

حل دقیق نیمه معکوس برای تغییر شکل الاستوپلاستیک تیر با مدل ماده‌ی توانی

حسن بیک محمدلو^۱، حمید اختراعی طوسی^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

۲- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

* مشهد، کد پستی ۹۱۷۷۹۴۸۹۴۴

چکیده

تحلیل‌های مهندسی تیر بر حدس یک الگوی مناسب برای میدان جابجایی در مقطع و طول تیر استوار است. تاکنون این نوع تحلیل‌ها به طور فراگیر در محدوده رفتار الاستیک ارائه و آزموده شده است. در یک برسی کاملاً جدید در این مقاله به تحلیل مهندسی تیر در محدوده الاستوپلاستیک پرداخته می‌شود. بدین منظور در پی معرفی یک میدان تغییر شکل مناسب که به طور معمول تحت عنوان میدان جابجایی کلاسیک اولر بر بنولی شناخته می‌شود، معادلات حاکم بر تیر الاستوپلاستیک با استفاده از اصول حساب تغییرات استخراج شده است. رفتار ماده بر پایه مدل رامبرگ آرگود و تسلیم ماده بر اساس معیار فن‌مازنز می‌باشد. پاسخ‌یابی معادلات انتگرالی غیرخطی و پیچیده حاصل در مقالات مختلف اغلب به روش‌های عددی انجام شده است. در این مقاله حل دقیق یک تیر نازک تحت بار گسترشده یکنواخت با استفاده از دو روش تحلیلی هوموتوپی و ادومیان برای شرایط مرزی دو سر گیردار معرفی می‌گردد. برای راستی‌آزمایی تحلیل، تغییر شکل تیر مورد بررسی توسعه نرم‌افزار تجاری آباکوس شبیه‌سازی شده است. نتایج مختلف پاسخ‌های تحلیلی و شبیه‌سازی در قالب تعدادی نموادر ارائه شده‌اند. به کمک نموادرها میزان انطباق جواب‌های تیر شبیه‌سازی شده با نتایج حاصل از دو روش تحلیلی ادومیان و هوموتوپی بررسی شده است. در پایان، در مورد امکان توسعه نظریه مهندسی کلاسیک تیر در انجام تحلیل‌های جامع الاستوپلاستیک اظهار نظر شده است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۰۲ اسفند ۱۳۹۴

پذیرش: ۱۱ خداد ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۱۲ تیر ۱۳۹۵

کلید واژگان:

تحلیل دقیق تیر

حل الاستوپلاستیک

روش هوموتوپی

روش ادومیان

حساب تغییرات

Exact semi-inverse solutions for the elastoplastic deformation of beam with power law material model

Hassan BeikMohammadlou, Hamid EkhteraeiToussi*

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.
* P.O.B. 9177948944, Mashhad, Iran, ekhteraei@um.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 21 February 2016
Accepted 31 May 2016
Available Online 02 July 2016

Keywords:
Exact Beam Analysis
Elastoplastic Solution
Homotopy Method
Adomian Method
Variational Calculus

ABSTRACT

Engineering analyses of beams are based on the proper guesstimate of deformation fields. Up until now, the analyses of beams have been widely proposed and experienced in elastic region of materials behavior. This paper considers the elastoplastic engineering analysis of beams. In this regard, following the definition of a proper deformation pattern known as classical Euler- Bernoulli model and using the variational calculus principals the governing equations are extracted. In this analysis the behavior of material obeys the Romberg-Osgood model and yielding is based on the von Mises criterion. Different numerical solutions are suggested for the solution of these complicated equations in the literature. In this paper the exact solution is provided for a thin beam under the action of uniformly distributed load by using the two analytical methods of homotopy and Adomian for the clamped- clamped boundary conditions. In verification phase, the deformation of beam is compared with the results of Abaqus software. Different graphical representations are provided for the results of the analytical solutions and simulations. Using these data, the level of consistency between the simulated solutions on one side and the Adomian and homotopy techniques on the other side, are assessed. At the end, the validity of applying the classical engineering theory of beams in the elastoplastic analyses is discussed.

صدق است. حل معادلات پیوستار به دلیل غیرخطی و پیچیده بودن در مسائل کاربردی، بسیار دشوار یا اساساً غیر ممکن است. بدین سبب پژوهشگران به ناگزیر از روش‌هایی استفاده می‌نمایند که نیمی تحلیلی و نیمی دیگر مبتنی بر فرضیات و روابط شهودی هستند. در این روش‌ها که تحت عنوان روش‌های نیمه معکوس شناخته می‌شوند، معمولاً تحلیلگر در آغاز یک حدس کلی برای میدان تغییر شکل ارائه می‌دهد. از تلفیق این میدان تغییر شکل با تعدادی از معادلات پایه از جمله شرایط تعادل در داخل و خارج سازه، روابط حاکم بر

به دلیل اهمیت و کاربرد پدیده خم شدن در طراحی سازه‌های مهندسی، مطالعه این پدیده از دیرباز مورد توجه پژوهشگران بوده است. در راستای بهره‌مندی بیشتر از توانایی مواد، اموزه طراحی و تحلیل تیرها و ورق‌ها در مسائل الاستوپلاستیک مورد توجه قرار گرفته است. انجام کار نظری در حوزه خم شدن به ارائه یک مدل ریاضی مناسب نیاز دارد. از آنجا که تیر به عنوان یک پیوستار مورد توجه قرار می‌گیرد، مدل‌های ریاضی محیط پیوسته در مورد آن

-۱ مقدمه

Please cite this article using:

H. BeikMohammadlou, H. EkhteraeiToussi, Exact semi-inverse solutions for the elastoplastic deformation of beam with power law material model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 6, pp. 259-270, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

به طور کلی با توجه به دستاوردهای ارائه شده در مراجع [6-12]، تحلیل الاستوپلاستیک تیرها یک رویکرد کاملاً بدیع محسوب نمی‌شود. با این حال تحلیل‌های منتشر شده منحصر به تحلیل تنش در مقاطع عرضی تیرها است. اغلب تحلیل‌های مهندسی به برآورد مناسبی از میزان تغییر شکل تیرها نیز نیاز دارند. بنابراین تحلیل‌های جدیدتر باید پاسخی برای میدان تغییر شکل تیر الاستوپلاستیک ارائه دهند. امروزه با وجود یک پیشنهاد غنی از پژوهش‌های مبتنی بر الگوهای مختلف، تغییر شکل مقاطع عرضی تیرهای الاستیک از یکسو و کاربرد حساب تغییرات و تئوری‌های حدی در تعیین معادلات حاکم محیط‌های الاستوپلاستیک از دیگر سو، زمینه برای بسط نظریه‌های مهندسی تیر در تحلیلهای الاستوپلاستیک که موضوع و نوآوری این تحقیق می‌باشد، مهیا گردیده است.

محدودیت‌ها و خطاها زیادی در اغلب مقالات تحلیلی مرتبط اعمال شده است که این تقریب‌ها به منظور آسان‌سازی مدل یا حل ساده‌تر معادلات به کار رفته‌اند. به عنوان مثال در اغلب مراجع نام برد، حالت ساده‌ی منحنی تنش کرنش الاستیک-کاملاً پلاستیک در نظر گرفته شده است. تقریب‌های دقیق‌تر رفتار مادی مانند مدل ماده‌ی رامبرگ آزگود منجر به روابط دشوارتر می‌شود و مورد توجه قرار نگرفته است. مهمتر اینکه در متابعه موجود اغلب از فرض توزیع خطی کرنش از تار خنثی در کنار فرض تنش یک محوری استفاده می‌شود. این در حالی است که در شرایط کرنش صفحه‌ای، تنش‌ها صفحه‌ای نخواهند بود. به عبارت دیگر چند محوره بودن تنش‌ها، شرایط آستانه و تداوم تسلیم را تحت تأثیر قرار خواهد داد. این به معنای آن است که انتظار می‌رود پاسخ تغییر شکل تیر در تحلیلهای نیمه‌معکوس مشابه مقاله‌ی اخیر، از پیش‌بینی‌های قبلی دقیق‌تر باشد.

در راستای انجام یک تحلیل جامع نیمه‌معکوس برای تغییر شکل الاستوپلاستیک تیرها در مقاله‌ی حاضر، تیری با ابعاد، بارگذاری و شرایط مرزی دلخواه و رفتار ماده‌ی الاستوپلاستیک غیرخطی به صورت تحلیلی و دقیق مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی صحت حل، چند نمونه با مقادیر و شرایط مشخص حل شده اند. بدین منظور ابتدا با ترکیب روابط مربوط به میدان جابجایی، کرنش-کرنش-کرنش و با استفاده از اصل حداقل انرژی و اصول حساب تغییرات، معادلات دیفرانسیل حاکم استخراج شده‌اند. برای شرایط الاستوپلاستیک با درنظر گرفتن مدل رامبرگ-آزگود برای رفتار ماده و معیار تسلیم فن مایزیز به عنوان شرط ورود به ناحیه پلاستیک، اثرات غیرخطی شرایط پلاستیک وارد مسئله شده است.

برخی روش‌های تحلیلی برای حل معادلات غیرخطی از جمله روش هموتوپی قبلاً آزموده شده‌اند. لیتو از اولین کسانی است که از روش هموتوپی برای حل تحلیلی معادلات غیرخطی استفاده کرده است [13]. همچنین لیتو تحقیقاتی در زمینه مقایسه‌ی نتایج روش‌های پرتوبریشن⁴ و هموتوپی انجام داده است [14]. لیانگ و جفری [15] نیز برای یک مسئله غیرخطی، مقایسه‌ای بین نتایج روش‌های پرتوبریشن و تحلیلی هموتوپی انجام داده است. نتیجه‌ی این تحقیقات نشان می‌دهد عملکرد روش تحلیلی هموتوپی مطلوب‌تر بوده و به پژوهش‌های دیگران نزدیکتر است [14-16]. روش هموتوپی، برای بسیاری از معادلات غیرخطی کارآبی بالای داشته و از مزایای این روش، همگرایی بالا، عدم وابستگی به نقطه شروع حل و تضمین یکتاوی جواب است [13-15]. رجبی و رمضانی [16] مدلی برای میکروتیرهای غیرخطی در شرایط الاستیک با میدان جابجایی کلاسیک ارائه

میدان‌هایی از جمله تغییر شکل، تنش و کرنش شخص می‌شود. در تحلیل تیرها و ورق‌ها اقسام این حدس‌های اولیه با عنوانی از قبیل نظریه کلاسیک یا اولر برنولی¹، نظریه مرتبه اول برشی با تیموشنسکو، نظریه‌های مراتب بالای برشی و نظریه‌های لایه‌ای قابل مشاهده است. آنالیز خمش در شرایط الاستیک توسط برخی محققان انجام شده است. به طور مثال زنکور [1] حل دقیق آنالیز خمش ورق و تیر با مقطع مستطیلی تحت بار گستردۀ را براساس میدان کلاسیک در شرایط الاستیک به دست آورده است. لیم و همکاران [2] با استفاده از معادلات الاستیسیته روشی برای مطالعه خمش تیرها و ورقهای نازک همگن و مستطیلی در شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل ارائه داده‌اند. لی و همکاران [3] خمش تیرهای تابعی الاستیک با میدان جابجایی کلاسیک را توسط ایده‌برداری از تیرهای همگن به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار داده‌اند. خمش تیرهای مدرج تابعی یک سرگیردار در شرایط الاستیک غیرخطی به وسیله‌ی کانگ و لی [4] انجام شده است. آفقوز و سیوالک [5] بر اساس تئوری الاستیسیته گردایان کرنش، یک مدل برای تغییر شکل بررسی تیر برای بارگذاری‌های استاتیکی و دینامیکی ارائه داده‌اند.

