



## شبیه‌سازی الحاق مایل جفت حباب با استفاده از روش لول‌ست

امین حدیدی<sup>1\*</sup>، مجید اسحق نیموری<sup>2</sup>، محمدرضا انصاری<sup>3</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اهر، اهر

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تخصصی فناوری‌های نوین امل، امل

3- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\* اهر، صندوق پستی 54511-16714، a-hadidi@iau-ahar.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 17 دی 1396

پذیرش: 01 بهمن 1396

ارائه در سایت: 21 بهمن 1396

کلید واژگان:

الحاق مایل

برهم کنش حباب‌ها

روش لول‌ست

کنترل هندسی جرم

در پژوهش حاضر برهم‌کنش و الحاق مایل جفت حباب تحت نیروی شناوری به صورت عددی شبیه‌سازی شده است. معادلات حاکم بر مسأله شامل معادلات پیوستگی و مومنتوم می‌باشند که برای حل این معادلات از روش حجم محدود و الگوریتم سیمپل استفاده شده است. برای مدل‌سازی مرز مشترک دو فاز نیز از روش تسخیر مرز لول‌ست استفاده شده است. مهم‌ترین ضعف روش لول‌ست عدم بقای جرم فاز گسسته به ویژه در مسائل با تغییرات شدید مرز مشترک است که برای کنترل این خطای جرمی از معادلات بازسازی لول‌ست به همراه یک حلقه کنترل هندسی بقای جرم که برای اولین بار برای روش لول‌ست در این پژوهش ارائه شده استفاده گردیده است. با استفاده از حلقه کنترل هندسی جرم معرفی شده، مشکل خطای عددی کسر جرم روش لول‌ست برای مطالعه الحاق حباب‌ها که در آن تغییر شکل‌ها شدید است، برطرف شده است. مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی پژوهش حاضر با نتایج تجربی مشابه، همخوانی خوب بین آن‌ها را نشان می‌دهد. همچنین بررسی خطای کسر جرمی روش عددی ارائه شده برای شبیه‌سازی عددی الحاق مایل حباب‌ها نشان می‌دهد که حداکثر مقدار این خطا کمتر از 4% است؛ بنابراین روش لول‌ست به همراه حلقه کنترل جرم ارائه شده به خوبی برای مدل‌سازی عددی برهم‌کنش و الحاق مایل حباب‌ها می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

## Simulation of oblique coalescence of a pair of bubbles using Level Set method

Amin Hadidi<sup>\*1</sup>, Majid Eshagh Nimvari<sup>2</sup>, Mohammadreza Ansari<sup>3</sup>

1-Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Ahar Branch, Ahar, Iran

2-Faculty of Engineering, Amol University of Special Modern Technologies, Amol, Iran

3-Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

\* P.O.B. 54511-16714, Ahar, Iran, a-hadidi@iau-ahar.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 07 January 2018  
Accepted 21 January 2018  
Available Online 10 February 2018

#### Keywords:

Oblique coalescence  
interaction of bubbles  
Level Set method  
geometrical mass control

### ABSTRACT

In this research, interaction and oblique coalescence of bubbles under buoyancy force was simulated, numerically. The governing equations are continuity and momentum equations which have been discretized using the finite volume method and the SIMPLE algorithm. For simulating the interface of two phases, the level set method has been incorporated. Level Set method suffers from poor mass conservation of dispersed phase especially in the case of severe deformation of interface. In order to control of mass conservation of the level set method, re-initialization equations and a geometric mass control loop are used which this loop is implemented in the level set method for the first time in this research. Using proposed geometric mass control loop, mass dissipation drawback of the level set method is handled in simulation of bubbles' coalescence. The results outlined in the present study well agree with the existing experimental results. Also results of investigation of mass dissipation of the proposed scheme to simulation of oblique coalescence problem show that the maximum amount of this mass dissipation was less than 4%. Therefore, the level set method with proposed geometric mass control loop could be used properly for simulation of oblique interactions and coalescence of bubbles in multiphase flows.

### 1- مقدمه

نیز آهنگ انتقال جرم، مومنتوم و انرژی از یک فاز به فاز دیگر دارند. گذار جریان از یک رژیم به رژیم دیگر به شدت به اندرکنش فاز گاز و مایع بستگی دارد؛ بنابراین به منظور فهم بیشتر و نیز طراحی بهتر سیستم‌های حاوی جریان‌های دوفازی، مطالعه سازوکار برهم‌کنش حباب‌ها ضروری است [3]. از این‌رو تحقیقات عددی و تجربی متعددی در این زمینه انجام شده که برخی از اهم آن‌ها در ادامه مرور شده است. یوان و پروسپرتی [4] حرکت جفت حباب در امتداد عمودی در ستون

مطالعه تغییر شکل، الحاق و گسیختگی حباب‌ها و قطره‌ها در کاربردهای فراوان صنعتی مانند چاپگرهای جوهر افشان، مولدهای بخار نیروگاهی، راکتورهای شیمیایی، تجهیزات تقطیر، استخراج و جذب، تصفیه نفت خام، سیستم‌های هوادهی و غیره دارای اهمیت فراوانی است [1، 2]. جریان‌های دوفازی حبابی دارای رژیم‌های مختلفی است. هر کدام از این رژیم‌ها ویژگی‌های متفاوتی از نظر افت فشار کلی جریان مربوطه، کسر گاز و

Please cite this article using:

A. Hadidi, M. Eshagh Nimvari, M. Ansari, Simulation of oblique coalescence of a pair of bubbles using Level Set method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 02, pp. 331-341, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

مایع را به ازای عدد رینولدز متوسط ( $50 < Re < 200$ ) به طور عددی مورد مطالعه قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان داد که فاصله تعادلی بین دو حباب در حال صعود در ستون مایع که مراکز اولیه آن‌ها بر امتداد عمودی قرار دارد، ممکن است ایجاد گردد. این فاصله تعادلی در شرایطی به وجود می‌آید که بین نیروهای جاذبه‌ای که در اثر دنباله حباب بالایی به حباب پایینی وارد می‌شود و نیز نیروهای مقاوم وارد به حباب پایینی، توازن برقرار گردد. واتاناب و سانادا [5] نیز حرکت یک جفت حباب را که به طور عمودی صعود می‌کنند، به صورت تجربی و عددی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها دریافتند که در جریان‌های با رینولدز پایین، جفت حباب به هم برخورد می‌کنند، ولی در جریان‌های با عدد رینولدز متوسط، فاصله تعادلی بین جفت حباب‌ها وجود دارد که این فاصله تعادلی در حین صعود در بین حباب‌ها باقی می‌ماند. کاتز و منوو [6] حرکت و برهم‌کنش جفت حباب هوا در ستون آب را به طور تجربی بررسی کردند. حباب‌های مورد مطالعه در تحقیق ایشان کروی بوده و عدد رینولدز جریان نیز پایین است ( $0.2 < Re < 35$ ). نتایج ایشان نشان داد که دنباله حباب بالایی سبب برخورد حباب پایینی به آن می‌شود. به دلیل آن‌که فاصله اولیه بین دو حباب در تحقیق آن‌ها کم بوده است، فاصله تعادلی بین حباب‌ها در نتایج تجربی آن‌ها مشاهده نشد. چرا که همواره به دلیل کم بودن فاصله اولیه بین حباب‌ها، نیروهای جاذبه ناشی از حباب بالایی به نیروهای مقاوم در برابر حرکت حباب پایینی غلبه کرده و باعث شتاب گرفتن و رسیدن حباب پایینی به حباب بالایی می‌گردد. آنالاند و همکاران [7] رفتار تک حباب و نیز الحاق جفت حباب‌های گاز در ستون مایع لزج را به طور عددی مورد مطالعه قرار دادند. این محققین از روش حجم سیال برای مطالعه دینامیک مرز مشترک دو فاز استفاده کردند. روش حجم سیال دارای خطای به نسبت زیادی در محاسبه نیروی کشش سطحی در هندسه‌های پیچیده مرز مشترک دوفاز مخصوصاً در حالت الحاق و گسیختگی مرزهاست. از این‌رو استفاده از این روش در الحاق حباب‌ها که در آن مرزها به هم می‌پیوندند می‌تواند موجب افزایش خطا در محاسبات و مدل‌سازی گردد. دلیل خطای عددی کشش سطحی در روش حجم سیال این است که تعیین انحناي مرز مشترک در این روش بسیار دشوار است، زیرا مقدار نیروی کشش سطحی تابعی از انحناي مرز مشترک دوفاز است؛ بنابراین محاسبه نیروی کشش سطحی در مرز مشترک فازها در روش حجم سیال به خصوص در هندسه‌های با توپولوژی پیچیده بسیار دشوار است [8]. گوپتا و کومار [9] الحاق حباب‌ها بر یک خط عمودی را با استفاده از روش لیتیس-بولتزمن به صورت عددی مدل کردند. این محققین فقط نسبت‌های چگالی پایین (نسبت چگالی مایع به چگالی گاز برابر 2.66) را مورد بررسی قرار دادند و اشاره کردند که تحقیقات کافی در مورد شکل مرز مشترک و دینامیک حباب‌ها در حین الحاق صورت نگرفته و تحقیقات زیادی در این زمینه مورد نیاز است. در تحقیقات فوق الحاق و برهم‌کنش عمودی حباب‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. نمونه‌هایی از تحقیقات مهم صورت گرفته در مورد اندرکنش و الحاق جانبی حباب‌ها نیز در ادامه مرور شده است.

به طور کلی الحاق جفت حباب‌ها به سه طریق صورت می‌گیرد. حالت اول الحاق جانبی است که مراکز حباب‌ها در امتداد افقی قرار دارند. الحاق حباب‌ها در این حالت از سطوح جانبی صورت می‌گیرد [13]. در حالت دوم مراکز حباب‌ها در امتداد قائم قرار دارند و الحاق آن‌ها نیز در همین امتداد انجام می‌شود [14]. حالت سوم حالتی است که مراکز حباب‌ها در امتداد مایل نسبت به هم قرار می‌گیرند. الحاق عمودی و جانبی حباب‌ها اگر چه پدیده‌ای بسیار مهم است، اما در مسائل صنعتی و کاربردی احتمال این‌که مراکز دو حباب دقیقاً در راستای عمودی یا افقی قرار گیرد کمتر بوده و از این‌رو در بیشتر حالاتی که الحاق بین جفت حباب اتفاق می‌افتد، نوع الحاق مایل خواهد بود که این امر اهمیت بررسی این نوع الحاق را نشان می‌دهد.

