



پیچیدگی مود در یک طناب با تحریک هارمونیک پایه با در نظر گرفتن فنر-دمپر موضعی نامتقارن

صالح جمعه‌زاده خضربیگی^۱، امیر جلالی^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شهرورد، شهرورد
۲- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شهرورد، شهرورد
* شهرورد، صندوق پستی ۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱ amirjalali@shahroodut.ac.ir

چکیده

در این مطالعه به بررسی تحلیلی دینامیک حالت پایدار یک رشته طناب خطی، همگن و نامیرا پرداخته شده است که یک سیستم فنر و دمپر خطی موضعی به آن متصل گردیده است. همچنین هر دو انتهای طناب به طور همزمان و یکسان با حرکت نوسانی، تحریک شده است. میرایی موضعی منجر به پیچیدگی مود در طناب شده که این امر باعث ظهور فاصله فرکانسی بین مازکریم دامنه ن نقاط مختلف طناب و تعییرات فاز گردیده است که نشان دهنده محدودی شکل گیری پیچیدگی مود در طناب است. در این تحقیق نشان داده شده است که ترکیب‌های مختلفی از سفتی فنر و میرایی موضعی وجود دارد که در آن‌ها پیچیدگی مود به بیشترین حد خود می‌رسد. از همه مهم‌تر این که این ترکیب در هر فرکانس تحریک بی‌بعد مشخص، منحصر به فرد می‌باشد. در این ترکیب‌ها میرایی محدودی مشخصی دارد اما با بزرگ‌تر شدن فرکانس مقدار سفتی فنر افزایش می‌باشد. در این حالت تمام مودهای نرمال ارتعاشات طناب از بین رفته و در عوض حرکت موج در طناب رخ می‌دهد. نتیجه با اهمیت دیگر این که میرایی که منجر به بیشترین فاصله فرکانسی می‌شود، الزاماً با میرایی که به ازای آن بیشترین پیچیدگی مود و یا همان حرکت امواج رخ می‌دهد، برابر نیست.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵
پذیرش: ۰۴ تیر ۱۳۹۵
ارائه در سایت: ۰۷ شهریور ۱۳۹۵
کلید واژگان:
دینامیک حالت پایدار
پیچیدگی مود
فاصله فرکانسی
موج در حال حرکت

Mode Complexity in a Harmonically Forced String Considering an Asymmetric Local Spring-Damper

Saleh Jomezade Khazarbeygi, Amir Jalali*

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
* P.O.B. 3619995161, Shahrood, Iran, amirjalali@shahroodut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 April 2016
Accepted 24 June 2016
Available Online 28 August 2016

Keywords:
Steady-state dynamic
Mode complexity
Frequency shift
Traveling wave

ABSTRACT

In this study the steady-state dynamic of a linear, homogeneous, un-damped string, coupled with a locally connected spring-dashpot system is analytically investigated. Both ends of the string are assumed to be excited with identical and synchronous harmonic motion. It is shown that the damper introduces mode complexity and leads to frequency shift between the peak amplitudes in different locations of the string. Also, it causes phase variations which indicates mode complexity domain. In this study, it is shown that there are different combinations of spring and damper constants in which the mode complexity attains its maximum level. Surprisingly, the combination is unique in each given excitation frequency ratio. In this situation, the damping constant is bounded in a specified range, but the spring constant is increased as the excitation frequency ratio is increased. In such case, all vibration normal modes of the string are completely destroyed and, in turn, traveling waves are formed. Also, it is shown that the damping constant which leads to the maximum frequency shift is not necessarily equal to the one that introduces the maximum mode complexity.

۱- مقدمه

سیستم پیوسته طناب کشیده شده به همراه میرایی خارجی در کاهش ارتعاشات سازه‌های انعطاف پذیری چون پل‌ها به وضوح تایید شده است [۱] و در مرجع [۲] به کاربردی بودن تحلیل ارتعاشات غیرخطی کابل با سیستم مختلط دارای مودهای مختار به جای مودهای نرمال طبیعی باشند. مودهای مختار می‌توانند به دلایل متفاوتی از قبیل اثرات ژیروسکوپی، اثرات آیرودینامیکی، عبارات غیرخطی و یا نویزهای محیطی و همچنین ماهیت نامتناسب بودن میرایی ایجاد شوند. در ارتباط با تحلیل ارتعاشات سیستم‌های خطی به همراه میرایی، مطالعات گسترده‌ای با روش‌های مختلف صورت گرفته است. اهمیت ارتعاشات

Please cite this article using:

S. Jomezade Khazarbeygi, A. Jalali, Mode Complexity in a Harmonically Forced String Considering an Asymmetric Local Spring-Damper, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 229-238, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تحریک نوسانی روی آن [12] و بدون در نظر گرفتن جرم متتمرکز انتهای تیر [13] اشاره نمود. ارتعاشات طولی میله‌ها نیز همانند کابل‌ها صورت می‌گیرد. از این رو در مورد ارتعاشات طولی یک میله با شرط مرزی دمپر ویسکوز متصل شده در یک انتهای آن، نشان داده شده است که می‌توان مودهای ارتعاشی مختلط را از حل فرم بسته محاسبه نمود [14].

هدف اصلی این تحقیق بررسی رفتار دینامیکی طناب حاوی فرکانس‌های مختلط ناشی از میرایی ویسکوز می‌باشد. بدین منظور در ابتدا معادلات حرکت طناب با فنر و دمپر موضعی متصل شده به فاصله مشخص از یک سمت طناب (نامتقارن) و تحریک نوسانی یکسان در دو سر طناب در یک فرم مناسب استخراج شده است سپس با استفاده از روش جدایش متغیرها معادلات حرکت حل شده و دامنه ارتعاشات به دست آمده است. سپس اثر میرایی روی دامنه ارتعاشات و به وجود آمدن فاصله فرکانسی بین قله‌های بیشینه نقاط مختلف طناب بررسی شده است و مقدار میرایی که باعث بیشترین فاصله فرکانسی بین نقاط مختلف طناب می‌شود محاسبه گردیده است. در ادامه معادلات فاز برای هر دو سمت چپ و راست طناب بدست آمده است و نقاط ثابتی در فاز طناب که مستقل از میزان میرایی هستند به صورت عددی و تحلیلی محاسبه شده‌اند که به درک بهتر پیچیدگی مود در طناب کمک می‌کند. در نهایت میرایی که باعث بیشترین پیچیدگی مود در طناب می‌شود محاسبه شده و نشان داده شده است که در این حالت ارتعاشات در طناب به حرکت امواج در طناب تبدیل می‌شود.

2- توصیف و مدل‌سازی

2-1- معادله حرکت

سیستم مورد تحلیل شامل یک طناب الاستیک خطی با طول L می‌باشد که یک فنر و میراگر خطی در فاصله $1/4$ از انتهای سمت چپ طناب به آن متصل شده است و سمت دیگر آن‌ها به زمین متصل می‌باشد. هر دو انتهای طناب با حرکت نوسانی بصورت یکسان و همزمان تحریک شده است (شکل 1).

در این شکل، m جرم بر واحد طول طناب و T نیروی کشش ثابت طناب می‌باشد. موقعیت افقی هر نقطه از طناب با z و موقعیت عمودی آن‌ها با (z, t) معرفی می‌شود، که θ بیان گر زمان می‌باشد. هر دو انتهای طناب با یک جابجایی یکسان و همزمان $\tilde{A}e^{i\Omega t}$ تحریک شده است، که \tilde{A} دامنه ثابت تحریک اجرایی است و Ω فرکانس تحریک می‌باشد. سفتی k_0 و میرایی c_0 برای فنر و دمپر در نظر گرفته شده است، که نیروی خود را فقط در $z=L/4$ اعمال می‌کنند. معادله حرکت این طناب به شکل زیر به دست آورده شده است:

$$my_{tt}(z, t) - Ty_{zz}(z, t) = -[k_0y(L/4, t) + c_0y_t(L/4, t)]\delta(z - L/4) \quad (1)$$

شرایط مرزی در این حالت به شکل زیر خواهد بود:

$$y(0, t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \quad (2)$$

$$y(L, t) = \tilde{A}e^{i\Omega t} \quad (3)$$

با توجه به این که معادله (1)، یک معادله ناهمگن است برای راحتی تحلیل در سمت چپ طناب از اندیس 1 و در سمت راست طناب از اندیس 2 استفاده شده است. همچنین مبدأ این مختصات‌ها در دو طرف طناب فرض شده است. معادله حرکت طناب به دو معادله همگن و دو شرط مرزی و دو