اقسام متنوعی از تحلیل‌های الاستوپلاستیک تیرها نیز در متابع قابل مشاهده است. بطور مثال حل تحلیلی خمش تیر با مقطع مستطیلی در شرایط الاستیک-کاملاً پلاستیک به وسیله‌ی استوک و هلیلوویچ [6] پی‌گیری و انجام شده است. در این پژوهش، تحلیل براساس شرایط الاستیک پیش رفتۀ و در مرحله استخراج معادلات، شرایط پلاستیک با تنش تسلیم ثابت در معادلات وارد شده است [6]. نی و ژانگ [7] حل بسته‌ی تیر خمیده‌ی غیرهمگن در شرایط الاستوپلاستیک با بارگذاری خمش خالص را ارائه کرده‌اند. در سازه‌ی تیر خمیده این امکان وجود دارد که از مختصات قطبی استفاده کرده و در نتیجه معادلات به صورت بسته حل شوند. به عبارت دیگر در این شرایط نیاز به تعریف میدان جابجایی و روش‌های نیمه‌معکوس نیست. البته در مقاله‌ی مذکور، تنش تسلیم ثابت در نظر گرفته شده است [7]. بین و وان‌زی [8] یک راه حل تحلیلی برای بارگذاری خمش خالص تیر الاستوپلاستیک با درنظر گرفتن گشتاور تنش ارائه داده‌اند. در تحقیق فوق از کرنش‌های برشی صرف‌نظر شده و تنش تسلیم با مدل ماده‌ی رامبرگ آزگود² در نظر گرفته شده است. به کارگیری روش‌های عددی قابلیت تحلیل هندسه‌ها و رفتارهای مکانیکی پیچیده‌تر را هم ممکن نموده است. بطور مثال معارف‌دوست و کخدایان [9] مقایسه‌ای بین نتایج تئوری‌های تغییر شکل و نمودی در تحلیل کمانش الاستوپلاستیک صفحات نازک مستطیلی به کمک روش عددی یک چهارم تفاضلی تعمیم یافته³ انجام دادند. مدل ماده‌ی به کار رفتۀ در پژوهش فوق رامبرگ آزگود بوده است. رمضان‌زاده و همکاران [10] با به کارگیری تئوری‌های تغییر شکل و نمودی پلاستیسیته، تحلیل کمانش دینامیکی یک ورق مستطیلی را در شرایط الاستوپلاستیک به صورت عددی مورد بررسی قرار داده‌اند. در پژوهشی دیگر، توسط علیزاده و انصاری [11]، حل خمش میکروتیرهای یک سرگیردار بر اساس تئوری پلاستیسیته‌ی گردایانی چن-ونگ انجام شده است. در پژوهش فوق، شرایط الاستیک و الاستیک-کاملاً پلاستیک مورد تحلیل قرار گرفته است. ابولرعب و وویادجیس [12] به صورت‌های تحلیلی و آزمایشگاهی، پارامتر طول را برای تئوری گردایان کرنش پلاستیک تعیین کردند. آنها شرایط طول را صرفاً پلاستیک در نظر گرفته و از خواص الاستیک ماده صرف‌نظر کرده‌اند [12].

¹ Euler-Bernoulli² Romberg Osgood³ GDQ method⁴ perturbation
⁵ microbeams

بهناگریر باید از روش‌های عددی استفاده کرد که به دلیل خطاها رایج محاسباتی، دقت کمتری دارند. در استخراج معادلات تیر الاستوپلاستیک، این پیچیدگی‌ها به مراتب از معادلات تیر الاستیک بیشتر می‌شود. در این حالت وجود معیار تسلیم و رفتار غیر خطی مادی در پیچیدگی معادلات حاکم دخیل خواهد شد. لذا برای رفع بخشی از این مشکل، از روش‌های نیمه معکوس استفاده می‌شود. یکی از این روش‌ها تخمین میدان جابجایی است. در این مقاله یک تیر با شرایط کرانی دو سر درگیر تحت بارگذاری، در شرایط الاستیک و الاستوپلاستیک مورد تحلیل قرار گرفته است. شکل 1 بیانگر مختصات کلی و نحوه بارگذاری تیر است. x جهت طولی تیر، y جهت پهنه‌ی تیر (عمق تصویر) و z در جهت ارتفاع و بارگذاری می‌باشد. مطابق شکل 1، تیر در جهت‌های x ، y و z به ترتیب دارای ابعاد L ، b و h است.

با وجود پیشینه غنی برای مقالات مبتنی بر روش‌های نیمه‌معکوس در تحلیل‌های الاستیسیته و ارتعاشاتی، جای خالی این رویکرد ارزشمند تحلیلی در مطالعات الاستوپلاستیک، بهخوبی آشکار است. در این مقاله و در جایگاه استفاده از رویکرد نیمه‌معکوس برای تحلیل تیرها، میدان تغییر شکل کلاسیک یا نظریه اویلر- برنولی برای تحلیل الاستوپلاستیک تیرها آزموده می‌شود. در این رویکرد از اثر تغییر شکل برشی عرضی صرف‌نظر می‌شود که در تیرهای نازک، با وجود چشم‌بوشی از این اثر، همچنان نتایج مناسبی بدست می‌آید؛ بهطوری که بنا به نتایج قابل دسترسی، هنگامی که نسبت طول به ضخامت یک تیر، کوچکتر از یک بیست باشد، نظریه کلاسیک کاملاً دارای نتایج مناسبی خواهد بود [9,3-1].

مطابق شکل 2 برای تیرهایی که در جهت‌های بارگذاری و عرضی نازک و در امتداد طولی بلند هستند، میدان جابجایی کلاسیک به صورت رابطه (1) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} U &= u - zw' \\ V &= 0 \\ W &= w \end{aligned} \quad (1)$$

در این معادلات U ، V و W به ترتیب جابجایی در جهت‌های x ، y و z در هر نقطه از تیر می‌باشد. همچنین جابجایی در مقطع میانی تیر به ترتیب در جهت‌های x و z می‌باشد که فقط تابعی از x در نظر گرفته می‌شوند. به این ترتیب U تابعی از x و z خواهد بود. در این مقاله کلیه مشتق‌گیری‌ها نسبت به x انجام می‌شود، بهطور مثال منظور از w' و w'' به ترتیب مشتق اول و دوم w نسبت به x است.

معادلات حاصل از اصل همیلتون یا حداقل انرژی پتانسیل [25-26] برای یک ساره در حالت کلی به صورت رابطه (2) است:

$$\delta \iint \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{\text{tot}} dv - \delta \oint f_i u_i dv - \delta \oint \sigma_i u_i ds = 0 \quad (2)$$

در رابطه (2) عبارت اول مربوط به انرژی پتانسیل کرنشی، عبارت دوم اثر نیروهای حجمی و جمله سوم اثر نیروهای سطحی سازه است. در مسئله حاضر، تیری با پهنا و شرایط مرزی دلخواه تحت بارگذاری q در نظر گرفته شده است. برای این مسئله، معادله (2) به صورت رابطه (3) ساده می‌شود:

$$\int \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^{\text{tot}} dv = \delta \oint \sigma_i u_i ds \quad (3)$$

با فرض تغییر شکل کوچک و میدان جابجایی کلاسیک ارائه شده در روابط (1)، تنها مؤلفه غیر صفر کرنش کل، از رابطه (4) قابل استخراج خواهد بود:

دادند. ایشان حل معادلات غیرخطی را به کمک روش تحلیلی و دقیق هموتوپی انجام داده‌اند. جعفری و سیفی [17] و جعفری و همکاران [18] با استفاده از روش تحلیلی دقیق هموتوپی، معادله انتشار موج خطی و غیرخطی تیر را مورد تحلیل قرار داده‌اند. بهزادی و همکاران [19] در زمینه کاربرد روش هموتوپی برای حل معادلات غیرخطی ولترا¹ و فردهلم به شکل انتگرالی- دیفرانسیلی تحقیقاتی مبسوطی انجام داده‌اند.

در مقاله حاضر، علاوه بر روش هموتوپی، معادلات حاکم به روشی ابتکاری با ایده برداری از روش ادومیان نیز حل شده‌اند. روش ادومیان [20] ابزار تحلیل بخشی از معادلات دیفرانسیل - انتگرالی از جمله معادلات موسوم به معادلات فردهلم² نوع اول و دوم است. بسیاری از معادلات غیرخطی در پژوهش‌های مختلف به کمک روش ادومیان حل شده‌اند. در یک پژوهش، وازووا [22] برای محاسبه چندجمله‌ای‌های ادومیان در عملگر غیرخطی، الگوریتم جدیدی ارائه داده است.

بابلیان و همکاران [23] مقایسه‌ای بین روش‌های هموتوپی و ادومیان برای حل معادلات غیرخطی انتگرالی ولترا و فردهلم انجام داده‌اند. این تحقیق نشان می‌دهد نتایج روش هموتوپی دقیقتر است. کومار و سینگ [24] در تحقیقاتی با اعمال یک ضریب نامعین در معادلات ادومیان (همانند روش هموتوپی)، برای محاسبه چندجمله‌ای ادومیان در معادلات غیرخطی، دقت روش ادومیان را بهخوبی افزایش داده‌اند. همچنین مقایسه‌ای این نتایج با نتایج روش هموتوپی، نشان می‌دهد که اصلاحات این ضریب نامعین، منجر به همخوانی مناسب دستاورد این دو روش می‌شود [24].

معادلات حاکم در سازه‌های الاستوپلاستیک بهخصوص برای مدل ماده‌ی غیرخطی رامبرگ آزگود، منجر به معادلات غیرخطی دیفرانسیل انتگرالی پیچیده‌ای می‌شود. در اغلب تحقیقات قبلی، معادلات حاکم در سازه‌های الاستوپلاستیک به روش‌های عددی حل شده‌اند [12-6]. در این مقاله حل دقیق مسئله‌ی تیر الاستوپلاستیک مطرح خواهد شد. پاسخ‌های عددی نسبت به روش‌های حل تحلیلی دقیق، دارای خطاها رایج محاسباتی و مشکل تکرارنایپذیری هستند. در ضمن در این پژوهش، تحلیل‌ها بر پایه‌ی رفتار الاستوپلاستیک توانی یا مدل رامبرگ آزگود، بسط داده شده است.

در برخی تحقیقات در شرایط الاستیک، پژوهشگران برای حل معادلات در شرایط الاستیک خطی یا غیرخطی از روش تحلیلی هموتوپی³ استفاده نموده‌اند. در مقاله‌ی حاضر، برای اولین بار، حل مسائل پلاستیسته غیرخطی به دو روش تحلیل دقیق و جدگانه، مبتنی بر تحلیل معادلات دیفرانسیلی- انتگرالی تحت عنوان روش‌های هموتوپی و ادومیان⁴ ارائه شده است. نهایتاً جواب‌های بدست آمده از دو روش تحلیلی فوق با نتایج شبیه‌سازی‌های نرم‌افزار آباکوس نیز مقایسه شده‌اند.