از این‌رو در مطالعه حاضر شبیه‌سازی عددی دو بعدی اندرکنش و الحاق مایل جفت حباب مطالعه شده است. با توجه به این‌که روش لول‌ست در شبیه‌سازی مسائل دوفازی با تغییرات زیاد مرز مشترک فازها دارای خطای کسر جرم زیادی برای فاز گسسته است، برای شبیه‌سازی الحاق مایل حباب‌ها که با تغییرات شدید مرز آن‌ها همراه است، یک حلقه کنترل هندسی جرمی جدید در این پژوهش برای روش لول‌ست ارائه شده و عملکرد آن مورد ارزیابی قرار گرفته است.

## 2- تعریف مسأله

هدف پژوهش حاضر مطالعه برهم‌کنش جفت حباب گاز در سیال لزج مایع است که در امتداد مایل نسبت به هم در مایع ساکن صعود می‌کنند. در انجام این شبیه‌سازی هر دو فاز مایع و گاز، نیوتنی و تراکم‌ناپذیر فرض شده‌اند. همچنین هر دو فاز در ابتدا ساکن است که حباب‌ها در اثر نیروی شناوری در ستون مایع صعود می‌کنند. کل میدان جریان سیال دوفازی، هم‌دم در نظر

مایع را به ازای عدد رینولدز متوسط ( $50 < Re < 200$ ) به طور عددی مورد مطالعه قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان داد که فاصله تعادلی بین دو حباب در حال صعود در ستون مایع که مراکز اولیه آن‌ها بر امتداد عمودی قرار دارد، ممکن است ایجاد گردد. این فاصله تعادلی در شرایطی به وجود می‌آید که بین نیروهای جاذبه‌ای که در اثر دنباله حباب بالایی به حباب پایینی وارد می‌شود و نیز نیروهای مقاوم وارد به حباب پایینی، توازن برقرار گردد. واتاناب و سانادا [5] نیز حرکت یک جفت حباب را که به طور عمودی صعود می‌کنند، به صورت تجربی و عددی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها دریافتند که در جریان‌های با رینولدز پایین، جفت حباب به هم برخورد می‌کنند، ولی در جریان‌های با عدد رینولدز متوسط، فاصله تعادلی بین جفت حباب‌ها وجود دارد که این فاصله تعادلی در حین صعود در بین حباب‌ها باقی می‌ماند. کاتز و منوو [6] حرکت و برهم‌کنش جفت حباب هوا در ستون آب را به طور تجربی بررسی کردند. حباب‌های مورد مطالعه در تحقیق ایشان کروی بوده و عدد رینولدز جریان نیز پایین است ( $0.2 < Re < 35$ ). نتایج ایشان نشان داد که دنباله حباب بالایی سبب برخورد حباب پایینی به آن می‌شود. به دلیل آن‌که فاصله اولیه بین دو حباب در تحقیق آن‌ها کم بوده است، فاصله تعادلی بین حباب‌ها در نتایج تجربی آن‌ها مشاهده نشد. چرا که همواره به دلیل کم بودن فاصله اولیه بین حباب‌ها، نیروهای جاذبه ناشی از حباب بالایی به نیروهای مقاوم در برابر حرکت حباب پایینی غلبه کرده و باعث شتاب گرفتن و رسیدن حباب پایینی به حباب بالایی می‌گردد. آنالاند و همکاران [7] رفتار تک حباب و نیز الحاق جفت حباب‌های گاز در ستون مایع لزج را به طور عددی مورد مطالعه قرار دادند. این محققین از روش حجم سیال برای مطالعه دینامیک مرز مشترک دو فاز استفاده کردند. روش حجم سیال دارای خطای به نسبت زیادی در محاسبه نیروی کشش سطحی در هندسه‌های پیچیده مرز مشترک دوفاز مخصوصاً در حالت الحاق و گسیختگی مرزهاست. از این‌رو استفاده از این روش در الحاق حباب‌ها که در آن مرزها به هم می‌پیوندند می‌تواند موجب افزایش خطا در محاسبات و مدل‌سازی گردد. دلیل خطای عددی کشش سطحی در روش حجم سیال این است که تعیین انحناي مرز مشترک در این روش بسیار دشوار است، زیرا مقدار نیروی کشش سطحی تابعی از انحناي مرز مشترک دوفاز است؛ بنابراین محاسبه نیروی کشش سطحی در مرز مشترک فازها در روش حجم سیال به خصوص در هندسه‌های با توپولوژی پیچیده بسیار دشوار است [8]. گوپتا و کومار [9] الحاق حباب‌ها بر یک خط عمودی را با استفاده از روش لیتیس-بولتزمن به صورت عددی مدل کردند. این محققین فقط نسبت‌های چگالی پایین (نسبت چگالی مایع به چگالی گاز برابر 2.66) را مورد بررسی قرار دادند و اشاره کردند که تحقیقات کافی در مورد شکل مرز مشترک و دینامیک حباب‌ها در حین الحاق صورت نگرفته و تحقیقات زیادی در این زمینه مورد نیاز است. در تحقیقات فوق الحاق و برهم‌کنش عمودی حباب‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است. نمونه‌هایی از تحقیقات مهم صورت گرفته در مورد اندرکنش و الحاق جانبی حباب‌ها نیز در ادامه مرور شده است.

به عنوان یکی از مهم‌ترین تحقیقات انجام شده در زمینه برهم‌کنش جانبی حباب‌ها می‌توان به پژوهش تجربی دوینولد [10] اشاره کرد. این محقق حرکت و برهم‌کنش جانبی دو حباب هوا که در ستون آب ساکن در حال صعود است را به صورت تجربی مورد مطالعه قرار داد. او مواجهه جفت حباب‌های هوا را در آب خالص و نیز در محلول آبی حاوی مواد فعال سطحی مورد مطالعه قرار داد. نتایج این تحقیق نشان که وقتی دو حباب در حین

[17]. به این دلیل روش‌های تعقیب‌کننده مرز مشترک فازها شامل روش حجم سیال و روش لولست با توجه به توانایی و قابلیت آن‌ها در مدل‌سازی صحیح مرز مشترک دوفاز بهترین انتخاب برای شبیه‌سازی الحاق حباب‌ها به یکدیگر است [7,18]. یکی از مهم‌ترین پارامترها در مدل‌سازی صحیح مرز مشترک دوفاز در جریان‌های دو و چندفازی گاز- مایع توصیف و برآورد صحیح نیروهای مؤثر در مرز مشترک فازهاست [19]. با در نظر داشتن این مطلب که عموماً به کارگیری روش حجم سیال برای مدل‌سازی مرز مشترک دوفاز سبب به وجود آمدن خطای زیاد در محاسبه نیروی کشش سطحی در مرز مشترک فازها مخصوصاً در هندسه‌های با توپولوژی پیچیده نظیر مسائل الحاق حباب‌ها می‌گردد [7,19]. استفاده از روش لولست بهترین انتخاب برای مدل‌سازی اندرکنش حباب‌ها و نیز الحاق آن‌ها در پژوهش حاضر به نظر می‌رسد.

روش لولست یکی از روش‌های تعقیب‌کننده مرز مشترک بین دو سیال است که در آن از یک تابع فاصله علامت ( $\phi$ ) برای تعیین مکان مرز مشترک استفاده می‌شود. مرز مشترک فازها  $\Gamma$  توسط سطح تراز صفر تابع لولست ( $\phi$ ) به صورت رابطه (1) تعریف می‌شود [20].

$$\Gamma = \{(x, y) | \phi(x, y, t) = 0\} \quad (1)$$

تابع لولست ( $\phi$ ) یک تابع فاصله- علامت است. به این معنی که از یک علامت مثبت و یا منفی و نیز یک مقدار عددی تشکیل شده است که این مقدار عددی بیانگر کمترین فاصله هر نقطه متعلق به دامنه محاسباتی از مرز مشترک بین فازهاست. در روش لولست نواحی داخل مرز (داخل حباب) و خارج مرز (مایع اطراف)، با توجه به علامت تابع لولست تعیین می‌شود. در تحقیق حاضر مقادیر منفی تابع لولست به نقاط داخلی و مقادیر مثبت به نقاط خارج مرز تخصیص داده شده است که در رابطه (2) نشان داده شده است [21].

$$\phi(x, y, t) \begin{cases} > 0 & (x, y) \in \text{مایع} \\ = 0 & (x, y) \in \text{مرز} \\ < 0 & (x, y) \in \text{گاز} \end{cases} \quad (2)$$

### 2-3- معادلات اصلی حاکم بر مسئله

معادلات حاکم بر میدان جریان با به کارگیری روش لولست شامل معادلات پیوستگی، مومنتوم و معادله انتقال تابع لولست است که به صورت معادلات (5-3) ارائه شده است.

$$\frac{\partial \rho(\phi)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho(\phi) \vec{V}) = 0 \quad (3)$$

$$\rho(\phi) \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot (2\mu(\phi) D) + \vec{F} + \rho(\phi) \vec{g} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}(\phi) \cdot \vec{V} = 0 \quad (5)$$

در روابط بالا  $\vec{V}$  بردار سرعت،  $\phi$  تابع لولست،  $P$  فشار،  $\rho(\phi)$  چگالی و  $\mu(\phi)$  لزجت سیال برحسب تابع لولست،  $D/Dt$  مشتق مادی،  $D$  تانسور نرخ کرنش،  $\vec{F}$  نیروی کشش سطحی و  $\vec{g}$  بردار شتاب گرانش را نشان می‌دهند [22]. از آنجا که دو سیال تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود، جمله تغییرات چگالی با زمان (ترم گذرا) از رابطه (3) حذف می‌شود.

خواص فیزیکی سیالات، چگالی و لزجت برحسب تابع لولست به صورت روابط (7,6) بیان می‌شوند [23].

$$\rho(\phi) = \rho_g + (\rho_l - \rho_g) \times H(\phi) \quad (6)$$

$$\mu(\phi) = \mu_g + (\mu_l - \mu_g) \times H(\phi) \quad (7)$$

پانویس  $l$  و  $g$  به ترتیب مربوط به مایع و گاز بوده و  $H(\phi)$  تابع هویساید

گرفته شده است. به منظور بررسی برهم‌کنش و الحاق مایل حباب‌ها، دو حباب گرد هم‌اندازه در لحظه اولیه در راستای مایل به نحوی قرار می‌گیرند که فاصله عمودی و افقی مراکز دو حباب به ترتیب برابر 3 و 1.6 برابر شعاع حباب‌ها است. شکل شماتیک هندسه مسئله مدل‌سازی شده در تحقیق حاضر، در شکل 1 ارائه شده است.

