and heterogeneities are considered. The level set functions are utilized to represent the locations and evolutions of internal interfaces. In addition, the stress intensity factors for mixed mode crack problems are numerically calculated by using the interaction integral method. Different crack growth paths are simulated automatically for different oriented edge and center cracks and the interactions of internal boundaries on crack propagations are shown. All numerical examples demonstrated the flexibility and capabilities of X-FEM in the applied fracture mechanics.

1- مقدمه

بسیاری از صنایع مانند هوافضا، خودروسازی و مهندسی سازه‌ها نیازمند ابزاری ساده و دقیق جهت مطالعه سناریوهای رشد ترک می‌باشند. از طرفی مدل‌سازی گسترش ترک در مود-مرکب برای مصالح ترد یا شبه‌ترد بر پایه مکانیک شکست خطی، از دیرباز به عنوان یک حوزه تحقیقاتی فعال در تعیین رفتار ترک خوردگی و ظرفیت باربری یک عضو سازه‌ای در معرض شکست، مورد توجه محققین علوم عددی و مکانیک جامدات قرار داشته است. همچنین مفهوم تولید ناپیوستگی شامل ترک، حفره و مرز ناپیوستگی داخلی مورد توجه محققین قرار داشته است. از این روی موضوعی که در علم مکانیک شکست محاسباتی حائز اهمیت فوق العاده است، امکان مدل‌سازی

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

R. Naderi, A. Khademalrasoul, Design, Fully Automatic Crack Propagation Modeling in Interaction with Void and Inclusion without Remeshing, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 7, pp. 261-273, 2015 (In Persian)

ناپیوستگی به صورت ضمنی و مستقل از شبکه فیزیکی است. با فراهم آوردن شرایطی که با کاربرد آن بتوان ناپیوستگی مورد نظر را به صورت ضمنی در مدل فیزیکی به وجود آورد، پتانسیل شبیه‌سازی گسترش ترک به صورت خودکار نیز به وجود خواهد آمد [1-4]. دو دلیل عمده باعث ناکارآمدی استفاده از روش اجزای محدود استاندارد به عنوان روشی جهت شبیه‌سازی خودکار رشد ترک شده است. اولاً، برای اینکه بتوانیم تکینگی تنش در نوک ترک را نشان دهیم؛ حداقل در محدوده اطراف نوک ترک، نیازمند اعمال یک شبکه اجزای محدود ریز، می‌باشیم. از طریق اعمال یک شبکه ریز از اجزای محدود می‌توان با دقت کافی مقادیر فاکتور شدت تنش در نوک ترک و در نتیجه جهت رشد ترک را بدست آوریم. به عنوان نمونه گرستل و ابدالا[1] نشان دادند که بمنظور تعیین فضای تنش در نوک ترک با 5 درصد دقت، نیاز به حداقل 300 درجه آزادی در نوک ترک می‌باشد [5]. ثانیاً، روش اجزای محدود، مدل‌سازی گسترش ترک را بوسیله جداسازی گره‌های اجزای محدود قرار گرفته در مسیر ترک خوردگی انجام می‌دهد. بنابراین بمنظور بدست آوردن یک مسیر رشد ترک هموار و واقعی باید از یک فرایند مش‌بندی مجدد پیچیده استفاده نمود. الگوریتم‌های موجود در این زمینه شامل حذف-بازسازی[2] و اعمال-جداسازی[3] می‌باشند [6-8]. بنابراین، اخیراً روش اجزای محدود توسعه یافته به عنوان روشی جایگزین برای شیوه‌های مش‌بندی یا مش‌بندی مجدد سطوح ترک در مکانیک شکست محاسباتی با اقتباس از مفهوم ناپیوستگی و غنی‌سازی مجانبی پیکره‌بندی واحد فضای تقریب اجزای محدود استاندارد شکل گرفته است [9]. به عبارت دیگر روش اجزای محدود توسعه یافته یک روش پیکره‌بندی واحد است [10, 11]. روش اجزای محدود توسعه یافته از پیکره‌بندی واحد محلی استفاده کرده و توابع غنی‌سازی بنحوی انتخاب می‌گردند که ناپیوسته باشند تا بدان وسیله شرایط تشکیل ناپیوستگی قوی[4] درون المان ایجاد گردد [10, 12]. برای مدل‌سازی ترک در روش اجزای محدود توسعه یافته، یک تابع ناپیوسته و توابع مجانب نوک-ترک در چارچوب پیکره‌بندی واحد به تقریب اجزای محدود استاندارد اضافه می‌گردد. به علاوه بمنظور تولید انواع فضاهای خالی[5] و مرز داخلی[6] و اِعمال آن‌ها بر مسأله از روش مجموعه تراز استفاده شده است [13]. چنین رویکردی اجازه می‌دهد تا ناپیوستگی مورد نظر بدون مش‌بندی صریح سطوح ناپیوستگی نمایش داده شود. تلفیق روش اجزای محدود غنی شده با روش مجموعه تراز[7] دنبال کردن مسیر حرکت ناپیوستگی مانند ترک را به صورت صریح، غیرضروری می‌سازد [14]. همچنین در مطالعه‌ای، بورداس و همکارانش به مدل‌سازی گسترش ترک لبه‌ای با حضور مرز داخلی پرداخته است [15].

در این مطالعه از طریق کدنویسی به تلفیق روش‌های اجزای محدود توسعه یافته، روش مجموعه تراز و روش انتگرال اندرکنش به شبیه‌سازی مدل‌های پیچیده در گسترش ترک پرداخته می‌شود. بدین منظور برنامه کامپیوتری نوشته شده است که امکان مدل‌سازی همزمان انواع ناپیوستگی‌های داخلی از جمله ترک به دو صورت لبه‌ای و میانی با هر نوع زاویه قرارگیری دلخواه در دامنه، حفره میانی و انواع مرز ناهمگن داخلی نرم و سخت را دارا می‌باشد. تمامی مرزهای داخلی ناپیوسته را از طریق فرایند غنی‌سازی نقاط گرهی تولید نموده‌ایم. لذا میزان تأثیرگذاری مرزهای داخلی متفاوت از جمله حفره دایره‌ای، مرز داخلی نرم و مرز داخلی سخت و نیز اندرکنش همزمان آن‌ها بر گسترش ترک لبه‌ای و وسط‌چین مورد مطالعه قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که بمنظور محاسبه فاکتورهای شدت تنش[8] از روش مبتنی بر پایه انرژی، انتگرال J، که به عنوان یک روش مناسب در محاسبه فاکتور شدت تنش به شمار می‌آید، استفاده شده است. از آن جهت که تولید هندسه‌های پیچیده مد نظر قرار دارد، برای اینکه بتوان میزان فاکتورهای شدت تنش مود مرکب را محاسبه نمود از روش انتگرال اندرکنش برای محاسبه همزمان فاکتورهای شدت تنش استفاده شده است. همچنین جهت افزایش دقت در انتگرال‌گیری عددی حول نوک ترک، فرایند زیرمثلث‌سازی المان‌های مربعی متأثر از ترک در کُد گنجانده شده است. کُد تهیه شده در برگیرنده مسائل شکست در محدوده الاستیک خطی[9] می‌باشد.

در این مطالعه با کدنویسی در محیط نرم‌افزار متلب تمامی مراحل شبیه‌سازی شامل تهیه شبکه اجزای محدود، تعیین نقاط گرهی متأثر از ناپیوستگی، انجام فرایند غنی‌سازی گرهی برای تولید درجات آزادی اضافی بدنه و نوک ترک، تعیین المان‌های متأثر از مرز داخلی و اعمال مرزهای داخلی بر مسأله از طریق توابع مجموعه تراز، محاسبه فاکتورهای شدت تنش در مود مرکب شکست، ترسیم کانتورهای تنش، ترسیم مسیر رشد ترک و ترسیم مرزهای داخلی در گام نهایی رشد ترک را از طریق تهیه ام-فایل مناسب انجام داده‌ایم.

متن مقاله شامل این بخش‌ها خواهد بود: در بخش دوم اصول کلی حاکم بر موضوع مکانیک شکست مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش سوم اصول روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه می‌شود، در بخش چهارم روش مجموعه تراز و نحوه تولید مرزهای داخلی و فرایند تعقیب مرز متحرک توضیح داده خواهد شد. در بخش پنجم نتایج آنالیز عددی ارائه خواهد شد و در بخش ششم نتیجه‌گیری بیان می‌گردد.

2- مکانیک شکست

به طور کلی محققین مختلفی در خلال سال‌ها با استفاده از روش‌های مختلف تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی به مطالعه مکانیک شکست پرداخته‌اند. بطور کلی رفتار عضو دارای ناپیوستگی در مکانیک شکست خطی با یک پارامتر مانند فاکتور شدت تنش[10] که با استفاده از روش‌های مستقیم و انرژی تعیین می‌شود مشخص می‌شود [16]. این پارامتر نقش مهمی در تعیین میدان تنش، در همسایگی نوک ترک دارد. فاکتور شدت تنش دارای واحد $\mathrm{MPa}.\sqrt{\mathrm{m}}$ بوده و به هر دو عامل تنش وارده در دوردست و هندسه دامنه و ترک بستگی دارد. به طور کلی در حل تحلیلی که برای دامنه‌ای حاوی ترک توسط ویلیامز[11] انجام شده است، مقادیر تنش در دامنه به صورت سری نشان داده شده در رابطه (1) ارائه شده است [17, 18].

$$\sigma_{ij}(\mathrm{r},\theta) = A_1 r^{-1/2} f_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3 r^{1/2} f_{ij}^{(3)}(\theta) + \text{جملات مرتبه بالاتر}, \ldots \quad (1)$$

که دررابطه فوق σ_{ij}، تانسور تنش، r و θ مختصات قطبی نسبت به نوک ترک می‌باشند. $f_{ij}^{(1)}, f_{ij}^{(2)}, f_{ij}^{(3)}$ توابع عمومی از θ بوده و A_1, A_2, A_3 پارامترهایی متناسب با بارگذاری در دوردست می‌باشند. در همسایگی نوک

1- Gerstle and Abdalla
2- Remove-rebuild
3- Insert-separate
4- Strong discontinuity
5- Hole (Void)
6- Inclusion
7- Level Set Methods

8- Stress Intensity Factors
9- Linear Elastic Fracture Mechanics
10- Stress Intensity Factor
11- Williams

ترک یعنی جایی که $r \to 0$ جملاتی که عبارت r در مخرج کسر وجود داشته باشد دچار تکینگی[1] می‌شوند.

2-1- فاکتور شدت تنش؛ انتگرال اندرکنش

پارامتر فاکتور شدت تنش نیروی محرک ترک بوده و مقدار بحرانی آن که بعنوان ظرفیت شکست (چقرمگی) شناخته می‌شود، یک مشخصه ویژه مصالح است که به نوبه خود نیروی مقاوم در برابر گسترش ترک محسوب می‌گردد. در واقع برای اینکه بتوان در مکانیک شکست خطی از وضعیت تنش در نزدیکی نوک ترک و وضعیت تکینگی تنش‌ها اطلاعات کافی بدست آورد فاکتور شدت تنش تعریف شده است. یکی از روش‌هایی که در محاسبه فاکتورهای شدت تنش در مود بارگذاری مرکب وجود دارد، روش انتگرال اندرکنش[2] می‌باشد. روش انتگرال اندرکنش اولین بار توسط یاو[3] و همکارانش برای مسائل با مود مرکب در مصالح ایزوتروپیک معرفی گردید [19]. انتگرال اندرکنش از انتگرال مستقل از مسیر J برای دو وضعیت ممکن از یک جسم الاستیک ترک‌دار به دست می‌آید. انتگرال J توسط رایس[4] توسعه داده شد که به صورت رابطه (2) تعریف می‌شود [20].

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_x - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \mathrm{d}s, \tag{2}$$

مسیر انتگرال‌گیری Γ، $W = 1/2\, \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}$ بوده و به‌عنوان دانسیته انرژی کرنشی تعریف می‌شود. n_i، بردار نرمال بیرونی بر مسیر انتگرال‌گیری، $T_i = \sigma_{ij}\, n_j$ بردار نیروهای گسترده، u_i بردار جابجایی و $\mathrm{d}s$، جزء دیفرانسیلی در امتداد مسیر انتگرال‌گیری می‌باشند. در روش انتگرال اندرکنش، یک فضای کمکی تعریف می‌شود و بر فضای اصلی مسأله تحمیل می‌گردد. فضای کمکی تنش و جابجایی‌ها به نحوی انتخاب می‌گردد که معادلات تعادل و شرایط مرزی مسأله بدون نیرو بر سطوح ترک را در دامنه معادل در انتگرال‌گیری عددی پیرامون ترک ارضا نماید. در واقع مزیت عمده روش انتگرال اندرکنش، محاسبه همزمان فاکتور شدت تنش برای مود مرکب بارگذاری است. در این مطالعه از معادلات کمکی تنش و جابجایی به دست آمده توسط ویلیامز و وسترگارد[5] استفاده می‌شود. برای بیان فرمولاسیون روش انتگرال اندرکنش بالانویس "1" در جملات $u_i^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ جهت نمایش وضعیت اصلی و بالانویس "2" در جملات $u_i^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$ برای نمایش وضعیت کمکی است [21, 22]. پس از تعریف فضای حل اصلی و کمکی، بر هم نهی آن‌ها انجام گرفته و سپس مقادیر فاکتور شدت تنش بر اساس رابطه بین انتگرال J و فاکتورهای شدت تنش به صورت رابطه (3) بدست می‌آیند.

$$J_1^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)}, \tag{3}$$

که در رابطه (3)، روابط (4)، (5)و (6) را داریم.

$$J^{(1)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(1)} n_1 - T_i^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}s, \tag{4}$$

$$J^{(2)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(2)} n_1 - T_i^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}s, \tag{5}$$

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(1,2)} n_1 - T_i^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - T_i^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}s, \tag{6}$$

عبارت $W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$ تحت عنوان دانسیته انرژی کرنشی است. از آنجا که دو حالت ترک را روی‌هم‌گذاری کرده‌ایم، پس می‌توان آن‌ها را به صورت رابطه (7) نوشت.

$$J_1^{(1,2)} = \frac{\left(K_{\mathrm{I}}^{(1)} + K_{\mathrm{I}}^{(2)}\right)^2}{E_{\mathrm{eff}}} + \frac{\left(K_{\mathrm{II}}^{(1)} + K_{\mathrm{II}}^{(2)}\right)^2}{E_{\mathrm{eff}}}, \tag{7}$$

با مقداری محاسبات و جایگذاری در روابط فوق رابطه (8) را خواهیم داشت.

$$M^{(1,2)} = \frac{2\left(K_{\mathrm{I}}^{(1)} K_{\mathrm{I}}^{(2)} + K_{\mathrm{II}}^{(1)} K_{\mathrm{II}}^{(2)}\right)}{E_{\mathrm{eff}}}. \tag{8}$$

در انتها فاکتور شدت تنش را برای وضعیت تنش موجود می‌توان با جداسازی دو مود شکست مطابق رابطه (9) از یکدیگر به دست آورد. برای مثال با قرار دادن $K_{\mathrm{I}}^{(2)} = 1,\ K_{\mathrm{II}}^{(2)} = 0$ مسأله برای به دست آوردن $K_{\mathrm{I}}^{(1)}$ حل می‌گردد. به طور مشابه می‌توان $K_{\mathrm{II}}^{(1)}$ را نیز به دست آورد.

