



## محاسبه تحلیلی و عددی نفوذپذیری جریان در محیط متخلخل با هندسه مربعی

محسن نظری<sup>۱\*</sup>، علیرضا صالحی<sup>۲</sup>، مجتبی خاکسار<sup>۳</sup>

- ۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
  - ۲- دانشجوی کارشناسی، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
  - ۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود
- \* صندوق پستی ۳۶۱۹۹۵۱۶۱، nazari\_me@yahoo.com، شاهرود،

**چکیده-** در این پژوهش، ابتدا مرور کاملی از نحوه مدلسازی و محاسبه ضریب نفوذپذیری در مواد متخلخل ارائه شده و سپس ضریب نفوذپذیری یک ماده متخلخل با هندسه مربعی به صورت تحلیلی و عددی محاسبه شده است. هندسه انتخابی جهت مدل‌سازی محیط متخلخل دارای مقطع مربعی است که محور الیاف‌های آن‌ها، به صورت عمودی نسبت به جریان قرار گرفته‌اند. جهت مدل‌سازی محیط، از مفهوم سلول واحد استفاده شده و با ایجاد آن و تکرار این الگو در راستای جریان، محیط مورد بحث حاصل شده است. معادلات حاکم بر جریان، پس از ساده‌سازی‌های مناسب، به صورت تحلیلی حل شده است و تابع صریحی برای ضریب نفوذپذیری محیط، بر حسب نسبت تخلخل، به دست آمده است. به علت نبود داده‌های آزمایشگاهی، مسئله نفوذپذیری به صورت عددی نیز مورد تحلیل قرار گرفته است. همچنین، با استفاده از آنالیز مقیاس نتایج حاصل از حل عددی، از دو طریق مورد بحث قرار گرفته است. بررسی‌های صورت گرفته گویای انطباق مناسب نتایج، به خصوص در میزان تخلخل‌های بالا می‌باشد.

**کلیدواژه‌گان:** نفوذپذیری، نسبت تخلخل، آنالیز مقیاسی، حل تحلیلی، حل عددی

## Analytical and numerical calculation of flow permeability in a porous medium with square cross section

M. Nazari<sup>1\*</sup>, A. R. Salehi<sup>2</sup>, M. Khaksar<sup>3</sup>

- 1- Assis. Prof. of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
  - 2- BSC Student of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
  - 3- MSC Student, of Mech. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran
- \* P. O. B. 3619995161, Shahrood, Iran, nazari\_me@yahoo.com

**Abstract-** In this paper, the normal flow permeability of an ordered fibrous structure, with square cross section is determined analytically. Porous structure is represented by a "unit cell" which is assumed to be repeated throughout the media. The selected unit cell is the space between four cylinders with square cross section. The analytical solution leads to a closed form equation for normal permeability of porous media including the geometrical parameters. Due to lack of experimental and analytical data for fluid flow through square cross section structures, a numerical study is also done and the obtained results are compared with the analytical solution. Moreover, a suitable scale analysis approach is employed to estimate the permeability of the fibrous structure. The presented method can predict the permeability of fibrous media, especially at high porosity. The present solution is successfully compared with the existing model in the literature over a wide range of porosity.

**Keyword:** Permeability, Porosity, Scale Analysis, Analytical Solution, Numerical Solution

## ۱- مقدمه

نفوذ به داخل این فیبرها را نخواهد داشت. میزان نفوذپذیری یک محیط در حالت کلی تابعی از شکل فیبرها، نحوه قرارگیری آن‌ها نسبت به جریان و همچنین نحوه توزیع آن‌ها در راستاهای مختلف می‌باشد [۴].

تاکنون روش‌های عددی، تحلیلی و آزمایشگاهی متفاوتی توسط پژوهشگران جهت پیش‌بینی خصوصیات جریان در مواد متخلخل به کار رفته است. حل‌های تحلیلی صورت‌گرفته اغلب محدود به جریان‌های خزشی و دارای یک یا چند فیبر استوانه‌ای‌اند. مروری بر کارهای صورت‌گرفته در مرجع [۴] آمده است.

با بررسی دقیق این مرجع، می‌توان گفت که مطالعات در این زمینه به آزمایش‌های کارمن [۵] و سالیوان [۶] در حدود سال‌های ۱۹۴۰ برمی‌گردد. چندین روش حل تحلیلی در دهه ۵۰ میلادی، توسط کاوابارا [۷]، هاسیوتو [۸]، هاپل [۹]، اسپاراو و لوفنفلر [۱۰] و سپس در دهه ۷۰ میلادی توسط هاپل و برنر [۱۱] پیشنهاد شد که در ادامه به بررسی دقیق‌تر هر یک از آن‌ها پرداخته خواهد شد.

کاوابارا [۷] در محل‌هایی که تنش برشی وجود نداشت از جریان‌های گردابه‌ای صرف‌نظر کرد. وی، با استفاده از شرایط مرزی محدودشده خود، توانست تابع جریان را برای محیط‌های متخلخل دارای آرایش‌های تصادفی حل کند و نفوذپذیری این محیط‌ها را در میزان تخلخل‌های بالا به دست آورد.

هاسیوتو [۸] نفوذپذیری مواد متخلخل تحت جریانی عمود بر محور میکرو ساختارهای آن را تعیین کرد. میکروفیبرهای موجود در مدل وی، دارای سطح مقطع دایروی بودند. وی [۹] از روش حل سری جهت تحلیل معادلات حاکم برای مدل خود استفاده کرد.

هاپل [۹] و اسپاراو و روفنفلر [۱۰] در دهه ۵۰ میلادی تحقیقاتی را پیرامون نفوذپذیری در محیط دارای میکروفیبرهای موازی با جریان و با رویکرد کاربرد این هندسه در مبدل‌های حرارتی صورت دادند. هاپل [۹] با در نظر گرفتن سلول واحد دایره‌ای شکل که در مرکز آن یک میکروساختار استوانه‌ای قرار می‌گرفت، مدل خود را تعریف کرد. رویکرد وی در انتخاب شرایط مرزی (برای مدل تحلیلی خود)، به نوعی محدود شده بود به طوری که میزان تنش برشی را در روی حجم کنترل سلول واحد مدل، صفر در نظر گرفت. به هر حال، پیش‌بینی

امروزه مواد متخلخل کاربردهای متعددی در زمینه‌های مختلف مهندسی پیدا کرده‌اند. منافذ داخل محیط متخلخل می‌تواند کاملاً رندم و تصادفی باشد. در کلی‌ترین حالت ممکن، حرکت سیال در منافذ موجود در مواد متخلخل، می‌تواند یک الگوی سه‌بعدی داشته باشد. البته در کاربردهای خاص‌تر که نیاز است تا ماده متخلخل به صورت مصنوعی ساخته شود، منافذ عبوردهنده سیال، می‌توانند دارای چیدمان‌های یک‌بعدی و یا دوبعدی نیز باشند. از جمله کاربردهای مهم این مواد استفاده در زمینه جداسازی ذرات محلول در سیالات مختلف، بهینه‌سازی عایق‌های حرارتی، افزایش انتقال حرارت به صورت موضعی، تصفیه مواد در صنایع بیولوژیک، ساخت کامپوزیت‌ها و صنایع الکترونیک [۱-۳] می‌باشد.

خواص متعددی در ارتباط با این مواد تعریف می‌شود که یکی از کاربردی‌ترین خواص، میزان نفوذپذیری محیط است که عموماً به صورت بی‌بعد گزارش می‌شود.