ابعاد کانال باید به گونه‌ای انتخاب گردد که بتوان از اثرات دیواره‌ها بر حرکت و تغییر شکل حباب صرف‌نظر نمود. مسئله برای عرض‌های مختلف کانال به منظور دستیابی به عرض مناسب کانال حل گردید. با توجه به نتایج شبیه‌سازی مشخص شد که اگر فاصله مرکز حباب‌ها تا دیواره‌های کانال بزرگ‌تر از چهار برابر شعاع معادل حباب حاصل از الحاق جفت حباب اولیه باشد، دیواره‌های کانال تأثیری بر تغییر شکل و سرعت حباب‌ها نخواهند داشت. از این‌رو به منظور دستیابی به نتایج مستقل از اثرات دیواره‌های کانال، فاصله مرکز هریک از حباب‌ها تا جداره‌های کانال بیش از 5 برابر شعاع اولیه هریک از حباب‌ها در نظر گرفته شده است. از سوی دیگر حداقل ارتفاع کانال نیز باید به حدی باشد که حباب حاصل از الحاق حباب‌های اولیه بتواند به حرکت صعودی پایا برسد. این مقدار معمولاً به صورت سعی و خطا تعیین می‌شود [15] که در این تحقیق مساوی 10 برابر قطر معادل حباب پس از الحاق تعیین شده است. در مقایسه نتایج تحقیق حاضر با نتایج عددی سایر محققین برای یکسان بودن شرایط حل، ابعاد کانال مساوی با ابعاد کانال در تحقیقات مزبور در نظر گرفته شده است.

### 3- مدل‌سازی ریاضی مسئله

#### 1-3- روش لولست

به طور کلی در طی الحاق مرزهای مشترک در فرایند ملحق شدن حباب‌ها به هم تغییرات شدیدی در شکل مرز مشترک به وجود می‌آید [16]. به دلیل اعوجاج شدید در مجاورت سطح مشترک، مطالعه عددی جریان‌های حبابی با مرز مشترک بین فازهای متحرک با روش‌های سنتی که پیشتر برای مدل‌سازی جریان‌های دوفازی به کار برده می‌شده‌اند، برای مدل‌سازی پیوستن مرزهای مشترک ذکر شده، دقت و کارایی کافی را نخواهند داشت

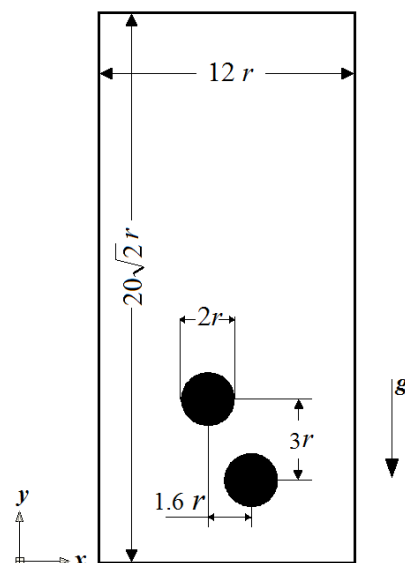


Fig. 1 Schematic geometry of problem

شکل 1 هندسه شماتیک مسئله

آخرین گام زمانی مجازی مقادیر تابع لولست برای استفاده در گام حقیقی بعدی به صورت  $\phi(x, y, t) = \phi^*(x, y, \tau = 2 \text{ یا } 3 \Delta\tau)$  می‌گردد. در گام زمانی حقیقی بعدی برای حل معادله بازسازی مجدداً در ابتدا  $\tau=0$  قرار داده می‌شود. در رابطه (13) عبارت  $\text{sign}(\phi^*)$  تابع علامت اصلاح شده بوده که به صورت رابطه (14) تعریف می‌شود.

$$\text{sign}(\phi^*) = 2H(\phi^*) - 1 \quad (14)$$

اگرچه استفاده از معادله بازسازی سبب بهبود بقای جرم در روش لولست می‌شود [21]، اما همچنان برای تغییرشکل‌های شدید حباب به ویژه در پدیده الحاق همچنان کاهش جرم حباب دیده می‌شود. اگرچه این تغییر جرم در هر گام زمانی بسیار کوچک است، اما به دلیل گام زمانی کوچک در مسأله و در نتیجه تعداد زیاد گام‌های زمانی مورد نیاز برای رسیدن به حالت پایا، این خطاهای کوچک با هم جمع شده و ممکن است به شکل غیرفیزیکی جرم حباب را تغییر داده و حتی بر زمان و نحوه الحاق تأثیر بگذارد [28]. از این رو از یک الگوریتم هندسی که برای اولین بار توسط هووا و لو [29] برای روش تعقیب جبهه ارائه شده است، با اندکی تغییر برای روش لولست در تحقیق حاضر نیز برای تصحیح جرم حباب استفاده می‌گردد. برای روش تعقیب جبهه هووا و لو [29] با تغییر مکان شبکه‌ای که مرز مشترک بر آن قرار دارد، کاهش یا افزایش جرم را جبران می‌کنند. در حالی که در تحقیق حاضر این کار با تغییر مقدار تابع لولست که منجر به تغییر تراز صفر تابع لولست (که همان مرز مشترک است) می‌شود، انجام می‌پذیرد. در این روش مقدار تابع لولست در هر نقطه از شبکه محاسباتی و در هر گام زمانی طبق رابطه (15) اصلاح می‌گردد.

$$\phi - \phi^* = \frac{V - V^*}{S^*} \quad (15)$$

در رابطه (15) مقدار تابع لولست در هر نقطه پس از اصلاح جرم،  $\phi^*$  مقدار تابع لولست پیش از اصلاح جرم،  $V$  حجم حباب اولیه (در دوبعدی مساحت اولیه حباب) و  $V^*$  و  $S^*$  به ترتیب حجم و مساحت حباب (در حالت دوبعدی نیز به ترتیب مساحت و محیط حباب) در هر گام زمانی است. به دلیل این که چگالی حباب ثابت است، تغییر حجم حباب (در حالت دوبعدی نیز تغییر مساحت حباب) بیانگر تغییرات جرم حباب است.

در واقع این الگوریتم یک روش هندسی برای جبران کاهش تدریجی جرم حباب‌ها در گام‌های زمانی حل است. پس از هر گام زمانی و حل معادله بازسازی مرز، جرم جدید حباب پس از جابه‌جایی و تغییر شکل محاسبه شده و مقدار آن با مقدار جرم اولیه حباب مقایسه می‌شود. اگر جرم حباب دچار کاهش شده باشد، تابع لولست در راستای بردار نرمال سطح به مقداری جابه‌جا می‌شود که حباب بزرگ‌تر شده و جرم نهایی حباب با مقدار جرم حباب اولیه برابر گردد؛ برعکس این کار زمانی انجام می‌شود که حباب‌ها در گام زمانی جدید بزرگ‌تر از مقدار اولیه خود گردند.

#### 4-3- شرایط مرزی و اولیه

شرط مرزی هیدرودینامیکی در تمام مرزهای هندسه نشان داده شده در شکل 1 از برهم نهی اصل عدم لغزش و اصل عدم نفوذ در مرز جامد به دست می‌آید. این شرط مرزی عدم ورود و یا خروج جرم از حجم مورد مطالعه را تضمین می‌نماید [30]. از آن‌جا که تابع لولست یک تابع فاصله علامت است، با توجه به حرکت حباب‌ها مقادیر آن برای مرزها دائماً در حال تغییر بوده و امکان اختصاص مقادیر ثابت در مرزها برای آن وجود ندارد. در هر گام زمانی و پیش از حل معادله لولست، شرط مرزی  $\phi$  از برونمایی مقادیر آن روی

اصلاح شده بوده که به صورت رابطه (8) بیان می‌شود [24].

$$H(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) \right] & |\phi| \leq \varepsilon \\ 1 & \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (8)$$

در تعریف تابع هویساید اصلاح شده،  $2\varepsilon$  ضخامت در نظر گرفته شده برای مرز مشترک بین دو سیال است که به منظور هموار نمودن تغییرات شدید خواص سیالات در مرز مشترک در نظر گرفته می‌شود. مقدار پیشنهادی برای این ضخامت فرضی در تحقیقات مختلف بین 2 تا 6 برابر اندازه شبکه است که در تحقیق حاضر، مقدار آن 3 برابر اندازه شبکه در نظر گرفته شده است. نیروی کشش سطحی در معادله مومنتوم (4) به صورت رابطه (9) قابل محاسبه است [25,22].

$$\vec{F} = \kappa \sigma \vec{n} \delta(\phi) \quad (9)$$

در معادله فوق  $\sigma$  ضریب کشش سطحی بوده و  $\kappa$  نیز انحناى مرز مشترک دوفاز است که به صورت رابطه (10) تعیین می‌شود.

$$\kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \quad (10)$$

$\vec{n}$  در رابطه (10) بردار یکه نرمال بر مرز مشترک و  $\delta(\phi)$  در معادله (9)، تابع دلتای اصلاح شده (مشقت تابع هویساید اصلاح شده) است که به ترتیب به صورت روابط (11,12) تعریف می‌شوند [26,22].

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} \quad (11)$$

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) & |\phi| \leq \varepsilon \\ 0 & \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (12)$$

#### 3-3- معادلات بازسازی و اصلاح هندسی مرز مشترک

در قسمت پیشین بیان گردید که تابع لولست به صورت یک تابع فاصله تعریف می‌گردد، اما با پیشروی در زمان و حل معادلات تابع لولست لزوماً به صورت تابع فاصله باقی نمی‌ماند. این امر سبب می‌شود که روش لولست در مطالعه جریان‌های دوفازی مشکل عدم بقای جرم را در پی داشته باشد. در تغییر شکل‌های شدیدتر مرز مشترک از جمله الحاق مرزها و یا گسیختگی سطوح مشترک بین فازها، خطای عددی عدم بقای جرم که عمدتاً به صورت کسر جرم فاز گسسته (در تحقیق حاضر، حباب فاز گسسته است) بوده، بیشتر خود را نشان می‌دهد. برای رفع این مشکل از معادلات بازسازی لولست [27] استفاده می‌شود؛ بنابراین پس از حل معادله لولست که در معادله (5) ارائه شده است، در هر گام زمانی از حل، معادله بازسازی لولست ارائه شده در معادله (13) حل می‌گردد. حل این معادله تابع لولست را به یک میدان فاصله به صورت رابطه (13) بازسازی می‌نماید.

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial \tau} = (1 - |\nabla \phi^*|) \text{sign}(\phi^*) \quad (13)$$

در رابطه (13) متغیر  $\tau$ ، زمان مجازی است. این زمان مجازی مستقل از زمان حقیقی مسأله،  $t$  است. در هر گام زمانی حقیقی پس از حل معادله لولست، معادله بازسازی لولست در یک حلقه زمانی مجازی از  $\tau=0$  تا زمان مجازی  $\tau$  حل می‌شود. در لحظه‌ای که زمان حقیقی مسأله  $t$  است، برای حل معادله بازسازی، شرط اولیه معادله (13) به صورت  $\phi^*(x, y, \tau = 0) = \phi(x, y, t)$  بیان می‌شود. با پیشروی در زمان مجازی، تابع لولست در کل دامنه محاسباتی به تابع فاصله علامت بازسازی می‌شود. از آن‌جا که مقدار تابع لولست در اطراف مرز مشترک دو فاز اهمیت دارد، تنها پیشروی در چند گام زمانی مجازی (2 یا 3 گام) در حل معادله بازسازی کافی است. پس از

$$M = \frac{g \mu_l^4 \Delta \rho}{\rho_l^2 \sigma^3} \quad (18)$$

$$Eo = \frac{g \Delta \rho d_e^2}{\sigma} \quad (19)$$

در روابط (18,19)،  $\Delta \rho$  اختلاف چگالی دو فاز و  $d_e$  نیز قطر معادل حباب است.