2- مدل‌سازی نیمه‌معکوس در تحلیل الاستوپلاستیک تیر

استخراج معادلات الاستیک تیر از ترکیب معادلات تعادل، روابط هوک و معادلات کرنش جابجایی حاصل می‌شود. یکی از روش‌های پیگیری این روند، استفاده از اصول حساب تغییرات است [25]. چنانچه استخراج معادلات حاکم بدون اعمال محدودیت بر هر یک از میدان‌های مورد مطالعه پیگیری شود، معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای حاصل اساس یک رویکرد تحلیلی، موسوم به روش مستقیم را تشکیل می‌دهند. اغلب برای حل معادلات پیچیده حاصل

¹ Voltra

² Fered Holm

³ homotopy Analysis Method (HAM)

⁴ Adomian Decomposition Method (ADM)

در این روابط E و G به ترتیب مدول الاستیک، ضریب پواسون و مدول بشی هستند. توجه شود که این سه کمیت با رابطه $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ با یکدیگر ارتباط دارند [25]. با جاگذاری مؤلفه‌های میدان کرنش از رابطه (4) در رابطه (10) مؤلفه‌های غیر صفر تنش‌های اصلی به شرح زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}(u' - zw'') \quad (11)$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}(u' - zw'') \quad (12)$$

به کمک معادله (11) و (12) منتجه‌های نیرو به صورت روابط (14,13) تعریف می‌شود:

$$N = \int \sigma_x dA = E^* \int (u' - zw'') dA = E^* u' A_0 \quad (13)$$

$$M = \int \sigma_x z dA = E^* \int (u' - zw'') zdA = -E^* w'' I \quad (14)$$

که در آن از تساوی‌های زیر استفاده شده است:

$$E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (15)$$

$A = E^* A_0$ و $I = \frac{bh^3}{12}$ با ترکیب معادلات (8)، (9) و (13) می‌توان نتیجه گرفت $u = 0$ است. به عبارت دیگر جابجایی افقی در تمام نقاط تارخنثی صفر است. همچنین از ترکیب معادلات (8)، (9) و (14) برای تیر دو سرگیردار می‌توان رابطه (16) را نتیجه گرفت:

$$w = \frac{q}{24E^* I} x^2 (x - L)^2 \quad (16)$$

که w معادله خیز تیر در جهت z است. در این حالت نتیجه تحلیل با نتایج ارائه شده در کتاب‌های مقاومت مصالح، مانند [25]، مطابقت دارد.

2-2 معادلات حاکم بر تیر الاستوپلاستیک

میدان کرنش کل در حالت الاستوپلاستیک شامل دو بخش الاستیک و پلاستیک است:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{tot}} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (17)$$

میدان کرنش کل بر حسب جابجایی‌ها در معادله (4) آمده است. با فرض تئوری تغییر شکل² [27,26] که در آن تغییر شکل پلاستیک رخدادی غیر نمود است و برمبنای معیار فن مایزز، رابطه تنش‌های انحرافی بر حسب کرنش‌های پلاستیک به صورت رابطه (18) خواهد بود:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} S_{ij} \quad (18)$$

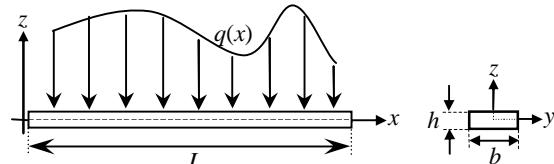
در این رابطه $\bar{\sigma}$ تنش مؤثر و $\bar{\varepsilon}^p$ کرنش مؤثر هستند. همچنین مدل رامبرگ آزگود [27,26] برای رفتار یک محوری تنش-کرنش به صورت رابطه (19) است:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{tot}} = \frac{\sigma}{E} + k \left(\frac{\sigma}{E}\right)^n \quad (19)$$

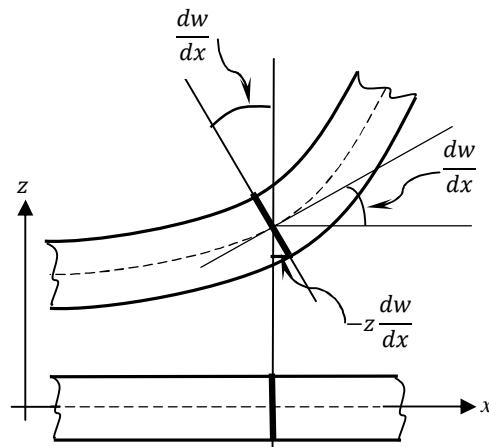
که با توجه به رابطه (17)، جمله اول رابطه (19) کرنش الاستیک و جمله دوم آن، کرنش پلاستیک است. با ترکیب روابط (18) و (19)، رابطه (20) بدست می‌آید:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \left[\frac{k_n^{\frac{1}{n}}}{E (\bar{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{n}-1}} \right] S_{ij} \quad (20)$$

از طرفی با مرتب کردن معادلات به صورت تنش بر حسب کرنش و ترکیب معادلات (4) و (11) روابط (23-21) بدست می‌آیند:



شکل 1 معرفی هندسه عمومی تیر بازگذاری شده



شکل 2 تغییر شکل تیر در نظریه کلاسیک

$$\varepsilon_x^{\text{tot}} = \frac{\partial U}{\partial x} = u' - zw'' \quad (4)$$

که با توجه با معادلات (3) و (4) نتیجه می‌دهد:

$$\int \int \sigma_x \delta(u' - zw'') dAdx = - \int q \delta w dx \quad (5)$$

برای شرایط کرانی از نوع گیردار و مفصلی، کار نیروها و گشتاورهای متتمرکز در تکیه‌گاه‌ها صفر است. منتجه‌های نیرو به صورت روابط (6) تعریف می‌شود:

$$N = \int \sigma_x dA \quad (6)$$

$$M = \int \sigma_x z dA \quad (6)$$

با ترکیب (5) و (6)، رابطه (7) نتیجه می‌شود:

$$\int_0^L (N \delta u' - M \delta w'') dx = - \int_0^L q \delta w dx \quad (7)$$

به کمک انتگرال گیری جز به جز، معادله (7) به صورت رابطه (8) ساده می‌شود:

$$N' = 0, M'' = q, N \delta u|_0^L = M \delta w'|_0^L = M'' \delta w|_0^L = 0 \quad (8)$$

بنابراین برای تیر دو سرگیردار، شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$$u(0) = u(L) = w(0) = w(L) = w'(0) = w'(L) = 0 \quad (9)$$

2-1 معادلات قیر الاستیک با میدان جابجایی کلاسیک (اویلر برنوی)

در قیر الاستیک، کرنش کل با کرنش الاستیک برابر است. بنابراین در این حالت، تنها کرنش الاستیک غیرصفر، همان رابطه (4) است. از طرفی با توجه به قانون هوک¹ [25] رابطه تنش کرنش به صورت رابطه (10) صادق است:

$$\sigma_{ij} = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (10)$$

¹ Hook

²deformation theory

$$+ z\left(q\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3\right) \quad (35)$$

که در آن $a_0 = (1 + \nu)k^{-\frac{1}{n}}$ است. در این معادله ثابت‌های c_1, c_2 و c_3 , مجھول و بقیه ثابت‌ها معلومند. مشاهده می‌شود معادله (35) یک معادله انتگرالی غیرخطی و غیرصریح است. این معادله به لحاظ ساختاری یک معادله انتگرالی محسوب می‌شود. در صورت حل این معادله، در واقع تابع کرنش پلاستیک معادل، یعنی $(z, x, \bar{\varepsilon})^p$ ، در هر نقطه از تیر تعیین خواهد شد. علاوه بر اهمیت کاربردی $(x, z, \bar{\varepsilon})^p$ ، می‌توان توسط آن خیز افقی و قائم تیر الاستوپلاستیک را نیز تعیین کرد. برای این منظور، با جاگذاری تابع کرنش پلاستیک معادل بدست آمده در معادلات (32) و (33)، توابع $u(x)$ و $w(x)$ تعیین می‌شوند. سپس با درنظرگرفتن یک ثابت انتگرال‌گیری مجھول برای u ، دو ثابت انتگرال‌گیری مجھول برای w و سه ثابت مجھول c_1, c_2 و c_3 ، در مجموع 6 ثابت مجھول در معادلات وجود خواهد داشت که به کمک 6 شرط مرزی رابطه (9)، قابل تعیین هستند. در ادامه دو روش تحلیلی و دقیق ادومیان و هوموتوبی برای حل معادله (35)، ارائه می‌شود.

3- معرفی و کاربرد روش اصلاح شده ادومیان در تحلیل تیر الاستوپلاستیک

معادلات انتگرالی معمولاً با اسمای مختلفی نام‌گذاری می‌شوند. به طور مثال معادله انتگرالی غیرخطی فردھلم به صورت کلی (36) می‌باشد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^L K(x, t) F[u(t)] dt \quad (36)$$

در این معادله تابع مجھول $u(x)$ در داخل و خارج انتگرال ظاهر شده است. $[F[u(t)]$ تابعی غیرخطی از مجھول $u(t)$ است. توابع $K(x, t)$ و $f(x)$ توابعی معلوم و λ یک پارامتر مستقل از t است [24-20].

از مقایسه معادله حاکم بر میدان کرنش الاستوپلاستیک تیر در رابطه‌های (35) و (36) می‌توان نتیجه گرفت رابطه (35) معروف نوعی معادله انتگرالی فردھلم می‌باشد. در ادامه یک روش تحلیلی تحت عنوان روش ادومیان برای پاسخ‌یابی معادله حاکم بر میدان کرنش الاستوپلاستیک در رابطه (35)، که الگویی مشابه با معادله انتگرالی غیرخطی فردھلم دارد، به کار گرفته می‌شود.