مطالعات اولیه در این زمینه به آزمایش‌های داری برمی‌گردد. داری از وجود یک رابطه خطی بین افت فشار ایجادشده در طول واحد و سرعت میانگین سطحی خبر داد. وی رابطه زیر را پیشنهاد کرده است:

$$-\nabla P = \frac{\mu U_d}{k} \quad (1)$$

در این معادله  $\mu$  گرانروی سیال،  $U_d$  میانگین سرعت سطحی،  $k$  نفوذپذیری محیط متخلخل و  $\nabla P$  افت فشار در طول واحد می‌باشد.

این رابطه مکرراً در مقالات مورد استناد واقع شده و مناسب جریان خزشی است [۴]. اغلب برای پیدا کردن افت فشار به‌ویژه در شرایطی که رژیم حاکم بر جریان از نوع خزشی است ( $Re < 1$ ) از معادله داری استفاده می‌شود. مدل برینکمن-فریچهمر در واقع گسترش‌یافته مدل داری است و از این معادله زمانی استفاده می‌شود که رژیم جریان خزشی نیست (اعداد رینولدز متوسط و بالا). در این حالت، اثرات اینرسی در محیط متخلخل می‌بایست در نظر گرفته شوند.

به اجزای سازنده ماتریس یک محیط متخلخل، میکروالیاف‌های ساختاری یا فیبرهای ساختاری گفته می‌شود. سطح این فیبرهای جامد، عموماً به صورت نفوذناپذیر در نظر گرفته می‌شود و سیال عبوری از بین این ماتریس جامد، قابلیت

جامد) جریان با جواب‌های عددی به‌دست آمده توسط سانجی و آکریوس [۱۲]، و همچنین جواب برای حالت موازی جریان، با نتایج به‌دست آمده توسط هاپل و برنر [۱۱] مقایسه شده است. روش داراموند و تهیر در حالت عمودی انطباق بسیار مناسبی با مدل تحلیلی سانجی و آکریوس [۱۲] دارد، به‌همین علت در میزان تخلخل‌های بالا دارای دقت مضاعفی است.

صحرايي و کاویانی [۱۵] با در نظر گرفتن اثرات اینرسی، به صورت عددی به بررسی جریان عمود بر فیبرهای استوانه‌ای پرداختند. رابطه پیشنهادی آنان تنها در بازه محدودی از نسبت تخلخل  $0.07 < \varepsilon < 0.4$  دارای دقت مناسبی است.

در سال‌های اخیر، مطالعاتی در شاخه نفوذپذیری در محیط‌های متخلخل یک‌بعدی و دوبعدی توسط سوپرا و کلیچن [۱۶] صورت پذیرفته است. مدل محاسباتی آن‌ها برگرفته از مدل ارائه‌شده توسط کلاچ و همکاران [۳] به همراه انجام اصلاحات مناسب در آن مدل می‌باشد. مقایسه نتایج آنان با حل‌های عددی صورت‌گرفته، گویای دقت بالای روش محاسباتی در نسبت تخلخل‌های بالاست. همچنین، مولفان نفوذپذیری محیط با چیدمان تصادفی فیبرها را به صورت تابعی از فاصله بین این میکروفیبرها و عدد بدون بعد توزیع تصادفی گزارش کردند [۱۶].

پژوهش‌های گسترده دیگری نیز در زمینه مواد متخلخل صورت گرفته است. مواد متخلخل واقعی دارای میکروفیبرهایی با چیدمان‌های تصادفی در راستاهای مختلف می‌باشند. محققان همواره به دنبال یافتن رابطه‌ای بودند که بتوان توسط آن نفوذپذیری چنین محیط‌هایی را در حالت کلی و با آرایش کاملاً تصادفی‌اش پیش‌بینی کرد. برای دست‌یابی به این مهم، از تحلیل جریان در وضعیت‌های یک‌بعدی و دوبعدی و بسط نتایج آن برای جریان‌های سه‌بعدی می‌توان استفاده کرد.

مدل پیشنهادشده توسط جکسون و جیمز [۱۷] نیز بر همین اساس می‌باشد. پژوهش صورت‌گرفته توسط این محققان، بر روی مواد با جنس‌های مختلف از جمله مواد پلیمری با زنجیره‌های مختلف و پلاستیک‌های فایبرگلاس بود. همچنین مدل ارائه شده برای جریان با عدد رینولدز کم و نسبت تخلخل بالا برقرار می‌باشد. رابطه پیشنهادشده در این مرجع از طریق انجام آزمایش به‌دست آمده است. جکسون و جیمز در روش تئوری خود موفق به ارائه یک روش حل دقیق برای معادله

روش وی برای میزان نفوذپذیری جریان‌های موازی، در مواردی که نسبت تخلخل محیط پایین بوده و میکروفیبرهای مجاور بر روی شرایط یکدیگر اثرگذارند، غیردقیق است.

در همان دهه، تحقیقاتی توسط اسپاراو ولوفلر [۱۰] بر روی مواد متخلخل با چیدمان‌های مربعی و شطرنجی صورت گرفت. آنان معادله پواسون را در دستگاه مختصات استوانه‌ای، برای مدل خود به‌کار بردند و بعد از به‌دست آوردن حل عمومی، با اعمال شرایط مرزی، ضرایب مربوط به حل سری را به صورت تابعی از نسبت تخلخل محاسبه کردند. در نهایت، آنان موفق به پیشنهاد رابطه‌ای شدند که تنها در میزان تخلخل‌های بالا دقت کافی داشت. همچنین توزیع سرعت به‌دست آمده توسط مولفین در مرجع [۱۰] به صورت جدولی در گزارش‌هایشان آمده است، لیکن به آسانی نمی‌توان از آن بهره گرفت.

هاپل و برنر [۱۱] معادله استوکس را برای جریان آزاد پیرامون یک استوانه و در وضعیت‌های عمودی و موازی با محور آن مورد بررسی قرار دادند. آنان از هرگونه تنش برشی در مدل خود صرف‌نظر کرده و همچنین توزیع سرعت را در ورودی به صورت کاملاً یکنواخت در نظر گرفتند. شرایط مرزی آنان با شرایط انتخابی توسط کاوابارا متفاوت است. طبق فرضیه آنان میزان مقاومت در برابر نفوذپذیری جریان، برای مواد متخلخل دارای ساختارهای سه‌بعدی، معادل با  $1/3$  همین مقاومت در حالت موازی به علاوه  $2/3$  آن در حالت عمودی جریان، در محیط‌های دارای ساختارهای یک‌بعدی است.

سانجی و آکریوس [۱۲] نفوذپذیری لزج جریان، به‌ازای نسبت تخلخل‌های مختلف، برای محیط دارای استوانه‌هایی با چیدمان مربعی و متناوب را به‌دست آوردند. مدل ارائه‌شده توسط مولفان پیش‌بینی دقیقی در میزان تخلخل‌های مختلف دارد. سانجی و یاو [۱۳] در ادامه به گسترش مطالعات در زمینه آرایش‌های تصادفی پرداختند. آنان گزارش‌هایی را در زمینه روش‌های حل عددی برای جریان‌های عمود و موازی با محور فیبرهای ساختاری، برای محیط با آرایش یک‌بعدی تصادفی ارائه کردند. داراموند و تهیر [۱۴] معادلات استوکس را برای جریان در حالت‌های متفاوت حل کرده و از روش توزیع تکین برای پیدا کردن میدان جریان در محیط‌های متخلخل با ساختارهای مربعی، مستطیلی، مثلثی و شش‌وجهی بهره‌بردند. در تحقیق این محققان [۱۴]، نتایج حالت عمودی (بر فیبر

مدل خود از تکنیک انتگرالی استفاده کردند. آنان با فرض وجود یک توزیع سرعت سهموی برای نمایه سرعت در داخل سلول واحد و انتگرال‌گیری از معادلات بقای جرم و ممنتوم، روابط تحلیلی فشرده‌ای را برای افت فشار و نفوذپذیری در یک سلول واحد از محیط متخلخل مورد نظر به دست آوردند. هندسه انتخابی، دارای سطح مقطع دایره‌ای بود. نتایج نهایی پژوهش آن‌ها با نتایج آزمایشگاهی به دست آمده توسط ژانگ و دیگران [۲۵] تطابق بسیار خوبی در همه میزان تخلخل‌ها دارد.

