



## تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای FGM با روش MLPG

آزاده ارژنگ‌پی<sup>۱</sup>، رضا انصاری<sup>۲\*</sup>، منصور درویزه<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۲- استادیار مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۳- استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

\* گیلان، صندوق پستی ۴۱۶۳۵-۳۷۵۶، r\_ansari@guilan.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای متشکل از مواد هدفمند یا موادی با خواص تابعی (FGM) بررسی شده است. در تحلیل بکار رفته، معادلات میدان جابجایی بر مبنای تئوری دائل و فرضیه تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده و پوسته مورد نظر از ترکیب پیوسته سرامیک و فلز فرض شده است؛ لذا مشخصات مکانیکی ماده تشکیل دهنده پوسته استوانه‌ای با فرض مدرج بودن، مطابق با توزیع کسر حجمی توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کند. معادلات حاکم بر پوسته به صورت عددی و با استفاده از روش بدون المان محلی پتروف گلرکین یا به اختصار MLPG حل شده‌اند. به این منظور، فرم جدیدی از تابع تغییر در نظر گرفته شده که منجر به دستیابی ماتریس‌های جرم و سفتی شده و در نتیجه فرکانس طبیعی پوسته تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف محاسبه شده است. اثر تغییرات کسرهای حجمی، مشخصات هندسی پوسته و شرایط تکیه‌گاهی مختلف، مطالعه شده و نتایج به خوبی گواه بر همگرایی و دقت بالا در روش بکار رفته است.

**کلیدواژگان:** ارتعاشات آزاد، روش بدون المان محلی پتروف گلرکین، پوسته‌های استوانه‌ای، تئوری دائل، مواد هدفمند.

## Vibration analysis of a FGM cylindrical shell using MLPG method

A. Arjangpay<sup>1</sup>, R. Ansari<sup>2\*</sup>, M. Darvazah<sup>1</sup>

1- PhD. Student, Mech. Eng., Guilan Univ., Rasht, Iran

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., Guilan Univ., Rasht, Iran

3- Prof., Mech. Eng., Guilan Univ., Rasht, Iran.

\* P. O. B. 3756-41635 Rasht, Iran. r\_ansari@guilan.ac.ir

**Abstract-** In this paper the Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method is implemented to study the vibration of a Functionally Graded Material (FGM) cylindrical shell. Displacement field equations, based on Donnell and first order shear deformation theory, are taken into consideration. Material properties are assumed to be temperature-dependent and graded in the thickness direction according to different volume fraction functions. A FGM cylindrical shell made up of a mixture of ceramic and metal is considered herein. The set of governing equations of motion are numerically solved by the Meshless method in which a new variational trial-functional is constructed to derive the stiffness and mass matrices so the natural frequencies are obtained in various boundary conditions by using discretization procedure and solving the general eigen value problem. The influences of some commonly used boundary conditions, variations of volume fractions and effects of shell geometrical parameters are studied. The results show the convergence characteristics and accuracy of the mentioned method.

**Keywords:** Free Vibration, MLPG Method, Cylindrical Shells, Donnell Theory, FGM.

### ۱- مقدمه

مکانیک جامدات با شرایط مرزی مختلف، بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند [۱]. این روش‌ها که بر مبنای گره‌های نامنظم روی دامنه شکل گرفته‌اند، بر خلاف روش المان محدود از مش‌بندی

در سال‌های اخیر روش‌های بدون المان در بین روش‌های عددی به دلیل قابلیت انعطاف‌پذیری بالا برای حل مسائل

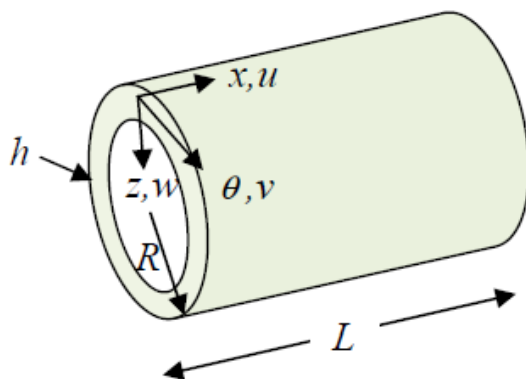
می‌شود. سطح میانی استوانه همانند شکل ۱ به دستگاه مختصات استوانه‌ای  $\theta, x$  ارجاع داده شده و فاصله از سطح میانی با مختصات  $z$  اندازه‌گیری می‌شود. فرض‌های اولیه به این صورت در نظر گرفته شده‌اند که پوسته جداره نازک و کرنش‌ها کوچک باشند. هم‌چنین مقطع مسطحی که در ابتدا عمود بر سطح میانی بوده، پس از تغییر شکل نیز مسطح خواهد ماند ولی عمود بر سطح میانی تغییر شکل یافته نخواهد بود.