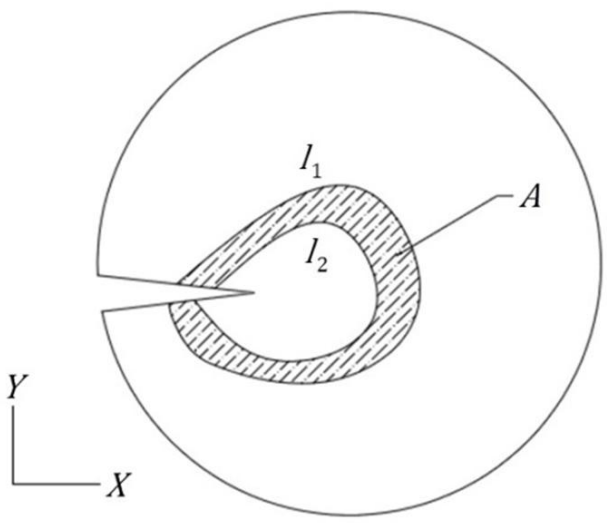
$$K_{\mathrm{I}}^{(1)} = \frac{M^{(1,\mathrm{Mode\,I})} E_{\mathrm{eff}}}{2}; K_{\mathrm{II}}^{(1)} = \frac{M^{(1,\mathrm{Mode\,II})} E_{\mathrm{eff}}}{2}, \tag{9}$$

در روابط فوق برای حالت تنش صفحه‌ای $E_{\mathrm{eff}} = E$ و در حالت کرنش صفحه‌ای $E_{\mathrm{eff}} = E / (1 - \nu^2)$ تعریف می‌شود. که ν نسبت پؤاسون است. رابطه (6) برای انتگرال اندرکنش، انتگرال روی مسیر می‌باشد که به علت نتایج بهتر، دقیق‌تر و پایدارتر انتگرال روی سطح، عبارت انتگرالی روی مسیر به انتگرال روی سطح بازنویسی می‌گردد. با تعریف تابع q_1 به نحوی که بر روی مسیر l_1 صفر و بر روی مسیر l_2 یک و در محدوده ناحیه A مشتق‌پذیر باشد مطابق شکل 1، انتگرال اندرکنش بر روی سطح معادل به صورت رابطه (10) تعریف می‌شود [23, 24].

$$M^{(1,2)} = \int_{A} \left(\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_j} \mathrm{d}A, \tag{10}$$

که در رابطه (10) δ_{ij} دلتای کرونکر می‌باشد.

محاسبه انتگرال اندرکنش در یک حلقه از المان‌ها که در اطراف نوک ترک قرار گرفته‌اند انجام می‌گیرد. المان‌های موجود در این حلقه مانند یک جسم صلب حرکت می‌کنند. برای تمامی المان‌های موجود در این حلقه مقدار تابع q_1 برابر واحد است لذا مشتق تابع q_1 نسبت به x_j صفر خواهد شد. از



شکل 1 نمایش سطح معادل انتگرال‌گیری حول نوک ترک

1- Singularity
2- Interaction integral (M-integral)
3- Yau
4- Rice
5- Westergaard

طرفی برای تمامی المان‌های خارج از حلقه مفروض مقدار تابع q_1 صفر بوده، پس مجدداً مشتق تابع q_1 صفر خواهد بود [23, 24]. المان‌هایی که در انتگرال‌گیری اطراف نوک ترک مورد استفاده هستند در فاصله شعاعی از نوک ترک، که به صورت رابطه (11) تعیین می‌شود قرار دارند.

$$R = C \times \sqrt{\text{مساحت المان اجزای محدود}}\ ;\ C=1, \ldots, 5, \qquad (11)$$

که c ضریبی است که بهترین تأثیر در محاسبه انتگرال اندرکنش را در بازه اعداد یک تا چهار دارد [12].

2-2- معیار رشد ترک

تئوری حداکثر تنش مماسی[1] به عنوان معیاری برای رشد ترک در مود مرکب توسط اردوغان و سی ارائه شد [25]. بر مبنای این معیار ترک در جهت حداکثر تنش مماسی $\sigma_{\theta\theta}$ رشد می‌کند، یعنی وضعیتی که تنش برشی $\sigma_{r\theta}$ صفر باشد [26]. راستای انتشار ترک با زاویه θ_c نشان داده می‌شود. مقدار زاویه گسترش ترک در مود مرکب به طریق رابطه (12) تعیین می‌گردد [9, 16, 25].

$$\theta_c = 2\times\arctan\left(\frac{1}{4}\frac{K_I}{K_{II}} - \frac{1}{4}\operatorname{sign}\left(K_{II}\right)\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8}\right) \qquad (12)$$

3- اصول روش اجزای محدود توسعه یافته

به طور کلی روش اجزای محدود توسعه یافته بر پایه مفهوم پیکره‌بندی واحد در غنی‌سازی تقریب اجزای محدود استاندارد که در برگیرنده اثرات تکینگی یا ناپیوستگی‌های دامنه اطراف یک ترک می‌باشد، استوار است [27, 28]. روش اجزای محدود توسعه یافته اولین بار توسط بلیچکو[2] و بلک[3] در سال 1999 ارائه گردید [10]. روش اجزای محدود توسعه یافته به ناپیوستگی‌ها اجازه می‌دهد تا با پیکره‌بندی واحد اجزای محدود به صورت مستقل از شبکه اجزای محدود نمایش داده شوند. در این روش هرگونه ناپیوستگی با هر زاویه‌ای مستقل از شبکه اجزای محدود با فرایند غنی‌سازی المان‌های قطع شده با ترک بوسیله توابع غنی‌سازی ارضا کننده رفتار ناپیوسته و درجات آزادی اضافی، مدل می‌شوند. در روش اجزای محدود توسعه یافته برای یافتن جابجایی نقطه x واقع در دامنه، از تقریب رابطه (13) استفاده می‌شود. به عبارت دیگر مقادیر توابع شکل اجزای محدود استاندارد در توابع غنی‌سازی ضرب می‌شوند [12, 29].

$$u^h(x) = \sum_{I\in\Omega} N_I(x)\left[u_I + \sum_{I\in\Omega_d} v(x)a_I\right] \qquad (13)$$

در رابطه (13) Ω بیانگر کل دامنه، Ω_d دامنه حاوی ناپیوستگی‌ها، $N_I(x)$ توابع شکل اجزای محدود و $v(x)$ تابع غنی‌سازی ناپیوستگی و u_I و a_I به ترتیب درجات آزادی استاندارد و غنی شده می‌باشند، در حالتی که $\Omega \cap \Omega_d = \varnothing$ باشد توابع غنی‌کننده $v(x)$ حذف می‌شوند. برای مدل کردن ترک در مصالح همگن، دو بخش غنی‌سازی وجود دارد. دو بخش غنی‌سازی شامل، غنی‌سازی المان‌های نوک ترک و همچنین تابع هویساید[4] برای المان‌هایی که با بدنه ترک قطع شده می‌باشند. تابع هویساید در واقع یک تابع علامت است که در نمایش ترک در روش اجزای محدود توسعه یافته به کار گرفته می‌شود [4, 9, 10, 12, 30]. در شکل 2 نحوه غنی‌سازی نقاط متاثر از نوک و بدنه ترک در خلال چند مرحله مدل‌سازی رشد ترک نشان داده شده است.

برای المان‌هایی که کاملاً با یک ترک قطع شده و گره‌های متاثر از نوک ترک از توابع غنی‌سازی هویساید و نوک ترک به صورت رابطه‌های (14) و (15) استفاده می‌شود.

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{بالای ترک} \\ -1 & \text{زیر ترک} \end{cases} \qquad (14)$$

$$F_\alpha(r,\theta),\ \alpha = 1, 2, 3, 4 = \left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right]. \qquad (15)$$

که در رابطه فوق r و θ مختصات قطبی با مرکزیت نوک ترک می‌باشند. در حالتی که نیاز باشد تا یک گره با هر دو تابع غنی‌سازی گردد، فقط از تابع غنی‌سازی مربوط به نوک ترک مطابق با رابطه (15) استفاده می‌شود.

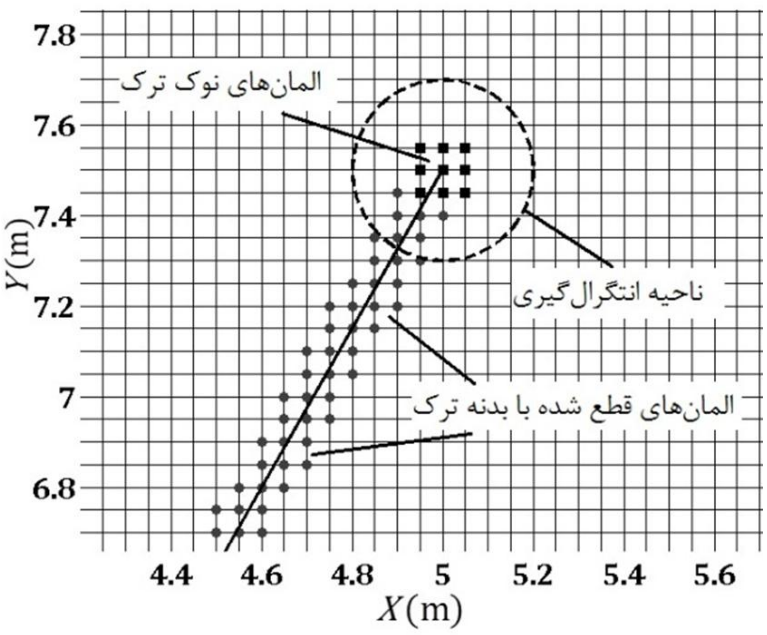
3-1- آنالیز مجدد

به طور کلی در خلال آنالیز رشد ترک یک فرایند تکرار شونده باید به کار گرفته شود. بنابراین می‌بایست تمهیداتی اندیشیده شود تا کمترین فضای اضافی از کامپیوتر اشغال شود، پس با در نظر گرفتن تقریب جابجایی و ماتریس سختی در روش اجزای محدود توسعه یافته به صورت روابط (16) و (17) فرایند آنالیز مجدد تسهیل می‌گردد.

$$u^h(x) = \sum_I N_I(x)\left[u_I + H_I(x)a_I + \sum_{\alpha=1}^{4} F_\alpha(x)b_I^\alpha\right], \qquad (16)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} & K_{ub} \\ K_{ua}^T & K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ub}^T & K_{ab}^T & K_{bb} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

همانگونه که از رابطه (17) مشخص است درایه‌های مربوط به اجزای محدود استاندارد تابعی از موقعیت ترک نمی‌باشد، این مسأله نشان دهنده این است



شکل 2 نمایش شبکه اجزای محدود، نقاط گرهی غنی‌سازی شده و محدوده انتگرال‌گیری

1- Maximum Hoop stress
2- Belytschko
3- Black
4- Heaviside

که درایه‌های K_{uu} در هر مرحله از رشد ترک ثابت می‌باشند. در نتیجه تغییرات مربوط به ماتریس ضرایب فقط در بخش‌های غنی شده انجام می‌گیرد که در مقایسه با کل ماتریس کوچک می‌باشند. به علاوه المان‌هایی که با توابع هویساید غنی شده باشند، در مراحل بعدی رشد ترک ثابت باقی می‌مانند. یعنی اینکه درایه‌های حاوی اندیس a، در مراحل بعدی ثابت می‌مانند. بنابراین تنها لازم است، المان‌هایی را که از غنی‌سازی با توابع نوک ترک به غنی‌سازی هویساید تبدیل می‌شوند لحاظ نمود. بنابراین در میزان محاسبات صرفه جویی لازم صورت می‌گیرد.

4-اصول روش مجموعه تراز

یکی از جنبه‌های مهم در مسائلی که با مرز ناپیوستگی Γ_d مواجه هستیم، دنبال کردن تغییرات آن مرز است. روش مجموعه تراز[1] یک روش محاسباتی برای دنبال نمودن مرز متحرک به شمار می‌آید. در این روش به جای دنبال کردن خود مرز، یک منحنی پایه را انتخاب نموده و آن را بر روی یک سطح ایجاد می‌نماییم. مزایای دیگر این روش، انجام گرفتن محاسبات بر روی یک شبکه ثابت اولری[2] است که به طور طبیعی تغییرات توپولوژی مربوط به مرز را کنترل نموده و به علاوه قابل کاربرد برای مسایل با ابعاد بالاتر نیز می‌باشد [33-31]. در واقع تابع روش مجموعه تراز در ترکیب با روش اجزای محدود توسعه یافته بمنظور نمایش مرز مصالح همانند هندسه ترک، فضای خالی و مرز نرم و سخت به کار گرفته خواهد شد. همچنین در این مطالعه از تکنیک نوار محدود[3] در محاسبات استفاده شده است. مزیت عمده این تکنیک محدود نمودن نقاط گرهی است که در فرایند محاسبات وارد می‌شوند بنابراین حجم محاسبات در کل کاهش می‌یابد [31].