عدد اتوس و مورتن حباب‌های در نظر گرفته شده برای بررسی الحاق و برهم‌کنش عمودی آن‌ها به ترتیب برابر 10 و 4 است. پیش از ارائه نتایج مربوط به الحاق عمودی جفت حباب مورد نظر، آزمون استقلال حل از شبکه محاسباتی به منظور حصول اطمینان از عدم وابستگی نتایج حاصل از کد تدوین شده به اندازه شبکه محاسباتی، بررسی شده و نتایج حاصل در شکل 2 ارائه شده است. در این شکل اثر اندازه شبکه بر سرعت پایای حباب حاصل از الحاق دو حباب به یکدیگر نشان داده شده است. مطابق استقلال حل از شبکه محاسباتی نشان داده شده، مشخص می‌گردد که به ازای شبکه مربعی یکنواخت با اندازه ضلع مربع 0.05 میلی‌متر، سرعت پایای صعود حباب حاصل از الحاق دو حباب اولیه مستقل از اندازه شبکه محاسباتی است.

با توجه به این که قطر حباب مورد مطالعه برابر 1 سانتی‌متر، اندازه شبکه تعیین شده بسیار ریز است. به عبارت دیگر نسبت اندازه شبکه به قطر اولیه حباب برابر 0.005 است. در نتیجه قطر اولیه حباب با 200 مش گسسته‌سازی می‌شود. از این‌رو با استفاده از شبکه انتخاب شده امکان شبیه‌سازی و مطالعه دقیق تغییرات مرز مشترک حباب با مایع اطراف وجود خواهد داشت. با استفاده از اندازه شبکه بهینه تعیین شده مسأله الحاق عمودی جفت حباب گاز با شرایط ذکر شده توسط کد تدوین شده بررسی شده و نتایج در شکل 3 ارائه شده است. در این شکل نتایج حاصل از شبیه‌سازی برهم‌کنش و الحاق عمودی جفت حباب شبیه‌سازی شده با استفاده از روش لول‌ست در پژوهش حاضر با نتایج تجربی برتون و کوروتنی [34] مقایسه شده است. در این شکل حرکت، برهم‌کنش و الحاق عمودی جفت حباب گاز در ستون مایع لزج در سه گام زمانی مهم شامل حرکت جفت حباب به سمت هم آستانه الحاق و نیز الحاق جفت حباب نشان داده شده است. با بررسی نتایج نشان داده شده در شکل 3 ملاحظه می‌شود که نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی صورت گرفته در پژوهش حاضر برای بررسی برهم‌کنش و الحاق عمودی جفت حباب گاز با استفاده از روش لول‌ست همخوانی خوبی با نتایج تجربی موجود دارد. در نتیجه روش عددی معرفی شده در این پژوهش دقت قابل قبولی برای مدل‌سازی برهم‌کنش و الحاق جفت حباب‌ها دارد.

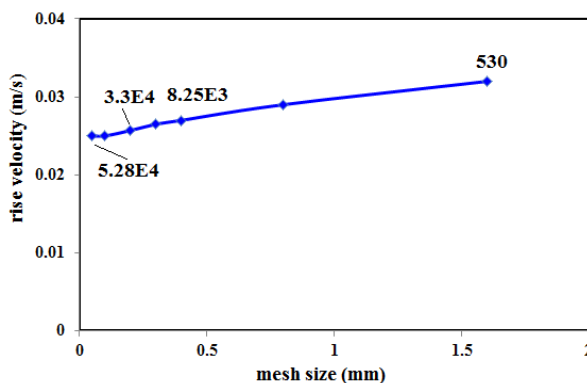


Fig. 2 Test of mesh independency

شکل 2 آزمون عدم وابستگی نتایج به اندازه شبکه محاسباتی

مرزها ساخته می‌شود [26]. شکل اولیه حباب‌ها در تمامی حالات مدل‌سازی گرد در نظر گرفته شده است. با توجه به این که رها شدن حباب‌ها از لحظه سکون مطالعه شده، توزیع سرعت اولیه در کل میدان حل برابر صفر فرض شده است. فشار اولیه نیز به صورت توزیع فشار هیدروستاتیک در نظر گرفته می‌شود.

### 5-3- گسسته‌سازی و حل عددی

حل معادلات حاکم بر مسأله، با استفاده از برنامه عددی تدوین شده در محیط برنامه نویسی فرترن انجام شده است. گسسته‌سازی معادلات در شبکه جابه‌جاشده و به روش حجم محدود صورت می‌گیرد. از الگوریتم سیمپل نیز برای ارتباط بین مؤلفه‌های سرعت و فشار استفاده می‌شود. جملات جابه‌جایی در معادلات با استفاده از روش کوپیک<sup>1</sup> گسسته‌سازی می‌شود. از روش اختلاف مرکزی نیز برای گسسته‌سازی جملات نفوذ معادلات استفاده می‌شود. برای حل دستگاه معادلات جبری حاصل از گسسته‌سازی معادلات از روش ضمنی قوی<sup>2</sup> استفاده می‌گردد [31]. ارتباط بین اندازه شبکه و گام زمانی نیز با ارضای شرط CFL برقرار می‌گردد. در تمامی حالات مختلف شبیه‌سازی عدد CFL همواره بین 0.5 تا 0.9 انتخاب می‌گردد.

### 4- اعتبارسنجی و صحت‌گذاری

به منظور گام اول اعتبارسنجی نتایج، آزمون عدم وابستگی عدد موینگی به عدد لاپلاس انجام شده و نتایج در جدول 1 ارائه شده است. هر چه تغییر عدد موینگی برای مقادیر مختلف عدد لاپلاس کمتر باشد، روش دقیق‌تر است. عدد لاپلاس و موینگی به ترتیب به صورت روابط (16,17) بیان می‌شوند [24].

$$La = \frac{\sigma \rho_l d}{\mu_l^2} \quad (16)$$

$$Ca = \frac{|\vec{V}| \mu}{\sigma} \quad (17)$$

مطابق نتایج ارائه شده در جدول 1 ملاحظه می‌شود که تغییرات عدد موینگی در شبیه‌سازی عددی صورت گرفته در پژوهش حاضر به ازای مقادیر مختلف عدد لاپلاس بسیار کم است. در نتیجه دقت شبیه‌سازی صورت گرفته قابل قبول است.

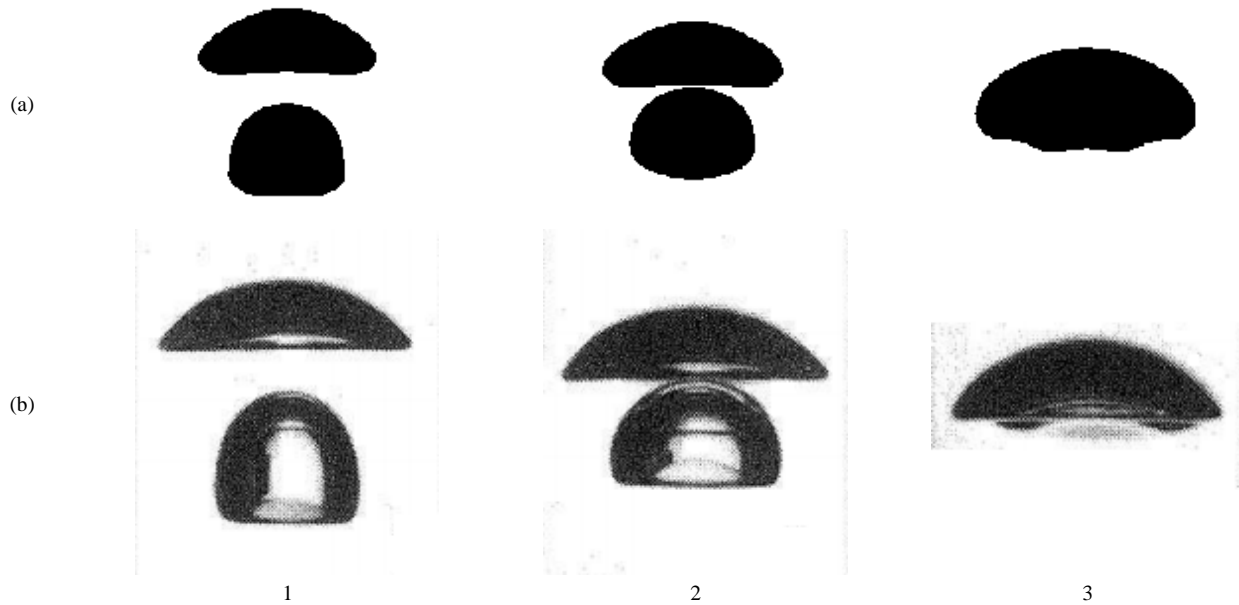
به منظور گام دوم در اعتبارسنجی نتایج برهم‌کنش و الحاق عمودی جفت حباب گاز با استفاده از روش لول‌ست بررسی شده است. به طور کلی دینامیک حباب را می‌توان برحسب دو عدد بی‌بعد مورتن و اتوس بیان کرد که این دو عدد به ترتیب در روابط (18,19) ارائه شده است [34].