با استفاده از بسط تیلور، بر اساس تئوری مرتبه اول برشی مؤلفه‌های تغییر مکان سه‌بعدی  $u_x, u_\theta, u_z$  در جهات  $\theta, x$  و  $z$  به صورت معادله (۱) خواهد بود.

$$\begin{aligned} u_x(x, \theta, z) &= u(x, \theta) + z \psi_x(x, \theta) \\ u_\theta(x, \theta, z) &= v(x, \theta) + z \psi_\theta(x, \theta) \\ u_z(x, \theta, z) &= w(x, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای بر مبنای تئوری دائل بر حسب نیروها و ممان‌های منتجه به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شوند [۸]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} &= I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\psi}_x \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{Q_{\theta\theta}}{R} &= I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\psi}_y \\ \frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} - \tilde{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= I_1 \ddot{w} \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} - Q_{xx} &= I_2 \ddot{u} + I_3 \ddot{\psi}_x \\ \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta\theta} &= I_2 \ddot{v} + I_3 \ddot{\psi}_y \end{aligned} \quad (2)$$



شکل ۱ سیستم مختصات و هندسه‌ی پوسته

در تئوری پوسته‌ها ساده‌تر آن است که نیروها و ممان‌های

استفاده نمی‌کنند و این عدم نیاز به المان باتوجه به پرهزینه بودن آن، از مزایای مهم این روش‌ها محسوب می‌شود. از این بین روش MLPG جایگاه ویژه‌ای دارد به دلیل این‌که بر خلاف سایر روش‌ها از هیچ نوع المانی استفاده نمی‌کند، چه به صورت آشکار مانند مش‌بندی در روش المان محدود و یا به صورت پنهان مانند آنچه در روش بدون المان گلرکین (EFG) مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲]. از دیگر مزایای روش MLPG این است که بر خلاف روش المان محدود به فرایند اسمبل کردن جهت تشکیل ماتریس سفتی کل نیازی نیست. اساس این روش فرم ضعیف محلی و درون‌یابی بوده که در تحلیل انجام شده از تقریب حداقل مربعات متحرک یا MLS به عنوان تابع درون-یاب استفاده شده است.

آتلوری و شن [۴،۳] با توجه به توابع آزمون مختلفی که در روش باقی‌مانده وزنی استفاده می‌شود، این روش بدون مش را به شش دسته از MLPG1 تا MLPG6 تقسیم کرده‌اند. در تحلیل حاضر، تابع آزمون مشابه تابع میدان انتخاب شده که MLPG6 یا روش بدون المان محلی گلرکین نامیده می‌شود. پوسته استوانه‌ای مورد نظر در این تحلیل از مواد هدفمند یا FGM تشکیل شده است، که مواد کامپوزیتی با ریز ساختار ناهمگن بوده و خواص مکانیکی آنها بطور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. این مواد اولین بار در سال ۱۹۸۴ توسط دانشمندان علم مواد در ژاپن معرفی شد [۶،۵]. نوع رایج آن ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز بوده که در آن تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوسته می‌باشد؛ به گونه‌ای که یک سطح از جنس سرامیک خالص و یک سطح فلز خالص است و بین دو سطح ترکیب پیوسته‌ای از هر دو می‌باشد.

در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای هدفمند در شرایط مرزی مختلف، با استفاده از روش بدون المان محلی بتروف گلرکین بررسی شده است. معادلات میدان جایجایی در روش حاضر، بر مبنای تئوری دائل و فرضیه تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده‌اند. معادلات دائل بیش از هر مجموعه دیگری از معادلات پوسته استوانه‌ای، اساس اغلب تحلیل‌ها در مقالات را تشکیل می‌دهد [۷].

## ۲- معادلات پوسته استوانه‌ای

یک پوسته استوانه‌ای جدار نازک به طول  $L$ ، ضخامت  $h$  و شعاع متوسط  $R$  (شعاع پیش از تغییر شکل) در نظر گرفته

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \psi_x \\ \psi_\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

کاربرد مواد FGM به طور خاص در محیط‌های با گرادیان دمایی بالاست و عموماً این مواد از ترکیب یک سرامیک با قابلیت‌های خاص در دماهای بالا و یک فلز با خواص مکانیکی مطلوب ساخته می‌شوند.

پوسته ساخته شده از ترکیب پیوسته سرامیک و فلز در نظر گرفته می‌شود، خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد (رابطه ۸).

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + E_{cm} V_f(z), E_{cm} = E_c - E_m \\ \nu(z) &= \nu_m + \nu_{cm} V_f(z), \nu_{cm} = \nu_c - \nu_m \\ \rho(z) &= \rho_m + \rho_{cm} V_f(z), \rho_{cm} = \rho_c - \rho_m \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن اندیس‌های  $m$  و  $c$  خواص مربوط به فلز و سرامیک را نشان می‌دهند و  $V_f(z)$  تابع توزیع کسر حجمی توانی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_f(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N \quad (9)$$

که مقدار  $N$  می‌تواند نشان‌دهنده پروفیل تغییرات مواد در راستای ضخامت باشد. به عنوان مثال  $N=0$  و یا  $N=\infty$  نشان‌دهنده پوسته ایزوتروپیک ساخته شده از سرامیک و یا فلز می‌باشند. این مواد تحمل حرارتی بالایی دارند و نمی‌توان از ارتباط بین دما و خواص مکانیکی صرف‌نظر کرد.  $P_i$  به عنوان خاصیت مکانیکی ماده به صورت تابعی از دما  $[10]$  بیان خواهد شد (رابطه ۱۰).

$$P_i = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (10)$$

خواص مکانیکی مواد تشکیل‌دهنده یکی از انواع مواد هدفمند

داخلی بر حسب نیروها و ممان‌ها بر واحد طول لبه‌ای المان پوسته بیان شوند. نیروها و گشتاورها به وسیله معادلات زیر با تنش‌های داخلی رابطه دارند.