تابع مجموعه تراز $\phi(x(t),\ t)$ یک تابع پیوسته است که $x(t)$ معرف یک نقطه در دامنه Ω است. تابع مجموعه تراز دارای ویژگی‌هایی به شرح رابطه (18) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\phi\left(x(t),t\right)<0 \quad &&\text{برای } x\in\Omega \\ &\phi\left(x(t),t\right)>0 \quad &&\text{برای } x\notin\Omega \\ &\phi\left(x(t),t\right)=0 \quad &&\text{برای } x\in\Gamma_d \end{aligned} \tag{18}$$

بنابراین مرز مورد نظر در هر زمان t، با یافتن $x(t)$ به نحوی که معادله (19) را اقناع نماید جانمایی می‌شود [34, 35].

$$\phi(x(t),t)=0. \tag{19}$$

رابطه (19) عموماً به عنوان معادله مجموعه تراز ارجاع داده می‌شود. با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به زمان و با گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل جزئی حاصل به کمک روش تفاضل محدود، گرادیان ϕ تقریب زده می‌شود. آنگاه تابع ϕ در مسایل دو بعدی به صورت رابطه (20) تعیین می‌گردد.

$$\phi^{n+1}=\phi^{n}-\Delta t\left(u^{n}\phi^{n}_{,x}+v^{n}\phi^{n}_{,y}\right) \tag{20}$$

که u و v به ترتیب مولفه‌های x و y سرعت مرز متغیر می‌باشند. گام زمانی Δt بر اساس شرط کورنت-فردریچ-لوی[4] تعیین می‌گردد [34, 35]. به طور کلی دو تابع مجموعه تراز ϕ و ψ برای مدل‌سازی و دنبال کردن مسیر رشد ترک لازم می‌باشد. یکی از این توابع برای نمایش مسیر بدنه ترک و دیگری برای دنبال کردن مسیر نوک ترک است. در این شیوه، مسیر بدنه ترک با استفاده از تابع مجموعه تراز صفر $\psi(x(t),t)$ نمایش داده می‌شود.

1- Level Set Method (LSM)
2- Eulerian mesh
3- Narrow band
4- Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

بنابراین ترک در موقعیتی است که شرایط رابطه (21) صادق باشد.

$$\begin{cases} \phi\left(x(t),t\right)\le 0 \\ \psi\left(x(t),t\right)=0 \\ \phi_{,i}\psi_{,i}=0 \end{cases} \tag{21}$$

الگوریتمی که در کُد در نظر گرفته شده است این امکان را فراهم آورده است تا تمامی فرایند تعیین نقاط گرهی که غنی‌سازی می‌بایست در خصوص آن‌ها انجام پذیرد، بطور خودکار از طریق توابع مجموعه تراز انجام گیرد. بدین منظور ابتدا شعاع پهنای باند اطراف نوک ترک محاسبه می‌شود. پس از آن طول و به عبارتی فواصل نوک‌های ترک نسبت به یکدیگر بدست آورده می‌شود. از اطلاعات بدست آمده زاویه قرارگیری ترک در دامنه مشخص شده و بر اساس طول ترک و پهنای باند که خود تابع اندازه المان است، شعاع مربوط به جستجوی گرهی بمنظور تعریف توابع مجموعه تراز مشخص می‌گردد. سپس، فاصله همه نقاط دامنه نسبت به نوک ترک تعیین و نسبت به مختصات نوک ترک محلی می‌گردند. با داشتن بردار فاصله نقاط نسبت به نوک ترک جستجوی مربوط به تعیین نقاط گرهی که در شعاع تعیین شده قرار دارند انجام می‌پذیرد. پس از آن گره‌هایی که در شعاع تعریف شده قرار گرفته‌اند تعیین شده و به محاسبه توابع مجموعه تراز پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که در روش به کار گرفته شده توابع مجموعه تراز تنها برای گره‌های واقع در شعاع پهنای باند محاسبه گردیده است. آنگاه بمنظور تعیین شماره گره المان‌هایی که در پهنای باند قرار گرفته‌اند توابع مجموعه تراز گرهی غیر صفر پیدا شده و شماره گره کلی منحصر به فرد منسوب به آن گره مشخص می‌شود. در این روش مقادیر توابع مجموعه تراز فقط در نقاط ذخیره می‌شوند. پس با استفاده از توابع شکل اجزای محدود می‌توان مقادیر توابع مجموعه تراز را در شبکه اجزای محدود به دست آورد.

4-1- تولید حفره و مرز داخلی (اینکلوژن)

به طور کلی مرزها (فضای خالی و اینکلوژن) به صورت استاتیکی بوده و از تئوری مجموعه تراز جهت نمایش آن‌ها استفاده خواهد شد. برای فضای خالی دایروی از مجموعه تراز به صورت رابطه (22) استفاده می‌گردد [13].

$$\varphi_I=\min_{\substack{x_c^i\in\Omega_c^i\\ i=1,2,\dots,n_c}}\left\{\left\|x_I-x_c^i\right\|-r_c^i\right\}, \tag{22}$$

که Ω_c^i دامنه i امین فضای خالی، n_c تعداد فضاهای خالی دایروی، x_c^i و r_c^i به ترتیب مرکز و شعاع دایره می‌باشند. توصیف هندسی یک مرز (مرز یک دایره یا اینکلوژن) از طریق منحنی مجموعه تراز صفر $\varphi\equiv\varphi(x,t)=0$ صورت می‌پذیرد. در واقع، توصیف فیزیکی مرز از طریق تابع $\varphi(x,t)$، به یک نمایش تابعی گسسته، تبدیل می‌شود. درجات آزادی هندسی در یک مجموعه نقاط ثابت x_I جهت تعیین φ و همچنین موقعیت مرز، مورد استفاده قرار می‌گیرند. جهت محاسبه تابع φ در هر نقطه x واقع در دامنه از توابع درونیاب اجزای محدود مطابق رابطه (23) استفاده می‌شود [13].

$$\varphi(x)=\sum_I N_I(x)\varphi_I, \tag{23}$$

که عمل جمع بر روی تمامی نقاط واقع در المان محتوی x صورت می‌گیرد، $\phi(x)$ توابع شکل استاندارد اجزای محدود بوده و φ_I مقادیر گرهی تابع مجموعه تراز می‌باشند. انجام فرایند مدل‌سازی و محاسبات هندسی مربوط به حفرات از طریق تابع مجموعه تراز φ انجام خواهد گرفت. استفاده از روش مجموعه تراز امکان محاسبات با بازده مناسب را فراهم می‌آورد. به علاوه،

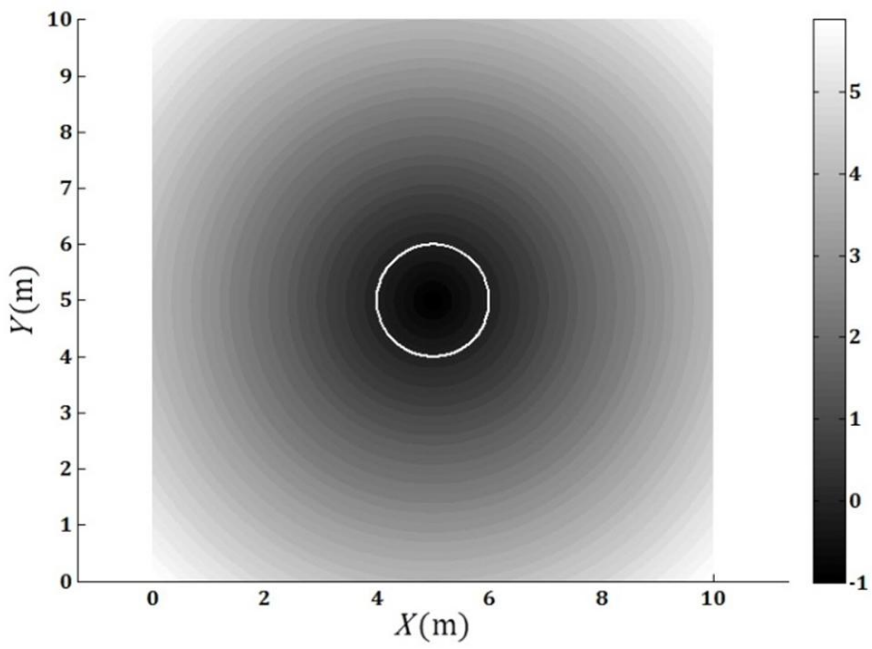
شبکه اجزای محدود و هندسه داخلی با یکدیگر مرتبط بوده که در نتیجه آن یک نمایش سازگار برای مرزهای داخلی با شبکه اجزای محدود موجود، ایجاد می‌شود.

منظور از اینکلوژن، ناهمگنی با مشخصات متفاوت در ماتریس مصالح است. مدل‌سازی اینکلوژن نیازمند اقناع شرط هادامارد[1] [36] بوده که به صورت رابطه (24) می‌باشد [13].

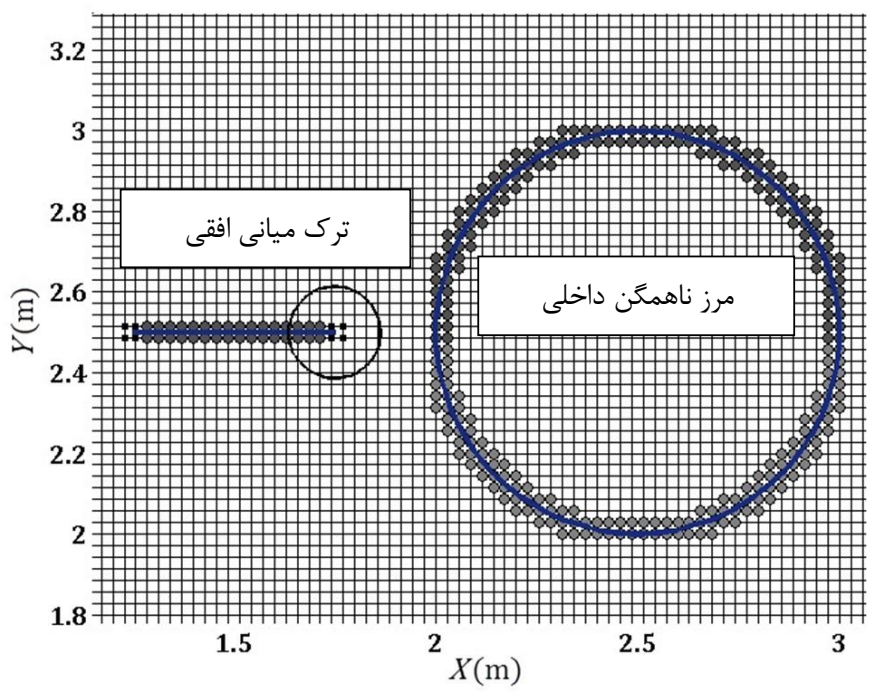
$$F^{+} - F^{-} = a \otimes n^{+}, \tag{24}$$

که F گرادیان تغییر شکل، n^{+} بردار نرمال بر مرز مصالح و a یک بردار دلخواه درون صفحه است و $\otimes$ علامت ضرب دایادیک یا ضرب تانسوری است [37]. سوکومار و همکارانش اولین محققی بود که تلاش نمود تا مرز داخلی بین مصالح را از طریق فرایند غنی‌سازی در مدل هندسی ایجاد نماید [13]. در شکل 3 تابع مجموعه تراز مربوط به مرز داخلی (اینکلوژن) نشان داده شده است. همچنین در شکل 4 نحوه غنی‌سازی نقاط گرهی و اعمال روش مجموعه تراز برای تولید مرزهای داخلی ناپیوسته نمایش داده شده است.

بمنظور اجتناب از ترکیب المان‌های غنی‌شده و غنی‌نشده و بهبود همگرایی حل، از روش پیشنهادی موئز و همکارانش در غنی‌سازی اصلاح شده مطلق که به صورت رابطه (25) تعریف نموده است استفاده می‌گردد [38].



شکل 3 تابع مجموعه تراز ζ برای مرز داخلی



شکل 4 نحوه غنی‌سازی نقاط گرهی در شبکه اجزای محدود

1- Hadamard condition

$$\psi(x) = \sum_{I} N_I(x)\left|\zeta_I\right| - \left|\sum_{I} N_I(x)\zeta_I\right| \tag{25}$$

که ζ_I مقادیر مجموعه تراز گرهی برای تابع مجموعه تراز مرز داخلی مصالح و $\psi(x)$ تابع مجموعه تراز برای مرزهای داخلی می‌باشند.

5-مثال‌های عددی

در این قسمت به مدل‌سازی محیط‌های حاوی ناپیوستگی شامل ترک لبه‌ای، ترک وسطچین، مرز داخلی (نرم و سخت)[2] و حفره پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که در شرایطی که مشخصات رفتاری مرز داخلی، سخت‌تر از ماتریس مصالح دامنه باشد، به آن مرز داخلی سخت گفته شده و به عکس مرز داخلی نرم دارای مشخصات نرم‌تر از مصالح ماتریس می‌باشد. همچنین همانطوریکه می‌دانیم انتخاب ابعاد شبکه اجزای محدود در فرایند گسترش ترک حایز اهمیت است. بنابراین و بمنظور حصول نتایج دقیق‌تر، مقادیر فاکتور شدت تنش در مود مرکب و در شرایط اندرکنشی، با بهترین اندازه شبکه و بهترین گزینه برای مقدار پارامتر c محاسبه خواهد شد. بنابراین برای یافتن شرایطی که بهترین نتایج عددی را ایجاد نماید، چندین مدل با حضور ترکهای لبه‌ای و وسطچین در بارگذاری کشش تک محوره واحد، ایجاد شده و بوسیله مش‌بندی[3] اجزای محدود با اندازه‌های مختلف مورد آنالیز قرار گرفته است. در انتها با مقایسه مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی و تحلیلی دقیق، بهترین گزینه تعیین شده است.