محاسباتی بسیار وقت‌گیر و طاقت‌فرسا است. از طرفی ارائه‌ی حل تحلیلی برای این نوع مسائل بسیار مشکل بوده و نیز روش‌های تقریبی برای آن‌ها عموماً موجود نمی‌باشد. لذا عموماً از روش‌های عددی برای حل استفاده می‌کنند. از تئوری ارتعاشات خطی می‌دانیم که سیستم‌های خطی نامیرا دارای مودهای نرمال هستند که در هر مود نرمال، تمام قسمت‌های مختلف سیستم در یک فاز مشابه ارتعاش می‌کنند. در سیستم‌های خطی میرا، در صورتی که ماتریس میرایی را بتوان با استفاده از ماتریس مودال سیستم نامیرا قطربندی کرد، سیستم میرا باز هم دارای مودهای نرمال خواهد بود که این مدل میرایی، به عنوان میرایی تناسی یا میرایی کلاسیک شناخته می‌شود. در برخی مطالعات انجام شده از جمله مرجع [3]، شرایط عمومی وجود مودهای نرمال برای چنین سیستم‌هایی ارائه شده است. در غیر این صورت در سیستم میرا مودهای مختلط ظهر خواهد کرد. به عنوان نمونه ظهر مودهای مختلط به جای مودهای نرمال در سیستم‌های خطی با میرایی ویسکوز و غیر ویسکوز نامتناسب توسط ادھیکاری نشان داده شده است و بیان شده که به وجود آمدن این مودها تحلیل را بسیار پیچیده می‌کند [4]. از طرفی نشان داده شده است که تقریب زدن مودهای نرمال با استفاده از اندازه‌گیری مودهای مختلط منجر به بروز خطأ در مسأله خواهد شد و باید از تکنیک خاصی برای از بین بردن این خطأ استفاده نمود [5].

در بررسی ارتعاشات سازه‌ها با در نظر گرفتن میرایی، فرکانس‌ها و شکل مودهای مختلط در ارتعاشات یک سازه ناپیوسته با چندین دمپر ویسکوز توسط کرنک مطالعه شده و یک حل تقریبی با درون‌یابی بین حل دو مسأله مقدار ویژه مشخص، به منظور تسهیل در قراردادن بهینه تعداد دمپرهای مقدار دمپرهای در سازه پیشنهاد شده است [6].

در تحلیلی دیگر ارتعاشات آزاد یک کابل کشیده شده به همراه یک دمپر ویسکوز متتمرکز، با استفاده از مودهای مختلط توسط کرنک تحلیل شده است و یک حل ساده تکراری از معادله فرکانسی برای همه‌ی فرکانس‌های ویژه مختلط پیشنهاد شده است. نسبت میرایی نیز با روش حل مجذوبی و روش حل تقریبی تکرارشونده برای مودهای ابتدایی محاسبه شده است [7]. همچنین در برخی تحقیق‌ها، ارتعاشات آزاد یک طناب کشیده شده با دمپر خارجی متصلب به آن بررسی شده و به نقش مهم فاصله فرکانسی ایجاد شده توسط میرایی در توصیف سیستم، پرداخته شده است و بر تاثیرگذاری آن تأکید گردیده است [8]. اخیرا نیز رفتار پیچیدگی مود در شرایط کاملاً متقاضی نیز تکرارشونده برای مودهای ابتدایی محاسبه شده است [7]. طناب کشیده شده خطی بوده و فنر و دمپر متصلب به آن در وسط آن فرض شده است. در این تحقیق وابستگی فرکانس تشید سیستم به موقعیت قرارگیری دمپر مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که در هر مقدار سفتی فنر، یک مقدار بحرانی برای دمپر وجود دارد که در این مقدار، میزان فاصله فرکانسی سیستم به حداقل خود میرسد و در همین مقدار بیشترین پیچیدگی مود و تبدیل ارتعاشات به حرکت امواج در طناب اتفاق می‌افتد و باعث حذف مودهای نرمال در طناب می‌شود [9]. تلاش برای درک بیشتر اثر میرایی نامتناسب در سازه‌های پیوسته محدود به طناب‌ها نمی‌شود. بلکه اثر میرایی خارجی در تیرها و میله‌ها به طور گسترده تحقیق شده است. به عنوان مثال می‌توان به بررسی اثر میرایی دورانی ویسکوز در یک اولیر-برنولی با تکیه‌گاه ساده [10]، بررسی تیر اولیر-برنولی یک سر گیردار مجهز به دمپرهای انتقالی و یا پیچشی [11]، تحقیق در زمینه تیر اولیر-برنولی یک سر گیردار به همراه یک دمپر ویسکوز در وسط، یک جرم متتمرکز در انتهای و

$$u_{1,x}(1/4, \tau) + u_{2,x}(3/4, \tau) = -[ku_1(1/4, \tau) + \sigma u_{1,\tau}(1/4, \tau)] \quad (16)$$

2-حل تحلیلی معادلات حرکت

در این تحقیق از روش جدایش متغیرها به جای حل وابسته به ارتعاشات آزاد مسئله‌ی مقدار ویژه مختلط [6]، برای بررسی اثر میرایی استفاده شده است. این روش، میرایی که منجر به گذر از ارتعاشات به اوایج است را به خوبی مشخص می‌کند. پاسخ معادلات (11) و (12) را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$u_1(x_1, \tau) = \varphi_1(x_1) e^{i\omega\tau} \quad (17)$$

$$u_2(x_2, \tau) = \varphi_2(x_2) e^{i\omega\tau} \quad (18)$$

که:

$$\varphi_1(x_1) = C_1 e^{i\omega x_1} + C_2 e^{-i\omega x_1} \quad (19)$$

$$\varphi_2(x_2) = C_3 e^{i\omega x_2} + C_4 e^{-i\omega x_2} \quad (20)$$

شرط مجزی (13) و (14) به شکل زیر ساده می‌شوند:

$$\varphi_1(0) = A \quad (21)$$

$$\varphi_2(0) = A \quad (22)$$

شرط پیوستگی (15) و (16) نیز به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\varphi_1(1/4) = \varphi_2(3/4) \quad (23)$$

$$\varphi_{1,x}(1/4) + \varphi_{2,x}(3/4) = -(k + i\omega\sigma)\varphi_1(1/4) \quad (24)$$

با توجه به دو شرط مجزی (21) و (22) و دو شرط پیوستگی (23) و (24)، ثابت‌های C_1, C_2, C_3 و C_4 بر حسب k ، σ و ω به دست آمدند:

$$C_1 = A \frac{e^{-i\omega(k + i\omega(\sigma - 2))} - e^{i\omega/4(k + i\omega\sigma)} + 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\omega/4)) - 4\omega\sin\omega} \quad (25)$$

$$C_2 = A \frac{e^{i\omega(k + i\omega(\sigma + 2))} - e^{-i\omega/4(k + i\omega\sigma)} - 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\omega/4)) - 4\omega\sin\omega} \quad (26)$$

$$C_3 = A \frac{e^{-i\omega(k + i\omega(\sigma - 2))} - e^{-i\omega/4(k + i\omega\sigma)} + 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\omega/4)) - 4\omega\sin\omega} \quad (27)$$

$$C_4 = A \frac{e^{i\omega(k + i\omega(\sigma + 2))} - e^{i\omega/4(k + i\omega\sigma)} - 2i\omega}{2(k + i\omega\sigma)(\cos\sigma - \cos(\omega/4)) - 4\omega\sin\omega} \quad (28)$$

3-فاصله فرکانسی

همان‌طور که مشاهده می‌شود پاسخ به شکل ترکیب خطی از توابع نمایی مختلط با چهار ثابت مختلط ظاهر می‌شود. پدیده پیچیدگی به دلیل حضور ثابت‌ها اتفاق می‌افتد که قطعاً به دلیل وجود میرایی خارجی در سیستم است. بررسی‌ها ابتدا روی دامنه پاسخ فرکانسی سیستم صورت گرفته است. بنابراین:

$$|u_1(x_1, \tau)| = |\varphi(x_1)| \\ = A \sqrt{(\epsilon_1 \sin(\omega x_1))^2 + (\cos(\omega x_1) + \rho_1 \sin(\omega x_1))^2} \quad (29)$$

