



## ناحیه بندی مدل هندسی با استفاده از تقریب دیاگرام ورونوی و تشکیل نواحی فازی

امیررضا میان درهویی<sup>1</sup>، خلیل خلیلی<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند

\* بیرجند، صندوق پستی 97175/615، kkhallili@birjand.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 مرداد 1393

پذیرش: 19 شهریور 1393

ارائه در سایت: 28 مهر 1393

کلید واژگان:

ناحیه بندی مش

الگوریتم تکرارپذیر

دسته بندی لوید

تقریب دیاگرام ورونوی

نواحی فازی

### چکیده

مسئله نواحیه بندی و افراز مدل های سه بعدی همواره به عنوان یکی از کلیدی ترین ابزارهای مورد استفاده در بسیاری از کاربردهای طراحی به کمک کامپیوتر و گرافیک کامپیوتری مطرح بوده است. یکی از پرکاربردترین روش های نواحیه بندی که امکان افراز مدل به صورت بهینه ی سراسری را فراهم می کند، الگوریتم تکرارپذیر است. الگوریتم تکرارپذیر، روشی پارامتریک است که براساس الگوریتم لوید و تشکیل دیاگرام ورونوی بر روی داده های ابر نقاط، مدل را به صورت بهینه نواحیه بندی می کند. مهم ترین عیب این روش که کاربرد آن را محدود می کند، زمان بر بودن آن است. در این مقاله، با بهره گیری از مفهوم نواحیه بندی فازی، راه کاری جهت تعیین تعداد نواحی مورد نیاز برای افراز مدل و در نتیجه نواحیه بندی به صورت غیرپارامتریک و بدون نیاز به تنظیمات اولیه ی کاربر پیشنهاد شده است. همچنین با استفاده از تقریب دیاگرام ورونوی و تشکیل زیرناحیه های فازی بر روی مدل روشی جدید برای بدست آوردن نواحیه بندی بهینه در زمانی کوتاه تر نسبت به سایر الگوریتم های تکرارپذیر ارائه می شود. روش پیشنهادی جهت اعتبار سنجی بر روی مدلی استاندارد پیاده سازی شده است. مشاهده می گردد که نتایج بدست آمده نسبت به نتایج حاصل از الگوریتم تکرارپذیر بهبود قابل ملاحظه ای دارد که نشان دهنده ی کارایی این روش در نواحیه بندی مدل های سه بعدی است.

## Geometric Model Segmentation using Approximate Voronoi Diagram and Fuzzy Regions Construction

Amir reza Miandarhoie<sup>1</sup>, Khalil Khalili<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Birjand University, Birjand, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Birjand University, Birjand, Iran

\* P.O.B. 97175/615 Birjand, Iran, kkhallili@birjand.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 29 July 2014  
Accepted 10 September 2014  
Available Online 20 October 2014

#### Keywords:

Mesh segmentation  
Iterative algorithm  
Lloyd clustering  
Approximate Voronoi diagram  
Fuzzy regions

### ABSTRACT

Mesh segmentation and partitioning of 3D models have always been significant as one of the most structural tools used in many applications of CAD and computer graphics. One of the most versatile of these algorithms, which is capable of optimum segmentation of model, is the iterative algorithm. It is a parametric method based on Lloyd algorithm, which segments the model in an optimized way by plotting the Voronoi diagram through the points cloud data. The main disadvantage of this method is the time-consuming problem which limits its application. In this paper, by employing the nature of fuzzy segmentation a solution has been proposed to specify the number of regions required for model's partitioning and to carry out the nonparametric segmentation without the need for user's initial settings. Additionally, utilizing the approximate Voronoi diagram and fuzzy regions construction, a novel method for obtaining the optimized segmentation in a shorter time interval in comparison with other iterative algorithms has been presented. The proposed method has been implemented in a standard model for validation. It has been observed that the obtained results have remarkable improvements relative to the results from the iterative algorithm, which demonstrates the efficiency of this method in segmentation of 3D models.

### 1- مقدمه

مدل<sup>2</sup> [2]، تطابق اشکال<sup>3</sup> [3]، تبدیل پیوسته اشکال به یکدیگر توسط تبدیلات هم ریخت<sup>4</sup> [3]، مدل سازی گرافیکی قطعه با قابلیت تفکیک پذیری چندگانه به منظور فراهم کردن امکان نمایش درجات مختلفی از جزئیات با

ناحیه بندی مش و یا افراز مش در بسیاری از الگوریتم های مورد استفاده در مدل سازی هندسی و گرافیک کامپیوتری به جزئی اساسی تبدیل شده است. دسته بندی مش در کاربردهایی همچون پارامتری کردن<sup>1</sup> [1]، نگاشت طرح بر

2- Texture mapping  
3- Shape matching  
4- Morphing

1- Parameterization

Please cite this article using:

A. r. Miandarhoie, Kh. Khalili, Geometric Model Segmentation using Approximate Voronoi Diagram and Fuzzy Regions Construction, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 127-136, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. r. Miandarhoie, Kh. Khalili, Geometric Model Segmentation using Approximate Voronoi Diagram and Fuzzy Regions Construction, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 127-136, 2015 (In Persian)

استفاده از رویه‌های زیر لایه‌دار<sup>1</sup> [4]، متراکم‌سازی داده‌ها<sup>2</sup> [5]، اصلاح مش، بررسی تصادم<sup>3</sup> [6]، استخراج منحنی ساختاری<sup>4</sup> [7] و متحرک‌سازی تصاویر [5] مورد استفاده قرار می‌گیرد.

روش‌های ناحیه‌بندی مدل مش‌بندی شده و یا در حالت کلی‌تر آن، ناحیه‌بندی شکل‌های هندسی را می‌توان از نقطه‌نظر نوع نگاه به مدل اولیه، روش حل مسئله، زمینه‌ی کاربردی داده‌های خروجی و معیار هندسی اندازه‌گیری جهت تخصیص المان‌ها به نواحی مناسب، دسته‌بندی کرد.

از آنجا که در الگوریتم‌های موجود، برای ناحیه‌بندی مدل سه بعدی از معیار واحدی استفاده نمی‌شود، جهت مقایسه‌ی خروجی روش‌های مختلف، مسئله‌ی دسته‌بندی در قالب مسئله‌ی بهینه‌سازی مطرح می‌گردد. در تعریف مسئله بهینه‌سازی برای تعیین انرژی شبکه‌ی مش از معیاراندازه‌گیری‌ای که افراز براساس آن انجام می‌گیرد، استفاده می‌شود. هر افرازی که در اثر آن انرژی شبکه مش کاهش بیشتری داشته باشد، افراز مناسب‌تری خواهد بود. الگوریتم تکرارپذیر که روشی پارامتریک است از طریق تغییر محل ناحیه‌های افراز شده، در هر مرحله به دنبال کاهش انرژی شبکه‌ی مش و در نتیجه بدست آوردن جواب بهینه است.

شافمن و همکاران از الگوریتم ناحیه‌بندی تکرارپذیر برای افراز مدل‌های مجزا، جهت سهولت در محاسبه‌ی نگاشت هم‌ریختی بین مدل‌های متفاوت ولی دارای توپولوژی یکسان استفاده کرده‌اند [8].

اشتاینر به صورت همزمان ناحیه‌بندی و بازیابی مدل را با استفاده از سطوح تخت به صورت بهینه انجام داده‌است [9]. منظور از جواب بهینه، حالتی است که مدل با کمترین تعداد صفحات و همچنین کمترین خطای تقریب، بازسازی شود. المان نماینده‌ی هر ناحیه، صفحه‌ی تختی است که برای تقریب زدن و بازیابی مدل استفاده می‌شود. برای کاهش خطای تقریب از دو معیار اندازه‌گیری خطا استفاده شده‌است. معیار اول براساس نرم فاصله اقلیدسی ( $L^2$ ) و معیار اندازه‌گیری دوم، نرم  $L^{2.1}$  است، که هم از نظر سادگی محاسبات و هم نتایج بدست آمده نسبت به نرم  $L^2$  عملکرد بهتری دارد. نرم  $L^{2.1}$  با استفاده از فرمول‌بندی نرم اقلیدسی و بر روی میدان بردارهای نرمال وجوه محاسبه می‌شود. از آنجا که بردارهای نرمال پایه و اساس سیستم‌های بنیایی هستند، بنابراین انتظار می‌رود ناحیه‌های افراز شده در این روش نسبت به روش قبل از نظر ظاهری نتایج بهتری داشته باشند. گرچه روش ارائه شده توسط اشتاینر بسیار موثر است، ولی از آنجا که مدل فقط با صفحات تخت تقریب زده می‌شود، در دسته‌بندی شکل‌های پیچیده و یا در مواقعی که لازم است تعداد بخش‌های افراز شده تا حد امکان محدود باشند، غالباً نتایج نامطلوبی حاصل خواهد شد. به همین جهت کبلت و همکاران با استفاده از مزایای الگوریتم‌های دسته‌بندی تکرارپذیر و انتخاب سطوح پیچیده‌تری همچون کره، استوانه و نوع خاصی از رویه‌های آزاد به عنوان المان‌های تقریب زنده، مدل را بخش‌بندی کرده‌اند [10].

جولیوس با استفاده از الگوریتم تکرارپذیر، مدل را به نواحی قابل گسترش، یعنی نواحی که انحنای گاووسی آنها صفر است، تجزیه کرده‌است [11]. کاستر بدون محاسبه‌ی انحنای و با استفاده از مدل لمبرت<sup>5</sup>، مدل را به نواحی و رویه‌های قابل گسترش دسته‌بندی کرده است [12]. جهت افزایش کارایی الگوریتم و به منظور یافتن المان‌های شاخصه‌ی بهینه از دیاگرام

ورونوی استفاده می‌شود. در دیاگرام ورونوی لازم است در هر مرحله مرکز نواحی به منظور یافتن بهترین موقعیت به روز رسانی شود. از آنجا که نواحی پیوسته است و تغییرات مرکز هر ناحیه می‌بایست بر روی سطح منیفولد اتفاق بیافتد از الگوریتم لوید<sup>6</sup> و روش تکرارپذیر جهت یافتن بهترین المان‌های مینا استفاده شده است.