از این رو مدل‌هایی با ترک به طول 0/5 و دامنه به ابعاد 3×6 مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل برای مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی و حل دقیق در جدول1 ارائه شده است. همچنین مقدار تلاش محاسباتی[4] بر مبنای درجات آزادی و مشخصات ماتریس سختی بدست آمده در هر مدل را ارائه نموده‌ایم. در یک برنامه اجزای محدود حجم عمده تلاش محاسباتی، مختص به حل دستگاه معادلات سختی است. از طرفی بیشترین میزان عملیات محاسباتی در هنگام حل دستگاه معادلات مربوط به فرایند مثلث‌سازی یعنی همان تشکیل ماتریس‌های بالامثلث و پایین‌مثلث، می‌باشد. میزان تلاش محاسباتی بر مبنای عملگر با ممیز شناور[5] که نقش مهمی در مثلث‌سازی[6] دارد محاسبه شده است. از طرفی بمنظور بررسی وضعیت ماتریس سختی میزان مقادیر ویژه محاسبه شده و شاخص سختی[7] مورد ارزیابی قرار داده شد. لازم به ذکر است که منظور از "شاخص سختی" نسبت حداکثر مقدار ویژه به حداقل مقدار ویژه در ماتریس سختی است؛ هرچقدر این اندیس به یک نزدیک‌تر باشد ماتریس سختی از شرایط مطلوب‌تری برخوردار است. همانگونه که می‌دانیم نحوه گسسته‌سازی دامنه و نیز تعداد و اندازه المان‌ها در نتایج آنالیز اجزای محدود بسیار تأثیرگذار است. بنابراین به جهت ارزیابی و تعیین حالت بهینه حل عددی، نحوه شبکه‌بندی اجزای محدود مورد بررسی قرار داده می‌شود. لذا همانگونه که در نتایج ارائه شده در جدول1 مشاهده می‌شود با کاهش اندازه المان‌ها، البته تا حد قابل تعیین، دقت حل نیز افزایش می‌یابد. لذا بر اساس نتایج بدست آمده در خصوص ترک لبه‌ای برای اندازه بُعد المان مربعی 0/05 و 0/02 و مقدار پارامتر $c=2$، مقدار فاکتور شدت تنش مود اول به ترتیب برابر با 1/6240 و 1/6291 محاسبه شده است. لذا بهترین نتیجه مربوط به اندازه المان 0/025 با مقدار

2- Hard and soft inclusions
3- Discretization
4- Computational effort
5- Floating-point operations (FLOPS)
6- Triangularization
7- Stiff index

جدول 1 مقادیر فاکتور شدت تنش و تلاش محاسباتی و اطلاعات مربوط به وضعیت ماتریس سختی

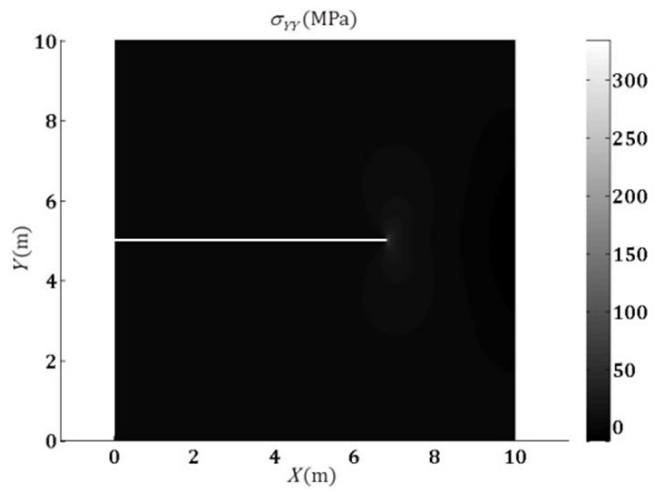
تشریح مدل	اندازه بعد المان مربعی	پهنای باند عرض پایین	پهنای باند عرض بالا	شاخص سختی	فاکتور شدت تنش تئوری-تجربی	فاکتور شدت تنش عددی	تلاش محاسباتی	درجات آزادی
ترک لبه‌ای	0/2	591	591	1/50	1/6266	1/5441	$1/9\times10^{8}$	1044
ترک لبه‌ای	0/1	2067	2067	1/78	1/6266	1/5972	$9/6\times10^{9}$	3862
ترک لبه‌ای	0/05	7707	7707	1/29	1/6266	1/6231	$5/5\times10^{11}$	14852
ترک لبه‌ای	0/033	16947	16947	1/22	1/6266	1/6242	$6/0\times10^{12}$	33042
ترک لبه‌ای	0/025	29787	29787	1/18	1/6266	1/6258	$3/3\times10^{13}$	58432
ترک لبه‌ای	0/02	46227	46227	1/11	1/6266	1/6291	$1/3\times10^{14}$	91022
ترک میانی	0/1	2049	2049	1/71	0/9043	0/7421	$9/77\times10^{9}$	3884
ترک میانی	0/05	7677	7677	1/30	0/9043	0/8738	$5/5\times10^{11}$	14920
ترک میانی	0/033	16893	16893	1/22	0/9043	0/8912	$6/0\times10^{12}$	33064
ترک میانی	0/028	22857	22857	1/20	0/9043	0/8989	$1/5\times10^{13}$	44860
ترک میانی	0/02	46143	46143	1/12	0/9043	0/8954	$1/3\times10^{14}$	91044

پارامتر $c=2$ بوده است. از طرفی در خصوص ترک وسطچین، برای اندازه بُعد المان مربعی 0/1، 0/05 و 0/02 و مقدار پارامتر 4/5 یا $c = 4$، مقدار فاکتور شدت تنش مود اول به ترتیب برابر با 0/7062، 0/8738 و 0/8953 بدست آمده است. بنابراین بهترین گزینه مربوط به اندازه المان 0/028 و مقدار پارامتر c=4/5 می‌باشد.

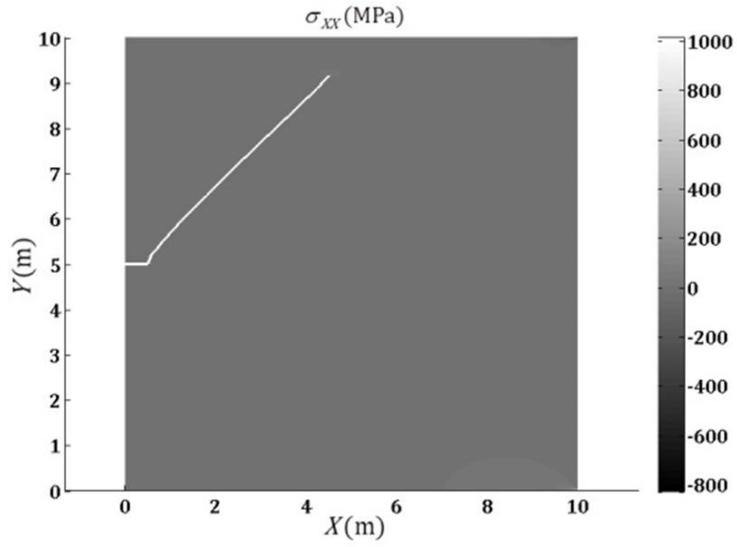
انطباق مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی و حل تئوری-تجربی دقیق، منجر به محاسبه زاویه رشد ترک تقریباً دقیق می‌شود. لازم به ذکر است که در خصوص ترک وسطچین مقادیر فاکتور شدت تنش به صورت متقارن برای هر دو نوک ترک موجود در دامنه بدست آمده است. همچنین بدلیل شرایط تقریباً مود خالص بازشدگی در مثال‌های ارائه شده، میزان فاکتور شدت تنش مود دوم (برشی درون صفحه) نزدیک به صفر به دست آمده است. همچنین باید اشاره شود که مسایل مورد مطالعه در محدوده مکانیک شکست الاستیک خطی می‌باشند.

5-1- شبیه‌سازی گسترش ترک لبه‌ای

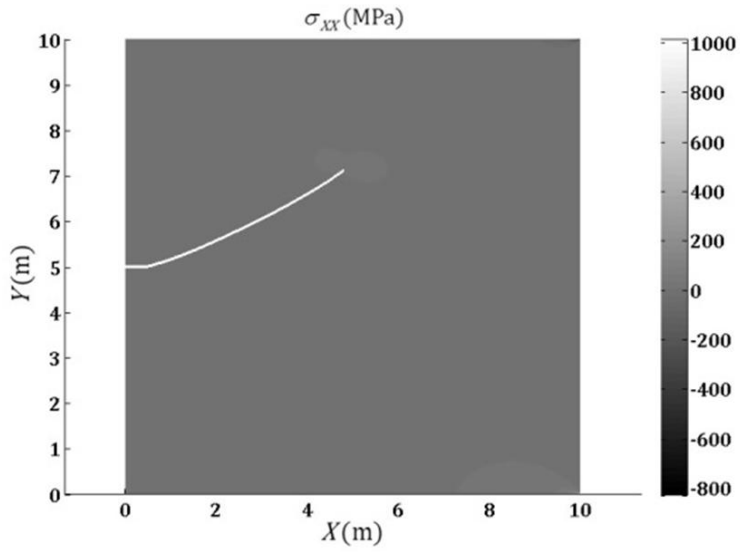
در ابتدا به بررسی مسیر گسترش ترک در شرایط بارگذاری متفاوت پرداخته می‌شود تا تفاوت‌های موجود در محتوای انرژی نوک ترک و چگونگی گسترش ترک لبه‌ای نشان داده شود. بنابراین سه مثال با ترک لبه‌ای به طول اولیه 0/5 و در نظر گرفتن رفتار الاستیک خطی برای مصالح و حالت کرنش صفحه‌ای در توزیع تنش‌ها مورد بررسی قرار داده شده است. نتایج حاصل برای 30 مرحله رشد ترک به طول ثابت 0/2 در هر تکرار محاسبه گردیده است. لذا دامنه‌ای به ابعاد 10×10 با شبکه‌بندی به اندازه بعد 0/025 و 322706 درجه آزادی در نظر گرفته شده است. نتایج به ترتیب برای بارگذاری در کشش تک محوره در شکل 5، برش در شکل 6 و ترکیب برش و کشش در شکل 7 ارائه می‌گردد.



شکل 5 گسترش ترک لبه‌ای در کشش تک محوره (نمایش σ_{YY})

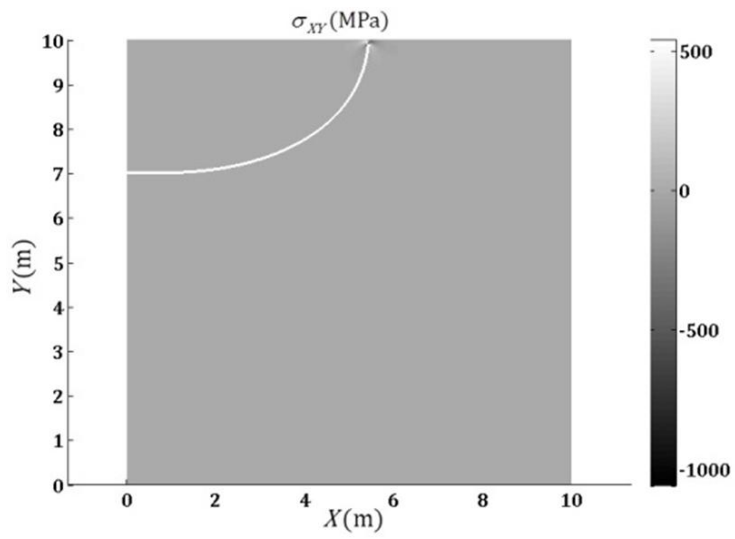


شکل 6 گسترش ترک لبه‌ای در برش یکنواخت (نمایش σ_{XX})



شکل 7 گسترش ترک لبه‌ای در ترکیب برش و کشش تک محوره (نمایش σ_{XX})

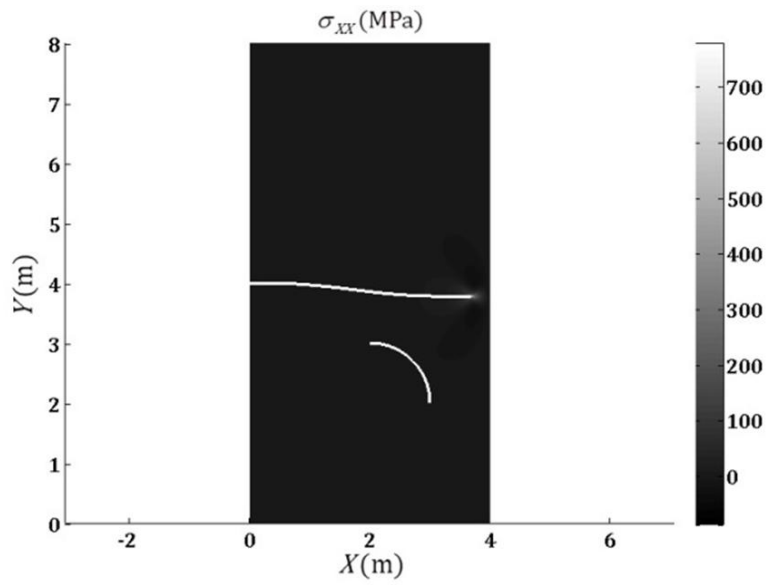
مطابق نتایج ارائه شده، ترک لبه‌ای در کشش تک محوره به علت غلبه مود اول شکست (بازشدگی) تنها در مسیر افقی و به عبارتی عمود بر جهت حداکثر تنش مماسی رشد نموده است. در مقابل مدل تحت برش یکنواخت بر وجه y با غلبه مشهود مود دوم (برشی) با شیب تند به سمت وجه y رشد نموده است. اما در شرایط مود مرکب بارگذاری، مسیر رشد ترک با وضعیتی منحنی با سمت وجه y در حرکت است که نشان دهنده ترکیب مودهای اول و دوم است. نکته قابل توجه در مثال چهارم نشان داده شده در شکل 8 می‌باشد که ترک لبه‌ای غیر وسطچین در کشش یکنواخت در یک مسیر منحنی به سمت وجه y حرکت می‌نماید. در واقع موقعیت هندسی ترک به نوبه خود وضعیت ترکیب مودها را در گسترش ترک به آن دیکته می‌کند.