جدول 1 عدم وابستگی عدد موینگی به عدد لاپلاس

Table 1 Independence of capillary number to Laplace number				
عدد لاپلاس (La)	12000	1200	120	12
لول‌ست (تحقق حاضر)	1.6177	1.6129	1.6121	1.6121
المان محدود عدد موینگی [24]	8.310	8.590	8.620	8.510
حجم سیال [32]	0.222	0.218	0.218	0.218
تعقیب جبهه [33]	0.599	0.571	0.676	0.850

<sup>1</sup> QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics)

<sup>2</sup> Strongly Implicit Procedure



**Fig. 3** Validation of the results of research by comparison of the results with experimental results in the case of vertical coalescence of bubbles; a- numerical results of this research using level set method, b- experimental results [35]

شکل 3 صفحه گذاری نتایج حاصل از پژوهش از طریق مقایسه نتایج عددی با نتایج تجربی در حالت الحاق عمودی جفت حباب؛ الف- نتایج عددی پژوهش حاضر با استفاده از روش لول‌ست، ب- نتایج تجربی [35]

همان‌طور که در شکل 4 نشان داده شده است حباب‌ها نخست گرد بوده و در حالت سکون قرار دارند. این حباب‌ها در اثر نیروی شناوری ناشی از اختلاف چگالی فاز گازی (حباب‌ها) و نیز مایع اطراف در داخل ستون مایع لزج ساکن صعود می‌کنند. با صعود حباب‌ها در ستون مایع، ناحیه کم فشار در زیر آن‌ها شکل می‌گیرد که این ناحیه دنباله نامیده می‌شود. در ناحیه دنباله زیر حباب فشار کمتر از نقاط مجاور حباب است. بخشی از حباب پایینی که در زیر حباب بالایی قرار می‌گیرد، در مقایسه با بخشی از حباب که خارج از ناحیه زیر حباب بالایی است از نیروی درگ کمتری در حین صعود متأثر می‌گردد. در نتیجه نیروی مقاوم در برابر حرکت حباب پایینی در امتداد مایل به سمت چپ کمتر از نیروی مقاوم مؤثر در برابر حرکت آن در امتداد عمودی است. از این‌رو حباب پایینی به سمت ناحیه کم فشار حباب بالایی کشیده می‌شود. در نتیجه این اثر حباب پایینی به سمت چپ متمایل شده و به دلیل نیروی مکشی مؤثر بر آن در ستون مایع ساکن شتاب می‌گیرد؛ به طوری که سرعت حباب پایینی بیش از حباب بالایی می‌شود. شکل حباب بالایی نیز در حین این برهم‌کنش دچار تغییر شکل می‌شود؛ به طوری که سطح زیرین آن در اثر حرکت حباب پایینی به سمت آن و به دلیل فشار آوردن لایه مایع توسط حباب پایینی به سمت حباب بالایی، به سمت داخل تورفتگی پیدا می‌کند. حرکت صعودی این حباب‌ها ادامه پیدا می‌کند تا این‌که بالاخره حباب پایینی به حباب بالایی رسیده و الحاق بین آن‌ها صورت می‌گیرد.

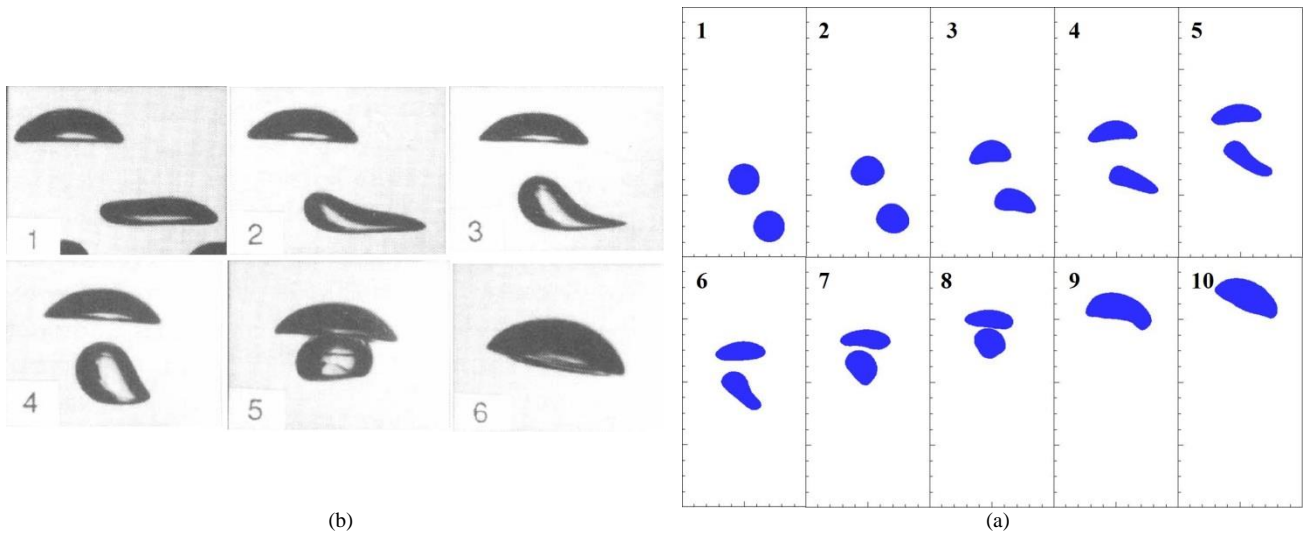
جفت حباب پس از الحاق حباب واحدی را تشکیل داده و پس از آن به صورت حباب واحد در ستون مایع صعود می‌کند. حباب ایجاد شده پس از الحاق، به دلیل برهم‌کنش نیروهای مختلف دارای شکل ناپایداری بوده و در راستای عرضی و طولی دچار ارتعاش می‌شود. حباب حاصل از الحاق پس از مدتی به حالت پایای خود رسیده و با همان حالت پایا، به حرکت صعودی خود در ستون مایع ادامه می‌دهد.

## 5- نتایج و بحث

پس از ارائه صفحه‌گذاری و اعتبارسنجی نتایج پژوهش حاضر در بخش پیشین نتایج مربوط به شبیه‌سازی عددی برهم‌کنش و الحاق مایل جفت حباب گاز در ستون مایع ساکن لزج با استفاده از روش لول‌ست در بخش حاضر ارائه می‌شود. هندسه مورد مطالعه در شکل 1 نشان داده شد.

شعاع اولیه هر یک از حباب‌ها برابر 5 میلی‌متر است. عدد اتوس جریان نیز برابر 16 و عدد مورتن آن برابر  $2 \cdot 10^{-4}$  است. فاصله اولیه عمودی بین مراکز حباب‌های مورد نظر سه برابر شعاع اولیه هر کدام از حباب‌هاست. فاصله افقی اولیه بین مراکز حباب‌ها نیز 1.6 برابر شعاع هر یک از حباب‌هاست. فواصل اولیه حباب‌ها با توجه به مقادیر تعیین شده در پژوهش‌های عددی و تجربی پیشین [36,35,7] تعیین شده تا نتایج حاصل از پژوهش با نتایج عددی و تجربی محققین پیشین قابل مقایسه باشد.

بررسی برهم‌کنش مایل حباب‌ها با شرایط ذکر شده در شکل 4 ارائه شده است. در این شکل حرکت جفت حباب در لحظات مختلف با نتایج تجربی بررتون و کوروتی [35] مقایسه شده است. مقایسه نتایج به دست آمده از روش لول‌ست با نتایج تجربی نشان می‌دهد که در لحظات مختلف حرکت حباب‌ها همخوانی بسیار خوبی بین آن‌ها وجود دارد. نتایج عددی دو بعدی حاصل در گام‌های زمانی مختلف تطابق قابل قبولی با نتایج تجربی داشته و پدیده پیچیده الحاق مایل حباب‌ها نیز به خوبی در شبیه‌سازی عددی صورت گرفته مدل شده است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش عددی لول‌ست حتی در حالت دو بعدی نیز به خوبی می‌تواند برهم‌کنش و الحاق مایل حباب‌ها به یکدیگر را شبیه‌سازی نماید. مقایسه نتایج عددی تحقیق حاضر با نتایج تجربی به صورت کیفی صورت گرفته است. به طور کلی مقایسه نتایج مربوط به تغییر شکل حباب‌ها و نیز الحاق و برهم‌کنش آن‌ها به یکدیگر در تحقیقات پیشین نیز به صورت کیفی انجام شده که این رویه در پژوهش حاضر نیز دنبال شده که در آن به بررسی تغییر شکل و برهم‌کنش جفت حباب‌ها پرداخته شده است.

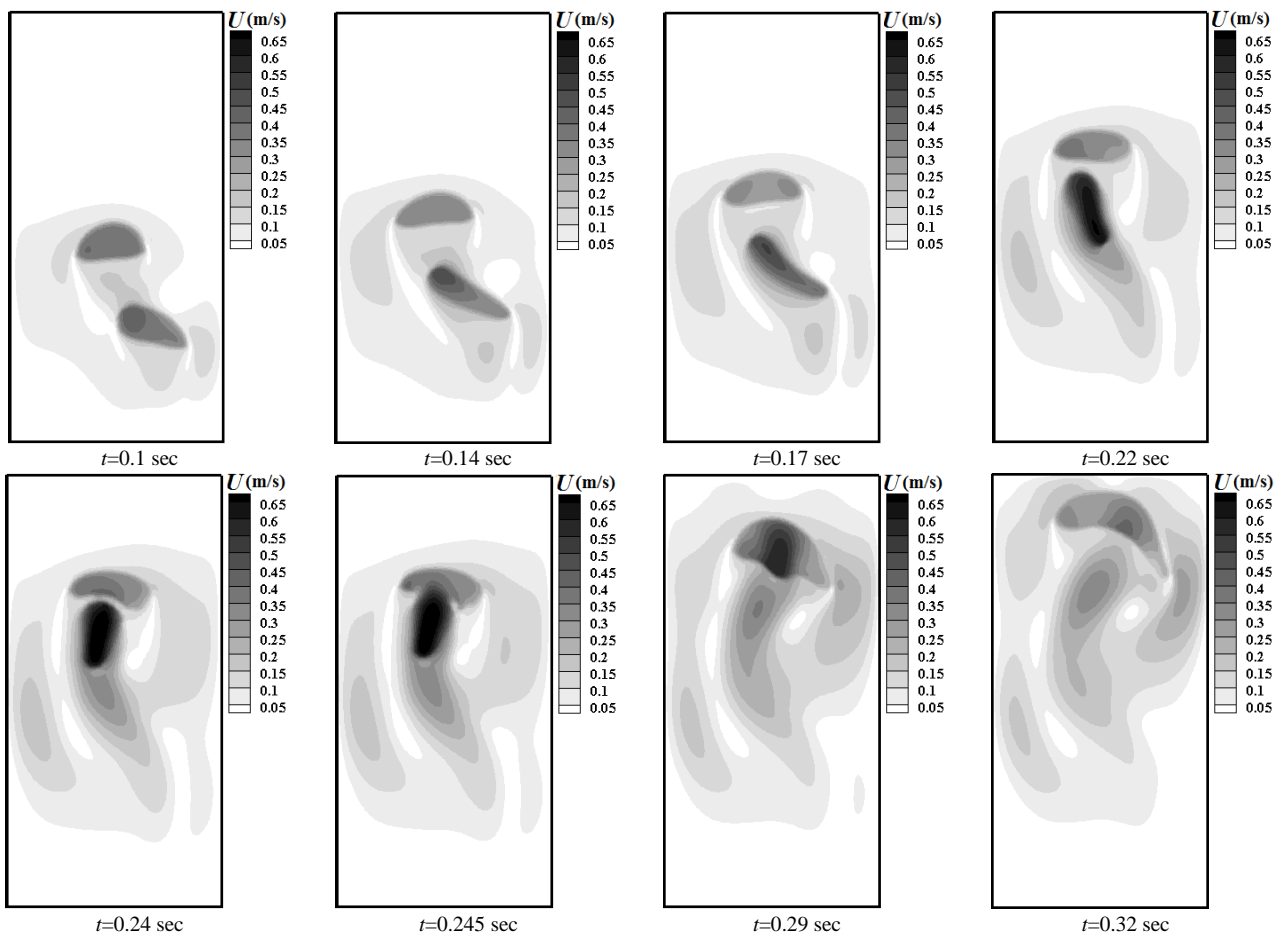


**Fig. 4** Comparison of the results of oblique coalescence of two bubbles obtained in numerical simulation of present research with experimental results; a- results of present research using the Level Set method; b- experimental results taken from [35]