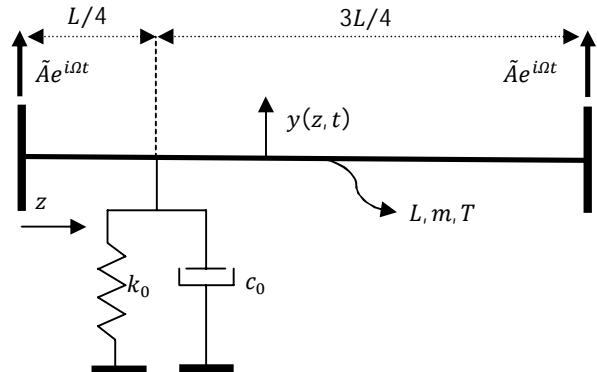


Fig. 1 Schematic representation of the string coupled with a spring-dashpot system located at $z=L/4$

شکل ۱ بیان شماتیک طناب متصل شده به سیستم فنر-دمپر در فاصله $z=L/4$

شرط پیوستگی در $z=L/4$ تبدیل می‌شود.

$$Ty_{1,zz}(z_1, t) - my_{1,tt}(z_1, t) = 0, \quad 0 \leq z_1 \leq L/4 \quad (4)$$

$$Ty_{2,zz}(z_2, t) - my_{2,tt}(z_2, t) = 0, \quad 0 \leq z_2 \leq 3L/4 \quad (5)$$

شرط مجزی:

$$y_1(0, t) = \tilde{A} e^{i\Omega t} \quad (6)$$

$$y_2(0, t) = \tilde{A} e^{i\Omega t} \quad (7)$$

شرط پیوستگی:

$$y_1(L/4, t) = y_2(3L/4, t) \quad (8)$$

$$T(y_{1,z}(L/4, t) + y_{2,z}(3L/4, t)) = \\ -[k_0 y_1(L/4, t) + c_0 y_{1,t}(L/4, t)] \quad (9)$$

معادله (8)، بیانگر جابجایی عمودی یکسان دو طرف طناب در نقطه‌ی $z=L/4$ و معادله (9) بیانگر تعادل نیرویی در نقطه‌ی $z=L/4$ می‌باشد. برای بی بعد سازی مساله متغیرهای بی بعد به صورت رابطه (10) تعریف می‌شود.

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} ct, x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{z}{L}, u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y}{L}, c = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (10)$$

فرکانس مرجع را بیان می‌کند و ثابت‌های فنر و میرایی به ترتیب $\omega=c_0\epsilon L/T$ و $k=k_0L/T$ می‌باشند. همچنین $A=\tilde{A}/L$ و $\Omega=c\omega$ تعریف می‌شوند. با جایگذاری رابطه (10) در معادلات حرکت (4) و (5)، شکل بی بعد معادلات به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_{1,xx}(x_1, \tau) - u_{1,tt}(x_1, \tau) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 1/4 \quad (11)$$

$$u_{2,xx}(x_2, \tau) - u_{2,tt}(x_2, \tau) = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq 3/4 \quad (12)$$

شرط مجزی و پیوستگی بی بعد شده نیز به ترتیب به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$u_1(0, \tau) = A e^{i\omega\tau} \quad (13)$$

$$u_2(0, \tau) = A e^{i\omega\tau} \quad (14)$$

$$u_1(1/4, \tau) = u_2(3/4, \tau) \quad (15)$$

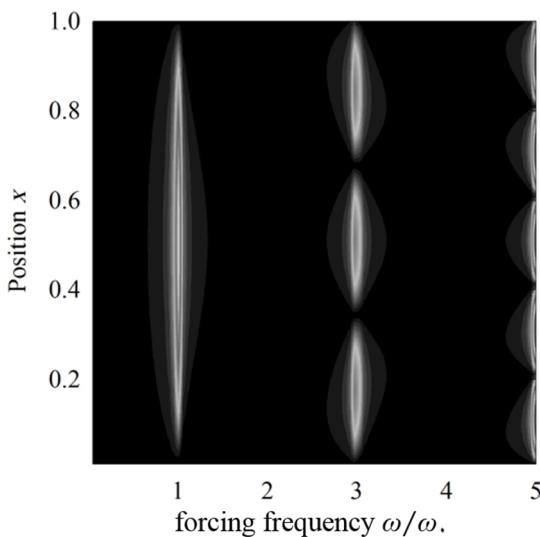


Fig. 2 Evolution of $|\varphi(x)/A|$ in terms of position x and forcing frequency ratio ω/ω_0 for $k=0.01$ and $\sigma=0.05$

شکل 2 تکامل $|\varphi(x)/A|$ بر حسب موقعیت x و فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0 به ازای

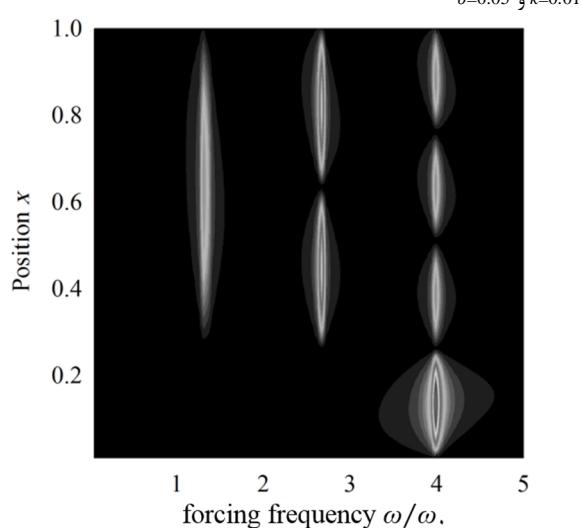


Fig. 3 Evolution of $|\varphi(x)/A|$ in terms of position x and forcing frequency ratio ω/ω_0 for $k=0.01$ and $\sigma=0.05$

شکل 3 تکامل $|\varphi(x)/A|$ بر حسب موقعیت x و فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0 به ازای

$\sigma=100$ و $k=0.01$

3-2-اثر سفتی فنر

برای درک بهتر اثر سفتی در دامنه فرکانسی و فاصله فرکانسی، میرایی در یک مقدار خیلی کوچک ثابت شده و مقدار سفتی از مقدار خیلی کم تا بزرگ متغیر فرض شده است. زمانی که مقدار سفتی از مقدار میرایی کوچک به بزرگ در حال افزایش است، بیشترین دامنه فرکانسی نقاط مختلف طناب به صورت همزمان جایه‌جا می‌شوند و هیچ‌گونه فاصله فرکانسی بین نقاط مختلف طناب مشاهده نمی‌شود. همان‌طور که در پخش قبیل نیز به صورت تحلیلی در معادله (35) اثبات شد، بیشترین دامنه در فرکانس‌های تحریک بی بعد مختلف تابع x نخواهد بود. به عبارت دیگر جایه‌جا میرایی بیشترین دامنه بر حسب فرکانس، یکنواخت است.

3-3-اثر میرایی

برای مشخص شدن بهتر اثر میرایی روی دامنه پاسخ فرکانسی و فاصله

$$\begin{aligned} |u_2(x_2, \tau)| &= |\varphi(x_2)| \\ &= A\sqrt{(\epsilon_2 \sin(\omega x_2))^2 + (\cos(\omega x_2) + \rho_2 \sin(\omega x_2))^2} \end{aligned} \quad (30)$$

به طوری که:

$$A\epsilon_1 = \operatorname{Re}(C_1) - \operatorname{Re}(C_2) \quad (31)$$

$$A\rho_1 = -\operatorname{Im}(C_1) + \operatorname{Im}(C_2) \quad (32)$$

$$A\epsilon_2 = \operatorname{Re}(C_3) - \operatorname{Re}(C_4) \quad (33)$$

$$A\rho_2 = -\operatorname{Im}(C_3) + \operatorname{Im}(C_4) \quad (34)$$

که همگی تابعی از ω , σ و k هستند.