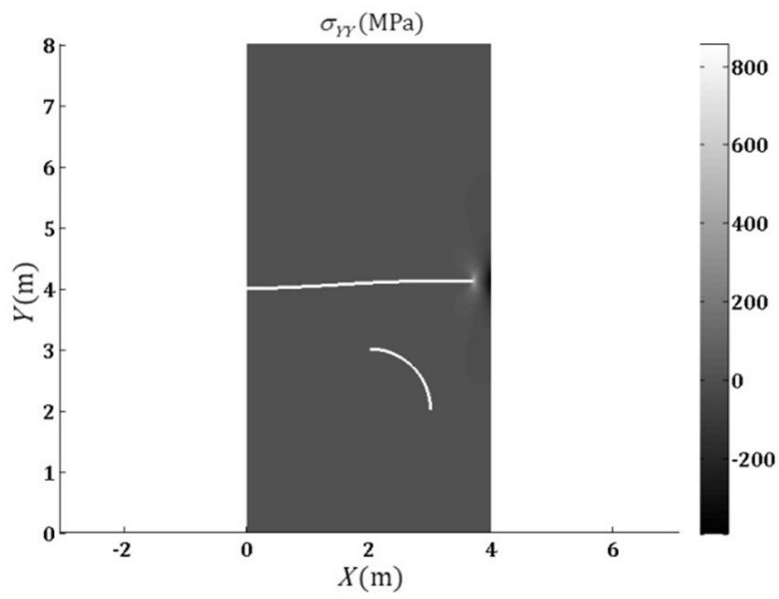
شکل 8 گسترش ترک لبه‌ای غیر وسطچین (نمایش σ_{xy})

5-2- شبیه‌سازی اندرکنشی گسترش ترک لبه‌ای

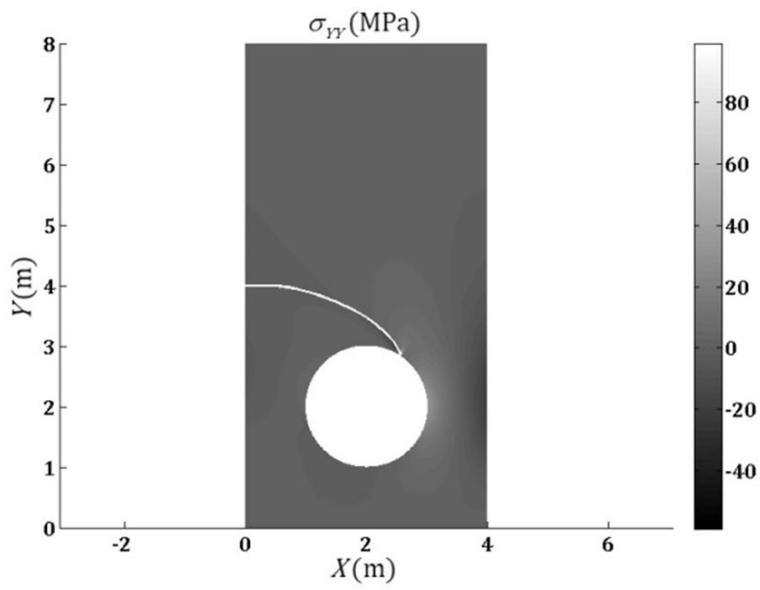
در بخش مدل‌سازی گسترش ترک لبه‌ای در اندرکنش با حفره و مرز ناهمگن داخلی ابتدا دامنه‌ای به عرض 4 و ارتفاع 8 با یک ترک لبه‌ای به طول 0/5 و مرز داخلی ناهمگن نرم، سخت و حفره با شعاع واحد در موقعیت مرکز (2و2) مورد بررسی قرار داده شده است. با توجه به مدل‌سازی صورت گرفته اختلاف رشد ترک در اندرکنش با مرز داخلی نرم، سخت و حفره مشاهده می‌گردد. در مثال‌های عددی ارائه شده نسبت مدول الاستیسیته ماتریس مصالح به مرز ناهمگن به ترتیب برای مرز داخلی سخت و نرم برابر با 0/33 و 3 انتخاب شده است. در شکل 9 گسترش ترک لبه‌ای در حضور مرز ناهمگن نرم داخلی نشان داده شده است. شکل 10 نمایش دهنده مسیر رشد ترک لبه‌ای در اندرکنش با مرز سخت بوده و شکل 11 نحوه تغییر مسیر رشد ترک لبه‌ای به سمت حفره داخلی است.



شکل 9 گسترش ترک لبه‌ای در اندرکنش با مرز نرم (نمایش σ_{xx})

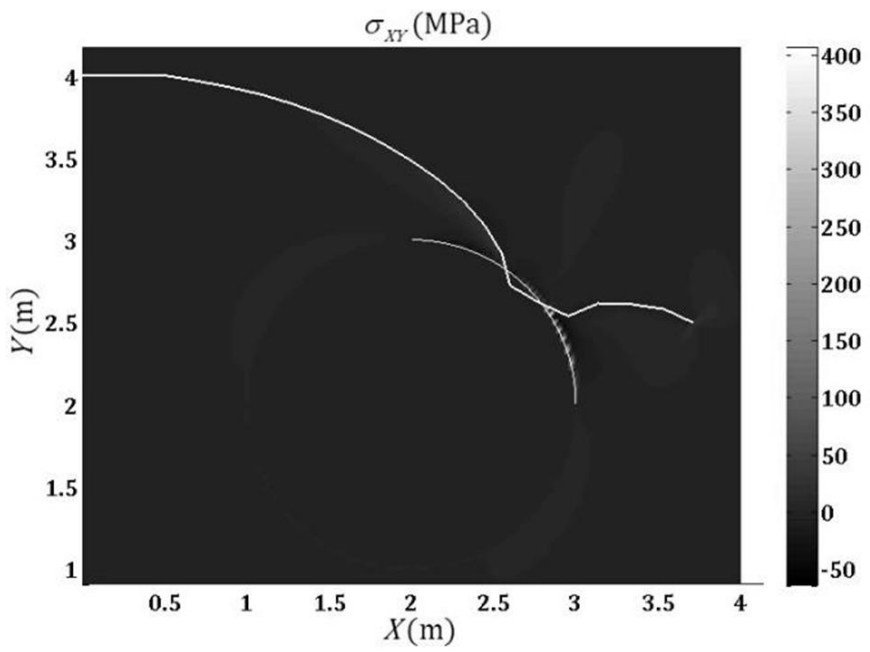


شکل 10 گسترش ترک لبه‌ای در اندرکنش با مرز سخت (نمایش σ_{yy})

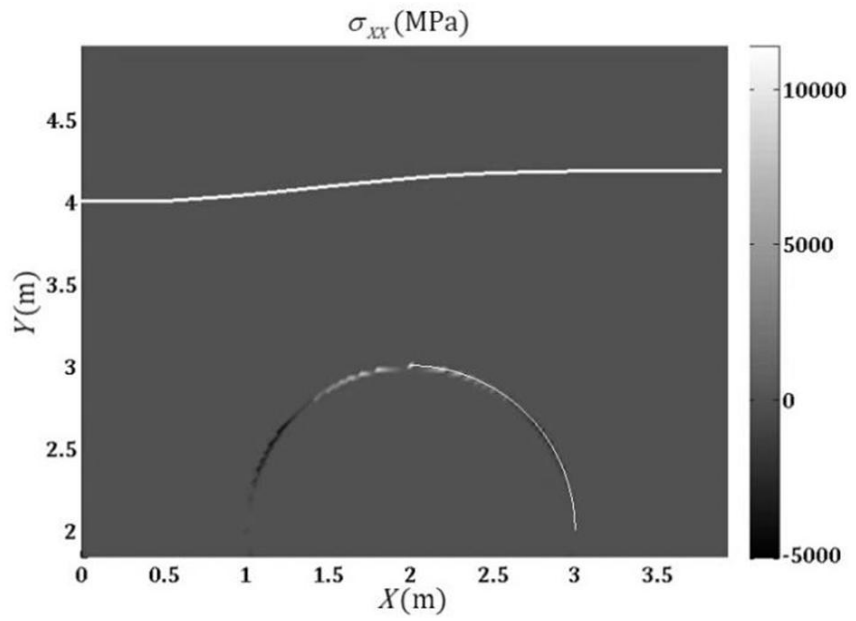


شکل 11 گسترش ترک لبه‌ای در اندرکنش با حفره (نمایش σ_{yy})

مطابق نتایج محاسبه شده چنانچه مرز داخلی سخت‌تر از مصالح ماتریس باشد مسیر رشد ترک به صورت دور شونده از مرز داخلی می‌شود. در عین حال چنانچه مرز داخلی نرم‌تر از مصالح ماتریس باشد مسیر رشد ترک تمایل به مرز نرم داخلی پیدا می‌نماید. اما در حالتی که یک حفره در پایین دامنه در نظر گرفته شده است، مسیر رشد ترک به طور کامل به سمت حفره تغییر کرده است. به عبارت دیگر تأثیر حفره بر مسیر رشد ترک بسیار قوی‌تر از مرز داخلی نرم یا سخت می‌باشد. این نتایج در حالی است که در شرایط عدم حضور مرزهای داخلی، ترک لبه‌ای در کشش تک محوره می‌بایست به صورت افقی گسترش می‌یافت. البته ذکر این نکته حائز اهمیت است که با لحاظ نمودن نسبت مدول الاستیسیته ماتریس مصالح به مرز ناهمگن برابر با 10000، مرز نرم مانند یک حفره خالی عمل کرده و باعث برخورد نوک ترک با مرز و ورود ترک به دورن اینکلوژن می‌گردد. تفاوت اساسی مرز بسیار نرم با حفره در این است که ترک پس از برخورد با مرز نرم می‌تواند وارد آن شده و ضمن تغییر مسیر به گسترش خود ادامه دهد، در حالیکه در خصوص حفره داخلی که در شکل 12 نشان داده شده است، بدین ترتیب نخواهد بود. از طرفی با لحاظ نمودن نسبت مدول الاستیسیته معادل 0/0001 مرز ناهمگن بسیار سخت شبیه‌سازی شده که نتایج بدست آمده حاکی از تشدید اثر مرز سخت بر مسیر رشد ترک است اما فرض مرز بسیار سخت منجر به تغییر عمده در مسیر گسترش ترک نشده است نتیجه رشد ترک در شکل 13 آورده شده است. به عبارتی مرز بسیار سخت موجب برقراری تمرکز تنش در مرز خواهد شد.



شکل 12 گسترش ترک لبه‌ای در حضور مرز ناهمگن بسیار نرم (نمایش σ_{xy})



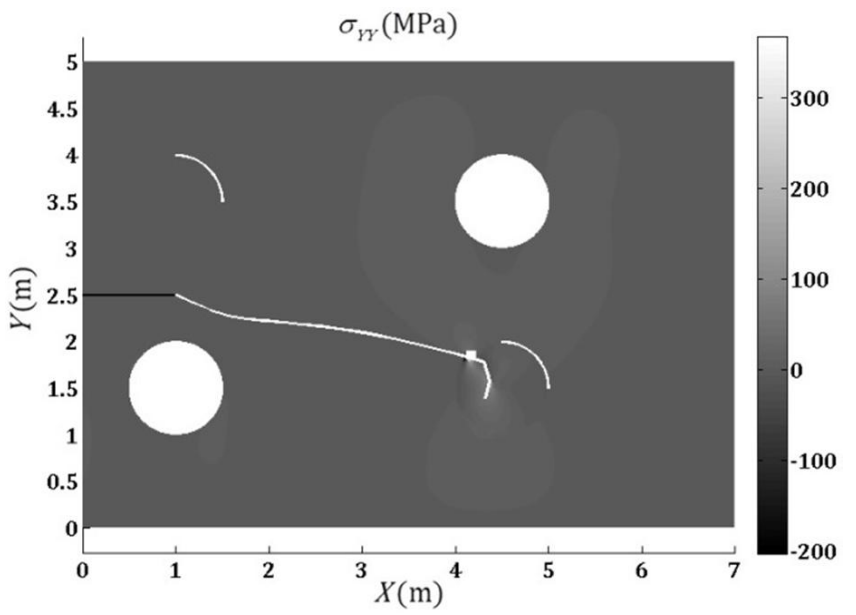
شکل 13 گسترش ترک لبه‌ای در حضور مرز ناهمگن بسیار سخت (نمایش σ_{XX})

5-3- گسترش اندرکنشی ترک لبه‌ای-حفره-مرزداخلی

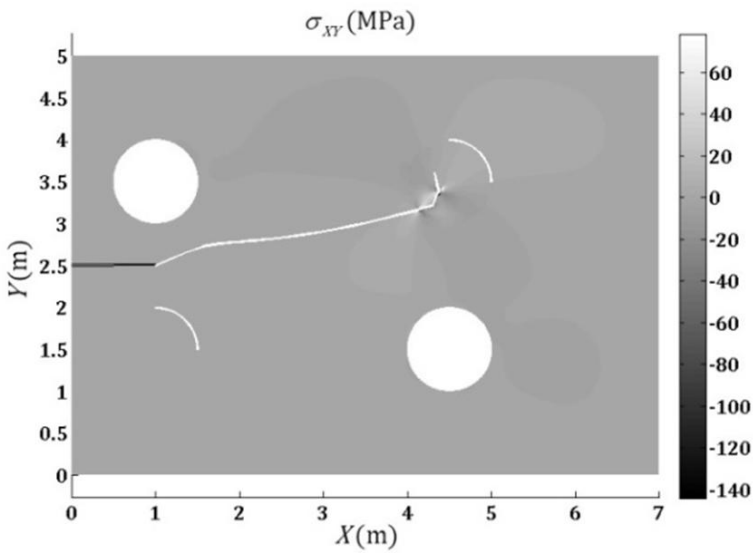
بمنظور نمایش اندرکنش ترک-حفره-اینکلوژن، چهار مدل با ترکیب ناپیوستگی‌های مزبور ایجاد شده و مسیر گسترش ترک لبه‌ای بطور خودکار و با ترکیب روش مجموعه تراز در اجزای محدود توسعه یافته محاسبه می‌گردد. شعاع حفرات و اینکلوژن‌ها در تمام مدل‌ها برابر با 0/5 فرض شده است. همچنین نسبت مدول الاستیسیته ماتریس مصالح به مرز ناهمگن به ترتیب برابر با 3 و 0/33 برای اینکلوژن نرم و سخت لحاظ گردیده است.