شکل 4 مقایسه برهم‌کنش و الحاق مایل جفت حباب گاز شبیه‌سازی شده در تحقیق حاضر با نتایج تجربی؛ الف- نتایج عددی تحقیق حاضر با استفاده از روش لول‌ست، ب- نتایج تجربی [35]

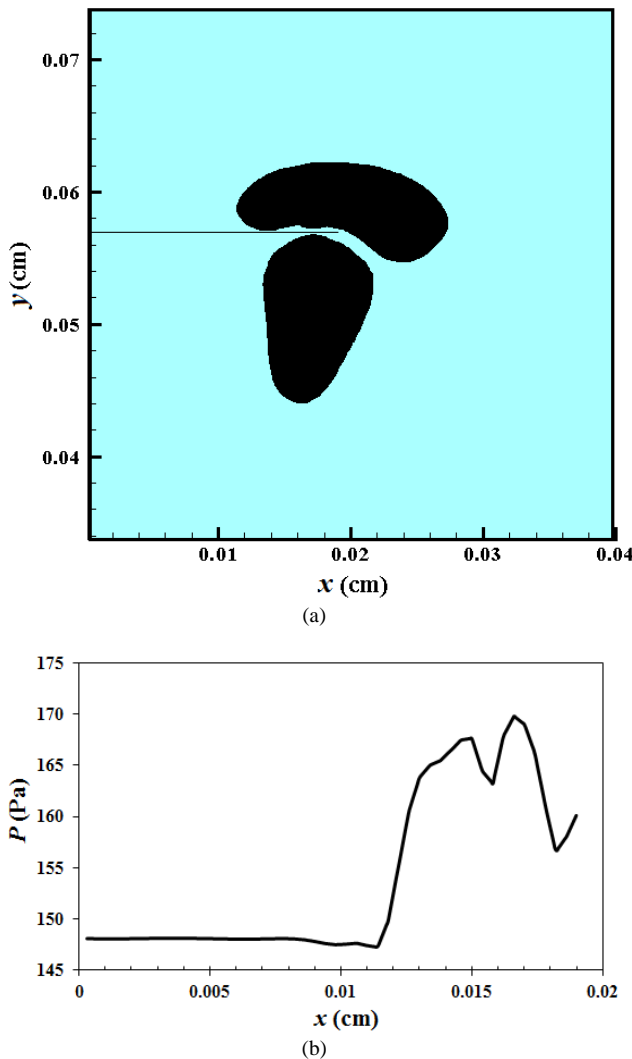
از نواحی خارج از زیر حباب‌ها است. به طور کلی، عموماً سرعت و فشار جریان سیال رابطه معکوسی داشته و افزایش مقدار بردار سرعت جریان می‌تواند معیاری از کاهش فشار آن باشد.

کانتورهای سرعت حباب‌های مورد مطالعه در گام‌های زمانی مختلف در طی صعود و اندرکنش جفت حباب در ستون مایع در شکل 5 نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که در فضای زیر حباب‌ها مقدار بردار سرعت بیشتر



**Fig. 5** Magnitude of velocity vector in different time steps during oblique interactions of bubbles

شکل 5 مقدار بردار سرعت در گام‌های مختلف زمانی طی برهم‌کنش مایل حباب‌ها



**Fig. 6** Pressure distribution in the thin liquid layer between two bubbles before coalescence; a- location of baseline, b- pressure diagram on baseline

شکل 6 توزیع فشار در لایه نازک مایع بین دو حباب پیش از الحاق؛ الف- موقعیت خط مبنای مورد نظر، ب- نمودار فشار بر خط مبنا

در این ناحیه توزیع فشار برابر وزن سیال تا بالای کانال است. با توجه به اینکه همه این نقاط دارای عمق یکسانی هستند، بنابراین توزیع فشار هیدرواستاتیکی در آن‌ها نیز یکنواخت است.

در نمودار 6-b محدود  $x=1.15$  cm به بعد مربوط به نقاط مابین دو حباب است. با ورود به این ناحیه فشار افزایش پیدا کرده و در نزدیک‌ترین فاصله بین دو حباب که لایه مایع بین آن‌ها کمترین ضخامت و بیشترین انحنا را پیدا می‌کند، فشار به بیشینه مقدار خود می‌رسد. البته در نمودار اندکی پستی و بلندی نیز وجود دارد که مربوط به انحنای متغیر حباب بالایی و حباب پایینی در لایه نازک مایع است. این تغییر در انحنا سبب تغییر در ضخامت لایه مایع شده که در نتیجه منجر به تغییرات مقدار فشار می‌گردد که در نقاط  $x=1.5$  cm به بعد نمودار مشخص است.

میانگین سرعت فاز گازی در کانال مورد مطالعه در لحظات مختلف ترسیم و در شکل 7 نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود با گذشت زمان سرعت میانگین صعودی فاز گازی جریان (مؤلفه سرعت در امتداد عمودی صعود) در حال افزایش است (لحظه صفر ثانیه تا خط 1).

در نتیجه با کاهش فشار در زیر حباب‌ها که ناشی از دنباله زیر حباب است، حباب پایینی به سمت حباب بالایی کشیده می‌شود که این امر در لحظه  $t=0.1$  sec مشهود است. در نتیجه این اثر حباب پایینی به سمت چپ یعنی به دنباله زیر حباب بالایی کشیده می‌شود ( $t=0.14$  sec).

همان‌طور که در لحظه  $t=0.17$  sec نشان داده شده است، با حرکت حباب پایینی به سمت ناحیه زیر حباب بالایی به لایه مایع بین دو حباب توسط حباب پایینی فشار وارد می‌شود که این امر سبب تغییر شکل و منحرف شدن حباب بالایی نیز می‌شود. در نتیجه این اثر حباب بالایی نیز به سمت چپ متمایل می‌شود. این پدیده سبب می‌شود که میدان جریان سیال در داخل کانال مورد نظر متقارن نباشد. نیروی مکشی وارد شده به حباب پایینی در اثر ناحیه کم فشار زیر حباب بالایی سبب افزایش سرعت صعودی آن می‌گردد. با ملاحظه کانتور سرعت در لحظات  $t=0.22$  sec و  $t=0.24$  sec این پدیده نشان داده شده است.

با تداوم کشیده شدن حباب پایین به سمت حباب بالایی همان‌طور که در لحظه  $t=0.24$  sec نشان داده شده است، حرکت حباب پایینی سبب متمایل شدن حباب بالایی به سمت راست می‌گردد و ناحیه کم فشار زیر آن همچنان حباب پایینی را به سمت خود می‌کشد و از این به بعد حرکت حباب‌ها به سمت راست کانال متمایل می‌گردد. به دلیل افزایش سرعت صعودی حباب پایینی در مقایسه با حباب بالایی فاصله دو حباب در طی صعود به تدریج کاهش می‌یابد؛ تا این‌که سرانجام دو حباب به هم رسیده و پدیده الحاق بین آن‌ها به وقوع می‌پیوندد ( $t=0.245$  sec).

دو حباب پس از ادغام درهم تشکیل حباب واحد بزرگ‌تری را می‌دهند و از آن پس به صورت یک حباب واحد در ستون مایع لزج به حرکت صعودی خود ادامه می‌دهند. این پدیده‌ها نیز در شکل 5 در لحظات  $t=0.29$  sec و  $t=0.32$  sec نشان داده شده است. پس از برخورد حباب‌ها به یکدیگر و تشکیل یک حباب بزرگ‌تر توزیع سرعت در داخل حباب ایجاد شده، یکنواخت می‌شود و این حباب به تدریج از نظر سرعت و شکل به حالت پایدار خود می‌رسد.

با توجه به این‌که حباب‌ها از لحظه سکون در کانال مایع رها شده و مایع موجود در اطراف حباب‌ها نیز در ابتدا ساکن بوده‌اند، میدان جریان ایجاد شده در داخل کانال ناشی از حرکت صعودی حباب‌ها بوده و همان‌طور که در شکل‌ها نیز مشهود است، میدان جریان ایجاد شده محدود به اطراف حباب‌هاست.

با حرکت حباب پایینی به سمت حباب بالایی به لایه مایع بین دو حباب فشار وارد شده و زمانی که دو حباب به هم نزدیک می‌شوند، لایه نازک پرفشاری بین آن دو تشکیل می‌شود. چنان‌چه اینرسی حباب پایینی بتواند به نیروی دافعه ناشی از آن لایه پرفشار غلبه کند، آن‌گاه الحاق بین دو حباب صورت می‌گیرد؛ در غیر این صورت دو حباب در اثر غلبه نیروی دافعه از هم دور شده و یا در اثر توازن بین نیروهای جاذبه و دافعه فاصله تعادلی بین آن‌ها ایجاد می‌شود؛ در هر دو حالت اخیر الحاق بین حباب‌ها صورت نمی‌گیرد. توزیع فشار در لایه نازک مایع بین دو حباب در آستانه الحاق در شکل 6 نشان داده شده است.

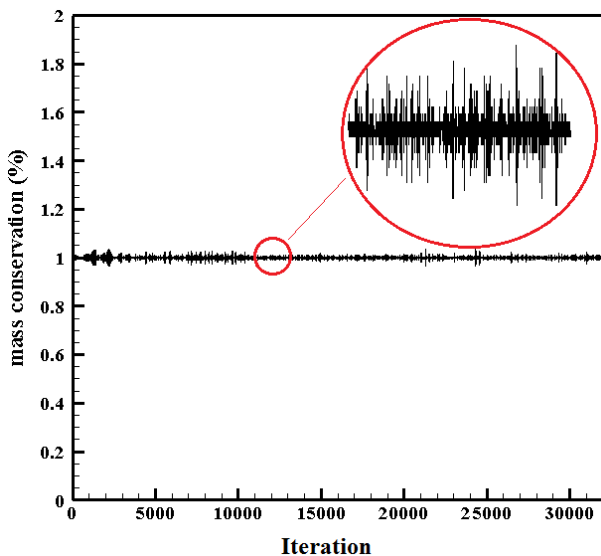
موقعیت نقاط مورد نظری که در لایه نازک بین دو حباب قرار گرفته است ( $y=5.7$  cm)، در شکل 6-a و توزیع فشار بر خط مورد نظر نیز در شکل 6-b نشان داده شده است. با ملاحظه شکل 6-b مشاهده می‌شود که در ناحیه اول نمودار (یعنی  $x=0.0$  cm تا  $x=1.15$  cm)، توزیع فشار ثابت است.