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \\ Q_{xx} \\ Q_{\theta\theta} \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{x\theta} \\ k_{xx} \\ k_{\theta\theta} \\ k_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

که ماتریس  $D$  به صورت زیر است:

$$[D] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{21} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{12} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A'_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A'_{55} \end{bmatrix} \quad (4)$$

که در آن  $A'_{55} = KA'_{55}$ ،  $A'_{44} = KA'_{44}$  و  $K$  ضریب تصحیح می‌باشند. برای یک پوسته استوانه‌ای هدفمند خواهیم داشت [۹]:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (5)$$

که  $Q_{ij}$ ها به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{1 - \nu(z)^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \end{aligned} \quad (6)$$

کرنش‌ها و انحناها در سطح میانی (تغییر شکل‌ها) در پوسته‌های استوانه‌ای با روابط (۷) بیان می‌شوند.

### ۳- مواد هدفمند

مواد هدفمند یا FGM مواد کامپوزیتی هستند که از دیدگاه میکروسکوپی غیرهمگن بوده و خصوصیات مکانیکی آن به طور محسوس و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این امر با تغییر ترکیب ماده FGM رخ می‌دهد که آن هم از تغییر پیوسته در کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده ناشی می‌شود.

در جدول ۱ ارایه شده است [۱۱].

$$A(x) = [\omega(x-x_1)q(x_1), \dots, \omega(x-x_n)q(x_n)] \quad (16)$$

پس  $b(x)$  از رابطه‌ی (۱۴) بدست می‌آید که با جایگذاری آن در رابطه (۱۱) خواهیم داشت:

$$v^h(x) = \sum_{l=1}^n \Phi_l(x) v_l \quad (17)$$

که در آن تابع شکل  $\Phi_l(x)$  به صورت زیر است:

$$\Phi_l(x) = q^T(x) B^{-1}(x) q_l(x) \omega(x-x_l) \quad (18)$$

توابع وزن نقش مهمی را در روش‌های بدون مش ایفا می‌کنند. در این مقاله تابع اسپیلاین درجه ۳ به عنوان تابع وزن در نظر گرفته شده که تابعی از  $d_w$  یا شعاع دامنه تعریف شده برای تقریب می‌باشد. خواهیم داشت:

$$\omega(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3, & s \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3, & \frac{1}{2} < s \leq 1, s = \frac{|x-x_l|}{d_w} \\ 0, & s > 1 \end{cases} \quad (19)$$

در روش بدون المان محلی پتروف گلرکین معمولاً برای رسیدن به فرم ضعیف از روش باقی‌مانده وزنی استفاده می‌شود. در صورتی که تابع آزمون در این روش مشابه تابع میدان باشد، نوع ششم یا روش بدون المان محلی گلرکین را خواهیم داشت.

## ۵- حل معادلات میدان

در این مقاله روش بدون المان محلی گلرکین بکار گرفته شده و در فرمول‌بندی آن به جای استفاده از روش باقی‌مانده وزنی از فرم تغییرات در هر زیردامنه استفاده شده و فرم تغییرات در زیردامنه‌ای حول هر گره انتگرال‌گیری می‌شود. همچنین متغیرهای میدان برای یک پوسته استوانه‌ای را با اعمال روش جداسازی، می‌توان به صورت توابعی از مدهای محیطی و محوری در نظر گرفت [۱۲]. یعنی می‌توان نشان داد که مؤلفه‌های میدان جابجایی به صورت روابط (۲۰) قابل تعریفاند؛ که در آن مؤلفه‌های میدان جابجایی در سمت راست تساوی با حروف بزرگ، توابعی از مدهای محوری هستند و  $n$  شماره مد محیطی است.

## ۴- تقریب حداقل مربعات متحرک و روش MLPG

$\Omega_x$  دامنه تعریف تقریب برای تابع میدان جابجایی در گره  $x$  می‌باشد که بر روی دامنه مسأله واقع شده است. برای تقریب‌زدن توزیع تابع  $v$  در  $\Omega_x$  برای تعداد نود  $(x_l)$  هایی که در این زیردامنه واقع شده‌اند، MLS به جای  $v$ ،  $v^h(x)$  را به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌کند:

$$v^h(x) = \sum_{l=1}^m q_l(x) b_l(x) = q^T(x) b(x) \quad (11)$$

که  $q^T(x)$  شامل پایه‌های تک جمله‌ای  $m$  تعداد توابع پایه، و همچنین  $b(x)$  برداری شامل ضرایب مجهول می‌باشند. به عنوان مثال در مسائل یک بعدی  $q^T(x)$  می‌تواند به صورت رابطه (۱۲) باشد:

$$q^T = [1, x, x^2, x^3], m = 4 \quad (12)$$

بردار  $b(x)$  با می‌نیم کردن نرم  $L_2$ ، به صورت رابطه (۱۳) بدست می‌آید:

$$\Gamma = \sum_{l=1}^n \omega(x-x_l) [q^T(x_l) b(x) - v_l]^2 \quad (13)$$

که در آن  $\omega(x-x_l)$  یا  $\omega(x_l)$  تابع وزن نسبت به گره  $I$  ام است که همواره برای تمام  $x$ هایی که در  $\Omega_x$  واقع بوده  $\omega(x_l) > 0$  خواهد بود؛  $n$  تعداد گره‌های موجود در زیردامنه مذکور و  $v_l$  مقادیر گره‌ای می‌باشند. حداقل کردن  $\Gamma$  منجر به رابطه خطی (۱۴) خواهد شد.