ونگ و همکاران از نوع جدیدی از الگوریتم تکرارپذیر جهت ناحیه‌بندی مدل و برچسب‌زنی<sup>7</sup> استفاده می‌کنند [13]. در این الگوریتم المان‌های به عنوان یک مجموعه برچسب در نظر گرفته می‌شوند و در هر بار تکرار علاوه بر جذب ویژگی‌های مجموعه‌ی جدید، بخشی از ویژگی‌های مجموعه‌ی قبلی را نیز حفظ می‌کنند.

الگوریتم‌های تکرارپذیر علیرغم دقت بالایی که دارند به دلیل زمان حل نامناسب دارای محدودیت هستند. علت طولانی بودن زمان ناحیه‌بندی ریشه در نحوه‌ی حل مسئله‌ی افراز دارد. همان‌طور که اشاره شد الگوریتم‌های تکرارپذیر برای حل مسئله‌ی افراز از الگوریتم لوید استفاده می‌کنند. به همین دلیل در بخش 2 الگوریتم لوید مورد بررسی قرار گرفته‌است. در بخش 3 و 4 به ترتیب دیاگرام ورونوی و تقریب دیاگرام ورونوی توضیح داده شده است. در بخش‌های بعد نیز روش ناحیه‌بندی با استفاده از تقریب دیاگرام ورونوی ارائه می‌شود.

## 2- الگوریتم لوید

دسته‌بندی مجموعه‌ای از نقاط مجزا، به معنی افراز آنها به نواحی منفصل است، به طوری که فاصله‌ی نقاط مربوط به یک ناحیه نسبت به یکدیگر از فاصله‌ی آنها نسبت به نقاط سایر نواحی کمتر شود. الگوریتم لوید روشی قطعی و مبتنی بر روش تکرار نقطه ثابت است که می‌تواند چنین دسته‌بندی‌ای را ایجاد کند [9]. ایده‌ی کلی الگوریتم لوید که با نام الگوریتم ورونوی تکرارپذیر نیز شناخته می‌شود، بسیار ساده است. در این روش هر دسته با استفاده از یک المان نماینده<sup>8</sup>، که معمولاً مرکز آن دسته است، معرفی می‌شود. در ابتدا  $k$  مرکز تصادفی از فضای داده‌های ورودی به عنوان المان نماینده انتخاب شده و سپس با اختصاص دادن هر داده به نزدیک‌ترین مرکز، دسته‌بندی صورت می‌گیرد. الگوریتم با به روز رسانی المان‌های نماینده و انتخاب مرکز هر ناحیه به عنوان المان نماینده جدید، دوباره ناحیه‌بندی را انجام می‌دهد. این روند تا زمانی که شرط توقف حاصل شود تکرار خواهد شد. در الگوریتم‌های تکرارپذیر جهت کاهش خطای تقریب، پس از انجام ناحیه‌بندی و رسیدن به همگرایی توسط الگوریتم لوید، نواحی مختلف بررسی می‌شوند تا با اضافه کردن المان نماینده‌ی جدید در قسمت‌هایی که میزان خطای تقریب بیش از حد مجاز است، ناحیه‌بندی مجدداً انجام شود. همچنین به منظور جلوگیری از ناحیه‌بندی بیش از حد<sup>9</sup>، نواحی مجاور که قابلیت ترکیب با یکدیگر را دارند، در قالب یک ناحیه‌ی کلی ارائه می‌شوند.

در این روش از آنجا که المان‌های نماینده دائماً در حال تغییر هستند، بنابراین دقت نهایی ناحیه‌بندی، به موقعیت المان‌های اولیه وابسته نیست، ولی تعداد تکرار الگوریتم و در نتیجه زمان حل مسئله کاملاً متناسب با نحوه‌ی توزیع آنها است.

الگوریتم لوید اولین بار در زمینه‌ی مهندسی برق و برای مدولاسیون کد پالس<sup>10</sup> به کار گرفته‌شد و به دلیل سادگی آن به سرعت در سایر زمینه‌ها نیز

6- Lloyd algorithm  
7- Labeling  
8- Proxy element  
9- Over segmentation  
10- Pulse-code modulation (PCM)

1- Multi resolution modeling  
2- Data compression  
3- Collision detection  
4- Skeleton extraction  
5- Lambert model

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - p\| \leq \|x - q\|, \forall q \in S\} \quad (2)$$

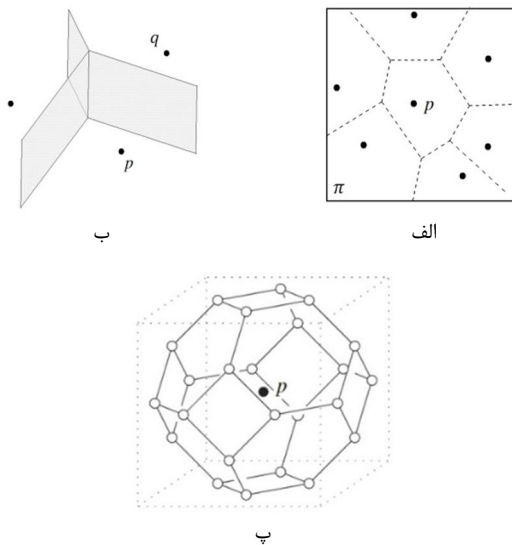
توجه کنید طبق رابطه ی زیر، نیم فضا از نقاط به  $p$  نزدیک تر هستند تا  $q$ :

$$H_{pq} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - p\| \leq \|x - q\|\}. \quad (3)$$

در صورت استفاده از معیار فاصله ی اقلیدسی، از آنجا که ناحیه ی ورونوی برای  $p$  از برخورد نیم فضاهای  $H_{pq}$  برای تمامی  $q \in S - \{p\}$  بدست می آید، در نتیجه  $V_p$  یک چندوجهی محدب می شود (شکل 1- ج). در ناحیه بندی مدل های مورد استفاده در طراحی به کمک کامپوتر حفظ شرایط پیوستگی بسیار حائز اهمیت است، به همین دلیل معیار اندازه گیری اقلیدسی برای ناحیه بندی مدل های سه بعدی، چندان مناسب نیست و بهتر است از معیار اندازه گیری هندسی<sup>6</sup> یا معیار اندازه گیری یکپارچگی استفاده شود. در [21] برای حفظ پیوستگی نواحی از معیار یکپارچگی به صورت مجذور محیط نسبت به مساحت هر ناحیه استفاده شده است. همچنین در [22] از معیار مشابه نسبت مساحت به حجم برای جلوگیری از پیچیده شدن مرز نواحی و پیوسته بودن آنها در ناحیه بندی مفهومی بهره گرفته می شود.

با اینکه عمومی کردن دیاگرام ورونوی برای دسته بندی مواردی غیر از نقطه نیز بسیار پرکاربرد است، ولی در ابعاد بالاتر به دلیل محاسبات سنگین استفاده از آن مشکل می شود. تابع پیچیدگی محاسباتی در فضای  $\mathbb{R}^d$  جهت تشکیل دیاگرام ورونوی برابر با  $O(n^{[d]})$  است، که در آن  $n$  تعداد مش های مدل است. بنابراین با افزایش ابعاد مسئله، ساخت و ذخیره سازی این دیاگرام ها از نظر محاسباتی غیر قابل اجرا خواهد شد [23].

در الگوریتم های تکرارپذیر به دلیل محاسبات سنگین دیاگرام ورونوی در هر مرحله تکرار الگوریتم، روند حل مسئله نسبت به دیگر الگوریتم های ناحیه بندی بسیار طولانی تر است، به همین دلیل برخلاف تحقیقات قبلی که همگی برای ناحیه بندی از دیاگرام ورونوی استفاده می کردند، در این مقاله در ابتدا از تقریب دیاگرام ورونوی برای انتخاب مکان تقریبی المان های نماینده استفاده شده است و سپس مکان نهایی این المان ها با استفاده از الگوریتم تکرارپذیر به صورت کاملاً بهینه تعیین می شود.



شکل 1 الف) ناحیه بندی صفحه  $\pi$  با استفاده از دیاگرام ورونوی دو بعدی (ب) ناحیه بندی با استفاده از دیاگرام ورونوی در حالت سه بعدی و نحوه ی تشکیل نیم فضاها (پ) چندوجهی محدب حاصل از برخورد نیم فضاها

مورد استفاده قرار گرفت [14]. این روش نسبت به سایر روش هایی که از تکنیک پخش ذرات استفاده می کنند از نوسانات کمتری برخوردار است و به این دلیل در زمینه های مختلف همچون زمینه های گرافیکی در کاربردهای مثل دیترینگ<sup>1</sup> و استیپلینگ<sup>2</sup> [15]، کاربردهای المان محدود برای هموار کردن مش [16] و کوانتیزه کردن<sup>3</sup> در زمینه های مختلف [17] به طور وسیعی مورد استفاده قرار می گیرد.

همچنین از الگوریتم لوید به صورت گسترده ای برای یافتن نقاط اکسترمم (که لزوماً عمومی نمی باشند) در توابع با مرتبه ی بالاتر نیز استفاده می شود [18]. در زمینه ی ناحیه بندی مدل های هندسی بجای بهینه کردن یکپارچگی<sup>4</sup> هر ناحیه می توان از الگوریتم لوید به عنوان ابزاری برای کاهش میزان انحراف هر دسته از المان نماینده ی آن دسته استفاده کرد [19].