که این حالت با خط 5 در شکل 8 مشخص شده است. در ناحیه 5-6 شکل 7 که مربوط به فرایند الحاق مایل جفت حباب است، سرعت عمودی فاز گاز که میانگین سرعت صعودی هر دو حباب است، اندکی افزایش می‌یابد. علت این پدیده آن است که با الحاق حباب پایینی به حباب بالایی به صورت مقطعی از حرکت افقی حباب بالایی کاسته می‌شود، زیرا قبل از الحاق حرکت افقی حباب بالایی بیش از حباب پایینی است. با الحاق حباب پایینی به بالایی حباب بالایی روبه بالا رانده می‌شود (تصاویر 8 و 9 در شکل 4-a).

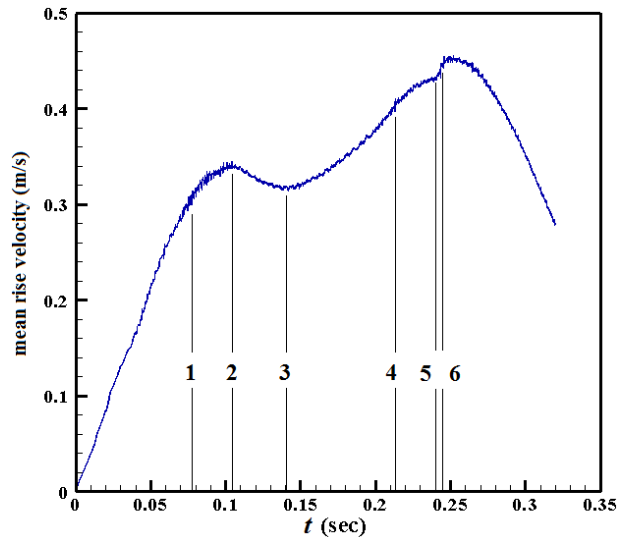
پس از الحاق حباب‌ها مشاهده می‌شود که از ناحیه 6 به بعد در شکل 7، از سرعت عمودی حباب‌ها کاسته شده است. این کاهش به دو دلیل اصلی است؛ نخست این‌که پس از الحاق حباب‌ها، شکل و وضعیت حباب حاصل ناپایدار می‌شود. حباب حاصل از الحاق در راستای طولی و عرضی ارتعاش می‌کند که در نتیجه آن هم انرژی حباب مستهلک گشته و هم به دلیل پهن‌شدگی عرضی حباب و توزیع گاز در داخل آن در راستای عرضی از سرعت عمودی حباب کاسته می‌شود. از طرف دیگر همان‌طور که در تصاویر 9 و 10 شکل 4-a نیز مشخص است، حباب‌ها پس از الحاق به سطح انتهایی کانال نزدیک می‌شوند. با توجه به این‌که سطح بالایی کانال به صورت دیواره جامد در نظر گرفته شده است، با نزدیک شدن حباب به سطح مورد نظر به دلیل اثرات ناشی از دیواره به حباب فشار وارد می‌شود. در نتیجه از سرعت صعودی حباب‌ها به سرعت کاسته می‌شود.

نمودار تغییرات جرم حباب‌های مورد مطالعه در طی حرکت در ستون مایع در شکل 8 نشان داده شده است. همان‌طور که بیان شد در تحقیق حاضر برای شبیه‌سازی عددی اندرکنش و الحاق مایل حباب‌ها از روش لول‌ست استفاده شده است. یکی از مشکلات اساسی روش لول‌ست کسب یا کسر غیرواقعی جرم در هندسه‌های پیچیده مرز مشترک دوفاز است. با استفاده از روش بازسازی لول‌ست و نیز حلقه کنترل هندسی پیشنهاد شده در این پژوهش که در بخش مدل‌سازی ریاضی مسأله شرح داده شد، بقای جرمی روش لول‌ست در این تحقیق به خوبی حفظ شده است.



**Fig. 8** Mass conservation of the level set method used for simulation of oblique interaction and coalescence of a pair of bubbles

شکل 8 بقای جرم روش لول‌ست برای شبیه‌سازی برهم‌کنش و الحاق مایل جفت حباب



**Fig. 7** Mean rising velocity of gas phase in the liquid column

شکل 7 سرعت میانگین صعودی فاز گاز در ستون مایع لزج

علت این پدیده آن است که در لحظه صفر حباب‌ها در حالت سکون در مایع ساکن قرار دارند. این حباب‌ها در لحظه صفر رها شده و در اثر نیروی شناوری در داخل ظرف صعود می‌کنند؛ بنابراین سرعت آن‌ها با گذشت زمان در داخل مایع افزایش می‌یابد.

با ملاحظه شکل 7 مشخص می‌شود که در ناحیه بین خطوط 1 و 2 مشخص شده در نمودار از شیب افزایش سرعت میانگین صعودی فاز گازی (سرعت متوسط حباب‌ها در راستای عمودی) کاسته می‌شود. به طوری که از ناحیه 2 به بعد سرعت میانگین صعود دچار کاهش شده و این پدیده تا خط 3 ادامه می‌یابد. دلیل این پدیده آن است که در ناحیه 1 دنباله زیر حباب بالایی شکل گرفته و حباب پایینی تحت تأثیر ناحیه کم فشار آن دنباله به سمت حباب بالایی کشیده می‌شود (تصویر 3 در شکل 4-a). با توجه به این‌که حباب بالایی در سمت چپ کانال قرار گرفته (شکل 1)، حباب پایینی در امتداد بالا و به سمت چپ کانال متمایل می‌شود؛ در نتیجه حباب پایینی علاوه بر صعود در راستای عمودی در امتداد چپ نیز به سمت حباب بالایی کشیده می‌شود. از این‌رو مؤلفه افقی سرعت آن حباب افزایش یافته و از سرعت عمودی آن کاسته می‌شود که این وضعیت نیز در تصاویر 4 و 5 شکل 4-a مشهود است. با تداوم این وضعیت سرعت میانگین عمودی حباب‌ها رو به کاهش گذاشته و میزان حرکت عمودی آن‌ها کم می‌شود تا این‌که حباب پایینی به طور کامل به زیر حباب بالایی کشیده شده و از این به بعد شرایط برعکس شده و حرکت افقی آن‌ها کم می‌شود؛ به طوری که حرکت آن‌ها کاملاً عمودی شده که در این حالت سرعت عمودی حباب‌ها افزایش می‌یابد. سرعت میانگین صعودی فاز گازی در ناحیه 3-4 شکل 7 و وضعیت حباب‌ها نیز در تصویر 7 شکل 4-a مشخص است.

کشیده شدن حباب پایینی به زیر حباب بالایی سبب هل داده شدن حباب بالایی به سمت راست کانال در ادامه حرکت صعودی حباب‌ها می‌گردد که این پدیده در تصویر 8 شکل 4-a نشان داده شده است. به این ترتیب به همراه حرکت صعودی حباب‌ها دوباره حرکت افقی حباب‌ها آغاز می‌شود که البته این بار این حرکت افقی به سمت راست متمایل می‌شود؛ در نتیجه آن از سرعت عمودی حباب‌ها کاسته می‌شود. به همین دلیل نیز در ناحیه 4-5 شکل 7 از شیب سرعت عمودی فاز گازی کاسته شده است. این روند ادامه پیدا کرده تا این‌که دو حباب به هم رسیده و الحاق بین آن‌ها صورت می‌گیرد

نتایج تحقیق دو بعدی حاضر با نتایج تجربی و عددی موجود در حالت تک حباب و جفت حباب مقایسه گردید و نتیجه شد که تطابق خوبی بین آن‌ها وجود دارد؛ بنابراین روش استفاده شده در این تحقیق از دقت قابل قبولی برای شبیه‌سازی اندرکنش و الحاق مایل حباب‌ها برخوردار است.

همچنین دینامیک کامل اندرکنش مایل حباب‌ها در ستون مایع لزوج ساکن اعم از منشا نیروهای جاذبه دو حباب به یکدیگر و نیز تغییرات سرعت فاز گازی در جریان دوفازی مورد مطالعه در لحظات مختلف جریان شرح داده شد. با استفاده از معادلات بازسازی و نیز حلقه کنترل هندسی جرم حباب‌ها که برای اولین بار در این پژوهش در روش لول‌ست استفاده شده است، از انتشار خطای جرمی روش لول‌ست جلوگیری شد؛ به طوری که حداکثر خطای عددی روش لول‌ست در شبیه‌سازی الحاق مایل جفت حباب گاز کمتر از 4% بوده است.

همچنین نشان داده شد که در صورت عدم استفاده از روش کنترل هندسی جرم با وجود استفاده از معادلات بازسازی لول‌ست، امکان مدل کردن پدیده الحاق مایل حباب‌ها با استفاده از این روش عددی در مطالعه موردی در نظر گرفته شده وجود ندارد؛ در حالی که با استفاده از حلقه کنترل هندسی جرم مطرح شده، این پدیده به خوبی شبیه‌سازی گردید؛ بنابراین روش عددی لول‌ست با استفاده از روش کنترل هندسی جرم ارائه شده در این مقاله می‌تواند با دقت قابل قبولی برای مطالعه دینامیک اندرکنش و الحاق مایل حباب‌ها مورد استفاده قرار گیرد.