در این پژوهش، ابتدا از شبیه‌سازی جریان و حل عددی برای به دست آوردن افت فشار و نفوذپذیری در ماده متخلخل استفاده شده است و در ادامه نیز برای بررسی صحت نتایج به دست آمده، از روش آنالیز مقیاسی و همچنین حل تحلیلی معادلات حاکم استفاده شده است.

اهداف پژوهش حاضر عبارت‌اند از:

- نکته قابل توجه و پراهمیت، مرور جامع تحقیقات (روش‌های عددی، تجربی، تحلیلی) انجام شده در این زمینه است که از دیدگاه مولفان، خلا آن مشاهده می‌شود.
- توسعه مدل‌سازی و حل عددی برای محاسبه نفوذپذیری و همچنین دست‌یابی به میدان سرعت در محیط‌های متخلخل
- استفاده از نتایج حل عددی برای اصلاح برخی از مدل‌های موجود در جریان عمودی، به علت نبود داده‌ها و نمونه‌های آزمایشگاهی
- توسعه روش‌های تحلیلی
- تشخیص پارامترهای هندسی وابسته و بحث در مورد اثرات آن‌ها

در این تحقیق، از مفهوم سلول واحد برای تعیین نفوذپذیری ماده متخلخل، در جریان عمود بر محور میکرو فیبرها، استفاده شده است. در روش عددی، معادلات حاکم بر جریان به روش حجم محدود تحلیل شدند.

با استفاده از مقادیر به دست آمده برای افت فشار و با توجه به معادله دارسی، مقادیر نفوذپذیری به‌ازای نسبت تخلخل‌های مختلف به دست آمدند. در روش تحلیلی، معادلات حاکم در سلول واحد مورد بررسی قرار گرفته و با ارائه فرضیات فیزیکی مناسب، حل شده و تابع صریحی برای نفوذپذیری محیط

ناویر-استوکس حاکم بر محیط متخلخل بی‌قاعده (دارای چیدمان تصادفی) شدند.

تماداکیس و استریچس [۱۸] نفوذپذیری یک ماده متخلخل غیرهمگن و دارای الیاف در بسترهای همپوشانی‌شده را در حالات مختلف یک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی مورد بررسی قرار دادند. گرچه نمونه‌های آن‌ها همه حالات توزیع تصادفی را شامل می‌شد، اما در اغلب موارد تفاوت‌های موجود بین پیش‌بینی روش آن‌ها با داده‌های آزمایشگاهی چشم‌گیر است.

آولندا و ترکیوتو [۱۹] با استفاده از ایجاد تشابه بین رسانایی الکتریکی و نفوذپذیری جریان، یک حد بیشینه‌ای برای نفوذپذیری در محیط‌های متخلخل پیشنهاد کردند. تاماداکیس و روبرتسون [۱] با بررسی نتایج آزمایشگاهی اظهار داشتند که به دست آوردن حد کمینه و بیشینه برای نفوذپذیری، مربوط به حالت‌های موازی و عمودی جریان در ساختارهای دارای میکروفیبرهای یک‌بعدی است.

پژوهش‌های آزمایشگاهی مختلفی نیز در زمینه بررسی نفوذپذیری محیط‌های متخلخل وجود دارد [۲۰-۲۶]. مروری از تحقیقات آزمایشگاهی انجام شده به صورت خلاصه در جکسون و جیمز [۱۷]، آستروم و همکاران [۲۷] و تماداکیس و روبرتسون [۱] آمده است. خلاصه‌ای از کارهای صورت گرفته در این پژوهش‌ها به صورت زیر است:

۱. در تحقیقات صورت گرفته توجه کمتری به میکروالیاف‌های با سطح مقطع غیردایره‌ای شده است.
۲. بیشتر حل‌های صورت گرفته به صورت برازش یک منحنی بر داده‌های به دست آمده از روش‌های آزمایشگاهی یا عددی است و روش‌های تحلیلی کمتر مورد توجه بوده‌اند.
۳. مدل‌های تحلیلی موجود جامعیت کافی ندارند و همچنین در تمام نسبت تخلخل‌ها دارای دقت مطلوب نیستند.
۴. در بیشتر پژوهش‌های صورت گرفته نمایه سرعت در ابعاد سلول واحد به دست نیامده است.
۵. در پژوهش‌های صورت گرفته، کم‌تر از آنالیز مقیاسی برای تعیین میزان نفوذپذیری استفاده شده است.

اخیراً، تمایل و بهرامی [۲۸] نفوذپذیری محیط‌های متخلخل با ساختارهای مختلف را در مقابل جریان‌های موازی و عمودی نسبت به محور میکروالیاف‌ها مورد بررسی قرار داده‌اند. آنان از مفهوم سلول واحد جهت مدل‌سازی و همچنین جهت تحلیل

میزان تخلخل محیط با پارامتر بدون بعد  $\varepsilon$  بیان می‌شود. این پارامتر هندسی با توجه به سطح مقطع اشغال شده توسط فیبر، فواصل موجود بین آن‌ها در جهات مختلف و همچنین شکل فیبر انتخابی، قابل تغییر است. در این مقاله  $\varepsilon$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{d}{s}\right)^2 \quad (2)$$

به ازای کلیه مقادیر  $d$  در صورتی که  $s = \sqrt{2}d$  باشد، سطوح جامد مربعی شکل به یکدیگر می‌رسند، در این صورت میزان نفوذپذیری جریان صفر می‌شود. به بیان دیگر هیچ جریانی در محیط متخلخل برقرار نخواهد بود. بنابراین، در این مدل تنها مقادیر  $\varepsilon > 0.5$  معنادار است.

شرایط مرزی مسئله برای حل عددی معادلات حاکم به صورت زیر می‌باشد:

مقطع ورودی: سرعت ورودی

مقطع خروجی: صفر بودن گرادیان سرعت افقی

سطوح میکروالیاف‌ها: شرط عدم لغزش

مرز مشترک بین دو سلول واحد (در راستای عمودی): شرط تقارن یا گرادیان صفر در جهت عمودی.

مرز مشترک بین دو سلول واحد (در راستای افقی):

تقارن جریان نسبت به این خط (مولفه عمودی سرعت در روی این مرز صفر می‌باشد).