طبق رابطه ی (1)، هدف از الگوریتم لوید، که در بعضی موارد روش k\_means نیز نامیده می شود، کمینه کردن انرژی شبکه ی  $E$  براساس اینکه ناحیه های مختلف به بهترین شکل شناسایی و دسته بندی شوند، است. انرژی شبکه ی  $E$  با استفاده از  $N$  نقطه ی  $\{X_j\}$  و  $k$  مرکز  $\{c_i\}$  برای افزایش  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  به صورت:

$$E = \sum_{i \in 1 \dots k} \sum_{X_j \in R_i} \|X_j - c_i\|^2 \quad (1)$$

تعریف می شود. در واقع می توان گفت الگوریتم لوید و به دنبال آن الگوریتم تکرارپذیر در هر مرحله به دنبال یافتن بهترین المان های نماینده  $\{c_i\}$  هستند. این نکته که الگوریتم لوید و k\_means از نظر داده های ورودی با هم متفاوت می باشند، حائز اهمیت است. ورودی الگوریتم k\_means مجموعه ای منفصل از نقاط است، در حالی که ورودی الگوریتم لوید نواحی است که از نظر هندسی دارای پیوستگی هستند. بنابراین هنگام دسته بندی مجدد داده ها بجای اندازه گیری ساده مرکز تا هر نقطه که در k\_means صورت می گیرد، در الگوریتم لوید از دیاگرام ورونوی استفاده می شود.

### 3- دیاگرام ورونوی

یکی از پایه ای ترین مسائل در کاربردهای گوناگون، چگونگی تشکیل ساختمان داده بر روی مجموعه ای از نقاط، جهت محاسبه ی نزدیک ترین همسایگی است. برای حل این مسئله در فضای دو بعدی راه حل های مناسبی وجود دارد که عمومی ترین آنها تشکیل دیاگرام ورونوی بر روی داده ها است. دیاگرام ورونوی ابزار محاسباتی پایه در محاسبات هندسی است، که در کاربردهای مثل خوشه بندی، برنامه ریزی حرکت<sup>5</sup>، یادگیری و بازیابی سطوح مورد استفاده قرار می گیرد [20].

فرض می شود  $P$  مجموعه ای از  $n$  نقطه واقع بر صفحه ی  $\pi \in \mathbb{R}^2$  باشد. ایده ی کلی به این صورت است که به هر نقطه یک ناحیه ی اثر به قسمی که مجموع این نواحی برابر با صفحه ی  $\pi$  شود (شکل 1- الف)، نسبت داده می شود. ولی در ابعاد بالاتر، به عنوان مثال در مدل های مورد استفاده در کاربردهای طراحی به کمک کامپیوتر که همگی سه بعدی هستند، بدست آوردن نزدیک ترین نقطه و یا همان ناحیه ی اثر به راحتی میسر نیست. مطابق شکل 1- ب و براساس رابطه ی 2، ناحیه ی ورونوی نقطه ی  $p$  در یک مجموعه ی محدود  $S \subset \mathbb{R}^3$  مجموعه ای از نقاط است که به  $p$  بسیار نزدیک تر هستند تا سایر نقاط  $S$ :

1- dithering  
2- stippling  
3- quantized  
4- Compactness  
5- motion planning

6- Geodesic distance

#### 4- تقریب دیاگرام ورونوی

برای کاهش زمان و فضای لازم جهت تشکیل دیاگرام ورونوی، پلد تقریبی از دیاگرام ورونوی  $(V_p^*)$  برای فضای  $\mathbb{R}^d$  در زمان تقریباً خطی ارائه داده است [24]. در این الگوریتم هدف بدست آوردن افزای از فضای  $\mathbb{R}^d$  است، به قسمی که اگر نماینده هر ناحیه  $R_i$  نقطه‌ای  $c_i \in S$  باشد، آنگاه برای تمام نقاط واقع در ناحیه  $R_i$ ، نقطه‌ی  $c_i$  تقریباً نزدیک‌ترین نقطه در شبکه‌ی  $P$  به آنها شود:

$$V_p^* = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - c_i\| \leq (1 + \varepsilon) \|x - c_j\|, \forall c_j \in S - \{c_i\}\} \quad (4)$$

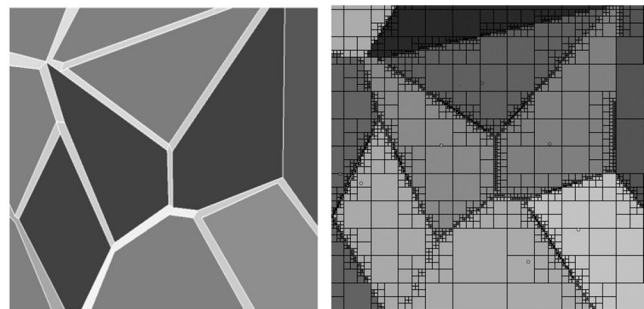
در رابطه‌ی بالا  $0 < \varepsilon$  مقداری ثابت است. مطابق شکل 2 مرز نواحی افزای شده در تقریب دیاگرام ورونوی به صورت فازی می‌شود. در این مقاله از ناحیه‌ی فازی جهت بدست آوردن حدس اولیه برای توزیع مناسب نقاط مرکزی و در نتیجه کاهش زمان اجرای الگوریتم تکرارپذیر استفاده شده است.

#### 5- استفاده از تقریب دیاگرام ورونوی برای ناحیه‌بندی

نحوه‌ی تشکیل دیاگرام فازی و رابطه‌های مربوط به آن در قسمت قبل توضیح داده شده است، با توجه به شرایط مسئله چندین نکته‌ی حائز اهمیت وجود دارد که می‌بایست در نظر گرفته شود:

**حفظ پیوستگی نواحی:** شرط حفظ پیوستگی نواحی مختلف بر روی سطح مینفولد<sup>1</sup> ایجاد می‌کند تا علاوه بر شاخص اندازه‌گیری مورد نظر، که به عنوان مثال در اینجا نرم  $L^{2,1}$  است، اثر معیار فاصله‌ی هندسی نیز در نظر گرفته شود. در این مقاله جهت اجتناب از انجام محاسبات طولانی مربوط به اندازه‌گیری فاصله‌ی هندسی از الگوریتم نمو ناحیه<sup>2</sup> به عنوان یک زیربرنامه برای حفظ شرایط پیوستگی هر یک از ناحیه‌ها استفاده شده است.

**تشکیل ناحیه‌ی فازی:** تشکیل ناحیه‌ی فازی با استفاده از روابط معمول برای هدف این مقاله چندان کارآمد نیست. چرا که اولاً این روابط جهت تسریع در روند تعیین نزدیک‌ترین همسایگی برای هر نقطه ارائه شده است و ویژگی‌های ناحیه‌ی فازی و امکان استفاده از آن برای کاربردهای دیگر مدنظر نبوده است. ثانیاً طبق تعریف، محدوده‌ی حاصل از تقریب دیاگرام ورونوی برای المان نام،  $R_i^*$  همواره بزرگتر یا مساوی با محدوده‌ی حاصل از دیاگرام ورونوی همان المان،  $R_i$ ، است و منطقه‌ی فازی نیز از تفاضل این دو ناحیه و به صورت  $\|R_i^* - R_i\|$  بدست می‌آید. یعنی برای هر ناحیه، منطقه‌ی فازی



ب

الف

شکل 2 الف) تقریب زدن دیاگرام ورونوی با استفاده از ساختار چارتایی<sup>3</sup> [24] ب) نواحی مختلف دیاگرام ورونوی با استفاده از مرزبندی فازی، نقاط متعلق به ناحیه‌ی فازی می‌تواند متعلق به هر یک از نواحی مجاور باشد

زیرمجموعه‌ای از المان‌های موجود در همسایگی آن می‌شود. توجه به این نکته ضروری است، که در مراحل اولیه‌ی ناحیه‌بندی، تعدادی از المان‌ها تنها برای حفظ شرایط پیوستگی به یک ناحیه تخصیص داده شده‌اند و قرار گرفتن آنها در یک ناحیه لزوماً به معنای این نیست که المان نماینده آن ناحیه بهترین تقریب برای آن‌هاست و ممکن است که در مرحله‌ی بعدی تکرار الگوریتم، این المان‌ها، که معمولاً المان‌های نزدیک به مرز می‌باشند، در ناحیه‌ی دیگری قرار بگیرند. در این شرایط که به صحت تخصیص المان‌های مرزی اعتماد کافی وجود ندارد، اضافه کردن حلقه‌ی دیگری از المان‌های مرزی معقول به نظر نمی‌رسد. ثالثاً در روابط معمول مقدار  $|E|$  برای تمامی نواحی یکسان است، این در حالی است که لازم است برای نواحی متفاوت، مقادیر متفاوتی در نظر گرفته شود. با توجه به دلایل بالا، لازم است روابط ذکر شده جهت تشکیل ناحیه‌ی فازی به منظور استفاده در زمینه‌ی ناحیه‌بندی مدل هندسی سه بعدی بازنویسی شوند.