## 7- مراجع

- [1] A.R. Sarhan, J. Naser, G. Brooks, Effects of particle size and concentration on bubble coalescence and froth formation in a slurry bubble column, *Particulology*, Vol. 36, No. 1, pp. 82-95, 2018.
- [2] A. Hadidi, M. R. Ansari, Magnetic field effects on a bubble behavior in two-phase flow by using a Level Set method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 1-10, 2011. (in Persian فارسی)
- [3] W. Abbassi, S. Besbes, M. Elhajem, H. Ben Aissia, J.Y. Champagne, Numerical simulation of free ascension and coaxial coalescence of air bubbles using the volume of fluid method (VOF), *Computers & Fluids*, Vol. 161, No. 1, pp. 47-59, 2018.
- [4] H. Yuan, A. Prosperetti, On the in-line motion of two spherical bubbles in a viscous fluid, *Fluid Mechanics*, Vol. 278, No. 1, pp. 325-349, 1994.
- [5] T. Sanada, M. Watanabe, T. Fukano, Effects of viscosity on coalescence of a bubble upon impact with a free surface, *Chemical Engineering Science*, Vol. 60, No. 1, pp. 5372-5384, 2005.
- [6] J. Katz, C. Meneveau, Wake-Induced relative motion of bubbles rising in line, *Multiphase Flow*, Vol. 22, No. 1, pp. 239-258, 1996.
- [7] M. SintAnnaland, N. G. Deen, J. A. M. Kuipers, Numerical simulation of gas bubbles behaviour using a three-dimensional volume of fluid method, *Chemical Engineering Science*, Vol. 60, No. 1, pp. 2999-3011, 2005.
- [8] A. Hadidi, *Effects of Magnetic Field on a Single Bubble in Two-Phase Bubbly Flow by Using a Level Set Method*, MSc Thesis, Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, 2011. (in Persian فارسی)
- [9] A. Gupta, R. Kumar, Lattice Boltzmann simulation to study multiple bubble dynamics, *Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 1, pp. 5192-5203, 2008.
- [10] P.C. Duineveld, Bouncing and coalescence of bubble pairs rising at high Reynolds number in pure water or aqueous surfactant solutions, *Applied Scientific Research*, Vol. 58, No. 1, pp. 409-439, 1998.
- [11] D. Legendre, J. Magnaudet, G. Mougouin, Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid, *Fluid Mechanics*, Vol. 497, No. 1, pp. 133-166, 2003.
- [12] T. Sanada, A. Sato, M. Shirota, M. Watanabe, Motion and Coalescence of a Pair of Bubbles Rising Side by Side, *Chemical Engineering Science*, Vol. 64, No. 1, pp. 2659-2671, 2009.
- [13] A. Hadidi, *Numerical study of external uniform magnetic field effect on interaction of two bubbles in a viscous fluid column*, PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz, 2015. (in Persian فارسی)
- [14] A. Hadidi, Numerical study of the uniform magnetic field effect on the interaction of bubbles in viscous liquid column, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 11, pp. 293-302, 2015. (in Persian فارسی)
- [15] A. Hadidi, Numerical simulation of dielectric bubbles coalescence under the effects of uniform magnetic field, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Vol. 30, No. 3, pp. 165-184, 2016.

با توجه به نمودار نشان داده شده در شکل 8 ملاحظه می‌شود که با انحراف جرم از حالت اولیه، میزان جرم کم یا زیاد شده، توسط حلقه کنترل هندسی جرمی معرفی شده تصحیح شده و از انتشار این خطاها جلوگیری می‌کند، به طوری که جرم کل حباب‌ها در هر گام از محاسبات حول مقدار اولیه، با دامنه کم نوسان می‌کند. در مجموع با وجود الحاق مرزها و اعوجاج شدید سطح مشترک در طی اندرکنش و الحاق مایل حباب‌ها بیشترین خطای جرمی روش لول‌ست استفاده شده کمتر از 4% بوده است؛ بنابراین نتیجه می‌شود که روش تعقیب مرز لول‌ست با استفاده از معادلات بازسازی و نیز حلقه کنترل هندسی جرم به خوبی قادر به شبیه‌سازی عددی برهم‌کنش و الحاق مایل حباب‌ها در شرایط در نظر گرفته شده، است. با توجه به این‌که در روش لول‌ست خطای کسر جرمی گاهی به 100% نیز رسیده و کل حباب‌ها به دلیل خطای عددی ناپدید می‌شوند، محدوده نمودار بقای جرمی در شکل 8 تا 100% در نظر گرفته شده است.

کارایی حلقه تصحیح هندسی جرم ارائه شده در این پژوهش برای روش لول‌ست در کنترل جرم حباب‌ها در رژیم‌های مختلف نیز، در جدول 2 بررسی شده است. حالت‌های بررسی شده در جدول مربوط به رژیم کروی حباب‌ها است. در دو ردیف اول جدول که به ترتیب متناظر با اعداد رینولدز 0.15 و 0.5 هستند، نیروی کشش سطحی بر سایر نیروهای مؤثر بر شکل حباب‌ها غالب بوده به طوری که در آن شرایط تک حباب در صورت صعود آزادانه خود تحت نیروی شناوری به صورت کروی باقی می‌ماند، اما در ردیف سوم که متناظر با عدد رینولدز 30 است، حباب به سمت رژیم بیضوی متمایل می‌گردد (مطابق با رژیم‌های نمودار گریس [14]). خطای روش لول‌ست در هر ردیف از جدول در حالتی که از حلقه کنترل هندسی جرمی استفاده شده و نیز در حالتی که از این حلقه استفاده نشده باشد، مقایسه شده است. با توجه به تغییر شکل بیشتر حباب‌ها در عدد رینولدزهای بالاتر که عموماً با افزایش سرعت و کاهش اثر نیروهای کشش سطحی همراه است، خطای عددی روش لول‌ست نیز محسوس‌تر است؛ به ویژه در حالتی که از کنترل هندسی جرم استفاده نشود. به طور کلی با استفاده از حلقه کنترل هندسی جرم ارائه شده، حداکثر خطای جرمی روش لول‌ست از 4% تجاوز نمی‌کند؛ بنابراین عدم استفاده از حلقه کنترل هندسی جرم روش لول‌ست سبب مدل‌سازی نادرست شکل حباب‌ها نیز می‌گردد.

## 6- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر اندرکنش و الحاق مایل جفت حباب گاز در ستون مایع لزوج با استفاده از روش عددی لول‌ست مورد مطالعه قرار گرفت. تاکنون از این روش برای شبیه‌سازی الحاق مایل حباب‌ها استفاده نشده بود. برای مطالعه رفتار و دینامیک جفت حباب‌ها و نیز برهم‌کنش مایل آن‌ها به یکدیگر تحت نیروی شناوری، کد رایانه‌ای تدوین گردید که شامل معادلات بازسازی کامل برای کم کردن خطای جرمی روش لول‌ست است.

جدول 2 مقایسه خطای جرمی روش لول‌ست در رژیم‌های مختلف حباب‌ها

**Table 2** Comparison of mass dissipation of Level Set method for different regimes of bubbles

Eo	M	Re	درصد خطای جرمی	
			بدون حلقه هندسی	استفاده از حلقه هندسی کنترل جرمی
2	1	0.15	20	3.5
0.1	$1 \cdot 10^{-4}$	0.5	15	2.5
0.15	$1 \cdot 10^{-8}$	30	30	4

- [26] S. Osher, R. Fedkiw, *Level Set methods and dynamic implicit surfaces*, pp. 23-37, New York: Springer, 2003.
- [27] K. B. Deshpande, W. B. Zimmerman, Simulation of interfacial mass transfer by droplet dynamics using the level set method, *Chemical Engineering Science*, Vol. 61, No. 1, pp. 6486-6498, 2006.
- [28] M. T. Mehrabani, M. R. Heyrani Nobari, A numerical study of bubbly flow in a curved duct using front tracking method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 179-188, 2016. (in Persian فارسی)
- [29] J. Hua, J. Lou, Numerical simulation of bubble rising in viscous liquid, *Computational Physics*, Vol. 222, No. 1, pp. 769-795, 2007.
- [30] A. Hadidi, M. R. Ansari, Effects of magnetic field direction and strength on square lid-driven cavity flow, *Fluid Mechanics and Aerospace Scientific Research Journal*, Vol. 1, No. 2, pp. 85-98, 2013. (in Persian فارسی)
- [31] J. H. Ferziger, M. Peric, *Computational methods for fluid dynamics*, Third Edition, pp. 71-89, Berlin: Springer, 2002.
- [32] S. Shin, D. Juric, Modeling three-dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity, *Computational Physics*, Vol. 180, No. 1, pp. 427-470, 2002.
- [33] S. Popinet, S. Zaleski, A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension, *Numerical Methods in Fluids*, Vol. 30, No. 1, pp. 775-793, 1999.
- [34] A. Hadidi, Effects of uniform magnetic field on the interaction of side-by-side rising bubbles in a viscous liquid, *Chemical Engineering*, Vol. 33, No. 3, pp. 795-805, 2016.
- [35] G. Brereton, D. Korotney, Coaxial and oblique coalescence of two rising bubbles, *Proceedings of the ASME Applied Mechanics Conference*, Ohio: ASME, pp. 30-47, 1991.
- [36] S. Anwar, Lattice Boltzmann modeling of buoyant rise of single and multiple bubbles, *Computers & Fluids*, Vol. 88, No. 1, pp.430-439, 2013.
- [16] R.H. Chen, G. H. Su, S.Z. Qiu, Y. Ishiwatari, Y. Oka, Numerical investigation on coalescence of bubble pairs rising in a stagnant liquid, *Chemical Engineering Science*, Vol. 66, No. 1, pp. 5055-5063, 2011.
- [17] X. Miao, D. Lucas, Z. Ren, S. Eckert, G. Gerbeth, Numerical modeling of bubble-driven liquid metal flows with external static magnetic field, *Multiphase Flow*, Vol. 48, No. 1, pp. 32-45, 2013.
- [18] D. Bothe, VOF-simulations of fluid particle dynamics, *Proceedings of the 11th Workshop on Two-Phase Flow Predictions*, Merseburg, Germany, pp. 1-13, 2005.
- [19] M. Ohta, T. Imura, Y. Yoshida, M. Sussman, A computational study of the effect of initial bubble conditions on the motion of a gas bubble rising in viscous liquids, *Multiphase Flow*, Vol. 31, No. 1, pp. 223-237, 2005.
- [20] A. Hadidi, M.R. Ansari, Numerical Study of Bubbly Two-Phase Flow under Magnetic Field Effect by Using a Level Set Method, *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Thermal Power Plants (IEEE)*, Tehran, Iran, October 18-19, 2011. (In Persian فارسی)
- [21] M. R. Ansari, M. E. Nimvari, Bubble viscosity effect on internal circulation within the bubble rising due to buoyancy using the level set method, *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 38, No. 1, pp. 2770-2778, 2011.
- [22] M. Sussman, E. Fatemi, P. Smereka, S. Osher, An improved level set method for incompressible tow-phase flows, *Computers & Fluids*, Vol. 27, No. 1, pp. 663-680, 1998.
- [23] M. R. Ansari, A. Hadidi, M. E. Nimvari, Effect of a uniform magnetic field on dielectric two-phase bubbly flows using the level set method, *Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 324, No. 1, pp. 4094-4101, 2012.
- [24] E. Marchandise, P. Geuzaine, N. Chevaugeon, J. Remacle, A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for the computation of bubble dynamics, *Computational Physics*, Vol. 225, No. 1, pp. 949-974, 2007.
- [25] J.U. Brackbill, C. Kothe, D.B. Zemach, A continuum method for modeling surface tension, *Computational Physics*, Vol. 100, No. 2, pp. 335-354, 1992.