نتایج حل عددی در سلولی گزارش می‌شود که جریان در آن به حالت کاملاً توسعه یافته رسیده باشد. به بیان دیگر، افت فشار و پروفیل‌های سرعت در محدوده سلول واحد هفتم (از ورودی مدل) ثبت شده است، جایی که جریان به صورت کاملاً توسعه یافته است. همان‌گونه که بیان شد، معادله داریسی هنگامی به کار می‌رود که رژیم جریان عبوری، خزشی باشد. پارامتر غالب در این نوع جریان‌ها، ویسکوزیته است و در تحلیل جریان از اثرات اینرسی صرف نظر می‌شود. از آنجایی که عموماً در روش‌های عددی مشکلات مربوط به روش تحلیلی وجود ندارد و معادلات حاکم می‌توانند به راحتی به عبارات جبری قابل حل تبدیل شوند، بنابراین گسسته‌سازی مربوط به معادلات حاکم بر جریان می‌تواند به صورت کامل و با در نظر گرفتن همه بخش‌ها اعم از جابه‌جایی و پخش صورت پذیرد. اما برای انطباق بهتر نتایج عددی با نتایج حاصل از روش تحلیلی ارائه شده، پارامترهای موثر بر عدد رینولدز به نحوی انتخاب

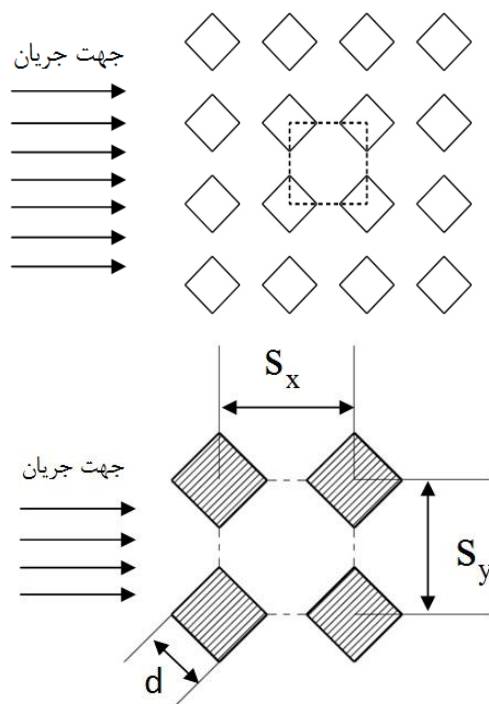
متخلخل فیبری ارائه شده است. همچنین، از روش آنالیز مقیاسی نیز برای پیش‌بینی نفوذپذیری محیط مورد نظر استفاده خواهد شد. کلاج و همکاران [۲۹] این روش را به منظور افزایش میزان دقتش مورد بازنگری قرار داده‌اند. روش تحلیلی به دست آمده در پژوهش حاضر، پس از ساده‌سازی، نفوذپذیری را به صورت تابعی از نسبت تخلخل محیط پیش‌بینی می‌کند.

## ۲- تحلیل نفوذپذیری در محیط متخلخل

### ۲-۱- مدل‌سازی عددی

نمای کلی محیط متخلخل و جهت عبور جریان نسبت به میکروالیاف‌ها در شکل ۱ مشخص شده است. سطح مقطع الیافها مربعی شکل‌اند. جهت مدل‌سازی مسئله از مفهوم سلول واحد استفاده شده است.

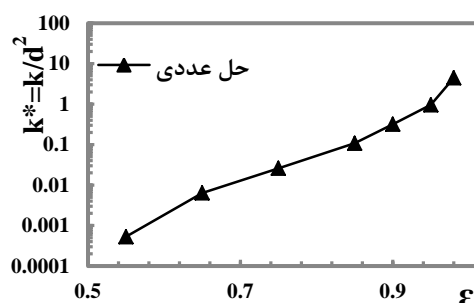
الگوی این سلول، به صورت پرئودیک و در جهت طولی گسترش یافته است. با حفظ کلیت مسئله و به جهت ساده‌سازی اولیه، فواصل طولی و عرضی موجود بین محور الیاف‌های ساختاری مدل به صورت  $s_x = s_y = s$  در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱ نمونه‌ای از سلول واحد برای مدل‌سازی محیط متخلخل

جدول ۱ نتایج عددی برای نفوذپذیری عمودی جریان

تعداد شبکه	$k^*$	$\Delta P$ (Pa)	$U_d$ (m/s)	$L$ (cm)	$\varepsilon$
۶۱۰۲۱۴	۰/۰۰۰۵۳	۱۰۱	۰/۰۰۵۱	۱/۴۹	۰/۵۵
۴۱۳۲۶۴	۰/۰۰۶۴	۳۰/۴	۰/۰۱۶۳	۱/۶۹	۰/۶۵
۴۸۲۷۷۳	۰/۰۲۶	۱۵/۸	۰/۰۲۹۳	۲	۰/۷۵
۴۵۰۴۳۷	۰/۱۰۱۸	۷/۵۶	۰/۰۴۵۲	۲/۵۸	۰/۸۵
۱۷۹۲۵۹	۰/۳۱۷۸	۳/۸۵	۰/۰۵۵۳	۳/۱۶	۰/۹
۱۵۶۹۷۱	۰/۹۶۲	۰/۴۴۵	۰/۰۶۸۴	۴/۴۷	۰/۹۵
۱۱۷۸۶۷	۴/۴۴۹۲	۰/۱۷۸	۰/۰۸	۷/۰۷	۰/۹۸



شکل ۲ نفوذپذیری در مقابل نسبت تخلخل محیط

## ۲-۲- روش آنالیز مقیاسی

نسبت حجمی جامد در سلول واحد که به فاصله بین دو فیبر مجاور بستگی دارد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\varphi = \frac{d^2}{s^2} \quad (۶)$$

اگر اندازه منافذ موجود بین میکروفیبرها نسبت به اندازه متوسط ملکول‌های سیال عبوری از بین آن‌ها، به حد کافی بزرگ‌تر باشد، شرایط پیوستگی جریان برقرار بوده و می‌توان از معادلات ناویر استوکس در مقیاس‌های کوچک روزنه‌ها نیز استفاده کرد [۲۸].

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (۷)$$

$$-\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V} = \rho \vec{a} \quad (۸)$$

با صرف نظر کردن از بخش اینرسی داریم:

$$\nabla P = \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (۹)$$

از آنالیز مقیاسی برای تعیین درستی میزان افت فشار به‌دست آمده از روش عددی استفاده خواهد شد. در این روش،

شدند که عدد رینولدز به اندازه کافی کوچک باشد ( $Re \leq 0.05$ ) تا اختلاف احتمالی بین پیش‌بینی دو روش (در تخمین نفوذپذیری) به اندازه کافی کوچک باشد. معادله داریسی به صورت زیر نیز بازنویسی می‌شود:

$$k = \frac{\mu L}{\Delta p} U_d \quad (۳)$$

جهت مشخص شدن نفوذپذیری به پارامترهای  $\mu$ ،  $\Delta p$ ،  $L$  و  $U_d$  نیازمندیم. با نوشتن معادله پیوستگی برای یک سلول داریم:

$$U_d = u_{inlet} \frac{(s - \sqrt{2}d)}{s} \quad (۴)$$

از این معادله با توجه به سرعت ورودی جریان، می‌توان به میانگین سرعت در هر مقطع دست پیدا کرد.