همان‌طور که در معادلات (29) و (30) قابل مشاهده است اگر در سیستم دمپر وجود نداشته باشد ($\sigma=0$) دو معادله به یک معادله تبدیل شده و در یک فرکانس تشدید و اگر می‌شوند که فرکانس تشدید در معادله (35) صدق می‌کند:

$$k = -\frac{2\omega \sin(\omega)}{1 - \cos(\omega)} \quad (35)$$

در این حالت بیشترین دامنه فرکانسی، وابسته به موقعیت x روی طناب نیست. به عبارت دیگر در هر فرکانس تشدید تمام نقاط طناب بیشترین دامنه خود را در همان فرکانس تجربه می‌کنند. در ادامه نشان داده خواهد شد که با اضافه شدن میرایی به سیستم، این گونه نخواهد بود.

3-حالاتی ممکن

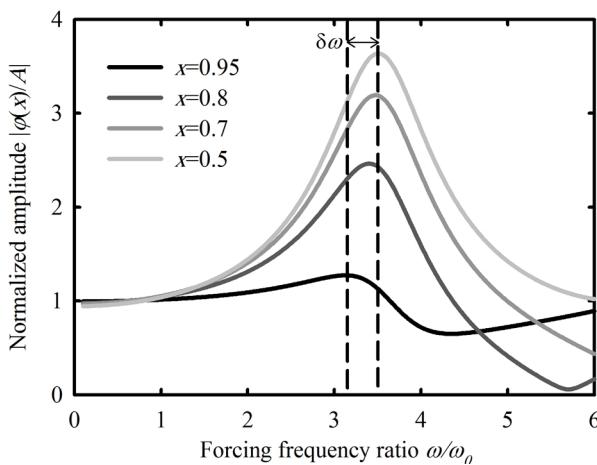
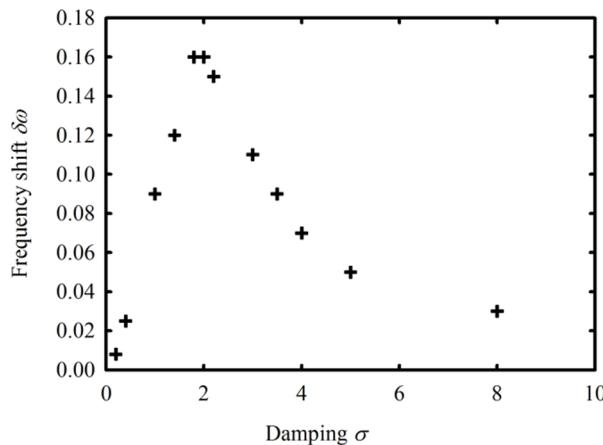
دو حالت میرایی خیلی کوچک و میرایی خیلی بزرگ برای نشان دادن اثر میرایی روی دامنه پاسخ فرکانسی در نظر گرفته شده است.

در ابتدا فرض می‌شود سفتی فنر در یک مقدار کوچک ثابت $k=0.01$ باشد. بنابراین از اثر آن روی دینامیک سیستم صرف نظر شده است. شکل مودهای بی بعد شده $|\varphi(x)/A|$ در موقعیت‌های مختلف روی طناب بر حسب فرکانس بی بعد شده ω/ω_0 , ω , برای مقادیر میرایی کم و زیاد به ترتیب در "شکل‌های 2 و 3" رسم شده‌اند، که در این شکل‌ها ω_0 اولین فرکانس طبیعی سیستم می‌باشد.

همان‌طور که در "شکل 2" مشاهده می‌شود در حالتی که میرایی کم است، شکل مودها در نزدیکی فرکانس تحریک بی بعد $\omega/\omega_0=1$ هم محور شده‌اند و سیستم به یک طناب ساده که از دو طرف تحریک شده است، کاهش پیدا کرده است. این نتیجه ارتباطی به مکان قرارگیری فنر و دمپر ندارد و درست همانند زمانی است که فنر و دمپر در وسط طناب قرار بگیرند. در شکل ناحیه‌های سفید رنگ بیان‌گر دامنه تشدید سیستم و ناحیه‌های سیاه رنگ نشان دهنده دامنه ناچیز در طول طناب می‌باشند.

از طرف دیگر زمانی که میرایی مقدار بزرگی دارد (شکل 3) یا به عبارتی به بینهایت میل می‌کند، سیستم در دو فرکانس تحریک بی بعد اولیه و ثانویه به یک طناب با طول $3/4$ طول اولیه خود کاهش پیدا کرده است.

از آنجا که طول طناب به دو قسمت نامساوی تقسیم شده است، پاسخ فرکانسی در $\omega/\omega_0=4/3$ اتفاق افتاده و همچنین افزایش دامنه فقط در سمتی از طناب که طول بیشتری دارد مشاهده می‌شود. البته می‌توان حالتی را نیز متصور شد که میرایی ناچیز باشد و میزان سفت فنر از مقدار کوچک تا مقدار خیلی بزرگ افزایش یابد. در این حالت همان نتایج یحالت قبل (سفتی ناچیز) رخ می‌دهد اما دامنه پاسخ فرکانسی بیشتر خواهد بود.

Fig. 4 The frequency shift for $k=0.5$ and $\sigma=1.4$ شکل 4 فاصله فرکانسی برای $k=0.5$ و $\sigma=1.4$ Fig. 5 Evolution of the frequency shift $|\delta\omega|$ versus damping σ for $k=0.01$ شکل 5 تکامل فاصله فرکانسی $|\delta\omega|$ بر حسب میرایی σ به ازای $k=0.01$

نقطه $(0,0)$ و $(0.25,-\pi)$ که از 0 به $-\pi$ گذر ناگهانی داشته است. در بخش‌های بعد نشان داده خواهد شد که این نقطه در نمودار دامنه پاسخ فرکانسی در طول زمان، بیان گر یک گره است.

به ازای مقدار σ بعد $k=10.7$ تابع فاز دقیقاً رفتاری مشابه رفتار حالت قبل دارد. به طوری که نقاط $(0,0)$, $(1,0)$ و $(0.25,-\pi)$ و نیز نقطه $x=0.125$ همچنان ثابت خواهند ماند. اما نقطه $(0.91,-\pi/2)$ به نقطه $(0.95,-\pi/2)$ منتقل شده است.

در "شکل 8" نمودار تابع فاز طناب برای مقادیر $\omega/\omega_0=4.421$ و $k=1.4$ ، به ازای گستره‌ی وسیعی از میرایی خیلی کوچک تا میرایی خیلی بزرگ رسم شده است. همانطور که مشخص است نقطه ثابت $x=0.25$ محل قرارگیری فر و دمپر است از بین رفته است. بررسی‌های فوق نتیجه می‌دهد که در نمودار فاز دو نوع نقطه‌ی ثابت وجود دارد. اول نقاطی که وابسته به مقدار k و σ هستند (شکل 6 و 7). دوم نقاطی که فقط وابسته به فرکانس تحریک بی‌بعد هستند، مانند نقاط $x=0.125$ و $(0.25,-\pi)$.

فرکانسی، سفتی در یک مقدار دلخواه ناچیز ثابت شده است و میرایی از مقادیر بسیار کم تا مقادیر بسیار بزرگ تغییر می‌کند. افزایش میرایی دو اثر قابل ملاحظه روی پاسخ فرکانسی به وجود می‌آورد. اولین تأثیر آن بر روی دامنه پاسخ فرکانسی می‌باشد، که با افزایش میرایی دامنه پاسخ فرکانسی کاهش می‌یابد، به طوری که نقاط سمت چپ فر و دمپر با افزایش میرایی روند کاهشی خود را تا کمینه فرکانسی حفظ می‌کند و همان‌طور که قبلان نیز اشاره شد در میرایی‌های خیلی بزرگ دامنه پاسخ فرکانسی سمت چپ در اولین فرکانس تشیدی از بین می‌رود. افزایش میرایی باعث کاهش دامنه فرکانسی نقاط سمت راست شده و در $\sigma=2$ کمینه خود را تجربه می‌کند و سپس با افزایش میرایی مجدد افزایش می‌یابند تا در فرکانس تشیدی سیستم هم محور می‌شوند. به عنوان دو مین اثر قابل ملاحظه (شکل 4) مشاهده می‌شود که در زمان افزایش میرایی، یک فاصله فرکانسی بین قلهای مختلف سمت راست طناب ظاهر می‌شود. به این معنی که ماکریم دامنه نوسان در موقعیت‌های مختلف از طناب به ازای فرکانس تحریک بی- بعد مختلف اتفاق می‌افتد. "شکل 4" نشان می‌دهد که دامنه ماکریم در فرکانس تحریک بی-بعد یکسان، به ازای مقادیر مختلف σ اتفاق می‌افتد. شکل 5 فاصله فرکانسی بر حسب میرایی‌های خیلی کوچک تا خیلی بزرگ را نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که یک مقدار خاص برای میرایی وجود دارد که به ازای آن فاصله فرکانسی بیشترین مقدار خود را دارد.