#### 5-1- نحوه‌ی تشکیل ناحیه‌ی فازی

ناحیه‌بندی مدل و تشکیل منطقه‌ی فازی شامل 6 مرحله است:

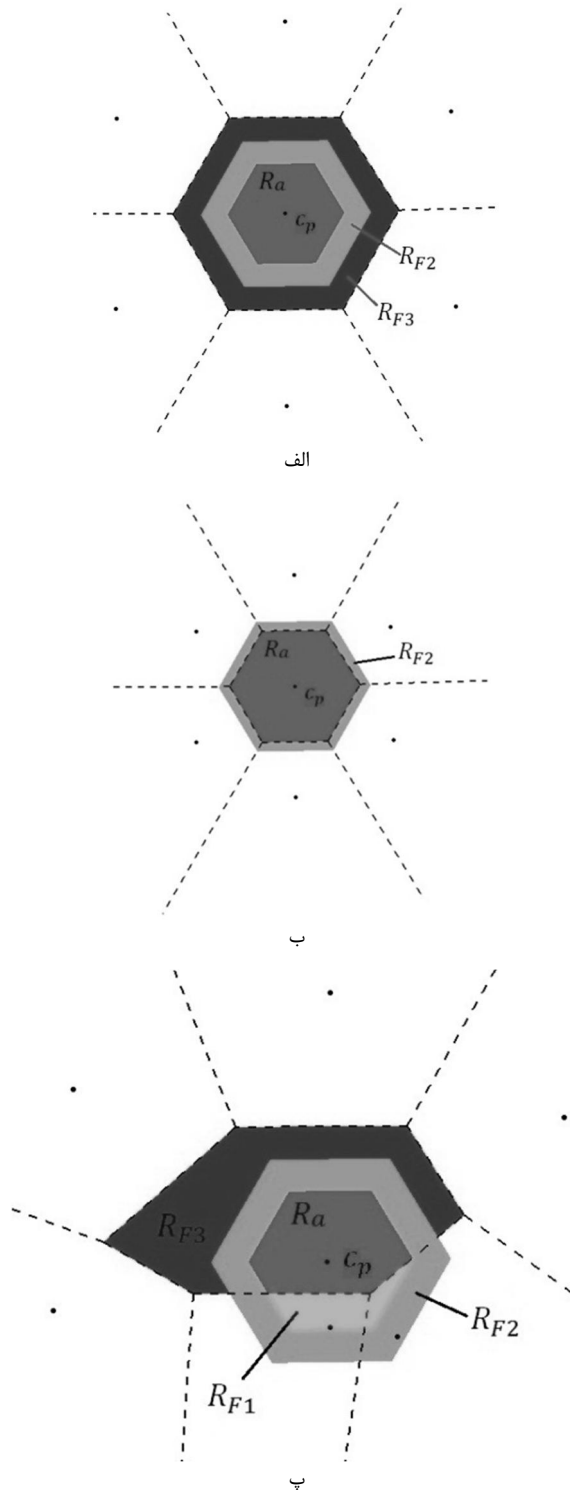
- انتخاب  $k$  المان نماینده تصادفی
- اصلاح المان‌های نماینده با استفاده از المان‌های همسایگی به صورت محلی
- گسترش هر ناحیه با استفاده از الگوریتم نمو ناحیه‌ی چندگانه، تا جایی که خطای تقریب در محدوده‌ی خطای تکراری باشد یا اینکه ادامه‌ی رشد به دلیل محدود شدن توسط سایر نواحی امکان‌پذیر نباشد. این ناحیه، ناحیه‌ی قابل قبول است و با  $R_a$  نمایش داده می‌شود.
- گسترش نواحی  $R_a$  با استفاده از الگوریتم نمو ناحیه تا جایی که خطای تقریب در محدوده‌ی خطای مجاز  $(e_T)$  باشد. این ناحیه‌ی فازی با  $R_{F1}$  نمایش داده می‌شود.
- گسترش نواحی بدست آمده در مرحله‌ی 4 و تشکیل ناحیه‌ی فازی  $R_{F2}$ ، با استفاده از الگوریتم نمو ناحیه، تا جایی که خطای تقریب برای  $R_{F2}$  برابر با  $e_T$  شود.
- گسترش نواحی ایجاد شده در مرحله قبل با استفاده از الگوریتم نمو ناحیه‌ی چندگانه تا جایی که امکان رشد به دلیل محدود شدن توسط سایر نواحی امکان‌پذیر نباشد. این ناحیه‌ی فازی با  $R_{F3}$  نمایش داده می‌شود.

در مرحله‌ی اول همانند سایر روش‌های ناحیه‌بندی تکرارپذیر در ابتدا  $k$  المان نماینده به صورت تصادفی بر روی مدل انتخاب می‌شود و بر اساس آنها مدل افزای می‌گردد. از آنجا که ناحیه‌بندی انجام شده در این مرحله اساس تشکیل ناحیه‌ی فازی است، لازم است سعی شود تا حد امکان المان‌های نماینده به نحوی انتخاب شوند که تأثیر خطا و نویز در آنها کمتر باشد. به همین دلیل پس از انتخاب المان نماینده، مطابق پیوست 1، برادر نرمال آن با استفاده از المان‌های موجود در همسایگی به صورت محلی اصلاح می‌شود.

نکته‌ی حائز اهمیت دیگر نحوه‌ی تعیین  $|E|$ ، و یا به عبارتی پهنای باند ناحیه‌ی فازی است. در الگوریتم‌های ناحیه‌بندی از شروط مختلفی به عنوان شرط توقف حلقه‌ی تکرار استفاده شده است که یکی از متداول‌ترین آنها حداکثر خطای مجاز تقریب است. در این مقاله منطقه‌ی فازی هر ناحیه با استفاده از همین پارامتر، یعنی با توجه به میزان خطای مجاز بدست می‌آید. انتخاب پهنای منطقه‌ی فازی بر اساس خطای مجاز صفحه‌ی تقریب باعث

1- Manifold  
2- Region growing  
3- quadtree

است. این ناحیه بیان کننده‌ی مقدار خطای مجاز برای حدس زدن مکان المان‌های بهینه است. از آنجا که هدف از الگوریتم‌های تکرارپذیر رسیدن به ناحیه بندی مطابق شکل 3-ب است (یعنی حالتی که در آن تنها نواحی  $R_a$  و  $R_{F2}$  موجود باشد) بنابراین می‌توان گفت ناحیه‌ی  $R_{F2}$  ناحیه‌ی فازی مجاز است و تنها کافی است روشی برای بررسی و حذف نواحی فازی  $R_{F1}$  و  $R_{F3}$  ارائه شود.



شکل 3 نمایش زیرناحیه‌های غیرفازی و فازی برای سه حالت مختلف توزیع المان‌های همسایه الف) حالت اولیه‌ی توزیع ب) حالت توزیع ایده‌آل پ) توزیع در حالتی که چند المان نماینده‌ی مشابه نزدیک بهم تعریف شده‌است

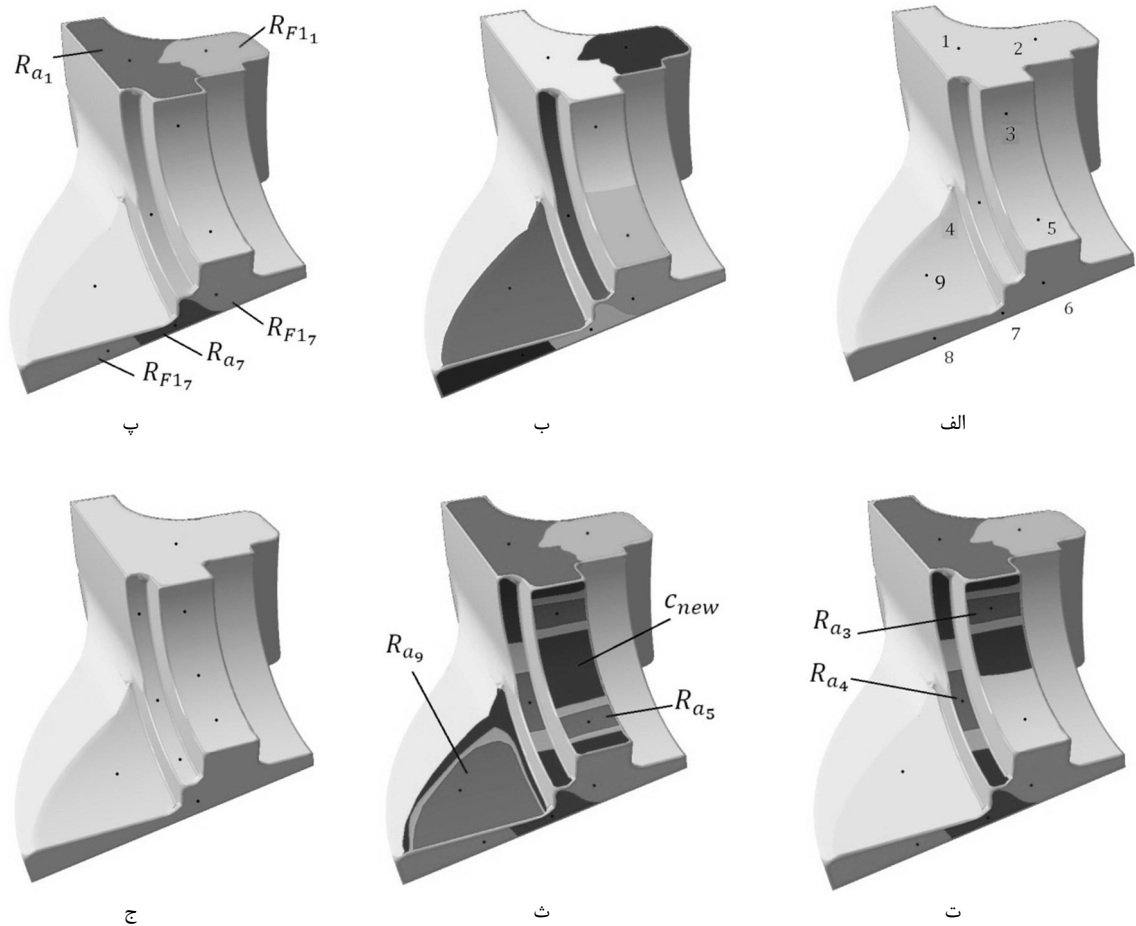
می‌شود تا شبکه‌ی مش از همان ابتدا به صورت منطبق با پارامترهای مورد نیاز برای بازسازی مدل بخش بندی شود.