$$B(x) b(x) = A(x) v \quad (14)$$

جدول ۱ خواص مکانیکی مواد تشکیل دهنده پوسته FGM [۱۱]

دی اکسید زیرکونیوم		فولاد بدون زنگ		
$E(N/m^2)$	$\nu$	$E(N/m^2)$	$\nu$	
.	.	.	.	$P_{-1}$
$201.04 \times 10^9$	$0.3262$	$244.27 \times 10^9$	$0.288$	$P_0$
$37.08 \times 10^4$	$-2 \times 10^{-4}$	$-1.37 \times 10^{-3}$	$1/13 \times 10^{-4}$	$P_1$
$-6/53 \times 10^{-7}$	$3/8 \times 10^{-7}$	$1/21 \times 10^{-6}$	.	$P_2$
.	.	$-3/86$	.	$P_3$
$8166 (kg/m^3)$		$5700 (kg/m^3)$		$\rho$

که در آن:

$$B(x) = \sum_{l=1}^n \omega(x-x_l) q(x_l) q^T(x_l) \quad (15)$$

$$X = [u \quad v \quad w \quad \psi_x \quad \psi_\theta]^T \quad (24)$$

ماتریس سفتی  $[K]$  و ماتریس جرم  $[M]$  نیز به صورت رابطه (25) هستند:

$$[K] = \frac{1}{2} \pi R \iint_{\Omega_s} (B^T DB) dx d\theta$$

$$[K_g] = \frac{1}{2} \pi R \iint_{\Omega_s} (N^T IN) dx d\theta \quad (25)$$

ماتریس D طبق معادله (4) و سایر ماتریس‌ها به صورت زیر قابل تعریف‌اند:

$$[B] = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{R} \Phi_I & \frac{1}{R} \Phi_I & 0 & 0 \\ -\frac{n}{R} \Phi_I & \Phi_{I,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n}{R} \Phi_I \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{n}{R} \Phi_I & \Phi_{I,x} \\ 0 & 0 & \Phi_{I,x} & \Phi_I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \Phi_I & -\frac{n}{R} \Phi_I & 0 & \Phi_I \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \Phi_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_I \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

در معادلات فوق  $\Phi_I$  همان تابع شکل MLS می‌باشد. جایگذاری ماتریس‌های فوق در معادله (23) و حل یک مسأله مقدار ویژه به صورت یک‌بعدی، منجر به یافتن فرکانس‌های طبیعی خواهند شد. برای حل معادلات (25) از یک انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود که در این مقاله تربیع گاوسی بکار گرفته شده است. برای هر گره  $(x_i)$  به یک دامنه انتگرال‌گیری برای بکارگیری تربیع گاوسی نیاز است و در هر نقطه گاوسی  $(x_0)$  دامنه درونبایی مشخص می‌شود (شکل 2).

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= U(x) \cos(n\theta) \sin(\omega t) \\ v(x, \theta, t) &= V(x) \sin(n\theta) \sin(\omega t) \\ w(x, \theta, t) &= W(x) \cos(n\theta) \sin(\omega t) \\ \psi_x(x, \theta, t) &= \Psi_x(x) \cos(n\theta) \sin(\omega t) \\ \psi_\theta(x, \theta, t) &= \Psi_\theta(x) \sin(n\theta) \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (20)$$

فرم تغییرات معادلات دائل، بر حسب جایجایی‌ها را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_K(u, v, w, \psi_x, \psi_\theta) + \Pi_M(u, v, w, \psi_x, \psi_\theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_s} \left[ \left( A_{11} u_{,x} + \frac{1}{R} A_{12} (v_{,\theta} + w) \right) u_{,x} \right. \\ &\quad + \left. \left( A_{12} u_{,x} + \frac{1}{R} A_{22} (v_{,\theta} + w) \right) \frac{1}{R} (v_{,\theta} + w) \right. \\ &\quad + A_{66} \left( \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \right)^2 + 2 \left[ B_{11} u_{,x} + \frac{B_{12}}{R} (v_{,\theta} + w) \right] \psi_{x,x} \\ &\quad + 2 \left[ B_{12} u_{,x} + \frac{B_{22}}{R} (v_{,\theta} + w) \right] \psi_{\theta,x} \\ &\quad + 2 B_{66} \left( \frac{1}{R} u_{,\theta} + v_{,x} \right) \left( \frac{1}{R} \psi_{x,\theta} + \psi_{\theta,x} \right) \\ &\quad + \left[ D_{11} \psi_{x,x} + \frac{D_{12}}{R} \psi_{\theta,x} \right] \psi_{x,x} \\ &\quad + \frac{1}{R} \left[ D_{12} \psi_{x,x} + \frac{D_{22}}{R} \psi_{\theta,x} \right] \psi_{\theta,x} \\ &\quad + D_{66} \left( \frac{1}{R} \psi_{x,\theta} + \psi_{\theta,x} \right)^2 + A_{44} (\psi_x + w_{,x})^2 \\ &\quad \left. + A_{55} \left( \frac{w_{,\theta}}{R} - \frac{v}{R} + \psi_\theta \right)^2 \right] d\Omega_s dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_M(u, v, w, \psi_x, \psi_\theta) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_s} \left[ I_1 \left[ (\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2 \right] \right. \\ &\quad + I_2 \left[ (\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{\psi}_x)^2 + (\dot{\psi}_\theta)^2 \right] \\ &\quad \left. + I_3 \left[ (\dot{\psi}_x)^2 + (\dot{\psi}_\theta)^2 \right] \right] d\Omega_s dt \end{aligned} \quad (21)$$