4- تغییرات فاز

رابطه مربوط به توابع فاز برای سمت چپ و راست طناب به شکل زیر به دست آمده است:

$$\arg(\varphi_1) = \arctan\left(\frac{\epsilon_1 \tan(\omega x_1)}{1 + \rho_1 \tan(\omega x_1)}\right) \quad (36)$$

$$\arg(\varphi_2) = \arctan\left(\frac{\epsilon_2 \tan(\omega x_2)}{1 + \rho_2 \tan(\omega x_2)}\right) \quad (37)$$

که در روابط (36) و (37)، $\arg(\varphi_1)$ و $\arg(\varphi_2)$ بیان گر رابطه فاز در سمت چپ و $\arg(\varphi_2)$ بیان گر رابطه فاز در سمت راست طناب می‌باشد. همچنین پارامترهای ϵ_1 , ϵ_2 , ρ_1 و ρ_2 همان پارامترهای تعریف شده در قسمت قبل هستند.

در ادامه نشان داده خواهد شد که در بررسی تحلیلی روابط فوق، نقاط ثابتی به دست می‌آیند که می‌توانند به درک بهتر انتشار پیچیدگی مود در طناب با تغییر سفتی و میرایی متصل شده به آن، کمک کنند. برای نشان دادن این نقاط ثابت مقادیر $k=10.7$ و $k=3.2$, $\omega/\omega_0=4/3$ را در نظر می‌گیریم. به ازای هر مقدار k ذکر شده، σ را در یک بازه وسیع تغییر داده و تابع فاز را رسم می‌کنیم. "شکل‌های 6 و 7" بیانگر تغییرات فاز بر حسب موقعیت طناب می‌باشد. برای هر دو مقدار k ، سمت چپ مانند یک طناب ساده رفتار کرده و میرایی در آن اثری نداشته است. لذا می‌توان نتیجه گرفت که میرایی‌های خیلی بزرگ در سمت چپ تأثیرگذار خواهند بود. اما در سمت راست طناب اثر میرایی بهوضوح مشخص است. همچنین:

- به ازای مقدار σ بعد $k=3.2$ در تابع فاز سمت راست طناب سه نقطه ثابت ایجاد می‌شود که به ازای میرایی‌های خیلی کوچک تا خیلی بزرگ مکان آنها تغییر نمی‌کند. یعنی نقاط $(0.25,-\pi)$, $(1,0)$ و $(0.91,-\pi/2)$ از ای مقادیر مختلف میرایی تقریباً شکل ثابتی دارد. یعنی سه

$$\tan(\omega x) \left[(1 + \rho \tan(\omega x)) \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} - \epsilon \tan(\omega x) \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] = 0 \quad (41)$$

از حل قسمت اول معادله‌های (40) و (41) داریم:

$$\tan(\omega x) = 0 \leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\omega_0}{\omega}, 2\frac{\omega_0}{\omega}, \dots\right) \quad (42)$$

در نقاط فوق ω فرکانس نرمال‌ایز شده ω/ω_0 می‌باشد و x اجتماع نقاط بدست آمده برای دو طرف طناب است. این نقاط مستقل از k و σ هستند و فقط به فرکانس تحریک بی بعد وابسته هستند.

از حل قسمت دوم معادلات (40) و (41) برای سمت چپ طناب معادله‌ای برای x بحسب ω ، k و σ داریم که اگر در این معادله $\omega/\omega_0 = 4/3$ قرار دهیم، نقطه ثابت $x=0.125$ را به ما می‌دهد و این نکته را باید اور می‌شود که این نقطه فقط به فرکانس تحریک بی بعد وابسته است. همچنین برای سمت راست طناب نیز از حل قسمت دوم معادلات (40) و (41) دو معادله خواهیم داشت که معادله اول فقط بحسب ω و k است و معادله دوم برحسب σ نیز می‌باشد. در معادله اول با قرار دادن $\omega/\omega_0 = 4/3$ مقدار x را می‌دهد که جزء نقاط ثابت بود و معادله دوم با قرار دادن $\omega/\omega_0 = 4/3$ عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$x = 1 - \frac{3}{4\pi} \arctan\left(\frac{4\pi}{4\sqrt{3}\pi + 3k}\right) \quad (43)$$

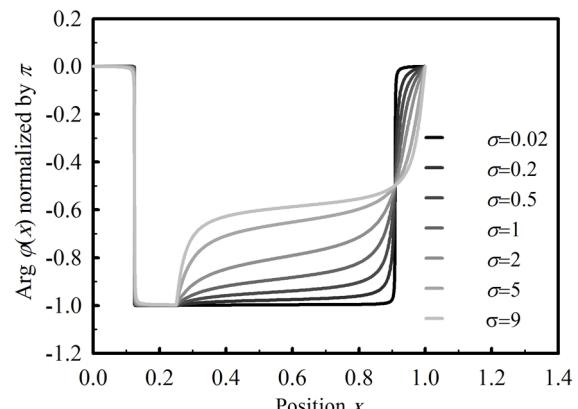
این معادله در حقیقت نقاط ثابتی که وابسته به k هستند را مشخص می‌کند. به گونه‌ای که اگر $k=3.2$ باشد، نقطه ثابت $x=0.91$ در "شکل 6" و $k=10.7$ باشد نقطه $x=0.95$ در "شکل 7" ایجاد می‌شود.

همچنین این معادله موقعیت محدوده‌ی پیچیدگی را که در بخش بعد توضیح داده می‌شود، نشان می‌دهد.