اصولاً امکان برخورد ترک متحرک با مرز داخلی جزء امتیازات ذاتی استفاده از توابع مجموعه تراز در ترکیب با روش اجزای محدود توسعه یافته است و این شرایط را بطور طبیعی میسر می‌سازد. از طرفی نیاز به مش‌بندی مرزهای داخلی را نیز مرتفع می‌نماید. همانگونه که در نتایج نشان داده شده است، ترک متحرک همانگونه که در شکل 14 و 15 نمایش داده شده است، در مسیر رشد خود با مرز داخلی برخورد نموده و دچار تغییر جهت در گسترش شده است.

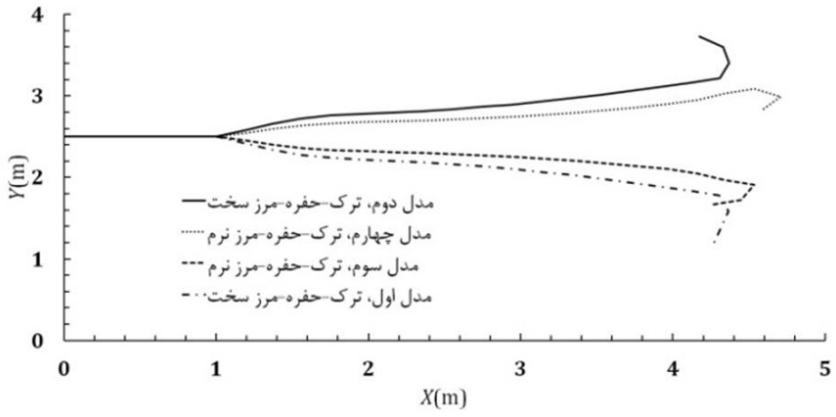
دو نتیجه نشان داده شده در شکل 14 و شکل 15 برای مرز ناهمگن نرم تکرار شده است که تحت عنوان مدل‌های سوم و چهارم خلاصه نتایج بدست آمده در شکل 16 نمایش داده می‌شود. به لحاظ هندسی مدل اول و سوم، دوم و چهارم مشابه می‌باشند. مطابق آنچه نشان داده شده است، هنگامی که ترک به مرز سخت برخورد نماید، تغییر مسیر ملموس‌تری در آن اتفاق می‌افتد. در مجموع میزان تأثیرگذاری حفرات بر مسیر گسترش ترک قابل توجه است.



شکل 14 گسترش ترک در اندرکنش با 2 حفره و 2 مرز سخت (مدل اول)، (نمایش σ_{YY})



شکل 15 گسترش ترک در اندرکنش با 2 حفره و 2 مرز سخت (مدل دوم)، (نمایش σ_{XY})

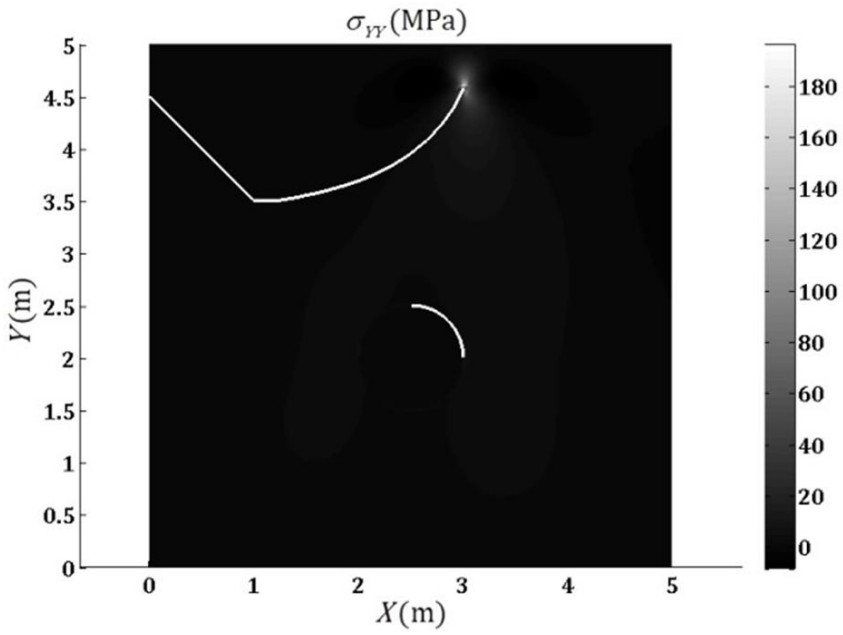


شکل 16 مقایسه گسترش ترک در اندرکنش با حفره و مرز نرم و سخت

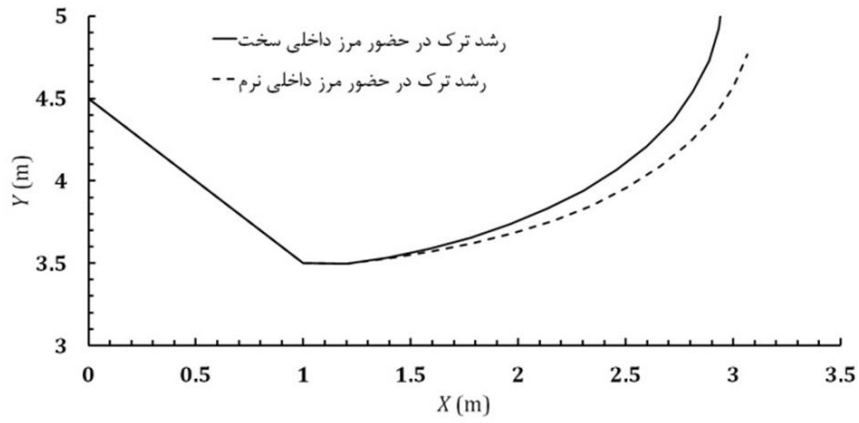
5-4- گسترش اندرکنشی ترک لبه‌ای مایل و یک مرز داخلی

در این بخش به شبیه‌سازی گسترش اندرکنشی ترک لبه‌ای مایل در کشش تک محوره پرداخته می‌شود. در ابتدا دامنه‌ای به ابعاد 5×5 با یک مرز داخلی و ترک مایل 45 درجه مفروض در نیمه بالایی دامنه، در نظر گرفته شده است. در این مثال تأثیرات مرز داخلی نرم و سخت بر مسیر رشد ترک نشان داده خواهد شد. نسبت مدول الاستیسیته برای مرز سخت و نرم به ترتیب 0/33 و 3 فرض گردیده است. در شکل 17 گسترش ترک لبه‌ای مایل در اندرکنش با مرز نرم نمایش داده شده است. این مثال با فرض مرز داخلی سخت آنالیز گردیده که نتایج آن در شکل 18 مشاهده می‌گردد.

همانگونه که مشاهده می‌شود، مرز داخلی نرم موجب جذب شدن مسیر ترک به سمت خود شده در حالیکه مرز داخلی سخت موجب دور رانده شدن مسیر ترک از خود می‌گردد. به علاوه مسیر منحنی حرکت ترک به سمت وجه بالای دامنه می‌باشد، که نشان دهنده ترکیب مودها است.



شکل 17 گسترش ترک لبه‌ای مایل در اندرکنش با مرز ناهمگن نرم (نمایش σ_{YY})

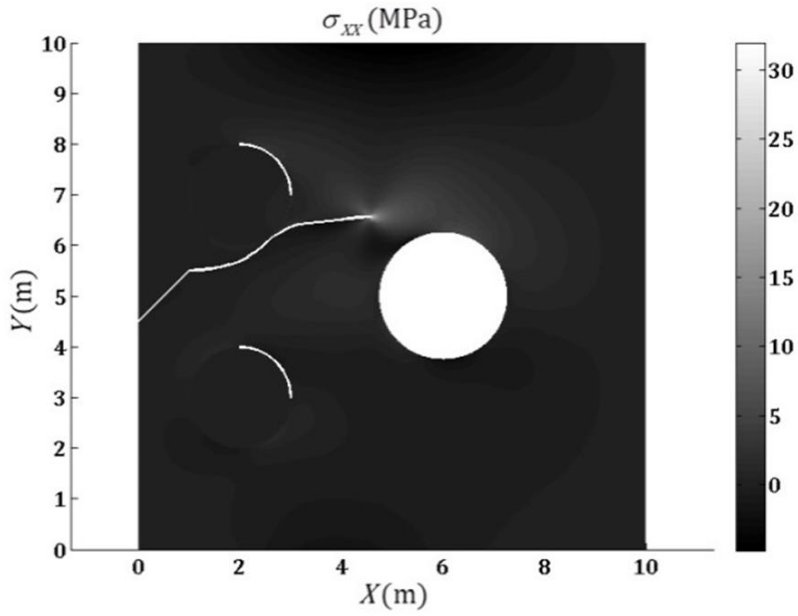


شکل 18 نمایش اخلاف رشد ترک در اندرکنش با مرز نرم و سخت

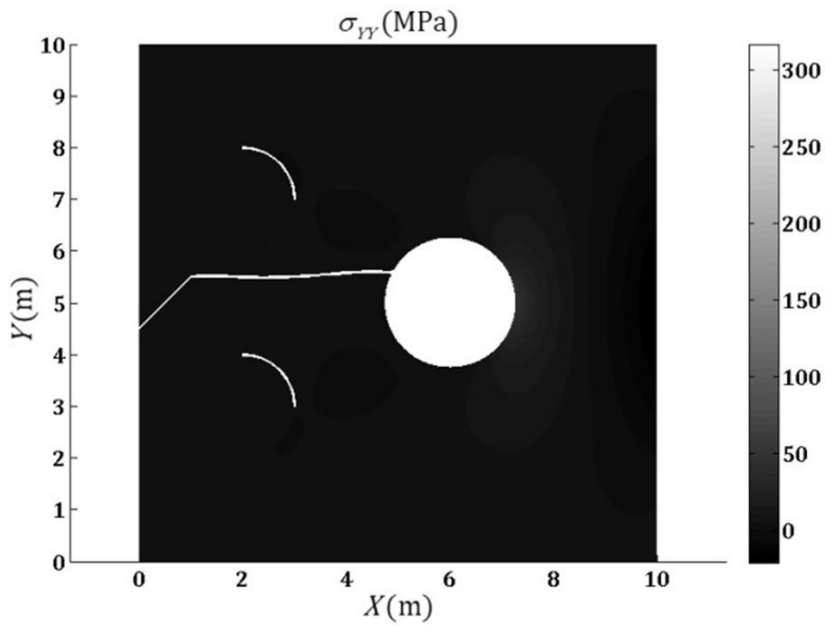
5-5- گسترش اندرکنشی ترک لبه‌ای مایل و چند مرز داخلی

شکل 19 صفحه‌ای با دو مرز نرم و یک حفره در اندرکنش با ترک لبه‌ای مایل 45 درجه نسبت به افق است. شعاع دو مرز نرم یکسان در نظر گرفته شده است. نسبت مدول الاستیسیته مصالح به مرز نرم 3 لحاظ گردیده است. صفحه مزبور در کشش تک محوره قرار داده شده است و طی چندین مرحله رشد ترک مدل‌سازی گردیده است. برای مشاهده اثرات مرز نرم و سخت بر مسیر رشد ترک مایل لبه‌ای مثال بعد با فرض مرز سخت ارائه می‌گردد.

مدل دوم دامنه‌ای با دو مرز سخت و یک حفره در اندرکنش با ترک لبه‌ای مایل 45 درجه فرض شده است که در شکل 20 نشان داده شده است. رفتار مصالح الاستیک خطی و نسبت مدول الاستیسیته مصالح به مرز سخت 0/33 لحاظ گردیده است.