روش ادومیان بر این پایه استوار است که تابع مجھول $u(x)$ به صورت رابطه (37) مجذاسبازی شود.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (37)$$

که جملات این سری به ازای $n \geq 0$ با یک روند بازگشتی تعیین می‌شوند. در معادله انتگرالی غیرخطی فردھلم به فرم معادله (36)، جمله غیرخطی $F(u(t))$ با چندجمله‌ای‌های ادومیان به صورت رابطه (38) جایگزین می‌شوند:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [F(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n(x))] |_{\lambda=0} \quad (38)$$

به طور نمونه:

$$A_0 = F(u_0)$$

$$A_1 = u_1 \frac{d}{du_0} F(u_0)$$

$$A_2 = u_2 \frac{d}{du_0} F(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!}\right) \frac{d^2}{du_0^2} F(u_0) \quad (39)$$

با جایگزینی معادله (38) در (37)، رابطه (40) نتیجه می‌شود

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu)(1+2\nu)} [(u' - zw'') (1-\nu) - (\varepsilon_x^p)(1-2\nu)] \quad (21)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu)(1+2\nu)} [(u' - zw'') (\nu) - (\varepsilon_y^p)(1-2\nu)] \quad (22)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-\nu)(1+2\nu)} [(u' - zw'') (\nu) - (\varepsilon_z^p)(1-2\nu)] \quad (23)$$

همچنین برای محاسبه تنش میانگین به کمک روابط (21) تا (23)، رابطه (24) بدست می‌آید:

$$\sigma_M = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} \frac{E}{(1-2\nu)} (u' - zw'') \quad (24)$$

تنش‌های انحرافی از رابطه (25) بدست می‌آید:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_M \delta_{ij} \quad (25)$$

با ترکیب معادلات (20) و (25)، می‌توان روابط (28-26) را نوشت:

$$\varepsilon_x^p = \frac{3}{2} \frac{k^{\frac{1}{n}}}{E(\bar{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{n}-1}} \left[\frac{E}{1+\nu} \right] \left[\frac{2}{3} (u' - zw'') - \varepsilon_x^p \right] \quad (26)$$

$$\varepsilon_y^p = \frac{3}{2} \frac{k^{\frac{1}{n}}}{E(\bar{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{n}-1}} \left[\frac{-E}{1+\nu} \right] \left[\frac{1}{3} (u' - zw'') + \varepsilon_y^p \right] \quad (27)$$

$$\varepsilon_z^p = \frac{3}{2} \frac{k^{\frac{1}{n}}}{E(\bar{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{n}-1}} \left[\frac{-E}{1+\nu} \right] \left[\frac{1}{3} (u' - zw'') + \varepsilon_z^p \right] \quad (28)$$

با به تعریف کرنش مؤثر [27,26]، به صورت $\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p = 3/2 \bar{\varepsilon}^p$ نتیجه می‌دهد:

$$\bar{\varepsilon}^p = [k^{\frac{1}{n}}(\bar{\varepsilon}^p)^{1-\frac{1}{n}}] \left[\frac{(u' - zw'')}{(1+\nu) + \frac{3}{2} k^{\frac{1}{n}}(\bar{\varepsilon}^p)^{1-\frac{1}{n}}} \right] = -2\varepsilon_y^p = -2\varepsilon_z^p = \varepsilon_x^p \quad (29)$$

قابل توجه است که رابطه (29)، فرض عدم تغییر حجم در شرایط پلاستیک را ارضا می‌کند. یعنی:

$$\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p + \varepsilon_z^p = 0 \quad (30)$$

نهایتاً با تعریف کمیت‌های:

$$A = E^* A_0 \quad \text{و} \quad B = \frac{EB}{(1+\nu)} \quad (31)$$

و از ترکیب معادلات (6)، (8)، (21)، (24) و (29)، معادلات (34-32) استخراج می‌شوند:

$$Au' - B \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\varepsilon}^p dz = c_1 \quad (32)$$

$$-Dw'' - B \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\varepsilon}^p z dz = q\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3 \quad (33)$$

$$(u' - zw'') = (1+\nu)k^{-\frac{1}{n}}(\bar{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{n}} + \frac{3}{2}(\bar{\varepsilon}^p) \quad (34)$$

به این ترتیب معادلات حاکم به صورت دستگاه سه معادله سه مجھول تیر الاستوپلاستیک، شامل کرنش پلاستیک در هر نقطه از تیر و جابجایی‌های تیر در جهت‌های z و w به ترتیب در قالب توابع $(x, z, \bar{\varepsilon}^p)$ تعیین می‌شوند. در این حالت تغییر متغیر $u' = u(x)$ و $w(x)$ بدست آمداند. در این حالت $U_1 = u'(x)$ و $U_2 = w(x)$ معادلات دیفرانسیل (32) تا (34) را به معادلات جبری (غیر دیفرانسیل) تبدیل می‌نمایند. همچنین این سه معادله قابلیت ادغام شدن دارند و می‌توان به صورت رابطه (35)، دستگاه را به یک معادله انتگرالی غیر دیفرانسیلی تبدیل کرد:

$$a_0(\bar{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{n}} + \frac{3}{2}(\bar{\varepsilon}^p) = \frac{c_1}{A} + \frac{B}{A} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\varepsilon}^p dz + \frac{B}{D} \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\varepsilon}^p z dz \quad (35)$$

است. $\phi(\tau, 1) = g(\tau)$ و $\phi(\tau, 0) = g_0(\tau)$ به ترتیب $P = 1$ و $P = 0$ با تغییر P از صفر تا یک، حل $\phi(\tau, P)$ از حدس اولیه‌ی (τ, g_0) تا جواب مطلوب $\phi(\tau, P)$ تغییر می‌کند. با استفاده از سری تیلور می‌توان رابطه (47) را نوشت:

$$\phi(\tau, P) = g_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\tau) P^m \quad (47)$$

که در آن رابطه (48) برقرار است:

$$g_m(\tau) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(\tau, P)}{\partial P^m} \Big|_{P=0} \quad (48)$$

اگر تابع کمکی، عملگر خطی کمکی، متغیر کمکی و حدس اولیه درست باشد، آنگاه می‌توان رابطه (49) را نوشت:

$$g(\tau) = g_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\tau) \quad (49)$$

با تعریف ضریب χ به صورت $\chi = \{0 | m \leq 1, 1 | m > 1\}$ و $\chi_m = \{0 | m \leq 1, 1 | m > 1\}$ انجام برخی عملیات ریاضی می‌توان رابطه (50) را نوشت:

$$L[g_m(\tau) - \chi_m g_{m-1}(\tau)] = \beta H(\tau) R_m(\vec{g}_{m-1}(\tau)) \quad (50)$$

ماتریس $\vec{g}_m(\tau) = \{g_0(\tau), g_1(\tau), \dots, g_n(\tau)\}_m$ به شکل

است. تعداد جملات هر سطر ماتریس \vec{g}_m برابر با $n+1$ می‌باشد. برای R_{m+1} میزان دقت حل، تابع خطأ تعريف می‌شود. تابع خطأ $(\vec{g}_m(\tau))$ از رابطه (51) به دست می‌آید:

$$R_{m+1}[\vec{g}_m(\tau)] = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N[\phi(\tau, P)]}{\partial P^m} \Big|_{P=0} \quad (51)$$

با به کار بردن عملگر L^{-1} در دو طرف رابطه (50)، رابطه (52) نتیجه می‌شود:

$$g_m(\tau) = \chi_m g_{m-1}(\tau) + \beta L^{-1}[H(\tau) R_m(\vec{g}_{m-1}(\tau))] \quad (52)$$

در نهایت با ترکیب جواب‌های جزئی طبق رابطه زیر، جواب معادله تا m امین جمله به دست می‌آید:

$$g(\tau) = \sum_{m=0}^M g_m(\tau) \quad (53)$$

به طور مشخص وقتی $M \rightarrow \infty$ ، معادله (52) جواب دقیق معادله (46) خواهد بود اما محاسبات معمولاً تا جایی ادامه می‌یابد که دقت مورد نظر حاصل شود.

حال در راستای هماهنگ‌سازی روش تحلیلی هموتوپی برای تحلیل تیر الاستوپلاستیک می‌توان نوشت:

$$N[\bar{\varepsilon}^p(x, z)] = -a_0(\bar{\varepsilon}^p(x, z))^{\frac{1}{n}} - \frac{3}{2}\bar{\varepsilon}^p(x, z) + \frac{c_1}{A} + \frac{B}{A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varepsilon}^p(x, z) dz + \frac{B}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varepsilon}^p(x, z) zdz + z\left(q\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3\right) = 0 \quad (54)$$

مشابه رابطه (49) ابتدا تابع پاسخ میدان کرنش پلاستیک تفکیک شده و به صورت رابطه (55) در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{\varepsilon}^p(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m(x, z) \quad (55)$$

عملگر خطی L در رابطه (50) برای تحلیل الاستوپلاستیک در ساده‌ترین صورت ممکن به شکل رابطه (56) قابل ارائه است:

$$L[\bar{\varepsilon}^p(x, z)] = \bar{\varepsilon}^p(x, z) \quad (56)$$

بنابراین می‌توان رابطه (57) را توشت:

$$L[\varepsilon_m(x, z) - \chi_m \varepsilon_{m-1}(x, z)] = \beta R_m(\vec{\varepsilon}_{m-1}(x, z)) \quad (57)$$

لزوم به توضیح است که انتخاب عملگر، همچون تعداد جملات، در دقت

$(n \geq 0)$

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x) \\ u_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_0^L K(x, t) A_0(t) dt \\ u_{n+1}(x) &= \lambda \int_0^L K(x, t) A_{n+1}(t) dt \end{aligned} \quad (40)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (37) تابع $u(x)$ تعیین می‌شود. مطابق مراجعت [22-20] همگرایی این روش تضمین شده است.

حال با هدف به کارگیری روش ادومیان در تحلیل تیر الاستوپلاستیک، ابتدا معادله (35) به صورت رابطه (41) بازنویسی می‌شود:

$$F(\bar{\varepsilon}^p(x, z)) = \frac{c_1}{A} + \frac{B}{A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varepsilon}^p dz + \frac{B}{D} z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\varepsilon}^p zdz + z\left(q\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3\right) \quad (41)$$

که در آن می‌توان رابطه (42) را نوشت:

$$F(\bar{\varepsilon}^p(x, z)) = a_0(\bar{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{n}} + \frac{3}{2}(\bar{\varepsilon}^p) \quad (42)$$

در این راستا، ابتدا چند جمله‌ای‌های ادومیان به صورت روابط (44, 43) تعریف می‌شود:

$$F(\bar{\varepsilon}^p(x, z)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, z) \quad (43)$$

$$\bar{\varepsilon}^p(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(x, z) \quad (44)$$

از معادلات (41) تا (44)، رابطه (45) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots &= \\ \frac{c_1}{A} + \frac{B}{A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_0(x, z) + \varepsilon_1(x, z) + \dots) dz + \\ \frac{B}{D} z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z(\varepsilon_0(x, z) + \varepsilon_1(x, z) + \dots) dz + \\ z\left(q\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3\right) \end{aligned} \quad (45)$$

در واقع هدف یافتن پاسخ (45) است. برای این منظور به کمک معادلات (39) و (40) هر یک از جملات تابع هدف تعیین می‌شوند. بعد از محاسبه‌ی هر تعداد جمله دلخواه، با استفاده از معادله (44)، کرنش پلاستیک هر نقطه از تیر (x, z) به صورت یک تابع به دست می‌آید. نهایتاً به کمک پاسخ $\bar{\varepsilon}^p(x, z)$ و با استفاده از معادلات (32) و (33)، میدان جابجایی تیر مشخص می‌شود. نمونه‌ای از شیوه پاسخ‌یابی معادله (45) برای یک مسئله کلی در پیوست الف ارائه شده است.