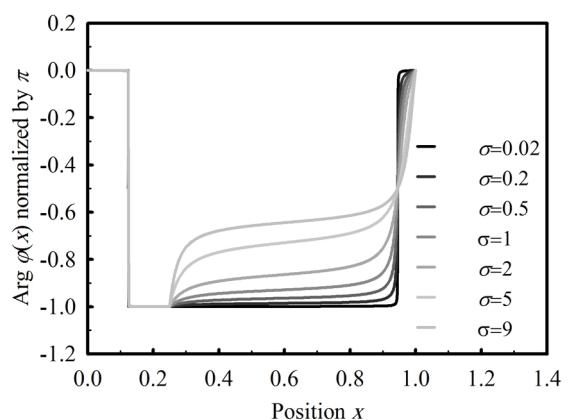
5- محدوده‌ی پیچیدگی مود و انتشار آن

5-1- محدوده‌ی پیچیدگی مود

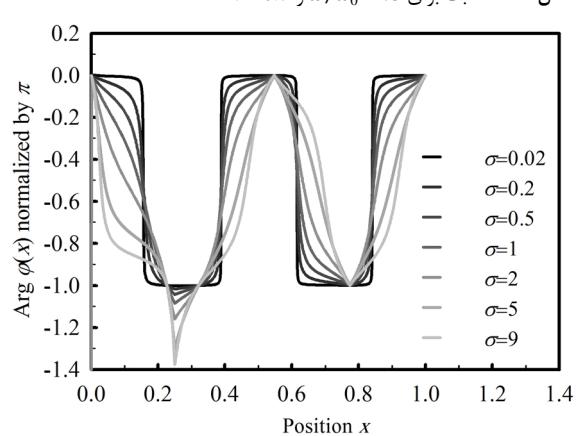
نتیجه جالب توجه دیگر در فاز، اثر پیچیدگی مود است. اگر میرایی در مکان $x=0.25$ وجود نداشته باشد، پیچیدگی مود ظاهر نخواهد شد. بدیهی است که فاز در طول طناب ثابت است (برای مثال ۰ یا $-\pi$). "شکل 9" تغییرات فاز به ازای افزایش میرایی را نشان می‌دهد. در زمانی که میرایی وجود ندارد در نمودار فاز گستنگی‌هایی در نقاط $x=0.125$ و در اطراف $x=0.9$ مشاهده می‌شود (شکل 9-1). این نقاط ثابت تغییر موضعی از ۰ به $-\pi$ هستند، در حقیقت بیان گرده در شکل مود می‌باشند (عنی $u(x,t)=0$). با ثابت نگه داشتن میزان سفتی و اضافه کردن مقدار بسیار کمی میرایی به سیستم، نمودار فاز از حالت گستنگ در نزدیکی $x=0.9$ خارج شده و پیوسته می‌شود (شکل 9-2). این نقطه اکنون به یک نقطه عطف تبدیل شده است. در این حالت یک محدوده ایجاد شده است که در داخل این محدوده (محدوده‌ی نزدیک $x=0.9$) فاز در حال تغییرات شدید است و در خارج این محدوده فاز همچنان ثابت باقی مانده است (۰ یا $-\pi$). در حقیقت نقاط خارج این محدوده در طول زمان ثابت هستند و نقاط داخل این محدوده به طور ناهمزمان نوسان می‌کنند. در ادامه نشان داده می‌شود که این محدوده مربوط به شروع پیچیدگی مود خواهد بود. برای مقادیر کوچک میرایی این محدوده بسیار کوچک است و اثر آن روی دامنه پاسخ فرکانسی به سختی قابل مشاهده است (شکل 10-2). با افزایش بیشتر میرایی، نه تنها محدوده ذکر شده در طول طناب گسترش می‌یابد، بلکه دامنه جابجایی‌ها در این محدوده افزایش می‌یابد



شکل 6 نقاط ثابت برای $k=3.2$ و $\omega/\omega_0=4/3$



شکل 7 نقاط ثابت برای $k=10.7$ و $\omega/\omega_0=4/3$



شکل 8 نقاط ثابت برای $k=1.4$ و $\omega/\omega_0=4.421$

برای به دست آوردن تحلیلی نقاط ثابت باید دو رابطه زیر برقرار باشند:

$$\frac{\partial \arg(\varphi)}{\partial k} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \arg(\varphi)}{\partial \sigma} = 0 \quad (39)$$

که به دو معادله مشابه ساده خواهند شد:

$$\tan(\omega x) \left[(1 + \rho \tan(\omega x)) \frac{\partial \epsilon}{\partial k} - \epsilon \tan(\omega x) \frac{\partial \rho}{\partial k} \right] = 0 \quad (40)$$

به یکدیگر وصل کند. برای دست یافتن به این نتیجه بسط تیلور تابع فاز بر حسب x در معادلات (36) و (37) نوشته شده و ضرایب غیرخطی مساوی صفر قرار داده شده است. بسط تیلور تابع فاز- موقعیت برای هر دو طرف طناب به صورت زیر خواهد بود:

$$\arg(\varphi) = \epsilon\omega x - \epsilon\rho\omega^2 x^2 + \left(\frac{1}{3}\epsilon\omega^3 + \epsilon\rho^2\omega^3 - \frac{1}{3}\epsilon^3\omega^3\right)x^3 \quad (44)$$

بنابراین برای صفر شدن عوامل غیرخطی باید:

$$\epsilon = \pm 1 \quad (45)$$

$$\rho = 0 \quad (46)$$

در صورت برقراری روابط فوق فاز کاملاً خطی شده و بیشترین پیچیدگی مود اتفاق می‌افتد. در این مطالعه سمت راست طناب در نظر گرفته شده است. در سمت راست طناب به ازای مقدار مثبت ϵ ، میرایی همواره منفی خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{cases} \epsilon_2 = -1 \leftrightarrow \{k = -2\omega \sin(\omega/2) \\ \rho_2 = 0 \leftrightarrow \{\sigma = 2\cos(\omega/2) + 2 \end{cases} \leftrightarrow \arg(\varphi_2) = -\omega x \quad (47)$$

بنابراین مقدار k و σ که منجر به بیشترین پیچیدگی در سمت راست طناب می‌شود، منحصر به فرد نیست. یعنی به ازای هر فرکانس تحریک ω - بعد دلخواه یک مقدار متفاوت برای k و σ وجود خواهد داشت که منجر به بیشترین پیچیدگی در سمت راست طناب می‌شود. این نتیجه به عنوان مهم‌ترین نتیجه در مسئله مورد بحث می‌باشد. چرا که همان‌طور که قبل از گفته شد این دو مقدار وابسته به فرکانس تحریک ω بود، الزاماً برابر با ترکیبی که منجر به بیشترین فاصله فرکانسی می‌شود، نیستند.

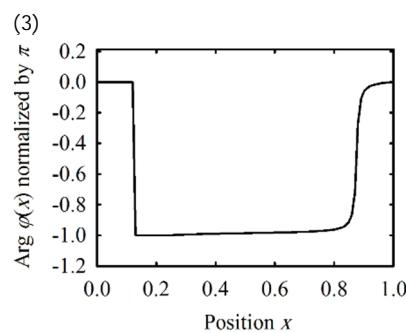
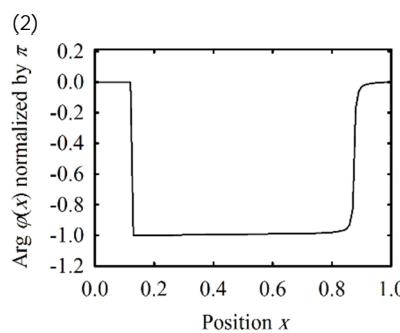
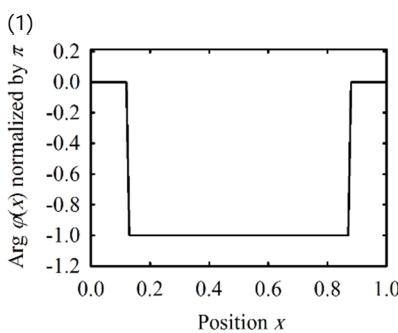


Fig. 9 Evolution of the phase of steady-state vibration throughout the string for first mode with stiffness set to $k=0.01$ and (1) $\sigma=0$ (2) $\sigma=0.05$ (3) $\sigma=0.1$

شکل 9 تکامل فاز ارتعاشات حالت پایدار در طناب در مود اول با سفتی فنر ثابت $k=0.01$ و میرایی (1) $\sigma=0$ و (2) $\sigma=0.05$ و (3) $\sigma=0.1$

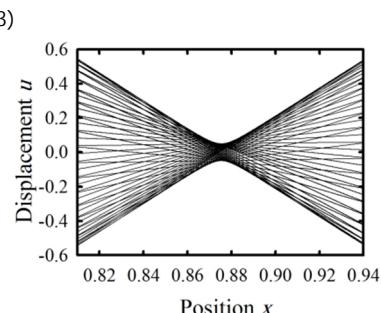
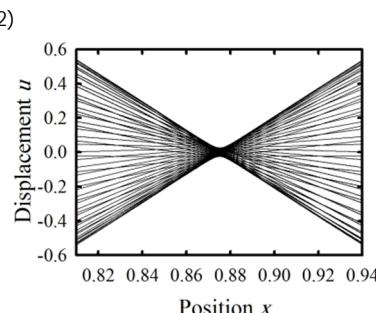
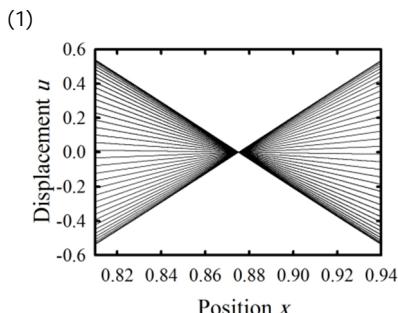


Fig.10 Steady-state vibration of the string at fifty time ($\Delta t=0.04$) for first mode, stiffness set to $k=0.01$, damping set to (1) $\sigma=0$, (2) $\sigma=0.05$, (3) $\sigma=0.1$ (Δt=0.04) متفاوت برای فرکانس مود اول، سفتی (1) $\sigma=0$ و (2) $\sigma=0.05$ و (3) $\sigma=0.1$

شکل 10 ارتعاشات حالت پایدار طناب در 50 زمان ($\Delta t=0.04$) متفاوت برای فرکانس مود اول، سفتی (1) $\sigma=0$ و (2) $\sigma=0.05$ و (3) $\sigma=0.1$

بنابراین محدوده‌ی پیچیدگی مود با افزایش میرایی، در طول طناب گسترش می‌یابد. این محدوده می‌تواند آنقدر گسترش یابد که تمام طول طناب را در بر بگیرد. برای مثال از $x=0$ تا $x=0.25$ در این صورت نمودار فاز نیز به یک خط تبدیل خواهد شد. بنابراین می‌توانیم حدس بزنیم که به ازای هر مقدار k یک مقدار میرایی وجود دارد که در گذر از مقدار کم به زیاد σ ، یک بیشینه محدوده پیچیدگی مود را خواهیم داشت. در این صورت بیشترین پیچیدگی مود را در طناب مشاهده خواهیم کرد و ترکیب مودهای مجاور را شاهد خواهیم بود. در قسمت بعد نشان داده شده است ترکیب‌های ممکن و مختلف از k و σ وجود خواهد داشت که فاز خطی خواهد بود و این امر با حرکت امواج در طول طناب و حذف مودهای نرمال ارتعاشات، مرتبط خواهد بود.