شکل 19 گسترش ترک مایل در اندرکنش با حفره و مرزهای نرم، (نمایش σ_{XX})

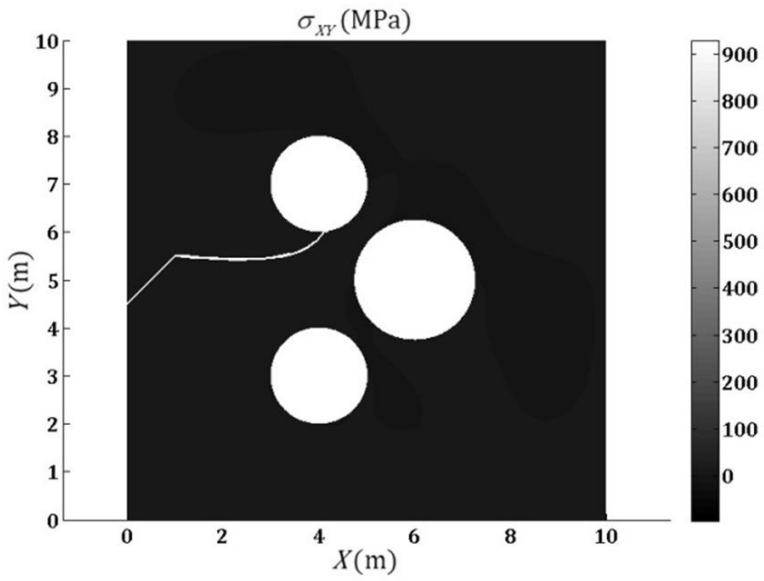


شکل 20 گسترش ترک مایل در اندرکنش با حفره و مرزهای سخت، (نمایش σ_{YY})

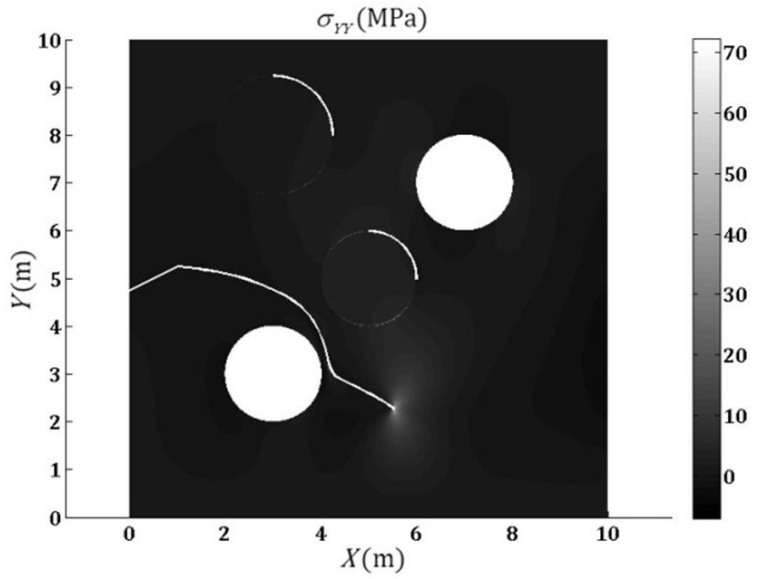
با توجه به شکل‌های 19 و 20 اختلاف معنادار مسیر رشد ترک لبه‌ای مایل در اندرکنش با مرز نرم و سخت مشاهده می‌شود. مدل سوم در این بخش صفحه‌ای با سه حفره در اندرکنش با ترک لبه‌ای مایل 45 درجه، تحت کشش و با رفتار الاستیک خطی است. در شکل 21 نتیجه گسترش ترک برای مدل مزبور نشان داه شده است.

مدل چهارم دامنه‌ای با دو مرز سخت و دو حفره در اندرکنش با ترک لبه‌ای مایل 26 درجه نسبت به افق است که در شکل 22 نشان داده شده است. رفتار مصالح الاستیک خطی فرض شده است. نسبت مدول الاستیسیته مصالح به مرز سخت 0/33 لحاظ گردیده است.

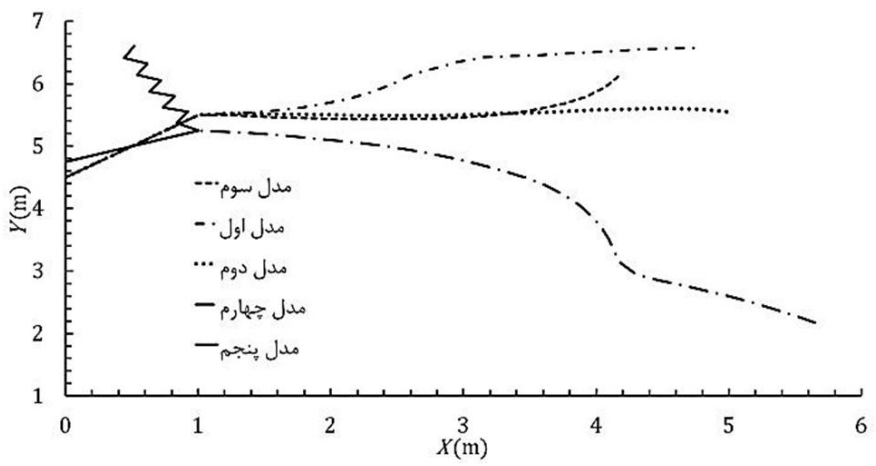
مدل پنجم، به لحاظ هندسی مشابه مدل چهارم بوده اما بارگذاری مفروض از نوع فشاری واحد می‌باشد. همانگونه که مشاهده می‌شود، مسیر رشد ترک کاملاً متفاوت و در جهت تقریبی عمود بر مسیر رشد کششی است. بمنظور نمایش مناسب‌تر تفاوت‌های موجود در مسیرهای رشد ترک در شکل 23 نتایج حاصل از هر پنج مدل ارائه می‌گردد.



شکل 21 گسترش ترک در حضور 3 حفره نامساوی، (نمایش σ_{XY})



شکل 22 گسترش ترک مایل در اندرکنش با دو حفره و دو مرز سخت، (نمایش σ_{YY})



شکل 23 نمایش مسیرهای گسترش ترک در حضور چندین ناپیوستگی

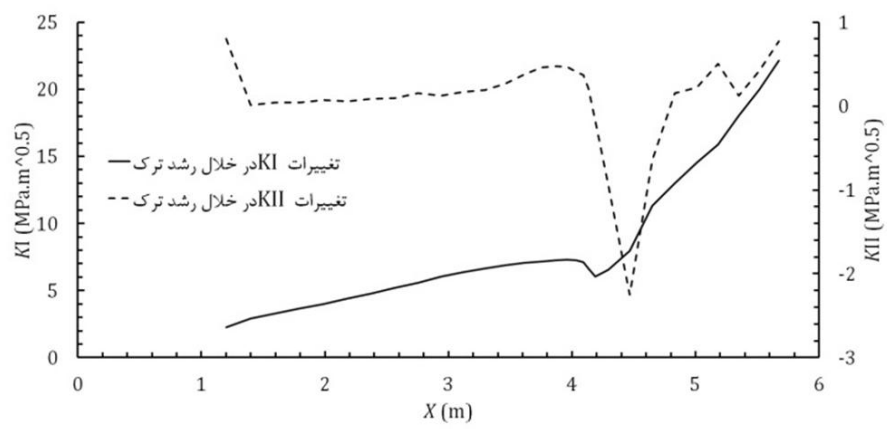
مقادیر محاسبه شده فاکتور شدت تنش در خلال گسترش ترک به عنوان نمونه برای مدل چهارم در شکل 24 ارائه می‌گردد.

همانگونه که مشاهده می‌شود میزان فاکتور شدت تنش مود دوم در مختصات 4/46 یعنی موقعیت نزدیک به حفره دچار شدیدترین تغییرات شده است. مقادیر فاکتور شدت تنش مود اول و دوم در این مختصات به ترتیب برابر با 7/94 و 2/25- می‌باشند. مقدار فاکتور شدت تنش مود دوم نسبت به مقادیر قبلی خود بنحوی بوده است که منجر به تغییر مشهود در مسیر حرکت ترک شده است. با دور شدن از محل حداکثر اثر حفره، مسیر ترک تقریباً با شیب و انحنای قبل از تغییر، به مسیر خود ادامه می‌دهد.

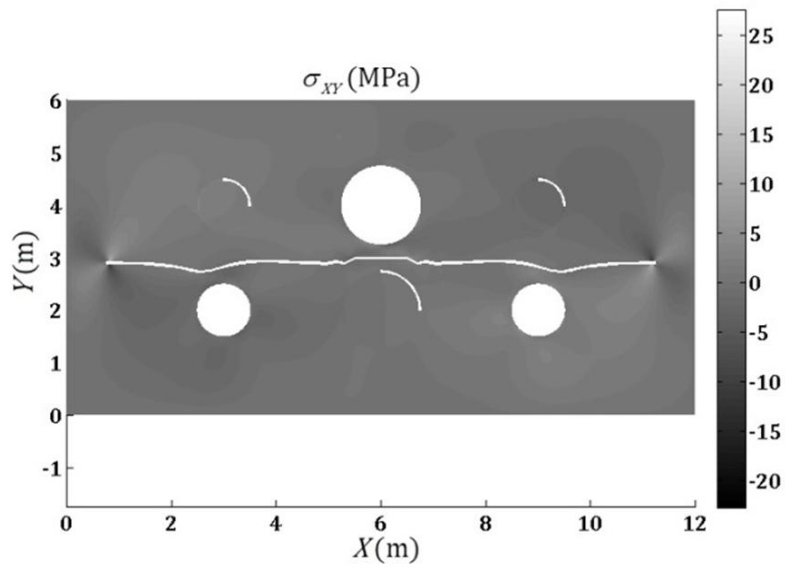
5-6- گسترش ترک وسط‌چین در اندرکنش با حفره و مرز داخلی

در این بخش میزان نقش‌آفرینی حفره داخلی و مرز ناهمگن در گسترش ترک میانی افقی در خلال 25 مرحله رشد ترک مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که در مثال‌های ارائه شده از 88200 المان چهارگرهی استفاده شده است و میزان رشد ترک در هر مرحله بصورت طول ثابت و معادل با 0/2 فرض گردیده است. در تمامی مدل‌ها ترک میانی افقی در ارتفاع معادل 3 و به طول یک، که در وسط دامنه قرار می‌گیرد، در نظر گرفته شده است. در مدل اول از شش مرز داخلی به صورت حفره داخلی و اینکلوژن نرم استفاده شده است. حفره و اینکلوژن میانی دارای شعاع 0/75 بوده و مابقی مرزهای داخلی با شعاع 0/5 ایجاد شده است. ترتیب قراگیری حفره‌ها و اینکلوژن‌ها مطابق شکل 25 می‌باشد. مطابق مسیر پیش‌بینی شده رشد ترک، حفره میانی بزرگتر موجب رانده شده اولین گام رشد ترک به ارتفاع معادل 2/85 شده است.

در این مثال به بررسی اثر اندرکنش ترک-حفره-اینکلوژن، در شرایط عدم تقارن در مرزهای ناهمگن، در گسترش ترک میانی پرداخته می‌شود. ترتیب حفرات و اینکلوژن مطابق شکل 26 می‌باشد. در این مثال دو حفره با



شکل 24 تغییرات مقادیر فاکتور شدت تنش در مدل چهارم



شکل 25 گسترش ترک میانی در حضور 3 حفره و 3 مرز داخلی، (نمایش σ_{XY})

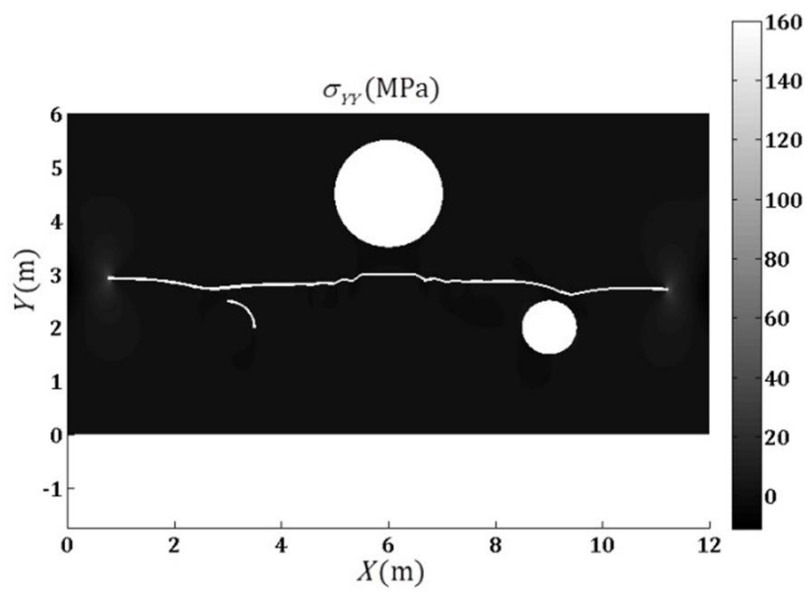
قطرهای 1/0 و 0/5 به انضمام یک مرز ناهمگن نرم به شعاع 0/5 لحاظ شده است. بدلیل عدم تقارن در هندسه مدل‌سازی شده گسترش ترک نیز بصورت غیرمتقارن بدست آمده است. در این مسأله مرکز حفره بزرگتر در (4/5 و 6) قرار داده شده است و بطور متقارن در دو طرف وسط دامنه یک حفره و یک مرز ناهمگن پیش‌بینی شده است. نسبت مدول مصالح به مرز ناهمگن داخلی برابر با 3 در نظر گرفته شده است. یکی از مواردی که می‌بایست در این مثال به آن توجه شود، مدل‌سازی دقیق مسیر نامتقارن رشد ترک برای ترک میانی است.

در شکل 27 مسیرهای ترک شبیه‌سازی شده در اندرکنش با حفره و مرز داخلی بصورت مقایسه‌ای نشان داده شده است.