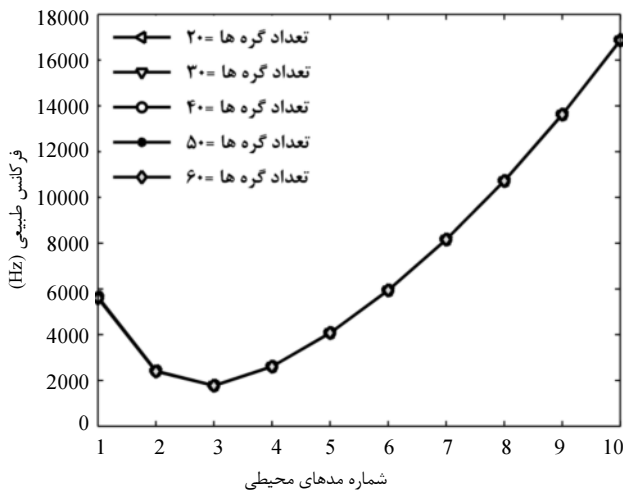
با بکارگیری روش جداسازی فوق و جایگذاری آنها در فرم تغییرات معادلات پوسته خواهیم داشت:

$$\Pi = \frac{1}{2} \pi R \iint_{\Omega_s} (B^T DB + N^T IN) dx d\theta \quad (22)$$

و سیستم معادلات به صورت رابطه (23) خواهد بود.

$$([K] - \omega^2 [M]) \{X\} = 0 \quad (23)$$

که بردار  $X$  برداری شامل جایجایی گره‌هاست و به صورت رابطه (24) تعریف می‌شود.



شکل ۳ همگرایی فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM با شرایط مرزی دو سر گیردار

$$\begin{aligned}
 u(x, \theta, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(n\theta) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) e^{i\omega t} \\
 v(x, \theta, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) e^{i\omega t} \\
 w(x, \theta, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) e^{i\omega t} \\
 \psi_x(x, \theta, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \Psi_{x_{mn}} \cos(n\theta) \cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right) e^{i\omega t} \\
 \psi_\theta(x, \theta, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \Psi_{\theta_{mn}} \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right) e^{i\omega t} \quad (32)
 \end{aligned}$$

که در آن  $n, m$  شماره مدهای محوری و محیطی هستند. بنابراین در شرایطی که دو انتها روی تکیه‌گاه ساده قرار گرفته‌اند، با جایگذاری روابط (۳۲) در معادلات حاکم، معادله‌ای به فرم ساده  $\{X\} = 0$  به دست خواهد آمد که حل آن در واقع همان حل دقیق مسأله خواهد بود. درایه‌های ماتریس‌های جرم و سفتی در پیوست ارائه شده‌اند. در شکل ۴، منحنی فرکانس‌های طبیعی برحسب مدهای محیطی برای پوسته استوانه‌ای FGM در دمای اتاق، طبق تئوری دابل با روش MLPG و همچنین منحنی حاصل از حل دقیق آن نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود نتایج به‌دست آمده مطابقت خوبی با هم دارند. در شکل ۵ منحنی فرکانس‌های طبیعی برحسب مدهای محیطی برای پوسته استوانه‌ای FGM، با شرایط مرزی دوسر گیردار، نسبت  $L/R = 10$  و در دمای اتاق، به ازای مقادیر مختلف توان در رابطه قانون توان، نشان

در روش بکار برده شده دامنه انتگرالگیری و دامنه تابع آزمون یکسان می‌باشند.

### ۶- شرایط مرزی

در شرایط مختلف انتهای پوسته به صورت تکیه‌گاه ساده، بسته یا گیردار، و آزاد خواهیم داشت:

دو انتها ساده:

$$v = w = \psi_\theta = M_{xx} = N_{xx} = 0, at : x = 0, x = L \quad (29)$$

دو انتها گیردار:

$$u = v = w = \psi_x = \psi_\theta = 0, at : x = 0, x = L \quad (30)$$

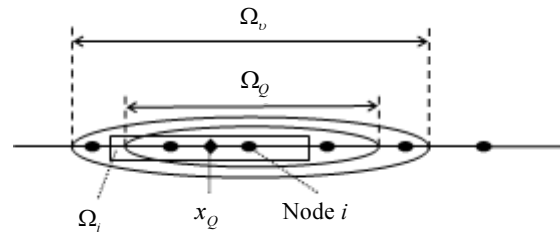
در  $x=0$  بسته و انتهای دیگر آزاد:

$$\begin{aligned}
 u = v = w = \psi_x = \psi_\theta = 0, at : x = 0 \\
 N_{xx} = M_{xx} = N_{x\theta} = M_{x\theta} = Q_x = 0, at : x = L \quad (31)
 \end{aligned}$$