4- حل معادله تیر الاستوپلاستیک با استفاده از روش تحلیلی هموتوپی

در روش هموتوپی، معادله دیفرانسیلی انتگرالی غیرخطی به شکل کلی $N[g(\tau)] = 0$ در نظر گرفته می‌شود که در آن N یک عملگر غیرخطی، τ متغیر مستقل و (τ, g) تابع مجھول است [14, 13]. معادله مرتبه صفرم هموتوپی به صورت رابطه (46) است:

$$(1-P)L[\phi(\tau, P) - g_0(\tau)] = P\beta H(\tau)N[\phi(\tau, P)] \quad (46)$$

که در آن $P \in [0, 1]$ یک متغیر جدید و $\beta \neq 0$ متغیری غیرصفر، و $H(\tau)$ یک تابع کمکی است. L یک عملگر خطی کمکی است. $g_0(\tau)$ یک حدس اولیه برای $\phi(\tau, P)$ و $\phi(\tau, P)$ یک تابع نامعلوم است. به ازای

بخش‌های تحلیلی، دارای خواص الاستوپلاستیک بوده و مدل ماده‌ی رامبرگ- آزگود برای آن به کار رفته است. برای اعمال مدل ماده‌ی رامبرگ- آزگود در نرم افزار آباکوس، ابتدا به کمک جدول ۱ و رابطه (۱۹)، چندین زوج مرتب تنش- کرنش برای AL7075-T6 تولید شده است. هر چند طبق این رابطه، از شروع بارگذاری سازه دارای کرنش‌های ترکیبی الاستوپلاستیک خواهد بود، اما واضح است که با توجه به انتخاب مقدار ۱۰.۹ برای توان سخت شوندگی، بهازای کرنش‌های کوچک، بخش الاستیک به مراتب بزرگتر از بخش پلاستیک است و بر عکس، بنابراین می‌توان گفت در رابطه (۱۹) جمله اول نماینده بخش الاستیک و جمله دوم نماینده بخش پلاستیک است. به این ترتیب با انتخاب یک کرنش بسیار کوچک به عنوان مرز این دو ناحیه، کرنش شروع تسیلیم مقید گردیده و زوج مرتب‌های تنش- کرنش مناسب برای استفاده در شبیه‌سازی آباکوس فراهم می‌شود.

به منظور کسب اطمینان از دستیابی به شبیه‌سازی مناسب برای یک بارگذاری مشخص، آزمون حساسیت مشن انجام شده است. برای این منظور به ازای تعداد المان بندهای متفاوت، شبیه‌سازی تکرار شده است. نتایج آزمون حساسیت و مش بهینه در شکل ۳ آمده است. بعد از تعیین ابعاد مش بهینه، کلیه شبیه‌سازی‌ها برای تیرهای الاستوپلاستیک، با استفاده از مش بندهی بهینه انجام شده است.

5- نتایج تحلیلی تیر الاستیک

به طور معمول در نظریه‌های سنتی مقاومت مصالح در تحلیل تیر، همزمان ضمن در نظر گرفتن الگوی مشخص برای تغییر شکل، رابطه تنش و کرنش در امتداد طولی مشابه خمس خالص و به صورت یک محوره در نظر گرفته می‌شود. به این ترتیب همواره کاربران در ارتباط دادن مؤلفه‌های تنش و کرنش با مشکلاتی مواجه هستند. مثلاً در حالی که این الگوی تغییر شکل باعث تولید مؤلفه برشی تنش نمی‌شود، به کمک اصول تعادل، مؤلفه تنش برشی استخراج می‌شود. به عبارت دیگر در تحلیل مقاومت مصالح، قیود تحلیلی غیر واقعی و بیش از حد است. در مقابل در یک روش تغییراتی نیمه معکوس که با فرض میدان تغییر شکل مشخص شروع می‌شود، همواره سازگاری تنشها و تغییر شکلها حفظ می‌شود. بر این اساس و با فرض الگوی کرنش صفحه‌ای، نتایج تحلیل برای تیر دو سر گیردار، برای جابجایی طولی منجر به رابطه $\sigma = \alpha$ می‌گردد که از این لحاظ فرضیات مقاومت مصالح، با نتایج این تحلیل هماهنگ است. همچنان نتایج شبیه‌سازی نیز این موضوع را تأیید می‌کند. در شکل ۴ نتایج بی بعد شدهای خیز در جهت قائم برای یک تیر دو سر گیردار تحت بار گسترده یکنواخت در شرایط الاستیک آمده است. همچنان که انتظار می‌رود، پاسخ این مقاله بسیار به پاسخ محققین دیگر مانند [۵] که مبتنی بر نظریه‌های تیر کلاسیک^۳ و برشی مرتبه اول^۴ بوده است، نزدیک است. در شکل ۴ همچنان نتایج با شبیه‌سازی آباکوس مقایسه و نزدیکی جوابها تأیید شده است.

5- نتایج تحلیلی تیر الاستوپلاستیک با رفتار رامبرگ آزگود در این بخش پاسخ معادلات دیفرانسیلی- انتگرالی ارائه شده در بخش ۲ برای تحلیل خمس یک تیر دو سر گیردار نوعی تحت بار دلخواه با هندسه و مصالح معرفی شده در جدول ۱ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بدلیل ماهیت تکراری روش‌های حل ادومیان و هوموتوبی که در بخش‌های ۳ و ۴ معرفی شدند،

حل تأثیر می‌گذارد و انتخاب میان این دو (تعداد جملات یا مرتبه عملگر) به انتخاب کاربر بستگی خواهد داشت. به همین منظور در اینجا چند اپراتور مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و مشابه مرجع ردیف [۱۶-۱۸] حاصل تأثیر اپراتور خطی کننده L روی تابع برابر خود تابع است. همچنان تابع کمکی $H(x, z)$ که در رابطه (۴۶) به کار رفته است، برابر واحد در نظر گرفته شده است. این انتخاب با توجه به دقت کافی و سادگی در حل‌های انجام شده و نیز به پیشوانه‌ی استفاده‌ی اپراتور خطی در مراجع مختلف از جمله مرجع [۱۶-۱۸] در مسأله‌ی ای مشابه، انجام شده است. علاوه بر اینها $\beta \neq 0$ مترقبه غیرصفر و البته دلخواه است که مقدار آن به شدت در نتایج تأثیرگذار است. اما طبق نتایج مراجع دیگر از جمله مرجع ردیف [۱۶-۱۸] و نیز نتایج این مقاله مشاهده می‌شود، هرچه تعداد جملات بیشتری از سری تابع هدف مورد استفاده قرار گیرد، تأثیر مقدار انتخابی β کمتر خواهد بود.

به منظور ایجاد ساختار معادله (۵۱)، با انجام برخی عملیات ریاضی و به کمک رابطه (۵۰)، معادله خطأ به صورت رابطه (۵۸) نوشته می‌شود:

$$R_m[\vec{\varepsilon}_{m-1}(x, z)] = \frac{-a_0}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \{[\phi(x, z, P)]^{\frac{1}{n}}\}}{\partial P^{m-1}} \Big|_{P=0} \\ + \frac{B}{A} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{m-1}(x, z) dz + \frac{B}{D} z \int_{-h/2}^{h/2} z \varepsilon_{m-1}(x, z) dz \\ + (1 - \chi_m) \left[\frac{c_1}{A} + \frac{z}{D} \left(q \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) \right] - \frac{3}{2} \varepsilon_{m-1}(x, z) \quad (58)$$

به این ترتیب جملات مختلف ε_m به دست آمدند. برای انجام فرایند حل دقیق و یافتن جواب مسأله، مقادیر مختلف پارامترها، در ε_m جایگزین می‌شوند. سپس از رابطه (۵۴) تابع کرنش پلاستیک مؤثر در تمام نقاط تیر الاستوپلاستیک حاصل می‌شود. در ادامه با جایگذاری، تابع کرنش پلاستیک مؤثر به دست آمده در روابط (۳۲) و (۳۳) میدان جابجایی در تمام نقاط تیر الاستوپلاستیک به دست آید. نمونه‌ای از پاسخ‌یابی معادله (۵۸) برای یک مسأله کلی در پیوست ب ارائه شده است.

5- بررسی نتایج

در بخش‌های قبل نظریه جامعی برای تحلیل نیمه معکوس الاستوپلاستیک تنش و تغییر شکل در تیرها ارائه گردید. حال کاربرد نظریه توسعه داده شده در بخش‌های قبلی، برای تحلیل بارگذاری یک تیر منشوری از جنس آلومینیوم AL7075-T6 در شرایط کرانی دو سر درگیر با مشخصات هندسی و مادی مطابق جدول ۱ به کمک مرجع [۹] مورد بررسی قرار می‌گیرد.

اولین گام در مطالعه پاسخ‌ها، اعتبارسنجی نتایج و میزان انطباق آنها با واقعیات تجربی است. بدین منظور در آغاز، نتایج تحلیل با نتایج شبیه‌سازی رایانه‌ای مقایسه می‌شوند.

5- شبیه‌سازی با نرم افزار آباکوس

به موازات مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌های مختلف تحلیلی، مسأله تیر مورد بررسی در محیط نرم افزار آباکوس^۱ نیز مورد تحلیل قرار گرفته است. در مرحله شبیه‌سازی ابعاد تیر و خواص ماده کاملاً مشابه با مقادیر به کار رفته در نتایج تحلیلی استفاده شده است. در این شبیه‌سازی، تیر به صورت یک مدل سهبعدی مورد تحلیل قرار گرفته است. المان به کار رفته برای شبیه‌سازی در نرم افزار آباکوس از نوع C3D8R² بوده است. سازه‌ی مورد بررسی همانند

³ Euler Bernoli beam theory (EBT)

⁴ Timoshenko beam theory (TBT)

¹ ABAQUS

² An 8-node linear brick, reduced integration, hourglass control

شکل 6 نمونه‌ای از توزیع خیز قائم بی‌بعد شده w/h برای تیر الاستوپلاستیک دو سر گیردار بر مبنای دو روش تحلیلی هوموتوپی و ادومیان و نیز شبیه‌سازی آباکوس را نشان می‌دهد. با توجه به دقت کافی اشاره شده در توضیح شکل 5 و برای فراهم ساختن امکان مقایسه مناسب، در هردو روش تحلیلی از شش جمله ابتدایی سری استفاده شده است. بر مبنای این نمودار نتایج تحلیل دقیق دو روش هوموتوپی و ادومیان با نتایج شبیه‌سازی تطبیق خوبی دارند. با این حال برای اطمینان از کفایت این روش‌ها برای تحلیل، لازم است نمودارهای تنش و کرنش نیز مورد توجه قرار گیرد. بدین منظور در شکل 7 نتایج حاصل از تحلیل تنش الاستوپلاستیک در راستای طول تیر دو سر گیردار، برای توزیع تنش در ارتفاع $h/4$ از خط میانی تیر ارائه شده است. این نمودار برپایه نتایج روش‌های هوموتوپی و ادومیان و شبیه‌سازی نرم افزار آباکوس ترسیم شده است. وجود همانگی میان شبیه‌های دو روش تحلیلی با نتایج واقعی برای تیر نازک در این شکل دیده می‌شود.

البته همانطور که ملاحظه می‌شود، نتایج روش هوموتوپی در مقایسه با روش ادومیان، به نتایج شبیه‌سازی نزدیک‌تر هستند. برای توجیه این مطلب باستی به وجود پارامتر آزاد β در روش هوموتوپی اشاره کرد. نتایج محققین قبلی [24,23] در زمینه مقایسه‌ی این دو روش ریاضی برای معادلات غیرخطی، بیانگر این واقعیت است که در صورت استفاده از ضریب β بهینه، روش هوموتوپی نتایج دقیق‌تری نسبت به روش ادومیان خواهد داشت. توجه شود که معادلات اولیه‌ی روش ادومیان فاقد چنین ضریبی است.