به‌ازای نسبت‌های تخلخل کوچک‌تر از ۰/۹۵، مقدار سرعت در ورودی مدل  $u_{inlet} = 0.1 \left(\frac{m}{s}\right)$  و برای نسبت‌های تخلخل بزرگ‌تر  $u_{inlet} = 0.2 \left(\frac{m}{s}\right)$  در نظر گرفته شده است. در معادله (۳)،  $L$  طول سلول واحد است. با توجه به نسبت تخلخل، مقدار  $s_x = s_y = s$  نیز به‌دست می‌آید:

$$s = \sqrt{\frac{d^2}{1-\varepsilon}} \quad (۵)$$

$\mu$  گرانیوی سیال است که در تمامی موارد حل‌شده  $\mu = 0.07 \frac{kg}{m.s}$  در نظر گرفته شده است. میزان افت فشار در طول سلول واحد با  $\Delta p$  نشان داده شده است که بیانگر اختلاف فشار بین مرز ورودی و خروجی سلول واحد است. برای حل معادلات حاکم از روش حجم محدود استفاده شد. میزان حساسیت نتایج عددی به تعداد شبکه با انتخاب اندازه‌های مختلف برای شبکه کنترل شد که دقیق‌ترین جواب‌های به‌دست آمده در جدول ۱ گزارش شده است. برای حل جریان در حالت پایا از الگوریتم سیمپل استفاده شده و روش گسسته‌سازی معادلات از نوع مرتبه دو است. طول ضلع مربع برای همه مدل‌ها  $d = 1 \text{ cm}$  فرض شده است. پارامترهای به‌دست آمده پس از حل عددی، که شامل نفوذپذیری بی‌بعد ( $k^* = k/d^2$ ) و افت فشار در طول سلول واحد است، در جدول ۱ و به صورت خلاصه گزارش شده است.

در شکل ۲ میزان نفوذپذیری در مقابل نسبت تخلخل نیز رسم شده است. همان‌گونه که مشخص است، با افزایش نسبت تخلخل، نفوذپذیری نیز افزایش می‌یابد.

برای محاسبه ترسیتی در مقالات ارائه شده است [۳۰-۳۱]. کلیه روابط پیشنهادی می‌بایست شرایط زیر را ارضا کنند [۳۱]:

$$\begin{aligned} 1 - \tau &> 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \tau &= 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (۱۲)$$

یکی از معروف‌ترین مدل‌های تجربی ارائه شده برای تعیین ترسیتی مدل آرچین [۳۲] می‌باشد:

$$\tau = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{1-\varphi}\right)^\alpha \quad (۱۲)$$

در این رابطه  $\alpha$  عددی ثابت و  $\varepsilon$  میزان تخلخل محیط مورد بحث است. بوکریو [۳۰] مقدار این ثابت را برای بسترهای فشرده  $\alpha = 0.5$  پیشنهاد می‌کند. همچنین به علت وجود تشابه جریان در بسترهای فشرده یک‌بعدی و دوبعدی متخلخل مقدار ثابت  $\alpha$  برابر  $0.5$  فرض شده است. پژوهش‌های توماداکیس و روبرتسون [۱] نشان داد که میزان فاکتور ترسیتی در مواد متخلخل با ساختار سه‌بعدی کمتر از نمونه‌های یک‌بعدی و دوبعدی است. بنابراین برای چنین ساختارهایی مقدار  $\alpha = 0.3$  در نظر گرفته می‌شود. با توجه به مطالب بیان شده در قسمت‌های قبلی  $\beta$  و  $\delta_{\min}$  در این مقاله به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_{\min} = s - \sqrt{2}d \quad (۱۳)$$

$$\beta = \left(\frac{s - \sqrt{2}d}{s}\right) \quad (۱۴)$$

با جایگذاری معادله (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) در معادله (۱۱) و ساده‌سازی‌های لازم، نفوذپذیری بی‌بعد  $k^* = \frac{k}{d^2}$ ، به صورت زیر است:

$$k = c \frac{(s - \sqrt{2}d)^3}{(s\sqrt{1-\varphi})} \quad (۱۵)$$

$$k^* = \frac{c}{\sqrt{1-\varphi}} \left(\frac{1}{\varphi} - 2\sqrt{2\varphi} + 3\sqrt{\frac{2}{\varphi}}\right) \quad (۱۶)$$

با توجه به در دسترس نبودن نمونه‌های آزمایشگاهی، از نتایج حاصل از حل عددی برای به دست آوردن ضریب  $c$  استفاده شد. روش‌های ارائه شده در مقالات مبتنی بر دو فرض اساسی است:

#### الف) فرض ثابت بودن ضریب $c$ :

در این روش، با استفاده از نتایج گزارش شده در جدول ۱ و جایگذاری آن‌ها در معادله (۱۶)، مقدار ثابت  $c$  به‌ازای مقادیر

میزان تغییرات پارامترهای اصلی در داخل معادلات حاکم جایگذاری می‌شود. نصف فاصله موجود بین فیبرها با  $\delta_{\min}$  نشان داده شده است که معیاری از سطح مقطع ورودی به سلول است و تغییرات اندازه سرعت در این بخش نرخ بالایی دارد.

تعیین میانگین سرعت، در مقطع دارای کمترین مساحت تصویرشده، توسط سوپرا و کلیجن [۱۶] انجام شد. آنان این پارامتر را به‌عنوان مشخصه مقیاسی سرعت پیشنهاد کردند. اما فرضیات آنان در اندازه تخلخل‌های پایین غیرکاراست و تنها برای ساختارهایی با  $\varepsilon > 0.8$  دقت بالایی دارد.

کارمن [۵] استدلال جامعی در این زمینه ارائه کرده است. وی بیان کرد که الگوی جریان در عرض یک سلول با طول  $L$ ، به صورت کاملاً مستقیم و یکنواخت نیست، بلکه ذرات سیال به منظور پیمودن این فاصله می‌بایست که مسیر با طول  $L_e$  و دارای پیچ و خم‌های متفاوتی را طی کنند. از این رو انتظار می‌رود که نتایج حاصل از آنالیز مقیاسی سرعت در محیط متخلخل، که شامل اختلاف فشار ثابتی هستند، به طور معکوس با نسبت  $\frac{L_e}{L}$  ارتباط داشته باشد. وی این نسبت را با نام فاکتور ترسیتی،  $\tau$  معرفی کرد. از این رو با آنالیز سرعت در ابعاد کوچک روزه‌ها داریم:

$$\vec{V} \approx \frac{U_D}{\tau \beta} \quad (۱۰)$$

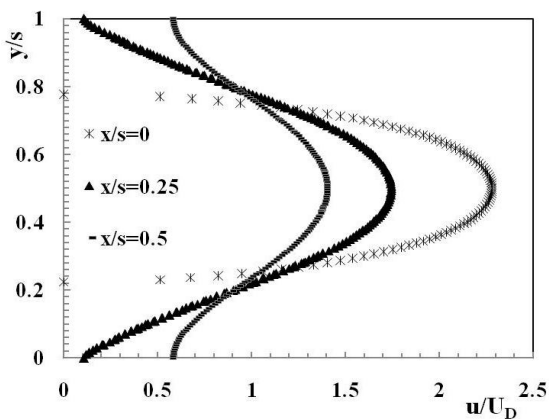
$\beta$  در این معادله، نسبت کمترین مساحت عبور جریان به کل مساحت سلول واحد در راستای عبور جریان می‌باشد. با جایگذاری این معادله، برای مقیاس سرعت و استفاده از  $\delta_{\min}$  به‌عنوان مقیاس طولی، نفوذپذیری محیط‌های متخلخل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$k = c \beta \delta_{\min}^2 \tau \quad (۱۱)$$

در این معادله  $c$  مقدار ثابتی است که می‌بایست از طریق مقایسه با نتایج به دست آمده (تجربی یا عددی) محاسبه شود. بنابراین اگر مقادیر  $\beta$  و  $\delta_{\min}$  موجود باشند، نفوذپذیری قابل محاسبه است. فاکتور ترسیتی در واقع نسبت طول مسیری است که می‌بایست به طور متوسط توسط یک ذره طی شود ( $L_e$ ) تا این ذره به اندازه  $L$  در مسیر مستقیم پیش برود. به دلیل اهمیت فراوان این موضوع در نفوذ جرم، حرارت و رسانش الکتریسته، حل‌های تحلیلی و روابط تجربی مختلفی