### ۷- بحث و نتیجه‌گیری

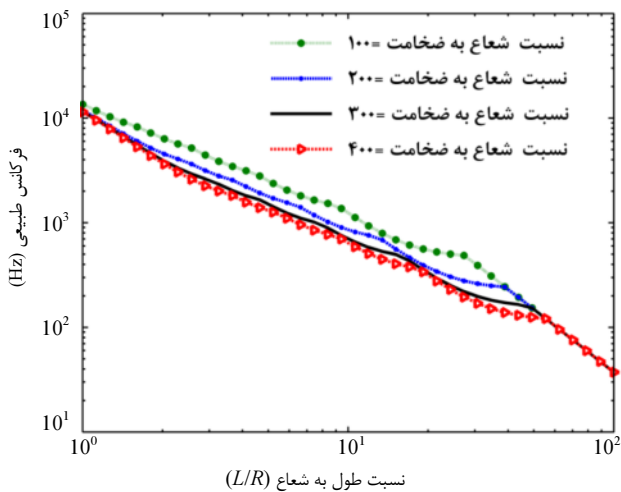
مقادیر استاندارد مدول یانگ، چگالی و ضریب پواسون برای پوسته‌ای متشکل از فولاد بدون زنگ و دی اکسید زیرکونیوم در جدول ۱ فهرست شده است. در ادامه نمودارهایی به منظور تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای FGM در دمای اتاق ارائه شده است.

در شکل ۳، همگرایی فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای FGM با شاخص کسر حجمی  $N=10$  و شرایط مرزی دو سر گیردار، در منحنی فرکانس‌های طبیعی برحسب مدهای محیطی مختلف نشان داده شده است. دقت و سودمندی روش بدون مش محلی پتروف گلرکین در تحلیل ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری با مقایسه با حل دقیق آن بررسی شده است. قابل ذکر است که در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده مفصلی، پاسخ زیر در معادلات دیفرانسیل (۲) صدق می‌کند.

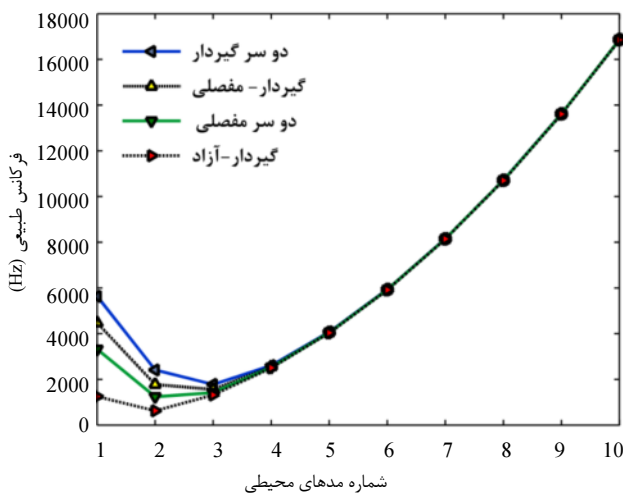


شکل ۲ دامنه تابع آزمون  $\Omega_v$ ، دامنه انتگرالگیری  $\Omega_0$  برای گره  $i$ ، دامنه درونیابی  $\Omega_i$  برای نقطه گاوسی  $x_0$

نتایج نشان می‌دهد که کاهش ضخامت یا افزایش نسبت  $R/h$  به طور قابل ملاحظه‌ای موجب کاهش فرکانس طبیعی خواهد شد. تأثیر شرایط مرزی روی رفتار ارتعاشاتی پوسته‌های استوانه‌ای فولاد بدون زنگ/دی‌اکسید زیرکونیوم با شاخص حجمی  $N=10$ ، در شکل ۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، پوسته با شرایط مرزی دو سر گیردار فرکانس طبیعی بیشتری نسبت به پوسته استوانه‌ای با شرایط دیگر دارد. همچنین پوسته‌ای که یک سر آن آزاد و یک سر گیردار در نظر گرفته شده دارای کمترین فرکانس طبیعی است. شکل مودهای ارتعاشی اول تا سوم پوسته استوانه‌ای FGM دو سر گیردار با نسبت  $R/h=100$  و  $L/R=5$  در شکل ۸ نشان داده شده است.