لازم به توضیح است که برای حالاتی که فنر و دمپر در وسط طناب متصل شده باشد یک ترکیب منحصر به فرد بدست می‌آید که در آن بیشترین فاصله فرکانسی و نیز بیشترین پیچیدگی مود را در دامنه پاسخ فرکانسی خواهیم داشت [9]. در ادامه نشان داده خواهد شد که برای مسئله مورد بحث در این مطالعه نه تنها ترکیب منحصر به فرد وجود ندارد بلکه الزاماً ترکیبی که بیشترین فاصله فرکانسی را می‌دهد منجر به بیشترین پیچیدگی مود نمی‌شود. لازم به ذکر است که در تحقیق حاضر به ازای جایگزینی محل قرار گیری فنر و دمپر از $L/4$ به $L/2$ تمامی روابط و نتایج مرجع [9] قابل استخراج است.

5-حرکت امواج

با توجه به نتایج بخش قبل، تنها در صورتی بیشترین پیچیدگی مود را خواهیم داشت که یک خط کاملاً راست نقاط ثابت را در نمودار فاز- موقعیت

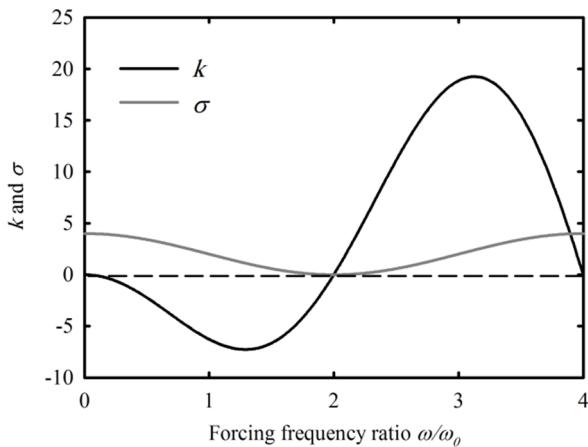


Fig. 11 The functions of k and σ versus forcing frequency ratio ω/ω_0 for maximum mode complexity

شکل 11 توابع k و σ بر حسب فرکانس تحریک بی بعد ω_0/ω برای حدکثر پیچیدگی مود

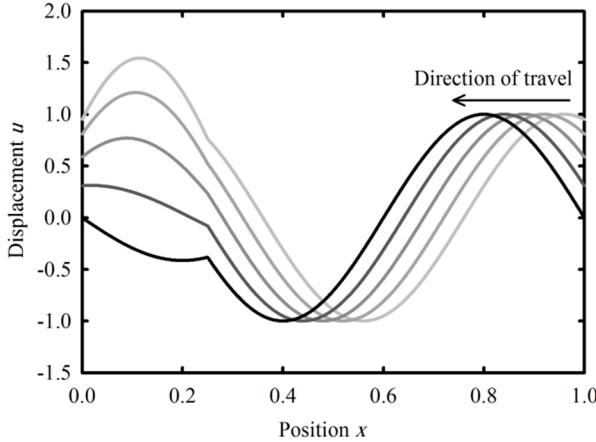


Fig. 12 Traveling wave in the string at five time instance $\Delta\tau=0.04$ for $\omega/\omega_0 = 2.5$ and $k=2.5\sqrt{2}\pi$ and $\sigma=2\sqrt{2}$

شکل 12 حرکت موج در طناب در فاصله ۵ زمانی $\Delta\tau=0.04$ برای $\omega/\omega_0=2.5$ و $k=2.5\sqrt{2}\pi$ و $\sigma=2\sqrt{2}$

شده به طناب اثر قابل توجهی در پاسخ فرکانسی سیستم نمی‌گذارد، اما میرایی موجود باعث ایجاد فاصله فرکانسی می‌گردد. به این معنی که ماکریم دامنه نوسان در موقعیت‌های مختلف از طناب به ازای فرکانس تحریک بی بعد مختلف اتفاق می‌افتد. بعلاوه می‌توان گفت که به ازای هر سفتی فنر، یک مقدار میرایی وجود خواهد داشت که بیشترین فاصله فرکانسی را ایجاد می‌کند.

فاز نیز با اضافه شدن میرایی، همانند حالت بدون میرایی ثابت نیست بلکه در طول طناب تغییر می‌کند. البته نقاط ثابتی در نمودار فاز بر حسب طول طناب وجود دارد که مستقل از میرایی و سفتی فنر هستند. زمانی که میرایی کوچک است، در مجاورت این نقاط محدوده‌ای ظاهر می‌شود که با افزایش بیشتر میرایی پیچیدگی مود ظاهر می‌شود و در سراسر طناب گسترش می‌یابد. این امر منجر به پاسخ فرکانسی متفاوت در طول زمان می‌شود.

در این تحقیق نشان داده شده است که یک ماکریم مطلق از پیچیدگی مود وجود خواهد داشت و زمانی اتفاق می‌افتد که فاز به صورت خطی تغییر

در روابط k و σ مقادیری قابل قبول هستند که مقدار مثبت داشته باشند. در "شکل 11" مقادیر k و σ بر حسب فرکانس تحریک بی بعد ω/ω_0 رسم شده است. همچنین می‌دانیم که به ازای $\omega/\omega_0=0$ (مانند آنچه در "شکل 11" مشاهده اتفاق می‌افتد) سیستم به یک طناب ساده بدون فنر و میرایی تبدیل می‌شود. در این حالت فاز به صورت خط‌های افقی در $0 < \omega/\omega_0 < \pi$ است و در این نقطه پیچیدگی مود افزایش فرکانس تحریک بی بعد k ، رفتاری واگرا و σ نوسانی با دوره تناوب 4π دارد. می‌توان نشان داد که به ازای تمام مقادیر قابل قبول k و σ پدیده پیچیدگی مود را خواهیم داشت. در این وضعیت رفتار پاسخ سیستم ارتعاشی نبوده و به موج تبدیل می‌شود. به عنوان مثال پاسخ حالت پایدار سیستم به ازای مقادیر $\omega/\omega_0=2.5$ و $k=2.5\sqrt{2}\pi$ به $\sigma=2\sqrt{2}$ به صورت زیر به دست آمده است.

$$u(x, \tau) = Ae^{-i(2.5)(1-x)}e^{i(2.5)\tau}, \quad 1/4 \leq x \leq 3/4 \quad (48)$$

این معادله، معادله موج در حال حرکت است که فقط برای محدوده‌ای از مقادیر ω که در "شکل 11" مشخص است، صادق است.

با توجه به نتایج حاصل شده، شرایط زیر معادل یکدیگر هستند:

- بیشترین پیچیدگی مود
- تبدیل نمودار فاز به خط کامل راست
- ظهور موج در حال حرکت به ازای محدوده فرکانسی مشخص در "شکل 12" حرکت موج تشکیل شده در سمت راست طناب به سمت چپ طناب نشان داده شده است. در مکان $x=0.25$ امواج در حال انتشار با نوسانات سمت چپ طناب برخورد می‌کند و در سمت راست طناب از بین می‌روند.