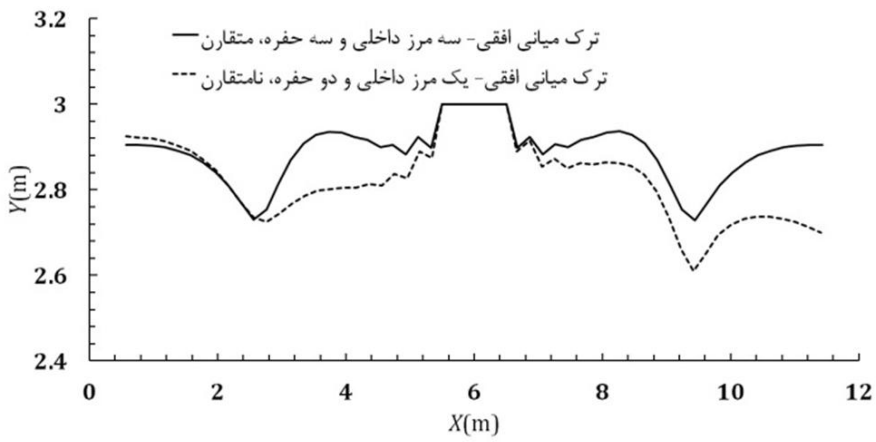
آنچه که مسلم است تأثیر قابل ملاحظه حفره میانی در تحمیل آغاز مسیر رشد ترک است. در مثال دوم نشان داده شده در شکل 26، که اینکلوژن میانی حذف شده است، مسیر رشد ترک تقریباً در تمامی بخش میانی پایین‌تر از مسیر رشد ترک در مثال اول نشان داده شده در شکل 25، قرار گرفته است. به عبارت دیگر مرز نرم تا حدی توانسته است که اثر حفره بر مسیر ترک را تعدیل سازد. همچنین باید توجه شود که در شرایط نامتقارن نیز مسیر ترک دقیقاً مدل‌سازی شده است. مسیر ترک اثبات می‌کند که اثر حفره بر مسیر ترک بیشتر از مرز داخلی است که البته نسبت مدول الاستیسیته در آن بی‌نهایت نباشد.

5-7- گسترش ترک وسط‌چین 60 درجه در اندرکنش با حفره و مرز داخلی

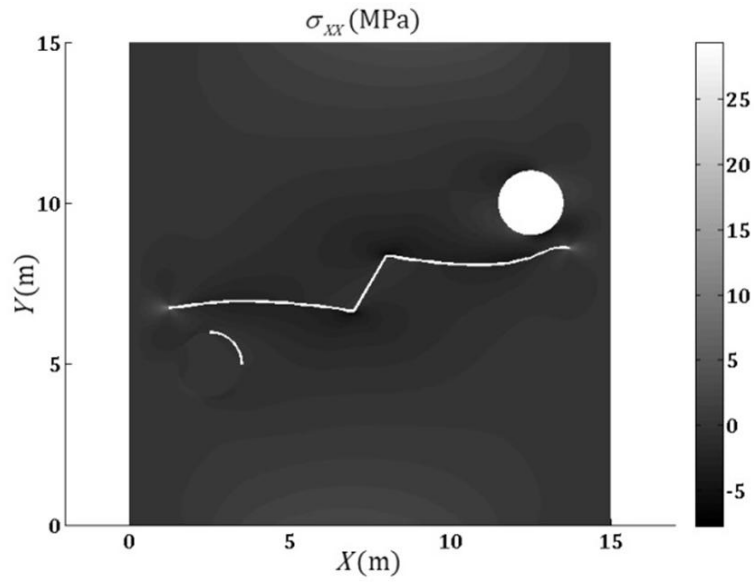
شکل 28 ترک وسط‌چین مایل، حفره و مرز داخلی نرم را در یک صفحه محدود نشان می‌دهد که بارگذاری واحد کششی $\sigma = 1(\text{MPa})$ بر دو وجه انتهایی بطور متقارن اعمال شده است. در گسسته‌سازی صفحه مورد نظر از



شکل 26 مدل‌سازی اندرکنشی گسترش ترک در حالت نامتقارن، (نمایش σ_{YY})



شکل 27 مقایسه مسیرهای گسترش ترک در اندرکنش با حفره و مرز داخلی



شکل 28 محاسبه گسترش ترک میانی مایل در اندرکنش با حفره و مرز داخلی نرم، (نمایش σ_{xx})

275626 المان چهار گرهی با اندازه بعد المان 0/028 در هر دو جهت استفاده شده است. با توجه به مسیر گسترش ترک بدست آمده نحوه عملکرد ترک در مواجه‌ی با حفره و مرز کناری مشخص می‌شود. انحنای مسیر ترک در نیمه منتهی به حفره کناری به سمت پایین و برعکس در نیمه سمت چپ، انحنای مسیر به سمت بالا می‌باشد. البته مسیر ترک در نزدیکی حفره و با تغییر قابل ملاحظه در مقدار فاکتور شدت تنش مود دوم یک شکست در مسیر رشد را تجربه می‌نماید.

6- نتیجه‌گیری

ترکیب روش‌های اجزای محدود توسعه یافته، روش مجموعه تراز و انتگرال اندرکنش در این مطالعه به نحو مطلوبی در شبیه‌سازی گسترش اندرکنشی ترک نشان داده شد. به عبارت دیگر ترکیب روش‌های اجزای محدود توسعه یافته و روش مجموعه تراز در مدل‌سازی حفرات و مرزهای داخلی نیاز به مش‌بندی داخلی مرزها را مرتفع ساخته و همچنین امکان برخورد مسیر رشد ترک با مرزهای داخلی را بطور طبیعی برقرار می‌سازد. در واقع تولید انواع ناپیوستگی به صورت ضمنی مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین تمامی مراحل گسترش ترک بدون نیاز به تغییر در شبکه اجزای محدود اولیه صورت گرفته که به لحاظ محاسباتی بسیار کم‌هزینه بوده است. نتایج بدست آمده گویای تأثیرپذیری مسیر رشد ترک از انواع مرزهای موجود در دامنه است. در حالت مرز نرم مسیر رشد ترک به مرز نرم نزدیک شده و در حالت مرز سخت مسیر رشد ترک از مرز سخت دور می‌شود. همچنین نشان داده شد که متناظر با ضعیف‌تر شدن مشخصات الاستیک مرز نرم، تأثیر آن مرز در جذب مسیر ترک به سمت خود افزایش می‌یابد. در حالیکه دفع ترک توسط مرز سخت با افزایش مشخصات الاستیک، افزایش چشم‌گیری نخواهد یافت. به عبارت دیگر با سخت‌تر شدن مرز داخلی، تمرکز تنش‌ها به سمت مرز ناهمگن سخت منتقل شده و میزان انرژی نوک ترک به نسبت مرز داخلی، کمتر خواهد شد. از این روی حفره بر گسترش ترک اثر بیشتری اعمال نموده، بنحوی که تا حد زیادی مسیر حرکت رشد ترک را به سمت خود تغییر می‌دهد.

7- فهرست علائم

a	طول ترک
b	عرض دامنه
E	مدول الاستیسیته (GPa)
$f_{ij}(\theta)$	توابع عمومی از θ
F	گرادیان تغییر شکل
$F_{\alpha}(r,\theta)$	تابع غنی‌سازی نوک ترک
$H(x)$	تابع غنی‌سازی هویساید
$u^h(x)$	تقریب جابجایی در X-FEM
J	انتگرال مستقل از مسیر
K_{I}	فاکتور شدت تنش مود اول
K_{II}	فاکتور شدت تنش مود دوم
$M^{(1,2)}$	انتگرال اندرکنش
$N_I(x)$	توابع شکل استاندارد اجزای محدود
q_1	تابع هموار کننده
R	شعاع دایره انتگرال‌گیری حول نوک ترک
$W^{(1,2)}$	دانسیته انرژی کرنشی

علایم یونانی

Γ_d	مرز ناپیوستگی
ε_{ij}	تانسور کرنش
ζ_I	مقدار گرهی تابع مجموعه تراز مرز داخلی
θ	زاویه نسبت به نوک ترک
θ_c	زاویه رشد ترک
$\nu(x)$	تابع غنی‌سازی
σ_{ij}	تانسور تنش
$\phi(x,t)$	تابع مجموعه تراز نوک ترک
φ_I	تابع مجموعه تراز مرز داخلی
$\psi(x)$	تابع مجموعه تراز مرز داخلی
$\psi(x,t)$	تابع مجموعه تراز بدنه ترک
Ω	محدوده کل دامنه
Ω_c^i	دامنه i امین فضای خالی

8- مراجع

[1] A.G. Khademalrasoul, R. Naderi, Fully Automatic Crack Propagation and Crack Growth Modeling in the Presence of the Soft and Hard Inclusions Using Extended Finite Element Method, *The Bi-Annual International Conference on Experimental Solid Mechanics and Dynamics,* Tehran, Iran, 2014.
[2] N. Sukumar, J.H. Prévost, Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 40, No. 26, pp. 7513-7537, 2003.
[3] M.J. Pais, N.H. Kim, T. Davis, Reanalysis of the Extended Finite Element Method for Crack Initiation and Propagation, *AIAA SDM Student Symposium,* University of Florida, Gainesville, FL 32611, 2010.
[4] N. Sukumar, D.L. Chopp, B. Moran, Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 70, No. 1, pp. 29-48, 2003.
[5] W.H. Gerstle, J.E. Abdalla, Finite element meshing criteria for crack problems, *ASTM STP 1074,* Philadelphia, 1990.
[6] B.J. Carter, P.A. Wawrzynek, A.R. Ingraffea, Automated 3-D crack growth simulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 47, No. 1-3, pp. 229-253, 2000.
[7] P.A. Wawrzynek, *Discrete modeling of crack propagation : theoretical aspects and implementation issues in two and three dimensions,* Cornell University, August, 1991.
[8] M. Xie, W.H. Gerstle, P. Rahulkumar, Energy-based automatic mixed-mode crack propagation modeling, *Journal of Engineering Mechanics,* Vol. 121, No. 8, pp. 914-923, 1995.
[9] S. Mohammadi, *Extended Finite Element Method: for Fracture Analysis of Structures,* Wiley, 2008.
[10] T. Belytschko, T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 45, No. 5, pp. 601-620, 1999.
[11] P. Krysl, T. Belytschko, An efficient linear-precision partition of unity

basis for unstructured meshless methods, *Communications in Numerical Methods in Engineering,* Vol. 16, No. 4, pp. 239-255, 2000.
[12] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 46, No. 1, pp. 131-150, 1999.
[13] N. Sukumar, D.L. Chopp, N. Moës, T. Belytschko, Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 190, No. 46–47, pp. 6183-6200, 2001.
[14] M. Stolarska, D.L. Chopp, N. Moës, T. Belytschko, Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 51, No. 8, pp. 943-960, 2001.
[15] S. Bordas, P.V. Nguyen, C. Dunant, A. Guidoum, H. Nguyen-Dang, An extended finite element library, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 71, No. 6, pp. 703-732, 2007.
[16] E.E. Gdoutos, *Fracture Mechanics: An Introduction,* Springer, 2005.
[17] G. Hello, M. Ben Tahar, J.-M. Roelandt, Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 49, No. 3–4, pp. 556-566, 2012.
[18] M.L. Williams, On the stress distribution at the base of a stationary crack., *ASME Journal of Applied Mechanics,* Vol. 24, No. 1, pp. 109–114, 1957.
[19] J.F. Yau, S.S. Wang, H.T. Corten, A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity, *Journal of Applied Mechanics-transactions of The Asme,* Vol. 47, No. 2, pp. 335-341, 1980.
[20] J.R. Rice, A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, *Journal of Applied Mechanics,* Vol. 35, No. 2, pp. 379-386, 1968.
[21] A. Sutradhar, G.H. Paulino, Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed-mode cracks by the interaction integral method, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 28, No. 11, pp. 1335-1350, 2004.
[22] A. de Klerk, A.G. Visser, A.A. Groenwold, Lower and upper bound estimation of isotropic and orthotropic fracture mechanics problems using elements with rotational degrees of freedom, *Communications in Numerical Methods in Engineering,* Vol. 24, No. 5, pp. 335-353, 2008.
[23] L. Banks-Sills, I. Hershkovitz, P.A. Wawrzynek, R. Eliasi, A.R. Ingraffea, Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I—z=0 is a symmetric plane, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 72, No. 15, pp. 2328-2358, 2005.
[24] L. Banks-Sills, P.A. Wawrzynek, B. Carter, A.R. Ingraffea, I. Hershkovitz, Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part II—Arbitrary geometry, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 74, No. 8, pp. 1293-1307, 2007.
[25] F. Erdogan, G.C. Sih, On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear, *Journal of Basic Engineering,* Vol. 85, No. 4, pp. 519-525, 1963.
[26] K.J. Miller, D.L. McDowell, *Mixed-mode Crack Behavior,* ASTM, 1999.
[27] J.M. Melenk, I. Babuška, The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 139, No. 1–4, pp. 289-314, 1996.
[28] I. Babuška, Z. Zhang, The partition of unity method for the elastically supported beam, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 152, No. 1–2, pp. 1-18, 1998.
[29] N. Moës, T. Belytschko, Extended finite element method for cohesive crack growth, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 69, No. 7, pp. 813-833, 2002.
[30] J. Shi, D. Chopp, J. Lua, N. Sukumar, T. Belytschko, Abaqus implementation of extended finite element method using a level set representation for three-dimensional fatigue crack growth and life predictions, *Engineering Fracture Mechanics,* Vol. 77, No. 14, pp. 2840-2863, 2010.
[31] D. Adalsteinsson, J.A. Sethian, A Fast Level Set Method for Propagating Interfaces, *Journal of Computational Physics,* Vol. 118, No. 2, pp. 269-277, 1995.
[32] J.A. Sethian, A fast marching level set method for monotonically advancing fronts, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* Vol. 93, No. 4, pp. 1591-1595, 1996.
[33] S. Osher, J.A. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *Journal of Computational Physics,* Vol. 79, No. 1, pp. 12-49, 1988.
[34] V. Daru, Level Set Methods and Fast Marching Methods – Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science, *European Journal of Mechanics - B/Fluids,* Vol. 19, No. 4, pp. 531-532, 2000.
[35] S. Osher, R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces,* Springer, 2003.
[36] P. Grinfeld, Hadamard's Formula Inside and Out, *Journal of Optimization Theory and Applications,* Vol. 146, No. 3, pp. 654-690, 2010.
[37] J. Bonet, R.D. Wood, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis,* Second Edition, Cambridge University Press, 2008.
[38] N. Moës, M. Cloirec, P. Cartraud, J.F. Remacle, A computational approach to handle complex microstructure geometries, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 192, No. 28–30, pp. 3163-3177, 2003.