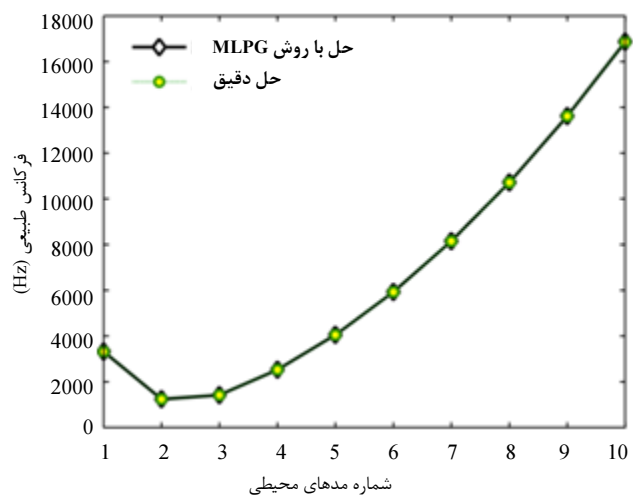


شکل ۶ تأثیر ضخامت پوسته استوانه‌ای بر رفتار ارتعاشاتی پوسته

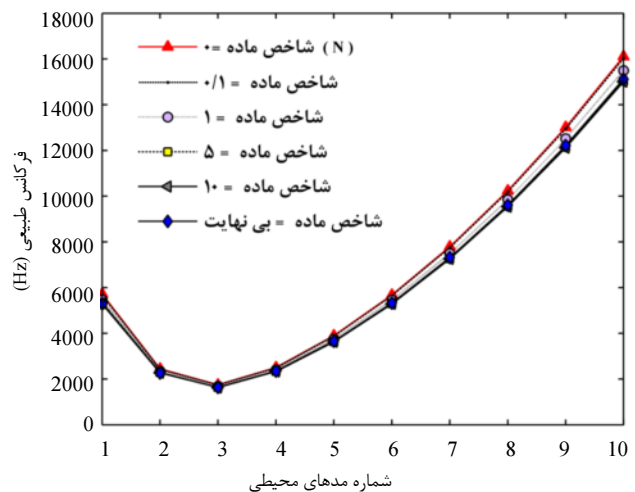


شکل ۷ تأثیر شرایط مرزی روی رفتار ارتعاشاتی پوسته استوانه‌ای فولاد بدون زنگ/دی‌اکسید زیرکونیوم ( $L/R=10$ )

داده شده است. منحنی مربوط به مقادیر مختلف  $N$  بین دو محدوده فلز خالص و سرامیک خالص، قرار گرفته‌اند. این امر به دلیل تغییر خواص مکانیکی پوسته FGM از پوسته سرامیکی به فلزی است. شکل ۶، تأثیر ضخامت پوسته استوانه‌ای را روی منحنی‌های فرکانس طبیعی - نسبت طول به شعاع استوانه، برای پوسته استوانه‌ای فولاد بدون زنگ/دی‌اکسید زیرکونیوم با شاخص کسر حجمی  $N=10$  که تحت بارگذاری محوری قرار گرفته است، را نشان می‌دهد. مقادیر مختلف  $R/h=100$  تا  $R/h=400$  در این نمودار مقایسه شده‌اند.



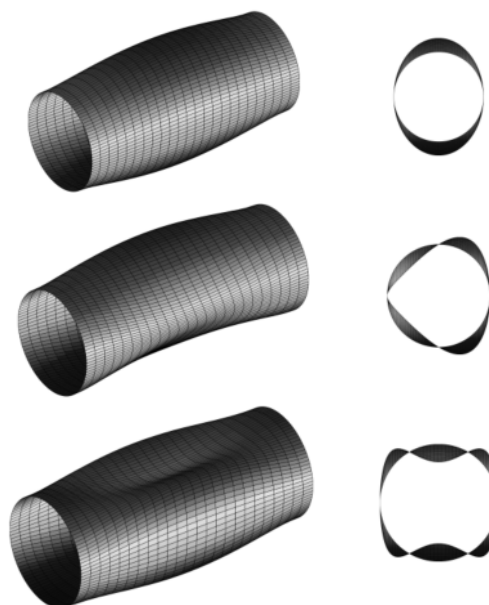
شکل ۴ منحنی فرکانس‌های طبیعی برحسب مدهای محیطی برای پوسته استوانه‌ای FGM با روش MLPG و مقایسه با حل دقیق



شکل ۵ منحنی فرکانس‌های طبیعی برحسب مدهای محیطی برای پوسته استوانه‌ای FGM، به ازای مقادیر مختلف توان در رابطه قانون توان

## ۸- جمع‌بندی

به طور خلاصه می‌توان گفت نتایج بدست آمده به خوبی گواه بر همگرایی، دقت و سرعت بالا در روش بدون المان محلی پتروف گلرکین برای تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای FGM است.



شکل ۸ شکل موده‌های ارتعاشی اول تا سوم پوسته استوانه‌ای FGM با شرایط مرزی دو سر گیردار

از مزایای روش MLPG این است می‌تواند همه روش‌های بدون المان دیگر را که بر روی روابط کلی پایه‌گذاری شده‌اند، در بر گیرد و دیگر اینکه به فرایند اسمبل کردن جهت تشکیل ماتریس سفتی کل همانند آنچه که در روش المان محدود وجود داشت، نیازی نیست. همان طور که ملاحظه می‌شود با تغییر کسر حجمی خواص پوسته استوانه‌ای از سرامیک به فلز تغییر می‌کند. به گونه‌ای که یک سطح از جنس سرامیک خالص ( $N=0$ ) و یک سطح فلز خالص ( $N=\infty$ ) است و بین دو سطح ترکیب پیوسته‌ای از هر دو می‌باشد که همچون پارامترهای هندسی بر رفتار ارتعاشاتی پوسته اثر قابل توجهی دارند. کاهش ضخامت یا افزایش نسبت  $R/h$  به طور قابل ملاحظه‌ای موجب کاهش فرکانس طبیعی خواهد شد. اثر شرایط مرزی نیز روی رفتار ارتعاشاتی پوسته‌های استوانه‌ای محسوس می‌باشد طوری که پوسته با شرایط مرزی دو انتها ساده مفصلی بالاترین مقدار فرکانس را خواهد داشت.