همان‌طور که عنوان شد در این مقاله سعی بر آن است تا با استفاده از توزیع تصادفی المان‌ها بر روی مدل، حدس اولیه‌ای برای تعیین مکان تقریبی المان‌های نماینده‌ی بهینه بدست آید. از آنجا که توزیع المان‌ها کاملاً به صورت تصادفی است، برای پایداری حل لازم است شرایطی اعمال گردد که ناحیه‌ی اثر برای هر المان در دو حالت: 1- با در نظر گرفتن نواحی مجاور 2- صرف نظر از موقعیت نواحی مجاور، بررسی شود. ناحیه‌ی غیرفازی  $R_a$  و ناحیه‌ی فازی  $R_{F3}$  با در نظر گرفتن مرز نواحی مجاور و دو ناحیه‌ی فازی  $R_{F1}$  و  $R_{F2}$  با صرف نظر از نواحی مجاور، ناحیه بندی را انجام می‌دهند.

به منظور بررسی بهتر ناحیه‌ی اثر مربوط به هر بخش، تمامی المان‌های قرارگرفته در آن بخش در چهار زیرمجموعه تقسیم بندی می‌شوند، که یک زیرمجموعه از آن مربوط به بخش غیرفازی است و ترکیب سه زیرمجموعه‌ی دیگر ناحیه‌ی فازی را تشکیل می‌دهند. بخش غیرفازی که پیش تر ناحیه‌ی قابل قبول نام گذاری و با  $R_a$  نمایش داده شد، شامل المان‌هایی است که اولاً شاخصه‌ی گروه تقریب مناسبی برای آنها است، ثانیاً متعلق به همان ناحیه هستند. اعضای متعلق به ناحیه‌ی فازی در سه گروه تقسیم بندی می‌شوند، گروه اول شامل اعضایی است که متعلق به نواحی مجاور است ولی المان شاخصه می‌تواند آنها را به درستی تقریب بزند، گروه دوم شامل اعضایی است که المان شاخصه تقریب چندان خوبی برای آنها نیست ولی از آنجا که در هر بار تکرار الگوریتم، المان شاخصه تغییر می‌کند، ممکن است در مرحله‌ی بعد در این ناحیه قرار بگیرند و گروه سوم شامل اعضایی است که المان شاخصه تقریب ضعیفی برای آنها است و تنها به دلیل رعایت شرط پیوستگی در این ناحیه قرار گرفته‌اند.

در شکل 3 توزیع المان‌های مرکزی در سه حالت متفاوت نمایش داده شده است. برای بررسی بهتر در هر سه حالت یکی از المان‌ها ( $c_p$ ) ثابت فرض شده است و المان‌های دیگر نسبت به آن در موقعیت‌های مختلف توزیع شده‌اند تا اثر جابجایی آن‌ها بر روی ناحیه بندی مشخص شود. شکل 3-الف حالت اولیه‌ی توزیع است که در آن نواحی  $R_a$ ،  $R_{F2}$  و  $R_{F3}$  دیده می‌شود. در شکل 3-ب تمامی المان‌های همسایگی به مقدار مساوی در راستای عمود بر مرز جدایش به  $c_p$  نزدیک شده‌اند. همان‌طور که مشخص است دیاگرام ورونوی کاملاً بر  $R_a$  منطبق است. این حالت، حالت ایده‌آل ناحیه بندی است و هدف از الگوریتم‌های تکرارپذیر جابجا کردن المان‌های مرکزی و رسیدن به این شرایط است که در آن ناحیه‌ی  $R_a$  برای هر المان کاملاً منطبق بر دیاگرام ورونوی آن شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود ناحیه‌ی فازی برای این حالت به کمترین حد خود می‌رسد، چرا که نواحی  $R_{F1}$  و  $R_{F3}$  اصلاً تشکیل نمی‌شوند و ناحیه‌ی  $R_{F2}$  نیز پهنای باند کمتری دارد. در شکل 3-پ نسبت به حالت اولیه سه المان همسایگی جابجا شده است و مابقی ثابت می‌باشند. در این حالت ناحیه‌ی  $R_{F1}$  نیز ایجاد شده است. المان‌های مربوط به ناحیه‌ی  $R_{F1}$  گرچه متعلق به ناحیه‌های دیگر می‌باشند ولی با استفاده از  $c_p$  به خوبی قابل تقریب زدن هستند. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که یا برای یک ناحیه بیش از یک المان مرکزی تعریف شود و یا اینکه دو المان مرکزی با ویژگی‌های مشابه و در فاصله‌ای نزدیک تعریف شوند.

همان‌طور که توضیح داده شد در این مقاله هر ناحیه به چند زیرناحیه تقسیم می‌شود تا از این طریق ناحیه بندی با دقت بیشتری بررسی شود. نکته‌ی حائز اهمیت این است که این عمل می‌تواند باعث ناحیه بندی بیش از حد مدل شود (شکل 4-ث)، برای جلوگیری از این مشکل ناحیه‌ی  $R_{F2}$  تعریف شده



شکل 4 ناحیه‌بندی مدل هندسی fan-disk با مش مثلثی الف) توزیع 9 المان نماینده بر روی مدل ب) ناحیه‌بندی اولیه بر اساس المان‌های نماینده پ) محاسبه‌ی زیرناحیه‌های فازی برای المان‌های 1 و 7، همان‌طور که مشاهده می‌شود چندین المان مشابه برای یک سطح تعریف شده‌اند که در نتیجه زیرناحیه‌ی  $R_{F1}$  المان مرکزی ناحیه‌ی مجاور را در بر گرفته است ت، ث) محاسبه‌ی زیرناحیه‌های فازی،  $R_{F2}$  ناحیه‌ی کم‌رنگ و  $R_{F3}$  ناحیه‌ی پررنگ و  $C_{new}$  محل اضافه شدن المان نماینده جدید ج) توزیع مجدد المان‌ها بر اساس زیرناحیه‌های فازی

### 3-5- اضافه کردن المان نماینده جدید

سایر الگوریتم‌های موجود ابتدا خطای تقریب برای تمامی نواحی را بدست می‌آورند و سپس در ناحیه‌ای که خطای بیشتری دارد، المان نماینده‌ی جدید تعریف می‌کنند. این روش گرچه بسیار ساده است ولی لزوماً پرخاطرترین مکان را پیدا نمی‌کند. با توجه به شکل 4-ث، همان‌طور که مشخص است ناحیه‌ی 4 و 9 به ترتیب بیش‌ترین میزان خطا را دارند، ولی پرخاطرترین محل بخشی بین ناحیه‌ی 3 و 5 است. در الگوریتم ارائه شده برای یافتن بهترین مکان جهت تعریف المان نماینده‌ی جدید، با استفاده از رابطه‌ی 5، ابتدا اجتماع نواحی جداگانه‌ی  $R_{F3}$  به صورت:

$$\bigcup_{i=1}^k R_{F3_i} = R_{F3_1} \cup R_{F3_2} \cup \dots \cup R_{F3_k} \quad (5)$$

بدست می‌آید و براساس آن مناسب‌ترین محل برای اضافه شدن المان نماینده‌ی جدید تعیین می‌شود.

روش‌های قبلی علاوه بر آنکه توانایی یافتن پرخاطرترین مکان را ندارند، دچار مشکل دیگری نیز هستند و آن عدم توجه به نحوه‌ی توزیع  $R_{F3}$  در نواحی مختلف است. با توجه به شکل 4-ث، همان‌طور که دیده می‌شود

همان‌طور که توضیح داده شد در این مقاله هر ناحیه به چند زیرناحیه تقسیم می‌شود تا از این طریق ناحیه‌بندی با دقت بیشتری بررسی شود. نکته‌ی حائز اهمیت این است که این عمل می‌تواند باعث ناحیه‌بندی بیش از حد مدل شود (شکل 4-ث)، برای جلوگیری از این مشکل ناحیه‌ی  $R_{F2}$  تعریف شده است. این ناحیه بیان‌کننده‌ی مقدار خطای مجاز برای حدس زدن مکان المان‌های بهینه است. از آنجا که هدف از الگوریتم‌های تکرارپذیر رسیدن به ناحیه‌بندی مطابق شکل 3-ب است (یعنی حالتی که در آن تنها نواحی  $R_a$  و  $R_{F2}$  موجود باشد) بنابراین می‌توان گفت ناحیه‌ی  $R_{F2}$  ناحیه‌ی فازی مجاز است و تنها کافی است روشی برای بررسی و حذف نواحی فازی  $R_{F1}$  و  $R_{F3}$  ارائه شود.

### 2-5- ترکیب نواحی

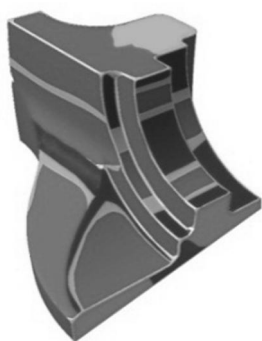
برای بررسی امکان ترکیب دو ناحیه‌ی مجاور از شرط بسیار ساده‌ای استفاده شده است. اگر المان مرکزی یک ناحیه، در منطقه‌ی فازی  $R_{F1}$  ناحیه‌ی دیگری قرار بگیرد، آنگاه دو ناحیه با هم ترکیب می‌شوند و المان نماینده‌ی ناحیه‌ی کوچکتر از مجموعه‌ی  $\{c_i\}$  حذف می‌شود (شکل 3-پ و 4-پ). در واقع ناحیه‌ی بزرگتر، ناحیه‌ی کوچکتر را در بر می‌گیرد.