در شکل‌های 8، 9 و 10 به ترتیب منحنی‌های تراز خیز قائم، تنش و

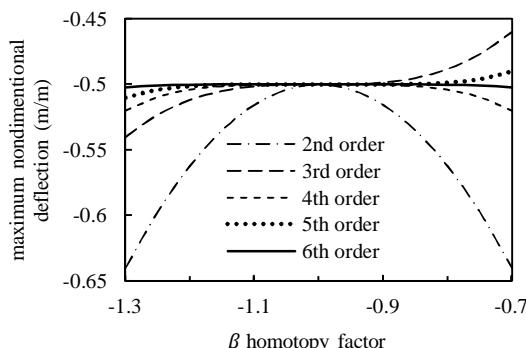


Fig. 5 The effect of β factor on maximum deflection of beam in different orders of homotopy method

شکل 5 تأثیر ضریب β در خیز بیشینه تیر برای مرتبه‌های مختلف روش هوموتوپی

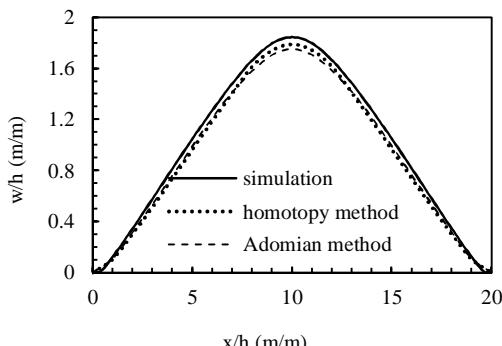


Fig. 6 Non-dimensional vertical deflection of elastoplastic beam centerline

شکل 6 خیز قائم بی‌بعد شده در محور میانی تیر الاستوپلاستیک

پیش از شروع به کارگیری آنها، حصول اطمینان از همگرایی تحلیلها ضرورت دارد. توجه می‌گردد که روش تحلیلی هوموتوپی، همان‌طور که در معادله (57) و نیز در پیوست ب مشاهده می‌شود، همگرایی وابسته به ضریب β دارد. به عبارت دیگر با پیوستی تحلیل حساسیت جوابهای روش تحلیلی هوموتوپی نسبت به ضریب β انجام شود.

در شکل 5 تأثیر ضریب β در خیز ماکریمیم تیر برای مرتبه‌های مختلف روش هوموتوپی مطالعه شده است. منظور از مرتبه‌ی n در روش هوموتوپی، حضور n امین جمله در سری هوموتوپی است. شکل 5 نشان می‌دهد به ازای جمله مرتبه‌ی ششم، تغییرات ضریب β در خیز ماکریمیم تیر، بسیار ناچیز است. به طوری که خطای محاسباتی بازاری جمله مرتبه ششم، حدود 0.01 درصد است. این بدان معناست که برای حل به روش هوموتوپی در معادله (55) تنها استفاده از مجموع شش جمله اول سری کفایت می‌کند.

نتایج تحلیل نشان می‌دهد در شرایط الاستوپلاستیک با استفاده از هر دو روش تحلیلی هوموتوپی و ادومیان، برای تیر دو سر گیردار، خیز افقی در مقطع میانی طولی تیر نزدیک به صفر خواهد بود ($0 \approx u$). یعنی با وجودی که در حالت الاستوپلاستیک تابع u در معادلات وارد شده است، مقدار محاسبه شده برای آن مشابه تحلیل‌های [1-5] قابل چشم‌پوشی است.

[9] AL7075-T6

Table 1 Elastoplastic parameters of Romberg-Osgood model for AL7075T6 [9]

h(m)	B(m)	L(m)	n	k	v	E(GPa)	كمیت
0.05	0.05	1	10.9	3.94×10^{21}	0.32	72.4	مقدار

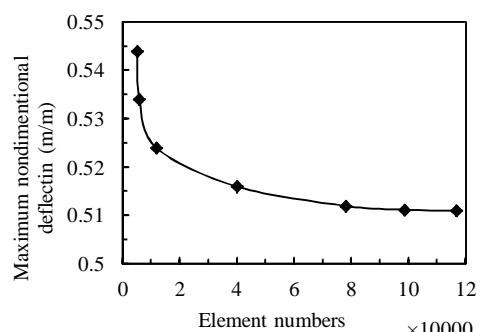


Fig. 3 Mesh sensitivity in terms of element numbers

شکل 3 حساسیت مش بنده به تعداد المان

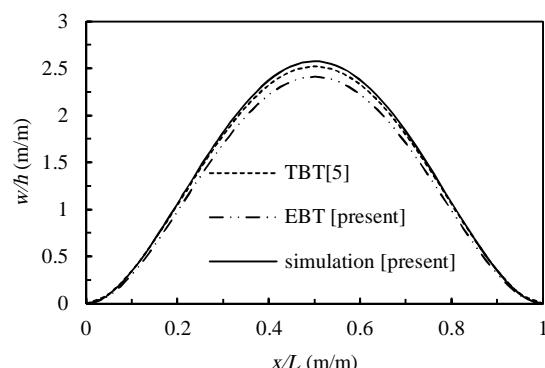


Fig. 4 Non-dimensional vertical deflection for the slender clamped beam under uniform load action

شکل 4 خیز قائم بی‌بعد شده تیر دوسر گیردار تحت بار گسترده ثابت برای تیر بلند

تغییرات تنش در جهت x و تنش معادل (فن‌مایز) در مقطع $L/2$ را برای روش‌های مختلف نشان می‌دهد.

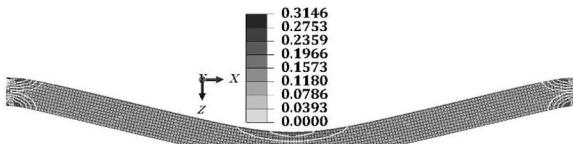


Fig. 10 Analytical and simulation results for the contours of plastic strain(m/m) in elastoplastic beam

شکل 10 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای منحنی‌های تراز کرنش پلاستیک در تیر الاستوپلاستیک

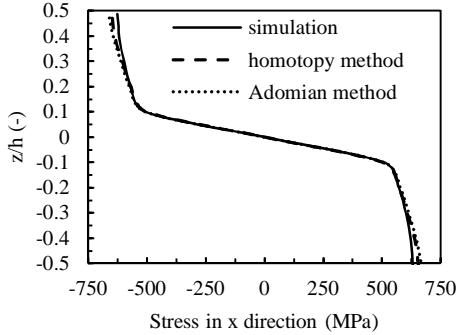


Fig. 11 Analytical and simulation results for the σ_x component at the mid-span cross section of elastoplastic beam

شکل 11 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای مؤلفه σ_x تنش در مقطع عرضی میانه تیر الاستوپلاستیک

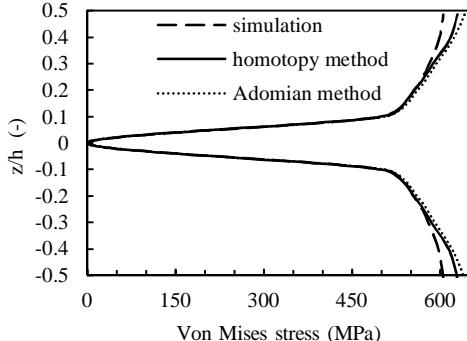


Fig. 12 Analytical and simulation results for the mid-span transversal distribution of $\bar{\sigma}$ in the elastoplastic beam

شکل 12 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای توزیع $\bar{\sigma}$ در مقطع عرضی میانه تیر الاستوپلاستیک

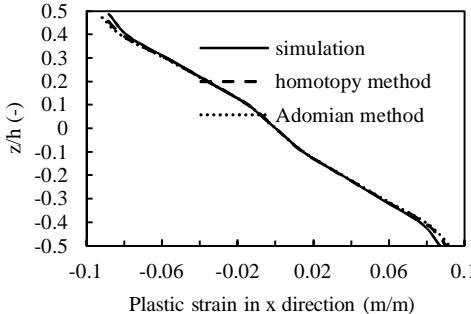


Fig. 13 Analytical and simulation results for the mid-span transversal distribution of ε_x^p in the elastoplastic beam

شکل 13 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای توزیع ε_x^p در مقطع عرضی میانه تیر الاستوپلاستیک

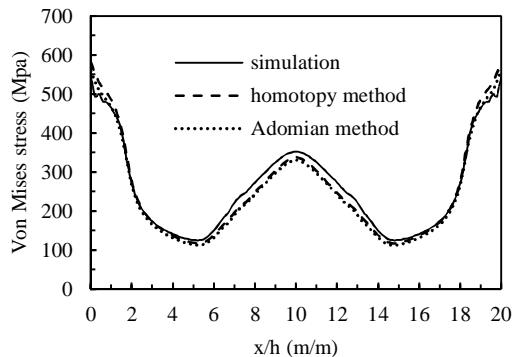


Fig. 7 توزیع طولی $\bar{\sigma}$ در فاصله $h/4$ بالای محور میانی تیر الاستوپلاستیک

شکل 7 نتایج تحلیلی $\bar{\sigma}$ در فاصله $h/4$ بالای محور میانی تیر الاستوپلاستیک

کرنش پلاستیک تیر در شرایط الاستوپلاستیک حاصل از نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی با رفتار رامبرگ آزگود ترسیم شده است. زمینه‌ی سیاه و سفید منحنی ترازها، حاصل از شبیه‌سازی و خطوط سفید رنگ کانتورها حاصل از حل دقیق تحلیلی هموتوپی است. با توجه به نتایج نزدیک دو روش هموتوپی و ادومیان، هر سه نمودار 8 تا 10 مطلوب بودن نتایج دو روش تحلیلی هموتوپی و ادومیان را در مقایسه با شبیه‌سازی نشان می‌دهند. از شکل‌های 8 تا 10 نکته‌ی جالب دیگری نیز استنباط می‌شود. با ملاحظه این اشکال پیداست که شدت تغییرات خیز قائم، تنش و کرنش پلاستیک در منحنی‌های تراز کاملاً با هم متفاوت است. به طوریکه در شکل‌های 8 و 9 کانتورهای تغییرات خیز قائم و تنش در طول تیر به شکلی تقسیم شده‌اند که ابعاد این تقسیمات قابل مقایسه با یکدیگر است. در حالی که شکل 10 نشان می‌دهد کانتور تغییرات کرنش پلاستیک در دو سر و وسط تیر بسیار شدیدتر از سایر قسمت‌های تیر است. در واقع تغییرات کرنش پلاستیک در بخش بسیار عمده‌ای از تیر کاملاً ملایم است و در بخشی کوچک از تیر - دو سر تیر و وسط تیر - این شدت تغییرات بسیار زیاد است. در ادامه نتایج تحلیل‌های هموتوپی و ادومیان در مقاطع عرضی تیر بطور کمی نیز بررسی می‌شود. در شکل‌های 11 تا 15 نتایج دو روش تحلیلی و نتایج شبیه‌سازی در مقطع میانی طول تیر، $L/2$ ، مقایسه شده‌اند. شکل‌های 11 و 12 به ترتیب

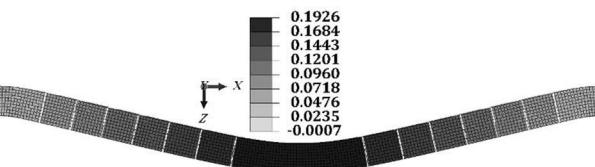


Fig. 8 تصویرمکب تحلیلی - شبیه‌سازی برای منحنی‌های تراز نقطاطی با جابجائی

قائم مشابه در تیر الاستوپلاستیک

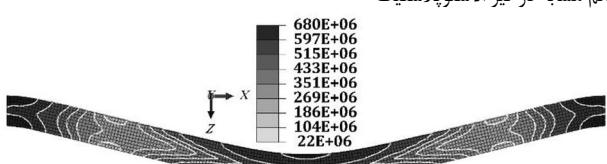


Fig. 9 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای منحنی تراز تنش ون - می‌سز در تیر الاستوپلاستیک

شکل 9 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای منحنی تراز تنش ون - می‌سز در تیر الاستوپلاستیک

اینکه تیر در شرایط کاملاً الاستیک باقی بماند یا آن که بهخشی از تیر و حتی همه‌ی تیر وارد شرایط الاستوپلاستیک شده و دارای کرنش پلاستیک باشد، شیوه تحلیل پاسخگو و نتایج تحلیل قابل استفاده است.

6- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل الاستوپلاستیک تیرهای نازک به روش تحلیلی مورد توجه قرار گرفته است. در مدلسازی نیمه معکوس یا مهندسی تیر از الگوی

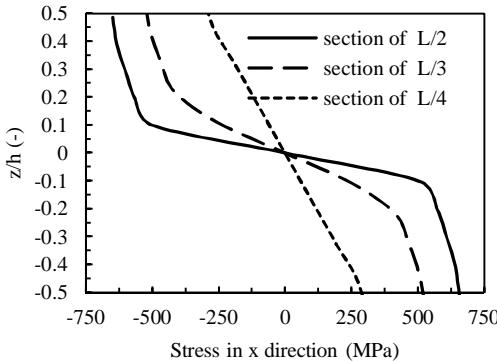


Fig. 16 A comparison of σ_x at several cross sections of elastoplastic beam obtained by homotopy method

شکل 16 مقایسه σ_x حاصل از روش هموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک

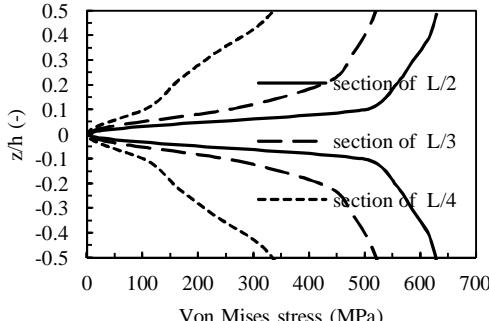


Fig. 17 A comparison of $\bar{\sigma}$ at several cross sections of elastoplastic beam obtained by homotopy method

شکل 17 مقایسه $\bar{\sigma}$ حاصل از روش هموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک

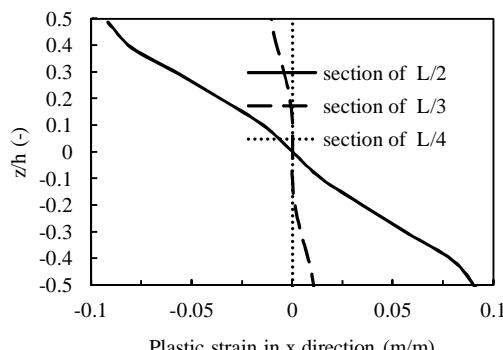


Fig. 18 A comparison of ε_x^p at several cross sections of the elastoplastic beam obtained by homotopy method

شکل 18 مقایسه کرنش پلاستیک در جهت x حاصل از روش هموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک

همچنین شکل‌های 13، 14 و 15 در مقطع $L/2$ به ترتیب بیانگر نحوه تغییرات کرنش در جهت x ، کرنش پلاستیک معادل و کرنش کل برای روش‌های مختلف است. نمودارهای 11 تا 15 نشان می‌دهد روش‌های تحلیلی ذکور در مقاطع عرضی نیز با نتایج شبیه‌سازی همخوانی دارند و به پاسخ-یابی مناسبی دست یافته‌اند.

بعد از اطمینان از همخوانی نتایج حل دقیق روش‌های هموتوپی و ادمیان با نتایج شبیه‌سازی، در شکل‌های 16 تا 20 نمودارهای مختلف روش هموتوپی در 3 مقطع عرضی ارائه شده است. شکل‌های 16 و 17 به ترتیب تغییرات تنش در جهت x و تنش معادل فن‌مایزز در مقطع $L/2$ ، $L/3$ و $L/4$ را برای روش هموتوپی نشان می‌دهد. همچنین شکل‌های 18، 19 و 20 با استفاده از روش هموتوپی به ترتیب بیانگر تغییرات کرنش در جهت x کرنش پلاستیک معادل (فن‌مایزز) و کرنش کل برای مقاطع مختلف است. نمودارهای 16 تا 20 قابلیت روش‌های حل دقیق ارائه شده در معرفی پاسخ برای نواحی مختلف میدان تغییر شکل را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، این تصاویر به گونه‌ای مرتب شده‌اند که وضعیت مقاطع عرضی در موضع مختلف معرفی شوند. به طوری که مقطع $L/4$ در محدوده کاملاً الاستیک و مقطع $L/2$ کاملاً در محدوده ارتفاع 0.2cm تا -0.2cm قرار گرفته است. در حالی که مقطع $L/3$ تقیباً در محدوده ارتفاع 0.2cm تا -0.2cm قرار دارد.

این موضوع بیانگر آن است که روش‌های تحلیلی هموتوپی و ادمیان در مسئله‌ی حاضر برای مقادیر مختلف بار گسترده قابل کاربرد است. فارغ از

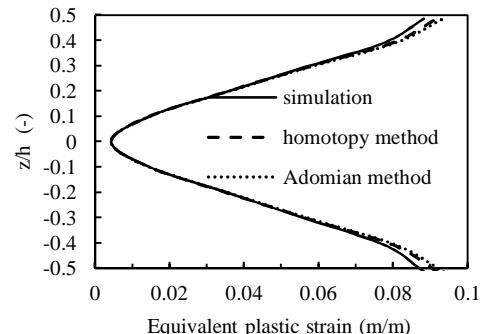


Fig. 14 Analytical and simulation results for the mid-span transversal distribution of $\bar{\varepsilon}^p$ in the elastoplastic beam

شکل 14 نتایج تحلیل و شبیه‌سازی برای توزیع $\bar{\varepsilon}^p$ در مقطع عرضی میانه تیر الاستوپلاستیک

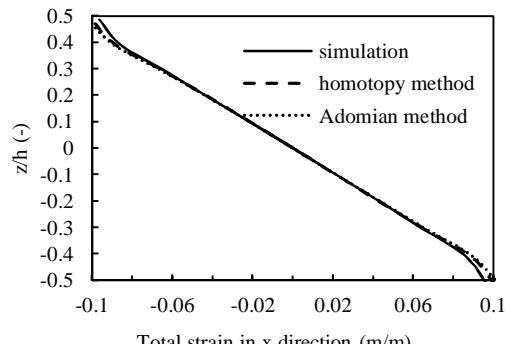


Fig. 15 Analytical and simulation results for the mid-span transversal distribution of $\varepsilon_x^{\text{tot}}$ in the elastoplastic beam

شکل 15 مقایسه کرنش کل در جهت x در مقطع عرضی $L/2$ حاصل از نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی تیر الاستوپلاستیک

فرمول‌بندی این مقاله منحصر به تیر دو سر گیردار و بارگذاری با بار گسترده بوده است. اما با توجه به اینکه در فرایند تحلیل، تاثیر شرایط کرانی، نوع بار در انتهای مرحله محاسبات دخالت داده می‌شود، لذا با اندکی تغییر، نتایج برای اقسام شرایط تکیه‌گاهی و انواع بارگذاری قابل تعمیم است و محاسبات مجدد مسأله‌ی جدید، در مقایسه با حجم نتایج قابل حصول بسیار کوچک خواهد بود.

7- پیوست

7-1- پیوست اول

به منظور پاسخ یابی معادله (44)، در آغاز تحلیل، جمله اول به شکل رابطه (59) در نظر گرفته می‌شود:

$$a_0 \varepsilon_0^{\frac{1}{n}} + \frac{3}{2} \varepsilon_0 = a_0 + \frac{3}{2} \quad (59)$$

در نتیجه $\varepsilon_0 = 1$ بدست می‌آید. برای محاسبه جملات بعدی با

استفاده از سری ادومیان به صورت رابطه (60) عمل می‌شود:

$$a_0 \left(\frac{1}{n} \right) \varepsilon_0^{\frac{1}{n}-1} + \frac{3}{2} = 1.5013 \quad (60)$$

مثلا برای A_1 و ε_1 می‌توان روابط (62,61) را نوشت:

$$\begin{aligned} A_1 &= \varepsilon_1 [a_0 \left(\frac{1}{n} \right) \varepsilon_0^{\frac{1}{n}-1} + \frac{3}{2}] \\ &= \frac{B}{A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_0 dz + \frac{B}{D} z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_0 z dz + \frac{c_1}{A} - (a_0 + \frac{3}{2}) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\varepsilon_1 = 3.5263h + (155.53 \times 10^9 bh)^{-1} c_1 - 1.008 \quad (62)$$

برای جملات بعدی نیز با برخی محاسبات ریاضی رابطه (63) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} A_2 &= \varepsilon_2 F'(\varepsilon_0) + \frac{\varepsilon_1^2}{2} F''(\varepsilon_0) \\ &= \frac{B}{A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_1 dz + \frac{B}{D} z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_1 z dz + \frac{c_3}{D} z \end{aligned} \quad (63)$$

بعد از محاسبات ریاضی مشرووح، روابط (69-64) حاصل می‌شوند:

$$\varepsilon_2 = 0.0004\varepsilon_1^2 + 0.353\varepsilon_1 + 0.666 \frac{c_3}{D} z \quad (64)$$

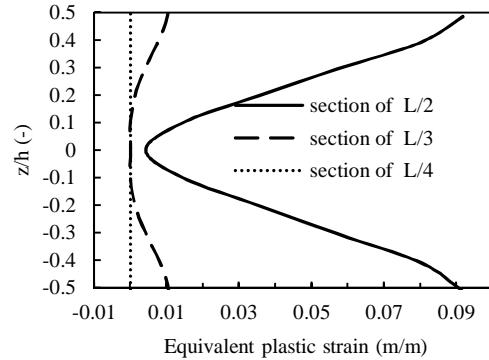
$$\begin{aligned} A_3 &= \varepsilon_3 F'(\varepsilon_0) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 F''(\varepsilon_0) + \frac{\varepsilon_1^3}{6} F'''(\varepsilon_0) \\ &= \frac{B}{A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_2 dz + \frac{B}{D} z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_2 z dz + \frac{c_2}{D} xz \end{aligned} \quad (65)$$

$$\varepsilon_3 = [-0.25\varepsilon_1^3 + 0.364\varepsilon_1^2 + 124.5\varepsilon_1 + 235.1 \frac{c_3}{D} z + 0.5328 \frac{c_3}{D} z\varepsilon_1 + 666 \frac{c_2}{D} xz] \times 10^{-3} \quad (66)$$