برای نشان دادن اثر چشمگیر نامتقارن بودن محل قرارگیری فنر-دمپر روی ایجاد ماکریم پیچیدگی مود در طناب، محسوبه شده است. جدول 1 مقادیر k و σ در محل‌های مختلف قرارگیری فنر-دمپر، محاسبه شده است. در جدول 1 مقادیر k و σ را برای آنکه تابع فاز در سمت راست فنر-دمپر به صورت خطی درآید و در نتیجه ماکریم پیچیدگی مود و ایجاد امواج در حال حرکت در طناب اتفاق بیافتد را به ازای قرار گرفتن فنر-دمپر از $L/2$ تا L را نشان می‌دهد. به ازای قرارگیری فنر-دمپر در مکان $L/2$ ، همان مقادیر مرجع [9] به دست آمد که نشان دهنده بی اثر بودن فربت روی پیچیدگی مود و عدد 2 برای میرایی بیان گر خاص‌ترین حالت ممکن است. نتیجه حائز توجه این است که به ازای سایر حالات نامتقارن، میرایی و فنری هردو اثرگذار و تابع فرکانس تحریک بی بعد بوده و به ازای قرارگیری در شرط مرزی، مقادیری برای k و σ وجود ندارد.

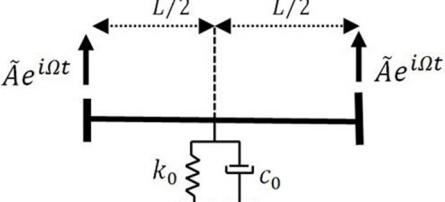
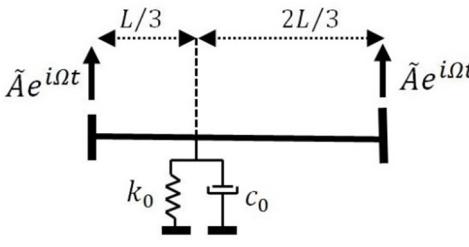
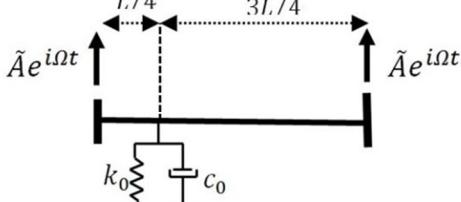
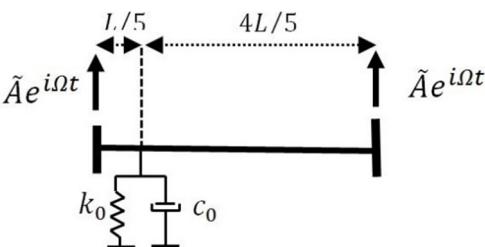
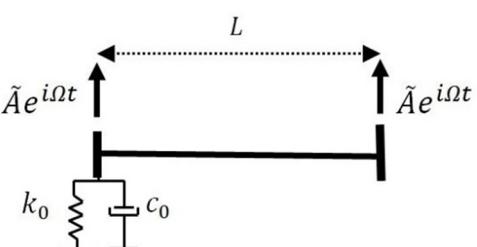
در مطالعه حاضر تمامی بررسی‌ها برای نمونه روی حالت نامتقارن سطر سوم از جدول 1 صورت گرفته است.

6-نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر دینامیک حالت پایدار یک طناب به همراه سیستم فنر و دمپر متصل شده به فاصله یک چهارم از انتهای سمت چپ آن و تحریک نوسانی و همزمان در دو انتهای طناب بررسی شده است. در این تحقیق نشان داده شده است که میرایی متصل شده به سیستم، رفتار دینامیکی سیستم را به واسطه ظهور پدیده‌هایی مانند پیچیدگی مود در طناب کاملاً متفاوت از سیستم بدون میرایی می‌کند. همچنین در این مساله اگرچه سفتی فنر متصل

جدول ۱ مقادیر سفتی فنر و میرایی متناظر با ماکزیمم پیچیدگی مود به ازای قرار گیری فنر-دمپر در مکان‌های مختلف در طول طناب

Table 1 spring and damping constants related to maximum mode complexity for various locations of spring-dashpot system

شماتیک مسأله	ثابت میرایی بی بعد σ	ثابت فنریت بی بعد k	فاصله فنر-دمپر از انتهای سمت راست
	2	0	L/2
	$2 \cos\left(\frac{\omega}{3}\right) + 1$	$\frac{\omega \sin\left(\frac{\omega}{3}\right) (2 \cos\left(\frac{\omega}{3}\right) + 1)}{\cos\left(\frac{\omega}{3}\right) + 1}$	2L/3
	$2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2$	$-2\omega \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$	3L/4
	$8 \cos\left(\frac{\omega}{5}\right)^3 - 4 \cos\left(\frac{\omega}{5}\right) + 1$	$\frac{\omega \left(8 \cos\left(\frac{\omega}{5}\right)^4 - 8 \cos\left(\frac{\omega}{5}\right)^2 - \cos\left(\frac{\omega}{5}\right) + 1\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{5}\right)}$	4L/5
	وجود ندارد	وجود ندارد	L

7- مراجع

- [1] T. Soong, B. Spencer, Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice, *Engineering Structures*, Vol. 24, No. 3, pp. 243-259, 2002.
- [2] A. Shahani, M. Ghadiri, Investigation of nonlinear vibration of cable system containing mass, spring and damper under effect of attached mass accelerating motion *Journal of Sharif*, Vol. 51, 2007. (in Persian)
- [3] T. Caughey, M. O'Kelly, Classical normal modes in damped linear dynamic systems, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, No. 3, pp. 583-588, 1965.
- [4] S. Adhikari, Optimal complex modes and an index of damping non-proportionality, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 18, No. 1, pp. 1-27, 2004.

کند. با ظاهر شدن بیشترین پیچیدگی مود در سمت راست طناب، انتشار موج از سمت راست به سمت چپ طناب رخ می‌دهد. با انتشار موج در سمت راست طناب در حقیقت مودهای نرمال ارتعاشات از بین رفته و رفتار طناب به صورت کیفی تغییر کرده است.

نتایج حاصله دینامیکی نشان می‌دهد که برای ایجاد ماکزیمم پیچیدگی و گذرا ارتعاشات به امواج، میرایی و فنریت هر دو تأثیرگذار هستند، به گونه‌ای که هر دو متناسب با فرکانس تحریک تغییر می‌کنند. میرایی با افزایش فرکانس تحریک، رفتاری پریودیک و فنریت رفتار سفت شوندگی را از خود نشان می‌دهند. این نتیجه در طراحی سیستم در فرکانس تحریک موردنظر، بسیار حائز اهمیت است و باید مورد توجه ویژه قرار بگیرد.

- flexural vibrating beam with viscous end conditions, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 200, No. 3, pp. 327-345, 1997.
- [11] K. Engelen, H. Ramon, W. Saeys, W. Franssens, J. Anthonis, Positioning and tuning of viscous damper on flexible structure, *Journal of sound and vibration*, Vol. 304, No. 3, pp. 845-862, 2007.
- [12] M. Gürgöze, H. Erol, On the frequency response function of a damped cantilever simply supported in-span and carrying a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 255, No. 3, pp. 489-500, 2002.
- [13] M. Gürgöze, H. Erol, Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, No. 1, pp. 132-153, 2006.
- [14] A. Hull, A closed form solution of a longitudinal bar with a viscous boundary condition, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 1, pp. 19-19, 1994.
- [5] S. R. Ibrahim, Computation of normal modes from identified complex modes, *Aiaa Journal*, Vol. 21, No. 3, pp. 446-451, 1983.
- [6] S. Krenk, Complex modes and frequencies in damped structural vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 270, No. 4, pp. 981-996, 2004.
- [7] S. Krenk, Vibrations of a taut cable with an external damper, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 67, No. 4, pp. 772-776, 2000.
- [8] J. Main, N. Jones, Free vibrations of taut cable with attached damper. I: Linear viscous damper, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 128, No. 10, pp. 1062-1071, 2002.
- [9] A. Blanchard, O. V. Gendelman, D. M. McFarland, L. A. Bergman, A. F. Vakakis, Mode complexity in a harmonically forced string with a local spring-damper and transitions from vibrations to waves, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 334, pp. 282-295, 2015.
- [10] G. Oliveto, A. Santini, E. Tripodi, Complex modal analysis of a