قبلا توضیح داده شد که زیرناحیهی  $R_{F2}$  برای جلوگیری از تجزیهی بیش از حد مدل تعریف شده است، ولی  $R_{F2}$  قابلیت دیگری را نیز ایجاد می کند. مطابق اشکال 3 و 4، معمولا ناحیهی  $R_a$  داخلی ترین و ناحیهی  $R_{F3}$  بیرونی ترین بخش از یک ناحیه را به خود اختصاص می دهند و جداکنندهی این دو بخش از یکدیگر است. از آنجا که مکان المان های نماینده بر روی  $R_a$  و یا  $R_{F3}$  تعیین می شود، بنابراین می توان گفت که المان های  $R_{F2}$  در واقع مرز بین نواحی مختلف هستند. همان طور که در شکل 5 دیده می شود،  $R_{F2}$  همچون مرزی با پهنای متغیر است، که بخش های مختلفی که پتانسیل تشکیل یک ناحیهی جداگانه را دارند، از یکدیگر تفکیک می کند. بنابراین تنها کافی است تا از بین نواحی متفاوتی که توسط  $R_{F2}$  تفکیک شده اند، نواحی مناسب را شناسایی کرد.

برای تشخیص نواحی مناسب و در نتیجه تعیین تعداد المان های مورد نیاز مطابق روش زیر عمل می شود:

- ناحیه بندی اولیه توسط  $k'$  المان اولیه و تشکیل ناحیهی فازی
- در نظر گرفتن المان های متعلق به  $R_{F2}$  به عنوان المان های مرزی
- افزاز  $UR_{F3}$  بر اساس معیار صفحه ای بودن و پارامتر یکپارچگی به زیرناحیه های  $R'_{F3} = \{R'_{F3_1}, R'_{F3_2}, \dots, R'_{F3_n}\}$
- مرتب کردن زیرناحیه های  $R_a$  و  $R'_{F3}$  بر اساس مساحت و حذف کردن زیرناحیه هایی که مساحت آنها کمتر از حد مجاز است (جهت جلوگیری از تجزیهی بیش از حد مدل)

بنابراین برای ناحیه بندی مدل به  $i+j$  المان اولیه نیاز است که  $i$  و  $j$  به ترتیب تعداد زیرناحیه های  $R_a$  و  $R'_{F3}$  هستند. همچنین بهترین مکان برای المان های اولیه، مرکز هندسی زیرناحیه های  $R_a$  و  $R'_{F3}$  است.



الف



ب

شکل 5 الف) زیرناحیه های غیر فازی و فازی ب) زیرناحیهی فازی  $R_{F2}$  که نواحی را از یکدیگر تفکیک کرده است

زیرناحیهی  $R_{F3}$  برای المان 9 به صورت نواری باریک در اطراف مرز امتداد یافته است، ولی در نواحی 3، 4 و 5 به صورت مناطقی متراکم است. مسلما احتمال یافتن رویه ای که بتواند داده های فشرده و متراکم را به درستی تقریب بزند، بسیار بیشتر است. به همین دلیل، در این مقاله علاوه بر پارامتر میزان خطای تقریب، پارامتر یکپارچگی نیز مورد نظر قرار گرفته است. در واقع می توان گفت به دنبال یافتن مناطقی بر روی  $UR_{F3}$  هستیم که علاوه بر یکپارچه بودن، بیشترین مساحت را نیز داشته باشد. برای این منظور مطابق روش ارائه شده توسط گارلند از پارامتر شکل استفاده می شود [21]. پارامتر شکل المان ها را به صورت فشرده و یکپارچه دسته بندی می کند و مانع از ایجاد نواحی باریک و طولی می شود. برای ناحیه ای با مساحت  $A$  و محیط  $\rho$ ، پارامتر شکل برابر است با:

$$\gamma = \frac{\rho^2}{4\pi A} \quad (6)$$

برای بهبود نتایج، از پارامتر شکل به همراه معیار اندازه گیری صافی (نرم  $L^{2,1}$ )، جهت دسته بندی المان های متعلق به  $UR_{F3}$  استفاده شده است. مراحل تعیین مکان مناسب جهت افزوده شدن المان نمایندهی جدید را می توان به صورت زیر بیان کرد:

- ناحیه بندی مدل با استفاده از  $k$  المان بر اساس معیار صفحه ای بودن
- در نظر گرفتن اجتماع نواحی جداگانهی  $R_{F3}$  به عنوان یک ناحیهی واحد
- افزاز  $UR_{F3}$  بر اساس معیار صفحه ای بودن و پارامتر یکپارچگی به زیرناحیه های  $R'_{F3} = \{R'_{F3_1}, R'_{F3_2}, \dots, R'_{F3_n}\}$

مرکز هندسی زیرناحیه ای از  $R'_{F3}$  که بیشترین مساحت را دارد، بهترین مکان جهت افزوده شدن المان جدید است.

## 6- الگوریتم ناحیه بندی

الگوریتم تکرارپذیر، همانند الگوریتم ناحیه بندی سلسله مراتبی، روشی پارامتریک است که در آن تعداد ناحیه های اولیه توسط کاربر مشخص می شود. این ویژگی در زمانی که لازم است مدل با تعداد صفحات مشخصی تقریب زده شود بسیار مفید است، ولی از طرف دیگر باعث می شود الگوریتم نیازمند تنظیمات اولیهی کاربر شود. همچنین اگر المان های نماینده بسیار کمتر از میزان نیاز انتخاب شوند، زمان اجرای الگوریتم به طور چشم گیری افزایش خواهد یافت و اگر المان های نماینده بیشتر از حد نیاز انتخاب شوند، علاوه بر افزایش زمان محاسبات، تجزیهی بیش از حد مدل نیز اتفاق می افتد. در روش ارائه شده در این مقاله، پس از انجام ناحیه بندی اولیه و تشکیل نواحی فازی، می توان ناحیه بندی را بر حسب نیاز مسئله، به هر دو شکل پارامتریک و یا غیر پارامتریک، انجام داد.

### 6-1- روش غیر پارامتریک

در این حالت هدف بدست آوردن تعداد المان های نمایندهی مورد نیاز برای ناحیه بندی و یافتن بهترین مکان برای آن ها، بدون نیاز به تنظیمات اولیهی کاربر است.

برای این منظور در ابتدا مدل با استفاده از  $k'$  المان اولیه ناحیه بندی می شود. در قسمت بعد نشان داده می شود به دلیل استفاده از ناحیه بندی فازی، مقدار  $k'$  در نتایج نهایی تاثیر زیادی ندارد. بنابراین با استفاده از روشی ساده و بدون نیاز به تنظیمات کاربر و تنها بر اساس تعداد داده های ورودی مقدار  $k'$  برای مدل های مختلف محاسبه می شود.

6-2- روش پارامتریک

در حالت پارامتریک هدف افراز مدل اولیه دقیقاً به  $k$  ناحیه‌ی مجزا است، که مقدار  $k$  توسط کاربر تعیین می‌شود. در این حالت می‌بایست از بین  $i + z$  المان اولیه‌ای که در روش غیرپارامتریک بدست آمده است،  $k$  المان بهتر انتخاب شود. برای این منظور باید به چند نکته توجه کرد:

1. هر ناحیه‌ای که خطای تقریب کمتر و مساحت بیشتری داشته باشد، ناحیه‌ی مناسب‌تری است. از آنجا که هدف رسیدن به ناحیه‌بندی ایده‌آل است (شکل 3-ب) و به دلیل آنکه میزان خطای تقریب منطقه‌ی  $\|R_a + R_{F2}\|$  برای تمام ناحیه‌ها یکسان است، بنابراین برای تعیین بهترین ناحیه، تنها کافی است مساحت ناحیه‌های مختلف را بررسی کنیم.

2. با توجه به شکل 6، اگر اعضای متعلق به  $R_{F3}$  را به عنوان ناحیه‌ی قابل قبول در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان فرض کرد که نواحی  $R_{F2}$  و  $R_a$  به ترتیب نواحی فازی متعلق به آن خواهند شد. بنابراین در مورد نواحی‌ای که نسبت مساحت ناحیه‌ی قابل قبول به مساحت ناحیه‌ی فازی کمتر از یک است، این سوال مطرح می‌شود که آیا بهتر نیست بجای در نظر گرفتن المان نماینده در  $R_a$ ، آن را در ناحیه‌ی فازی قرار داد تا بدین ترتیب میزان خطا کمتر شود؟ در پاسخ باید به این نکته اشاره کرد که در مورد هندسه‌ی ناحیه‌ی فازی هیچ اطلاعاتی در دسترس نیست، بنابراین هیچ تضمینی وجود ندارد که با جابجا کردن المان نماینده از  $R_a$  به بخش فازی خطای تقریب کمتر شود. برای تعیین اینکه آیا المان نماینده در منطقه‌ای معلوم ولی با مساحت کم انتخاب شود یا در منطقه‌ای نامعلوم ولی با مساحت زیاد، از معیار نسبت مساحت:

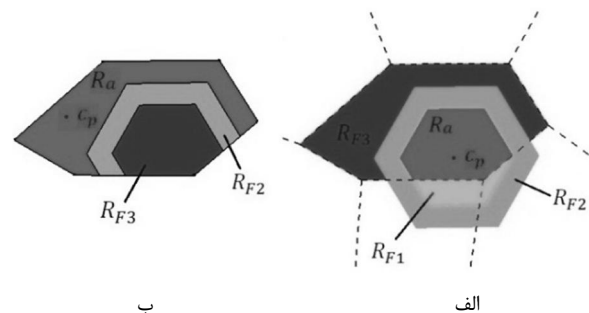
$$\beta = R_{F3}/R_a \quad (7)$$

استفاده می‌شود.

در این مقاله نسبت مساحت برابر با  $\beta = 1$  در نظر گرفته شده است، به این معنی که ریسک انتخاب المان نماینده بر روی ناحیه‌ی فازی زمانی پذیرفته می‌شود که مساحت منطقه‌ی  $R_{F3}$  آن حداقل برابر با نواحی موجود در  $R_a$  باشد.