## ۳- نمایه‌های سرعت

نمونه‌ای از پروفیل‌های سرعت به‌دست آمده از طریق حل عددی و به‌ازای  $\varepsilon = 0/9$  در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند. برای نمایش بهتر پروفیل‌ها، مولفه سرعت در جهت  $x$  ( $u$ ) و همچنین مختصه  $y$  در داخل سلول واحد به کمک دو پارامتر  $u_d$  و  $s$  بی‌بعد شده‌اند. همچنین برای نمایش بهتر تغییرات میدان سرعت، نمایه‌ها در ۳ مقطع مختلف و در کنار یکدیگر در یک نمودار رسم شده‌اند. همان‌گونه که از نمودار مشخص است، پروفیل سرعت کاملاً سهموی نیست، ولی با تقریب معادله داری می‌توان از توزیع سهموی برای حل تحلیلی معادلات استفاده کرد. در حل تحلیلی ارائه شده، از یک پروفیل سرعت سهموی استفاده شده است. نکته بسیار مهم این است که در حالت واقعی توزیع سرعت در داخل سلول واحد کاملاً سهموی نیست. پروفیل واقعی سرعت در ورودی و خروجی سلول واحد به پروفیل سهموی فرض شده نزدیک بوده ولی در سایر مقاطع (در داخل سلول واحد) از این فرض انحراف دارد.



شکل ۴ نمونه‌ای از پروفیل‌های سرعت به‌ازای  $\varepsilon = 0/9$

سوال اصلی اینجاست که آیا پروفیل فرض شده می‌تواند نفوذپذیری را به‌خوبی پیش‌بینی کند؟ جواب این سوال مثبت است. علت این است که قسمت عمده افت فشار (که در معادلات هم ظاهر شده) در نزدیکی ورودی و خروجی سلول واحد اتفاق می‌افتد، یعنی جایی که تغییر سطح مقطع شدید داریم. از طرفی در همین قسمت پروفیل سرعت فرض شده با واقعیت انطباق خوبی دارد. برای شفاف‌شدن موضوع مجدد تاکید می‌شود که نفوذپذیری محیط متخلخل از محاسبه افت

مختلف  $\varepsilon$  به‌دست می‌آید. بهترین نتیجه حاصل مربوط به حالت  $c = 0/24$  می‌باشد، در این صورت معادله (۱۷) برای نفوذپذیری بدون بعد انطباق خوبی با داده‌های به‌دست آمده از حل عددی خواهد داشت. منحنی به‌دست آمده، با فرض ثابت بودن ضریب  $c$  به اتفاق نقاط به‌دست آمده از حل عددی، در شکل ۳ مشخص می‌باشند، که گویای انطباق خوب این نمودار با داده‌های عددی است.

$$k^* = \frac{0.24}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{1}{(1-\varepsilon)} - 2\sqrt{2(1-\varepsilon)} + 3\sqrt{\frac{2}{(1-\varepsilon)}} \right) \quad (17)$$

(ب) برازش منحنی برای محاسبه ضریب  $c$ :

این روش مبتنی بر تعریف یک منحنی برازش، برای تمامی ضرایب  $c$ ، به‌دست آمده از معادله (۱۶) می‌باشد. پس از مقداری عملیات ریاضی، معادله به‌دست آمده به صورت زیر است:

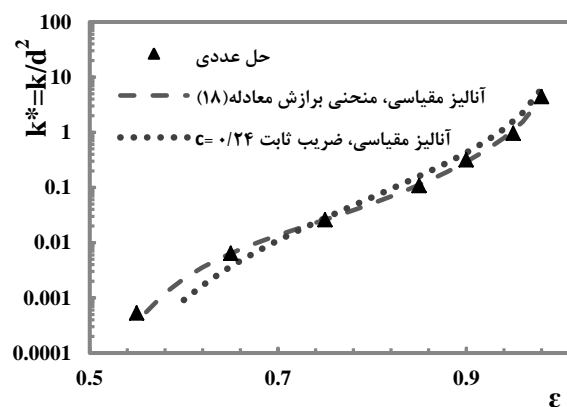
$$c(\varepsilon) = (-12.94)\varepsilon^3 + (35.8)\varepsilon^2 - (32.94)\varepsilon + 10.27 \quad (18)$$

با جایگذاری رابطه به‌دست آمده از این روش در معادله (۱۶)

داریم:

$$k^* = \frac{c(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{1}{(1-\varepsilon)} - 2\sqrt{2(1-\varepsilon)} + 6 - 3\sqrt{\frac{2}{(1-\varepsilon)}} \right) \quad (19)$$

این رابطه انطباق بسیار مطلوبی با داده‌های عددی دارد. در شکل ۳ داده‌های عددی و نمودار  $k^*$  بر حسب  $\varepsilon$  رسم شده است.



شکل ۳ مقایسه نتایج حل عددی، آنالیز مقیاسی به‌ازای  $c = 0/24$  معادله (۱۷) و به‌ازای برازش منحنی معادله (۱۸)



می‌توان از این مولفه سرعت روی مرزهای افقی مشترک سلول‌ها صرف نظر کرد. این فرض  $u_b=0$  در میزان تخلخل‌های پایین، دارای خطای کم‌تری است، زیرا در این صورت الیاف‌های ساختاری دارای فواصل کم‌تری نسبت به یکدیگر می‌باشند و ساختمان فشرده‌تری دارند که این مورد با فرض مطرح‌شده سازگاری بهتری دارد.

با فرض عدم لغزش در دیواره میکروالیاف‌های ساختاری از معادله (۲۰) می‌توان به نمایه سرعت دست یافت:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - \delta^2) \quad (21)$$

همان‌طور که در شکل ۵ مشخص است،  $\delta$  نصف فاصله موجود بین دو محور میکروفیبر مجاور هم در راستای  $y$  می‌باشد. معادلات توصیف‌کننده  $\delta$  به‌صورت زیرند:

$$\delta = \begin{cases} \frac{s}{2} + \left(x - \frac{d}{\sqrt{2}}\right) & 0 \leq x \leq \frac{d}{\sqrt{2}} \\ \frac{s}{2} & \frac{d}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{s}{2} \end{cases} \quad (22)$$

با جایگذاری نمایه سرعت به‌دست‌آمده معادله (۲۱) در معادله پیوستگی و انتگرال‌گیری از معادله حاصل، رابطه زیر برای افت فشار به‌دست آمد:

$$\Delta p_{\text{unitcell}} = 3\mu Q \int_0^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{\delta^3} \quad (23)$$

در این معادله  $Q$  نرخ جریان حجمی عبوری از سلول واحد یا همان دبی حجمی است. با توجه به رابطه (۲۲) و انتگرال‌گیری از معادله (۲۳) داریم:

$$\Delta p_{\text{unitcell}} = \frac{3}{2} \mu Q \left\{ \frac{12}{s^2} - \frac{4}{(s+\sqrt{2}d)^2} - \frac{8\sqrt{2}d}{s^3} \right\} \quad (24)$$

با جایگذاری معادله بالا در رابطه دارسی (۱) و ساده‌سازی، می‌توان نفوذپذیری  $k$  را به صورت تابعی از پارامترهای هندسی الگوی واحد به‌دست آورد. با جایگذاری معادله (۲) در معادله بالا و ساده‌سازی،  $k^*$  بر حسب  $\varepsilon$  و به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

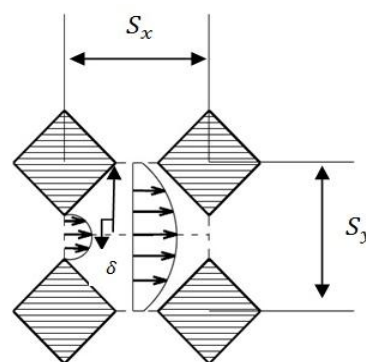
$$k^* = \left(\frac{1}{12}\right) * \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) * \frac{(3-2\varepsilon-2\sqrt{2}\sqrt{1-\varepsilon})}{(6-2\sqrt{2}\sqrt{1-\varepsilon})-5\varepsilon-2\sqrt{2}(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \quad (25)$$

نمودار حاصل از معادله بالا به اتفاق نتایج به‌دست آمده از سایر روش‌های مورد بحث در قسمت‌های قبلی در شکل ۶ نمایش داده شده است.

فشار در سلول واحد حاصل شده است. به بیان دیگر محاسبه صحیح افت فشار (با دقت مناسب) منجر به یک بیان دقیق از نفوذپذیری محیط متخلخل خواهد شد.

#### ۴- حل تحلیلی

شکل ۵ نحوه چیدمان فیبرهای مربعی شکل در سلول واحد را نشان می‌دهد. همان‌طور که بیان شد در این مقاله کلیه محاسبات صورت‌گرفته براساس فرض  $S_x = S_y = S$  می‌باشد که علاوه بر حفظ کلیت مسئله موجب کاهش حجم محاسبات می‌شود. ضمناً، روش ارائه‌شده قابلیت توسعه در حالت کلی  $S_x \neq S_y$  را نیز داراست.



شکل ۵ نمونه‌ای از سلول واحد محاسباتی

با توجه به معادله دارسی (۱) مشخص می‌شود که نفوذپذیری با افت فشار کل در یک سلول واحد متناسب است. معادلات حاکم با فرض برقراری جریان خزشی توسعه یافته، پایا و تراکم‌ناپذیر در محیط متخلخل تحلیل شدند. در این نوع جریان‌ها عموماً می‌توان، با صرف نظر کردن از تاثیرات بخش اینرسی، معادله ناویر-استوکس را به فرم ساده‌شده زیر نوشت:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (20)$$

به علت وجود شرط تقارن جریان در مرز افقی موجود بین دو سلول کنار هم، بزرگی مولفه میدان سرعت در راستای  $y$  برابر صفر است. البته در حالت کلی و در این پژوهش، اندازه مولفه سرعت روی مرزهای موازی با جریان (مرزهای مشترک پایینی و بالایی) مخالف صفر است، اما با توجه به کوچک بودن این مولفه ( $u_{bx}$ )، به خصوص در مواد با ساختارهای فشرده‌تر،

## ۵- بررسی نتایج

به دست آمده توسط یزدچی و همکاران [۳۳] و نتایج پژوهش حاضر صورت پذیرفته است. همچنان که از شکل ۶ مشخص است، نتایج پژوهش حاضر انطباق بسیار مناسبی با نتایج منتشر شده در محدوده وسیعی از نسبت تخلخل دارد.

## ۶- خلاصه و نتیجه گیری

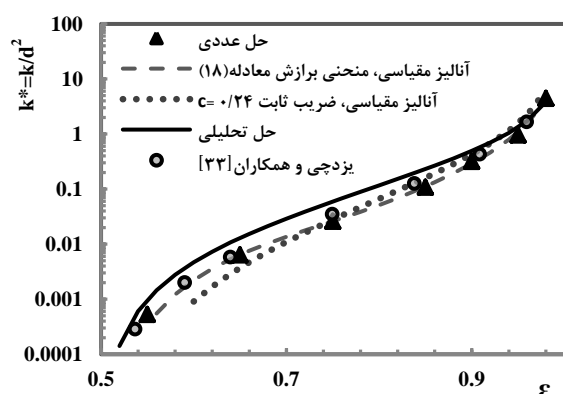
در این پژوهش، ابتدا مرور کاملی از نحوه مدلسازی و محاسبه ضریب نفوذپذیری در مواد متخلخل ارائه شده و سپس ضریب نفوذپذیری یک ماده متخلخل با هندسه مربعی به صورت تحلیلی و عددی محاسبه شده است. روش‌های تحلیلی، عددی و آنالیز مقیاسی جهت بررسی افت فشار و نفوذپذیری در مواد متخلخل به کار برده شد. با استفاده از مفهوم سلول واحد، مدل محیط متخلخل به دست آمد. این محیط، با تکرار الگوی این سلول به صورت متناوب و همگن در یک بعد و به صورت عمود نسبت به جریان حاصل شد. با استفاده از روش عددی مقدار افت فشار و متعاقب آن میزان نفوذپذیری محیط مورد بحث برآورد شد. با استفاده از روش آنالیز مقیاسی مجموعه‌ای از روابط برای نفوذپذیری مدل متخلخل با هندسه مربعی، به صورت خلاصه، ارائه شدند. پیش‌بینی روش‌های عددی، آنالیز مقیاسی و تحلیلی برای تخمین نفوذپذیری محیط‌های متخلخل دارای میکروالیاف‌های ساختاری با مقطع مربعی با یکدیگر مقایسه شدند. نتایج به دست آمده مبین انطباق مناسب این روش‌ها در میزان تخلخل‌های مختلف است. برای اثبات صحت پیش‌بینی روش عددی به کار برده شده، نتایج این پژوهش با نتایجی که اخیراً توسط یزدچی و همکاران [۳۳] گزارش شده مورد مقایسه قرار گرفته است و دارای انطباق بسیار مناسبی در بازه وسیعی از نسبت تخلخل می‌باشد.

با توجه به معادله دارسی در جریان‌های دارای عدد رینولدز خیلی کم  $Re \ll 1$  (موسوم به جریان‌های خزشی)، با افزایش میزان نفوذپذیری مقدار افت فشار کاهش می‌یابد.

## ۷- مراجع

- [1] Tomadakis M. M., Robertson T., "Viscous Permeability of Random Fiber Structures: Comparison of Electrical and Diffusion Estimates with Experimental and Analytical Results", *Journal of Composite Materials*, Vol. 39, 2005, pp. 163-188.

در شکل ۶ نتایج به دست آمده از هر ۳ روش در کنار یکدیگر نشان داده شده‌اند. روش  $c$  ثابت تنها به‌زای میزان تخلخل‌های بالا  $\epsilon > 0.65$  انطباق خوبی با داده‌های حاصل از حل عددی مسئله دارند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، جواب‌های حاصل از برازش ثوابت  $c$  بهترین انطباق را با نمونه‌های حل شده از روش عددی دارند. یکی از نکات مهم در تخمین پارامتر نفوذپذیری این است که تابع نفوذپذیری در تمام محدوده نسبت تخلخل دقت کافی داشته باشد. برخی از مدل‌ها در نسبت تخلخل‌های بالا پیش‌بینی خوبی از نفوذپذیری دارند، ولی در اعداد کوچک نسبت تخلخل با خطا مواجه‌اند. در مدل ارائه شده، با دقت بسیار خوبی در تمام محدوده نسبت تخلخل به پیش‌بینی نفوذپذیری اقدام شده است. مقایسه نتایج نیز موید همین موضوع است. ضمناً، همان‌گونه که از نتایج ملاحظه می‌شود، تابع نفوذپذیری به صورت لگاریتمی رسم شده است که در تمامی مقالات و کتاب‌ها از این شکل نمایش بهره برده می‌شود.



شکل ۶ مقایسه روش تحلیلی، عددی و آنالیز مقیاسی

پیش‌بینی نفوذپذیری به کمک مدل تحلیلی ارائه شده اختلاف کمی با روش عددی دارد و اختلاف موجود به علت فرضیاتی است که برای ساده‌سازی معادله مومنوم در روش تحلیلی به کار رفته است. این ساده‌سازی منجر به یک پروفیل سهموی در داخل سلول واحد شد که با واقعیت انحراف داشت. ولی همین فرض ساده‌کننده قادر به پیش‌بینی نفوذپذیری با دقت مطلوب بود. دلیل آن در بخش ۳ مقاله مفصلاً ارائه شد. علاوه بر آن، برای اعتبارسنجی هر چه بیشتر نتایج، به خصوص صحت نتایج به دست آمده از روش عددی، مقایسه‌ای هم بین نتایج

- Layer Arrays of Cylinders”, *Physical Review*, Vol. 74, 2006, 036302-1-10.
- [17] Jackson G. W., James D. F., “The Permeability of Fibrous Porous Media”, *Canadian Journal of Chemical Eng.*, Vol. 64, 1986, pp. 364-374.
- [18] Tomadakis M. M., Sotirchos S. V., “Transport Properties of Random Arrays of Freely Overlapping Cylinders with Various Orientation Distributions”, *Journal of Chemical Physics*, Vol. 98, 1993, pp. 616-626.
- [19] Avellaneda M., Torquato S., “Rigorous Link between Fluid Permeability, Electrical Conductivity, and Relaxation Times for Transport in Porous Media”, *Physics of Fluids*, Vol. 11, 1991, pp. 2529-2540.
- [20] Kyan C. P., Wasan D. T., Kinter R. C., “Flow of Single-Phase Fluids through Fibrous Beds”, *Industrial Engineering and Chemical Fundamentals*, Vol. 9, 1970, pp. 596-603.
- [21] Bergelin O. P., Brown G. A., Hull H. L., Sullivan F. W., “Heat Transfer and Fluid Friction during Viscous Flow across Banks of Tubes: III – A Study of Tube Spacing and Tube Size”, *ASME Transactions*, Vol. 72, 1950, pp. 881-888.
- [22] Kirsch A. A., Fuchs N. A., “Studies on Fibrous Aerosol Filters-II Pressure Drops in Systems of Parallel Cylinders”, *Annals of Occupational Hygiene*, Vol. 10, 1967, pp. 23-30.
- [23] Sadiq T. A. K., Advani S. G., Parnas R. S., “Experimental Investigation of Transverse Flow through Aligned Cylinders”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 21, No. 5, 1995, pp. 755-774.
- [24] Khomami B., Moreno L. D., “Stability of Viscoelastic Flow around Periodic Arrays of Cylinders”, *Rheologica Acta.*, Vol. 36, No. 4, 1997, pp. 367-383.
- [25] Zhong W. H., Currie I. G., James D. F., “Creeping Flow through a Model Fibrous Porous Medium”, *Experiments in Fluids*, Vol. 40, 2006, pp. 119-126.
- [26] Skartsis L., Kardos J. L., “The Newtonian Permeability and Consolidation of Oriented Carbon Fiber Beds”, *Proceedings of American Society of Composites Technical Conference*, Vol. 5, 1995, pp. 548-556.
- [27] Astrom B. T., Pipes R. B., Advani S. G., “On Flow through Aligned Fiber Beds and Its Application to Composite Processing”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 26, No. 9, 1992, pp. 1351-1373.
- [28] Tamayol A., Bahrami M., “Analytical Determination of Viscous Permeability”, *ASME FED2008*, Jacksonville, 2008.
- [29] Clauge D. S., Kandhai B. D., Zhang R., Sloop P. M. A., “Hydraulic Permeability of (un)bounded Fibrous Media using the Lattice Boltzmann Method”, *Physical Review E*, Vol. 61, 2000, pp. 616-625.
- [2] Gostick J. T., Fowler M. W., Pritzker M. D., Ioannidis M. A., Behra L. M., “In-Plane and Through-Plane Gas Permeability of Carbon Fiber Electrode Backing Layers”, *Journal of Power Sources*, Vol. 162, 2006, pp. 228-238.
- [3] Clauge D. S., Philips R. J., “A Numerical Calculation of the Hydraulic Permeability of Three-Dimensional Disordered Fibrous Media”, *Physics of Fluids*, Vol. 9, No. 6, 1997, pp. 1562-1572.
- [4] Kaviani M., *Principles of Heat Transfer in Porous Media*, New York, Springer-Verlag, 1992.
- [5] Carman P. C., “The Determination of Specific Surface of Powders”, *Journal of the Society of Chemical Industry*, Vol. 57, 1938, pp. 225-234.
- [6] Sullivan R. R., “Specific Surface Measurements on Compact Bundles of Parallel Fibers”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 13, 1942, pp. 725-730.
- [7] Kuwabara S., “The Forces Experienced by Randomly Distributed Parallel Circular Cylinders or Spheres in a Viscous Flow at Small Reynolds Numbers”, *Journal of Physical Society of Japan*, Vol. 14, 1959, pp. 527-532.
- [8] Hasimoto H., “On the Periodic Fundamental Solutions of the Stokes Equations and Their Application to Viscous Flow Past a Cubic Array of Spheres”, *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 5, 1959, pp. 317-328.
- [9] Happel J., “Viscous Flow Relative to Arrays of Cylinders,” *American Institute of Chemical Engineers Journal*, Vol. 5, 1959, pp. 174-177
- [10] Sparrow E. M., Loeffler A. L., “Longitudinal Laminar Flow Between Cylinders Arranged in Regular Array”, *AIChE Journal*, Vol. 5, 1959, pp. 325-330.
- [11] Happel J., Brenner H., *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Noordhoff International Publishing, Leyden, Netherlands, 1973, p. 533.
- [12] Sangani A. S., Acrivos A., “Slow Flow Past Periodic Arrays of Cylinders with Application to Heat Transfer”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 8, 1982, pp. 193-206.
- [13] Sangani A. S., Yao C., “Transport Processes in Random Arrays of Cylinders:II-Viscous Flow”, *Physics of Fluids*, Vol. 31, No. 9, 1988, pp. 2435-2444.
- [14] Drummond J. E., Tahir M. I., “Laminar Viscous Flow through Regular Arrays of Parallel Solid Cylinders”, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 10, 1984, pp. 515-540.
- [15] Sahraoui M., Kaviani M., “Slip and No-Slip Boundary Condition at Interface of Porous, Plain Media”, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 37, 1994, pp. 1029-1044.
- [16] Sobera M. P., Kleijn C. R., “Hydraulic Permeability of Ordered and Disordered Single

- [32] Archie G., "The Electrical Resistivity Log as an Aid in Determining Some Reservoir Characteristics", *Transactions of AIME*, Vol. 146, 1942, pp. 54-62
- [33] Yazdchi K., Srivastava S., Luding S., "Microstructural Effects on the Permeability of Periodic Fibrous Porous Media", *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 37, 2011, pp. 956-966.
- [30] Boucreau B. P., "The Diffusive Tortuosity of Fine-Grained Unlithified Sediments", *Geometrica et Cosmochimica Acta.*, Vol. 60, 1996, pp. 3139-3142.
- [31] Shen L., Chen Z., "Critical Review of the Impact of Tortuosity on Diffusion", *Chemical Engineering Science*, Vol. 62, 2007, pp. 3748-3755.