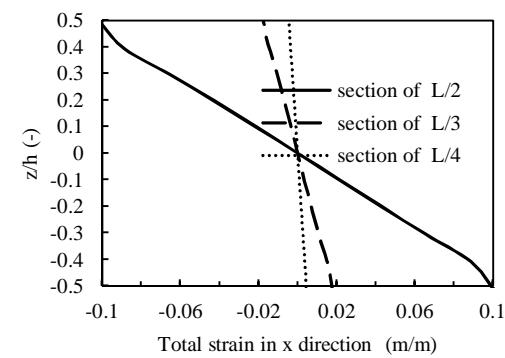
$$\begin{aligned} A_4 &= \varepsilon_4 F'(\varepsilon_0) + \left(\frac{1}{2} \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \right) F''(\varepsilon_0) + \dots \\ &= \frac{B}{A} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_3 dz + \frac{B}{D} z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_3 z dz + \frac{q}{2D} x^2 z \end{aligned} \quad (67)$$

$$A_4 = [1501.3\varepsilon_4 - 1.2(0.5\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3) + 1.15 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 - 0.2775 \varepsilon_1^4] \times 10^{-3} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} 1501.3\varepsilon_4 - 0.6\varepsilon_2^2 - 1.2\varepsilon_1 \varepsilon_3 - 1.15 \varepsilon_1^2 + 0.2775 \varepsilon_1^4 \\ = \frac{500q}{D} x^2 z - 0.13\varepsilon_1^3 + 0.19\varepsilon_1^2 + 66\varepsilon_1 + \end{aligned}$$



شکل ۱۹ مقایسه کرنش پلاستیک معادل حاصل از روش هموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک



شکل ۲۰ مقایسه کرنش کل در جهت x حاصل از روش هموتوپی در مقاطع عرضی مختلف تیر الاستوپلاستیک

جابجایی کلاسیک استفاده و معادلات حاکم بر تحلیل الاستوپلاستیک تیر به روش‌های تغییراتی استخراج شده است. معادلات دیفرانسیلی - انتگرالی حاکم بدون ساده‌سازی در الگوی تغییر شکل و تنش و نیز بدون یاری گرفتن از روش‌های عددی و تنها بر پایه‌ی روش‌های تحلیلی، پاسخ‌بایی شده‌اند. برای یک تیر نوعی فلزی با هندسه و مصالح مشخص میدان‌های تغییر شکل الاستوپلاستیک، کرنش و تنش استخراج شده‌اند. از نرم افزار آباکوس برای اعتبار سنجی نتایج استفاده شده است.

نتایج نشان داده است که در تیر نازک مورد بررسی، میدان‌های تنش و کرنش الاستوپلاستیک حاصل از فرض میدان جابجایی کلاسیک و به کارگیری روش‌های تحلیل هموتوپی و ادومیان به خوبی با میدان‌های حاصل از شبیه‌سازی مطابقت دارند. همچنین ملاحظه می‌شود همانگ با حجم وسیع تر عملیات در روش هموتوپی، دقت این روش نیز از روش ادومیان بیشتر است.

بارگذاری اعمال شده به نحوی بوده است که در مقاطع مختلف عرضی تیر، شرایط متفاوت الاستیک یا الاستوپلاستیک ایجاد شده است. در تمامی این مقاطع، نتایج روش‌های تحلیلی هموتوپی، ادومیان و شبیه‌سازی همخوانی مناسبی داشته‌اند. این بدان معناست که وجود نسبت‌های مختلف از تغییر شکل الاستیک یا پلاستیک آسیبی به دقت عمل روش‌های تحلیلی وارد نکرده است.

- Engineering Science*, Vol. 70, pp. 1–14, 2013.
- [6] B. Stok , M. Halilovic, Analytical solutions in elasto-plastic bending of beams with rectangular cross section, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 33, No. 3, pp. 1749–1760, 2009.
- [7] G. Nie, Zh. Zhong, Closed-form solutions for elastoplastic pure bending of a curved beam with material inhomogeneity, *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 27, No. 1, pp. 54–64, 2014.
- [8] J. Bin, Ch. Wanji, A new analytical solution of pure bending beam in couple stress elasto-plasticity: Theory and applications, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 6, pp. 779–785, 2010.
- [9] M. Maarefdoust, M. Kadkhodayan, A comparison between the incremental and deformation theories to analyze elastoplastic buckling of thin rectangular plates by GDQ method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No.3, pp. 11-26, 2012. (in Persian) (فارسی)
- [10] H. RamezannezhadAzarboni, M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari, Application of deformation and incremental theory of plasticity in the dynamic buckling of rectangular Elastoplastic plate, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 5, pp. 25-33, 2015. (in Persian) (فارسی)
- [11] H. Alizadeh, R. Ansari, Bending analysis of micro cantilevers based on the Chen-Wang strain gradient plasticity theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 2, pp. 198-204, 2015. (in Persian) (فارسی)
- [12] R. K. Abu Al-Rub, G. Z. Voyatzis, Analytical and experimental determination of the material intrinsic length scale of strain gradient plasticity theory from micro- and nano-indentation experiments, *International Journal of Plasticity*, Vol. 20, No. 6, pp. 1139-1182, 2004.
- [13] S. J. Liao, On the homotopy analysis method for nonlinear problem, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 147, No. 2, pp. 499–513, 2004.
- [14] S. J. Liao, Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 169, No. 2, pp. 1186–1194, 2005.
- [15] S. Liang, D. J. Jeffrey, Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 12, pp. 4057–4064, 2009.
- [16] F. Rajabi, Sh. Ramezani, A nonlinear microbeam model based on strain gradient elasticity theory, *Acta Mechanica Solidia Sinica*, Vol. 26, No. 1, 2013.
- [17] H. Jafari, S. Seifi, Homotopy analysis method for solving linear and nonlinear fractional diffusion-wave equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 14, No. 5, pp. 2006–2012, 2009.
- [18] H. Jafari , A. Golbabai , S. Seifi, K. Sayevand, Homotopy analysis method for solving multi-term linear and nonlinear diffusion-wave equations of fractional order, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 59, No. 3, pp. 1337-1344, 2010.
- [19] Sh. S. Behzadi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, A.Yildirim, Application of homotopy analysis method for solving a class of nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations, *Journal of Applied Analysis and Computation*, Vol. 2, No. 2, pp. 127-136, 2012.
- [20] G. Adomian, Nonlinear Stochastic Operator Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 55, No. 2, pp. 441-452, 1976.
- [21] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, pp. 23-254, Boston: Kluwer, HA, 1994.
- [22] A. M. Wazwaz, A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 111, pp. 53-69, 2000.
- [23] E. Babolian, A. R. Vahidi, Z. Azimzadeh, A comparison between the Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method for solving nonlinear Volterra integral equations, *Tarbiat Moallem University*, Vol. 11, No. 2, pp. 155-160, 2012.
- [24] M. Kumar, N. Singh, Modified Adomian decomposition method and computer implementation for solving singular boundary value problems arising in various physical problems, *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 34, No. 11, pp. 1750-1760, 2010.
- [25] F. P. Beer, E. R. Johnston, J. T. Dewolf, D. F. Mazurek, *Mechanics of materials*, sixth edition, pp. 88-264, New York: McGraw-Hill, 2012.
- [26] K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, second edition, pp. 10-420, New York: Pergamon Press, 1975.
- [27] H. L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics*, pp. 35-320, New York: Wiley, 1989.

$$+ \left(\frac{Z}{D}\right)(0.28c_3\epsilon_1 + 124.5c_3 + 352.6c_2x) \quad (69)$$

بطور خلاصه‌تر و با حذف جملات خیالی کوچکتر، رابطه (70) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \epsilon_4 \times 10^6 = & (0.0004)\{(0.4\epsilon_1^2)^2 + (353\epsilon_1)^2 + \\ & (666\frac{c_3}{D}z)^2 + (0.4\epsilon_1^2)\left(706\epsilon_1 + 1332\frac{c_3}{D}z\right) + \\ & (706\epsilon_1)\left(666\frac{c_3}{D}z\right) - 500\epsilon_1^4 + 728\epsilon_1^3 + \\ & 249000\epsilon_1^2 + 1065.6\frac{c_3}{D}z\epsilon_1^2 + 470200\frac{c_3}{D}z\epsilon_1 + \\ & 1332000\frac{c_2}{D}xz\epsilon_1\} + 44000\epsilon_1 + 185\epsilon_1^4 + 127\epsilon_1^2 \\ & - 0.766 \left(0.4\epsilon_1^4 + 353\epsilon_1^3 + 666\frac{c_3}{D}z\epsilon_1^2\right) - 87\epsilon_1^3 \end{aligned} \quad (70)$$

7-2- پیوست ب

به منظور پاسخ‌بایی معادله (58) می‌توان مرحله ذیل را انجام داد. ابتدا با در نظر گرفتن $\epsilon_0 = 1$ ، جملات مختلف به صورت روابط (72,71) به دست می‌آیند:

$$R_1 = -a_0 - \frac{3}{2} + \frac{B}{A}h + \frac{c_1}{A} + \frac{1}{D}z\left(q\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3\right) \quad (71)$$

$$\epsilon_1 = \beta R_1 \quad (72)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} R_2 = \beta & \left[\left(-a_0 - \frac{3}{2} + \frac{B}{A}h + \frac{c_1}{A}\right) \left(\frac{-a_0}{n} - \frac{3}{2} + \frac{B}{A}h\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{D}z\left(q\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3\right) \left(\frac{-a_0}{n} - \frac{3}{2} + \frac{B}{A}h\right) \right] \end{aligned} \quad (73)$$

و به روابط (76-74) منجر می‌شود:

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 + \beta R_2 \quad (74)$$

$$\begin{aligned} R_3 = \frac{-a_0}{2n} & \left[\left(\frac{1}{n} - 1\right) \beta^2 R_1^2 + \beta(R_1 + R_2) \right] - \frac{3}{2}\beta(R_1 + R_2) \\ & + \frac{B}{A} \int \beta(R_1 + R_2) dz + \frac{B}{D}z \int z\beta(R_1 + R_2) dz \end{aligned} \quad (75)$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_2 + \beta R_3 \quad (76)$$

به همین ترتیب برای جملات بعدی الی آخر.

8- مراجع

- 1] A. M. Zenkour, Exact mixed-classical solutions for the bending analysis of shear deformable rectangular plates, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 27, No. 7, pp. 515–534, 2003.
- 2] C. W. Lim, S. Cui, W. A. Yao, On new symplectic elasticity approach for exact bending solutions of rectangular thin plates with two opposite sides simply supported, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, No. 16, pp. 5396-5411, 2007.
- 3] Sh. R. Li, D. F. Cao, Z. Q. Wan, Bending solutions of FGM Timoshenko beams from those of the homogenous Euler-Bernoulli beams, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 10, pp. 7077–7085, 2013.
- 4] Y. A. Kang, X. F. Li, Bending of functionally graded cantilever beam with power-law non-linearity subjected to an end force, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 44, No. 6, pp. 696-703, 2009.
- 5] B. Akgöz, O. Civalek, A size-dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory, *International Journal of*