7- مثال

برای نشان دادن قابلیت روش ارائه شده، الگوریتم در دو حالت پارامتریک و غیرپارامتریک، بر روی مدل هندسی fan - disk که در اکثر مقالات از آن استفاده می‌شود، اجرا شده است و میزان خطای تقریب در حالت‌های مختلف



شکل 6 در شکل الف ناحیه‌بندی فازی برای المان  $c_p$  نشان داده شده است، همان‌طور که واضح است مساحت ناحیه‌ی فازی از ناحیه‌ی قابل قبول بیشتر است. این امکان وجود دارد که با جابجا شدن  $c_p$  مطابق شکل ب، میزان خطای تقریب کمتر شود.

با یکدیگر مقایسه می‌شود.

در الگوریتم ارائه شده توسط اشتاینر، به 50 رویه‌ی صفحه‌ای برای تقریب زدن این مدل نیاز است [9] (شکل 7-الف). در حالت پارامتریک هدف تقریب زدن مدل با استفاده از 30 رویه است (شکل 7-ب). در حالت غیر پارامتریک بعد از ناحیه‌بندی اولیه، 43 بخش که پتانسیل تشکیل ناحیه‌ای جداگانه را دارند توسط الگوریتم شناسایی شده است (شکل 7-پ).

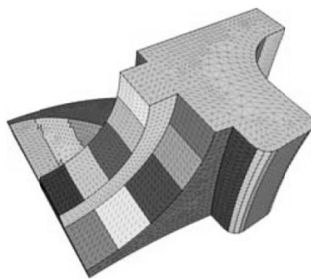
میزان خطای تقریب در هر ناحیه‌ی  $R_i$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_{R_i} = \sum_{T_i \in R_i} \|n_i - N\|^2 |T_i| \quad (8)$$

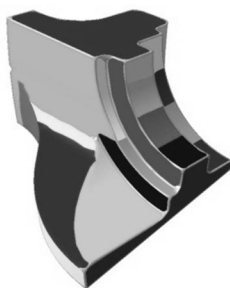
که در آن  $N$  بردار نرمال المان نماینده‌ی ناحیه‌ی  $R_i$ ،  $T_i$  مش‌های عضو ناحیه‌ی  $R_i$  و  $|T_i|$  و  $n_i$  به ترتیب مساحت و بردار نرمال هر یک از آن‌هاست.

در جدول 1 اطلاعات مربوط به میزان خطای تقریب، تعداد نواحی تقریب زده شده و همچنین تعداد تکرار الگوریتم جهت رسیدن به همگرایی برای مدل fan - disk ارائه شده است.

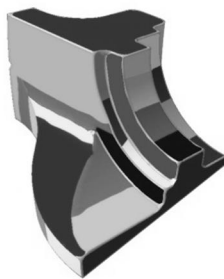
در جدول 2 اطلاعات مربوط به ناحیه‌بندی مدل با مقادیر متفاوت  $k'$  نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود تغییر در  $k'$  تاثیر چندانی



الف



ب



پ

شکل 7 ناحیه‌بندی مدل fan - disk با استفاده از الگوریتم تکرارپذیر الف)

ناحیه‌بندی مدل با استفاده از 50 رویه‌ی صفحه‌ای [9] ب) ناحیه‌بندی با استفاده از الگوریتم فازی به روش پارامتریک و با استفاده از 30 رویه‌ی صفحه‌ای پ) ناحیه‌بندی با استفاده از الگوریتم فازی با استفاده از روش غیرپارامتریک و تشخیص 43 بخش جداگانه که پتانسیل تشکیل نواحی فازی را دارند.



- تشکیل نواحی فازی: تابع پیچیدگی زمانی برای ناحیه بندی  $n$  المان در گروه  $k$  گروه چه با در نظر گرفتن نواحی فازی و چه بدون دسته بندی در نواحی فازی، تابعی یکسان است. بنابراین زمان مورد نیاز برای هر مرتبه تکرار الگوریتم، در هر دو روش مقداری یکسان است.
- ترکیب نواحی مجاور: بررسی امکان ترکیب نواحی مجاور در روش پیشنهادی بسیار سریع تر است، چراکه تنها کافی است نواحی  $R_{F1}$  بررسی شود، ولی در الگوریتم های متداول تک تک نواحی با نواحی مجاور خود مقایسه می شوند.
- اضافه کردن المان جدید: اضافه کردن المان جدید تنها مرحله ای است که نسبت به الگوریتم های قبلی به زمان بیشتری احتیاج دارد. ناحیه بندی بر روی المان های  $R_{F3}$  براساس الگوریتم رشد ناحیه انجام می شود، بنابراین تابع پیچیدگی زمانی آن  $O(m)$  است، که در آن  $m$  تعداد اعضای  $R_{F3}$  است و معمولا  $m \ll n$  می باشد.

در این مقاله برای اجرای الگوریتم از نرم افزار برنامه نویسی متلب استفاده شده است و به دلیل ضعیف بودن محیط گرافیکی آن، قطعات در نرم افزار کتیا نمایش داده شده اند. برای اجرای الگوریتم در هر مرتبه تکرار با توجه به شرایط مختلف مسئله (مثل تعداد المان های اولیه و نحوه توزیع المان های اولیه) برای هر دو روش فازی و غیر فازی 1.5 تا 3 ثانیه زمان نیاز دارد. در جدول 4 اطلاعات آماری مربوط به زمان مورد نیاز برای ناحیه بندی نشان داده شده است. در این پژوهش از کامپیوتر خانگی با پردازشگر دو هسته ای 2.5GHZ و همچنین 4GB حافظه RAM استفاده شده است.

### 9- نتیجه گیری

الگوریتم تکرارپذیر یکی از پرکاربردترین الگوریتم های ناحیه بندی است که می تواند مسئله ای افزا را به صورت بهینه سراسری حل کند. مهمترین عیب این روش سرعت نامناسب حل و احتیاج به تنظیمات اولیه کاربر است. در این مقاله الگوریتمی جدید برای ناحیه بندی مدل های هندسی سه بعدی با استفاده از تقریب دیاگرام ورونوی با هدف افزایش سرعت همگرایی الگوریتم تکرارپذیر و همچنین ناحیه بندی مدل به صورت غیر پارامتریک پیشنهاد شده است.

در روش پیشنهادی با استفاده از مفهوم دسته بندی فازی، هر ناحیه به چندین زیرناحیه فازی و یک زیرناحیه غیر فازی تقسیم بندی می شود و با استفاده از تعاریف موجود بر روی زیرناحیه های بدست آمده، روشی کارآمد جهت شناسایی ناحیه های مشابه و همچنین افزودن المان های مبنای جدید ارائه شده است.

برخلاف سایر روش های قبلی که برای افزودن المان نماینده جدید از خطای تقریب نواحی به صورت محلی استفاده می کنند، در این الگوریتم خطای تقریب به صورت سراسری و بر روی کل مدل مورد بررسی قرار می گیرد. این عمل باعث می شود که المان نماینده جدید به صورت بهینه تر و موثرتری انتخاب شود. در این مقاله علاوه بر تحلیل مدل بر اساس خطای

جدول 4 زمان مورد نیاز برای ناحیه بندی مدل fan-disk

نوع الگوریتم مورد استفاده	تعداد تکرار الگوریتم	زمان ناحیه بندی (s)
الگوریتم تکرارپذیر با استفاده از ناحیه بندی فازی	16	34
الگوریتم تکرارپذیر با استفاده از دیاگرام ورونوی	86	195

در نتایج خروجی ندارد و تقریباً در تمامی حالات تعداد نواحی شناسایی شده که قابلیت تشکیل منطقه ای جداگانه را دارند یکسان است. به همین دلیل در این روش مقدار  $k'$  برابر با درصدی از داده های اولیه در نظر گرفته می شود. ذکر این نکته الزامی است که اجرای مجدد الگوریتم با تنظیمات اولیه ی یکسان، اگرچه دقیقاً به نتایج یکسانی منجر نمی شود ولی نتایج به میزان قابل قبولی پایدار هستند. دلیل تفاوت در نتایج خروجی، انتخاب کاملاً تصادفی المان های اولیه است. جهت نشان دادن پایداری حل، با استفاده از الگوریتم ارائه شده و در شرایطی یکسان، چندین بار مدل ناحیه بندی می شود. مدل مورد نظر در حالتی که  $k'$  برابر با 30 است، سه مرتبه ناحیه بندی شده است و نتایج مربوط به آن در جدول 3 گزارش شده است. همان طور که دیده می شود تعداد نواحی شناسایی شده تقریباً یکسان است.