## ۹- پیوست

در حل دقیق، ماتریس‌های  $M$  و  $K$  که از جایگذاری معادلات (۳۲) در معادلات حاکم بدست می‌آیند به صورت زیر خواهند بود.

ماتریس جرم:

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ I_2 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

ماتریس سفتی:

$$[K] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = -A_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right) - A_{66} \left( \frac{n^2}{R^2} \right)$$

$$L_{12} = A_{12} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) + A_{66} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{13} = A_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{14} = -B_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - B_{66} \left( \frac{n^2}{R^2} \right)$$

$$L_{15} = B_{12} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) + B_{66} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{21} = A_{12} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) + A_{66} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{22} = -A_{66} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - A_{22} \left( \frac{n^2}{R^2} \right) - A'_{44} \left( \frac{1}{R^2} \right)$$

$$L_{23} = -A_{22} \left( \frac{1}{R^2} \right) n - A'_{44} \left( \frac{1}{R^2} \right) n$$

$$L_{24} = B_{12} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) + B_{66} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{25} = -B_{66} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - B_{22} \left( \frac{n^2}{R^2} \right) + A'_{44} \left( \frac{1}{R} \right)$$

$$L_{31} = A_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{32} = -A_{22} \left( \frac{1}{R^2} \right) n - A'_{44} \left( \frac{1}{R^2} \right) n$$

$$L_{33} = -A'_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - A'_{44} \left( \frac{n^2}{R^2} \right) - A'_{22} \left( \frac{1}{R^2} \right)$$



- [3] Atluri S.N., Shen S.P., "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods", *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 3, No. 1, 2002, pp. 11-51.
- [4] Atluri S., Zhu T., "A New Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", *Computational Mechanics*, Vol. 22, No. 2, 1998, pp. 117-27.
- [5] Koizumi M., Niino M., "Overview of FGM Research in Japan", *MRS Bulletin*, Vol 10, No. 1, 1995, pp. 19-21.
- [6] Koizumi M., "The Concept of FGM" *Ceramic Transactions, Functionally Graded Materials*, Vol. 34, 1990, pp. 3-10.
- [7] Donnell L.H., "Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion", *NACA Technical Report 479*, 1933.
- [8] Toorani M.H., Lakis A.A., "General Equations of Anisotropic Plates and Shells Including Transverse Shear Deformations, Rotary Inertia and Initial Curvature Effects", *Journal of Sounds and Vibration*, Vol. 237, No. 4, 2000, pp. 561-615.
- [9] Naeem M.N., *Prediction of natural frequencies for functionally graded cylindrical shells*, PhD Thesis, UMIST, UK, 2004.
- [10] Touloukian Y.S., *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*, New York, Macmillian, 2004.
- [11] Pradhan S.C, Loy C.T, Lam K.Y, Reddy J.N., "Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells under Various Boundary Conditions", *Applied Acoustics*, Vol. 61, No. 1, 2000, pp. 111-129.
- [12] Ansari R., Darvizeh M., "Prediction of Dynamic Behavior of FGM Shells under Arbitrary Boundary Conditions", *Composite Structures*, Vol. 85, No. 4, 2008, pp. 284-292.

$$L_{34} = -A'_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right) + B_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{35} = -B_{22} \left( \frac{n}{R^2} \right) + A'_{44} \left( \frac{n}{R} \right)$$

$$L_{41} = -B_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - B_{66} \left( \frac{n^2}{R^2} \right)$$

$$L_{42} = B_{12} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) + B_{66} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{43} = -A'_{55} \left( \frac{m\pi}{L} \right) + B_{12} \left( \frac{1}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{44} = -D_{11} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - D_{66} \left( \frac{n^2}{R^2} \right) - A'_{55}$$

$$L_{45} = D_{12} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) + D_{66} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{51} = B_{12} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) + B_{66} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{52} = -B_{66} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - B_{22} \left( \frac{n^2}{R^2} \right) + A'_{44} \left( \frac{1}{R} \right)$$

$$L_{53} = -B_{22} \left( \frac{n}{R^2} \right) + A'_{44} \left( \frac{n}{R} \right)$$

$$L_{54} = D_{12} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right) + D_{66} \left( \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \right)$$

$$L_{55} = -D_{66} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - D_{22} \left( \frac{n^2}{R^2} \right) - A'_{44}$$

#### ۱۰- مراجع

- [1] Liew K.M., Zhao X., Ferreira J.M.A., "A Review of Meshless Methods for Laminated and Functionally Graded Plates and Shells", *Composite Structures*, Vol. 93, No. 8, 2011, pp. 2031-2041.
- [2] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., "Element-free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, No. 2, 1994, pp. 229-256.