### 8- زمان مورد نیاز برای اجرای الگوریتم

به دلیل آنکه در مقالات مختلف از زبان های برنامه نویسی متفاوتی استفاده می شود و همچنین الگوریتم ها با سیستم های سخت افزاری مختلفی اجرا می شوند، برای نشان دادن سرعت الگوریتم به جای استفاده از زمان اجرا، پارامتر تعداد تکرار الگوریتم مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه نشان داده می شود که الگوریتم ارائه شده علیرغم مزایایی که نسبت به الگوریتم های تکرارپذیر متداول دارد، از نظر محاسبات انجام شده در هر مرتبه از تکرار، با آنها قابل مقایسه است. برای توضیح این مسئله مراحل اجرای الگوریتم به سه بخش تقسیم شده است:

جدول 1 نتایج مربوط به الگوریتم تکرارپذیر و الگوریتم تکرارپذیر با ناحیه بندی فازی برای مدل fan-disk (تعداد المان های اولیه برابر با 20 در نظر گرفته شده است)

نوع الگوریتم مورد استفاده	تعداد نواحی	تعداد تکرار الگوریتم	میزان خطای تقریب
الگوریتم تکرارپذیر با استفاده از ناحیه بندی فازی	30	15	156.270
الگوریتم تکرارپذیر با استفاده از دیاگرام ورونوی	43	17	96.821
	30	83	155.674
	43	123	97.233

جدول 2 تاثیر مقدار  $k'$  در تعیین تعداد نواحی لازم برای ناحیه بندی مدل fan-disk

$k'$	تعداد تکرار الگوریتم	تعداد نواحی شناسایی شده	تعداد تکرار الگوریتم	تعداد نواحی شناسایی شده
10	12	39	16	48
20	10	43	15	49
30	16	44	17	48
40	12	48	14	49
50	13	51	13	51
60	11	50	12	51

جدول 3 نتایج حاصل از ناحیه بندی مدل fan-disk برای حالتی که  $k'$  برابر با 30 است، جهت نشان دادن پایداری حل

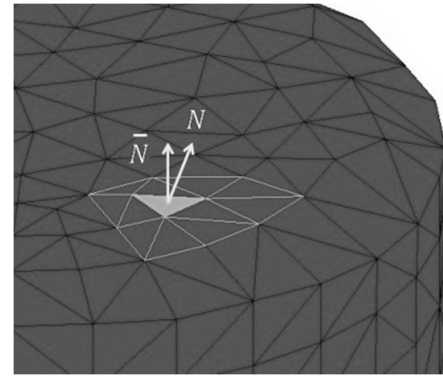
مرتبه ی ناحیه بندی	تعداد تکرار الگوریتم	تعداد نواحی شناسایی شده
1	20	49
2	18	48
3	23	48

$$\bar{N} = \sum_{T_i \in M} |T_i| N_i \quad (9)$$

که در آن  $T_i$  مش‌های عضو مجموعه  $M$  و  $|T_i|$  مساحت هر یک از آنهاست. در انتها بردار  $\bar{N}$  نرمالیزه می‌شود.

### 11- مراجع

- [1] A. Sheffer, E. Praun, N. Rose, Mesh parameterization methods and their applications, *Computer Graphics and Vision*, Vol. 2, No. 2, pp. 105-171, 2006.
- [2] L. Wang, Z. Ma, B. Xue, Z. Shen, Simplification for texture mapping models with Mesh segmentation, *In Proceeding of The 16th International Conference on Virtual Systems and Multimedia (VSM)*, Seoul, pp. 197-203, 2010.
- [3] S. Berretti, N. Werghe, A. Binbo, P. Pala, Matching 3D face scans using interest points and local histogram descriptors, *Computers & Graphics*, Vol. 37, No. 5, pp. 509-525, 2013.
- [4] B. Gilles, N. M. Thalmann, Musculoskeletal MRI segmentation using multi-resolution simplex meshes with medial representations, *Medical Image Analysis*, Vol. 14, pp. 291-302, 2010.
- [5] Y. Leet, P. Lin, U. Yans, C. Lin, Mesh decomposition using motion information from animation sequence, *Computer Animation and Virtual Worlds*, Vol. 16, No. 3-4, pp. 519-529, 2005.
- [6] X. Li, T. W. Woon, T. S. Tan, Z. Huang, Decomposing polygon meshes for interactive applications, *In Proceedings of the 2001 symposium on Interactive 3D graphics*, New York: ACM, pp. 35-42, 2001.
- [7] N. Mattia, B. Silvia, P. Giuseppe, F. Bianca, Graph-based representations of point clouds, *Graphical Models*, Vol. 73, No. 5, pp. 151-164, 2011.
- [8] S. Shlafman, A. Tal, S. Katz, Metamorphosis of polyhedral surfaces using decomposition, *Computer Graphics forum*, Vol. 21, No. 3, pp. 219-228, 2002.
- [9] D. C. Steiner, P. Alliez, M. Desbrun, Variational shape approximation, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 23, No. 3, pp. 905-914, 2004.
- [10] J. WU, T. Kobbelt, Structure recovery via hybrid variational surface approximation, *Computer Graphics Forum*, Vol. 24, No. 3, pp. 277-284, 2005.
- [11] D. Julius, V. Kraevoy, A. Sheffer, D-charts: Quasi-developable mesh segmentation, *Computer Graphics Forum*, Vol. 24, No. 3, pp. 981-990, 2005.
- [12] P. M. Castro, L. A. Lima, F. L. Lucena, Invariances of single curved manifolds applied to mesh segmentation, *Computers & Graphics*, Vol. 38, pp. 399-409, 2014.
- [13] Z. Wu, R. Shou, Y. Wang, X. Liu, Interactive shape co-segmentation via label propagation, *Computers & Graphics*, Vol. 38, pp. 248-254, 2014.
- [14] S. LLOYD, Least square quantization in PCM, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 28, No. 2, pp. 129-137, 1982.
- [15] M. Son, Y. Lee, H. Kang, S. Lee, Structure grid for directional stippling, *Graphical Models*, Vol. 73, No. 3, pp. 74-87, 2011.
- [16] H. Qin, Y. Wang, M. Li, H. Zhou, An accelerated scheme with high quality mesh based on Lloyd iteration, *Cent South Univ*, Vol. 19, No. 10, pp. 2797-2802, 2012.
- [17] D. R. Monedero, J. Forné, E. Pallarès, J. P. Arnau, A modification of the Lloyd algorithm for k-anonymous quantization, *Information Sciences*, Vol. 222, pp. 185-202, 2013.
- [18] G. Fazekas, An extremum problem for polynomials and bounds for codes with given distance and diameter, *Mathematical and Computer Modelling*, Volume 38, Issues 7-9, pp. 789-795, 2003.
- [19] D. M. Yan, W. Wang, Y. Liu, Z. Yang, Variational mesh segmentation via quadric surface fitting, *Computer-Aided Design*, Vol. 44, No. 11, pp. 1072-1082, 2012.
- [20] P. G. Ciarlet, A. Iserles, R. V. Kohn, M. H. Wright, *Geometry and Topology for Mesh Generation*, first Edition, pp. 89-91, New York: Cambridge University Press, 2001.
- [21] M. Garland, A. Willmott, P. Heckbert, Hierarchical face clustering on polygonal surfaces, *In Proceedings of the 2001 symposium on Interactive 3D graphics*, New York: ACM, pp. 49-58, 2001.
- [22] V. Kraevoy, D. Julius, A. Sheffer, *Shuffler Modeling with Interchangeable Parts*, Tech. Rep. TR- 2006-09, Department of Computer Science, University of British Columbia, April 2006.
- [23] C. Fan, J. Luo, W. Wang, B. Zhu, Voronoi diagram with visual restriction, *Theoretical Computer Science*, Vol. 532, pp. 31-39, 2014.
- [24] S. H. Peled, A replacement for Voronoi diagrams of near linear size, *In Proceedings of the 42nd IEEE symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 94-103, 2001.



شکل 8 برای کاهش اثر نویز، بردار نرمال  $N$  در المان اولیه، با استفاده از بردار نرمال مش‌های همسایگی اصلاح می‌شود.

تقریب سراسری، از فاکتور فشردگی نیز برای بهبود کیفیت نواحی و دسته‌بندی‌های انجام شده استفاده می‌شود. بنابراین علاوه بر در نظر گرفته شدن میزان خطای تقریب، نحوه توزیع آن نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

وجه تمایز دیگر الگوریتم موجود، ارائه‌ی روشی جدید برای تعیین میزان خطای تقریب مجاز است. در این مقاله میزان خطای مجاز به صورت پهنای باند ناحیه‌ی غیرفازی ( $|E|$ ) تعریف می‌شود. این ویژگی باعث می‌شود تا پهنای باند نواحی مختلف براساس ویژگی‌های هر ناحیه تعیین شود. این در حالی است که در روش‌های پیشین که از تقریب دیاگرام ورونوی استفاده شده است، مقدار  $|E|$  برای تمامی نواحی مقداری ثابت و برابر است.

در الگوریتم پیشنهادی با استفاده از تقریب دیاگرام ورونوی و تعریف نواحی فازی، روشی ساده برای توزیع مناسب المان‌های اولیه بر روی مدل ارائه شده است. از آنجا که در این روش از دسته‌بندی انجام شده در اولین مرحله، برای حدس زدن مکان المان‌های اولیه استفاده می‌شود، هزینه‌ی محاسباتی خاصی به الگوریتم افزوده نخواهد شد. استفاده از الگوریتم ارائه شده و بدست آوردن توزیع مناسب المان‌های مرکزی باعث می‌شود تا الگوریتم‌های ناحیه‌بندی بسیار سریع‌تر به همگرایی مطلوب دست پیدا کنند. در این مقاله از مدل‌های سه‌بعدی مش‌بندی شده به عنوان داده‌های ورودی استفاده شده است. استفاده از مدل مش‌بندی شده این امکان را فراهم می‌آورد تا بتوان تغییرات بردار نرمال را (که در این مقاله از آن به عنوان عامل ناحیه‌بندی استفاده شده است) بر روی کل سطح مش بررسی کرد. این ویژگی سبب افزایش دقت محاسبات می‌شود. در پژوهش‌های آینده سعی بر آن است تا با اتخاذ روشی مناسب برای استخراج موثر و دقیق بردارهای نرمال از ابر نقاط، الگوریتم ناحیه‌بندی را به صورت مستقیم بر روی داده‌های مش‌بندی نشده پیاده‌سازی کنیم.

### 10- پیوست 1

المان نماینده برای هر ناحیه‌ی  $i$  به صورت ترکیب دوتایی  $P_i = (X_{p_i}, N_{p_i})$  نمایش داده می‌شود، که در آن  $X_{p_i}$  نشان دهنده موقعیت مکانی المان نماینده (یا همان صفحه‌ی تقریب‌زننده) و  $N_{p_i}$  نشان دهنده بردار نرمال آن است. مطابق شکل 8، پس از انتخاب المان نماینده، ابتدا مجموعه‌ی  $M$  که شامل المان نماینده و مش‌های موجود در همسایگی آن هست، تشکیل می‌شود. سپس بردار نرمال المان نماینده با استفاده از رابطه‌ی زیر اصلاح می‌شود: