



## تحلیل فلاتر بال هواپیما و جرم خارجی متصل به آن به صورت الاستیک

حمید پورشمسی<sup>1</sup>، عباس مزیدی<sup>2\*</sup>، سید احمد فاضل زاده حقیقی<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد

3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

\* صندوق پستی 8916147948، amazidi@yazd.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 مرداد 1393

پذیرش: 20 مهر 1393

ارائه در سایت: 01 آذر 1393

کلید واژگان:

فلاتر

بال هواپیما

جرم خارجی

اتصال الاستیک

### چکیده

در این مقاله فلاتر بال هواپیما و جرم خارجی متصل به آن با در نظر گرفتن خاصیت الاستیک در محل اتصال مورد بررسی قرار گرفته است. بال به صورت تیر یکسر گیردار یکنواخت با زاویه عقبگرد در نظر گرفته شده است و جرم خارجی با یک فنر و میراگر به آن متصل شده است. معادلات آیروالاستیک بال و جرم خارجی با استفاده از اصل هامیلتون به دست آمده است که به صورت معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌باشند. برای شبیه‌سازی جریان سیال از مدل اصلاح شده پیترز استفاده شده است. در نهایت با به کارگیری روش مودهای فرضی، معادلات پاره‌ای به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. تاثیر حالت‌های مختلف عدم اتصال جرم خارجی به بال، اتصال صلب جرم خارجی به بال و اتصال الاستیک جرم خارجی به بال بر سرعت فلاتر بررسی شده است. برای صحت‌گذاری بر پژوهش انجام شده نتایج تحلیل فلاتر بال با پژوهش‌های پیشین مقایسه شده است که همخوانی خوبی بین نتایج دیده می‌شود. سپس جرم خارجی به صورت الاستیک به بال متصل شده و تاثیر پارامترهای مختلف همچون موقعیت نصب جرم خارجی، زاویه عقبگرد بال و همچنین اندازه جرم خارجی بر سرعت فلاتر بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش فاصله جرم خارجی از ریشه بال در جهت طولی و همچنین انتقال جرم خارجی به سمت لبه حمله بال در جهت عرضی، سرعت فلاتر کاهش می‌یابد و همچنین افزایش جرم خارجی و ثابت فنر اتصال باعث کاهش سرعت فلاتر مجموعه می‌شود. در تمامی حالت‌ها با افزایش زاویه عقبگرد بال سرعت فلاتر افزایش می‌یابد.

## Flutter analysis of an aircraft wing carrying, elastically, an external store

Hamid Pourshamsi<sup>1</sup>, Abbas Mazidi<sup>2\*</sup>, Seyed Ahmad Fazelzadeh

1, 2- Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

3- Department of Mechanical Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

\*P.O.B. 8916147948 Yazd, Iran, amazidi@yazd.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 18 August 2014  
Accepted 12 October 2014  
Available Online 22 November 2014

#### Keywords:

Flutter  
aircraft wing  
external store  
elastic connection

### ABSTRACT

In this paper, the Flutter analysis of an aircraft wing carrying, elastically, an external store is studied. The wing is considered as a uniform cantilever beam and the external mass is connected to the wing by one spring and damper. The aeroelastic partial governing equations are determined via Hamilton's variational principle. Also, modified Peter's finite-state aerodynamic model is employed. The resulting partial differential equations are transformed into a set of ordinary differential equations through the assume mode method. Effects of different situations like the wing without external mass, the wing with a rigidly attached external mass, and the wing with an elastically attached external mass on the flutter speed and frequency are investigated. The numerical results for a wing are compared with published results and good agreement is observed. Then, simulation results for the wing with an elastically attached external mass are presented to show the effects of the wing sweep angle, store mass and its location and the spring rigidity constant on the wing flutter. Results show that sliding the external mass toward the wing tip in spanwise direction and also toward the trailing edge in chordwise direction decreases the flutter speed. Furthermore, increasing the store mass and spring constant decreases the wing flutter speed. Results show that increasing the wing sweep angle increases the flutter speed, in all situations.

### 1- مقدمه

این مواد در طراحی هواپیما باعث افزایش انعطاف‌پذیری اجزای هواپیما نظیر بال و در نتیجه حساس‌تر شدن تحلیل‌های آیروالاستیک در طراحی آنها شده است. انعطاف‌پذیری سازه به خودی خود برای تحلیل سازه مشکل ساز نیست اما از آنجا که تغییر شکل‌های سازه‌ای باعث تغییر در نیروهای

بررسی رفتار استاتیکی و دینامیک سازه‌ی الاستیک در جریان سیال (هوا) را آیروالاستیسیته می‌گویند. امروزه به دلیل تمایل به کاهش مصرف سوخت، حتی الامکان از مواد سبک در ساخت هواپیماها استفاده می‌شود. استفاده از

Please cite this article using:

H. Pourshamsi, A. Mazidi, S. A. Fazelzadeh, Flutter analysis of an aircraft wing carrying, elastically, an external store, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 49-58, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

آن‌ها در سال 2010 تاثیر زاویه عقبگرد بال بر ناپایداری دینامیکی بال و موتور متصل به آن را بررسی کردند [8,7]. مزیدی و فاضل زاده در سال 2011 به بررسی تاثیر سرعت مانور محوری هواپیما بر ناپایداری دینامیکی بال هواپیما تحت نیروی پیشران، پرداختند [9]. همچنین آن‌ها در سال 2013 فلاتر بک بال با زاویه عقبگرد که دارای دو موتور بود را مورد بررسی قرار دادند [10].

در کلیه این پژوهش‌ها اتصال جرم خارجی به بال به صورت صلب در نظر گرفته شده است و اثر تغییر مکان و تغییر جرم آن بر دامنه ارتعاش و پایداری بال مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله اتصال جرم خارجی به بال به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است و تاثیر پارامترهایی نظیر موقعیت نصب موتور، زاویه عقبگرد بال و همچنین مقادیر مختلف جرم موتور و ثابت فنر محل اتصال، بر سرعت و فرکانس فلاتر بال بررسی شده است.

## 2- معادلات حرکت

بال مورد بررسی در این پژوهش به صورت تیریکسرگردار مدل‌سازی شده است. این تیر دارای خاصیت الاستیک بوده و موتور به عنوان یک جرم متمرکز به وسیله فنر و میراگر مطابق شکل (1) به آن متصل شده است.

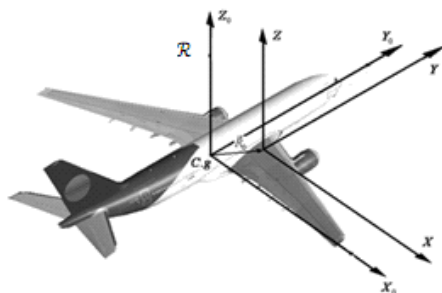
### 2-1- سیستم‌های مختصات

با توجه به پیچیده بودن دینامیک بال و به منظور به دست آوردن معادلات حرکت از چندین دستگاه مختصات استفاده شده است. مطابق شکل (2)، دستگاه مختصات متعام  $X_0, Y_0, Z_0$  با بردارهای  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  متصل به آن در چارچوب اینرسی  $\mathcal{R}$  ثابت شده است که نقطه  $c.g$  مرکز ثقل هواپیما می‌باشد. همچنین دستگاه مختصات  $X, Y, Z$  موازی با آن و در ریشه بال قرار گرفته است. دستگاه مختصات  $x, y, z$  دستگاه متصل به بال بوده که منطبق بر ریشه بال می‌باشد و محور  $x$  آن در امتداد بال با زاویه عقبگرد است (شکل 3).

تغییر شکل‌های تیر توسط جابجایی‌های الاستیک  $u, v, w$  به ترتیب، موازی با بردارهای  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  در شکل (3) نمایش داده شده‌اند. به عبارت دیگر یک نقطه از دستگاه  $x, y, z$  که قبل از تغییر شکل در مختصات  $(x, 0, 0)$  قرار گرفته است بعد از تغییر شکل به مختصات  $(x + u, v, w)$



شکل 1 نحوه اتصال موتور به بال

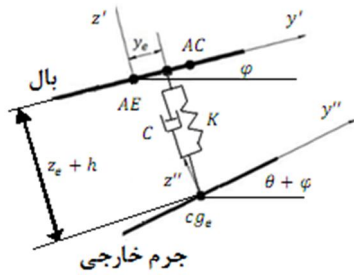


شکل 2 دستگاه‌های مختصات در نظر گرفته شده برای استخراج معادلات

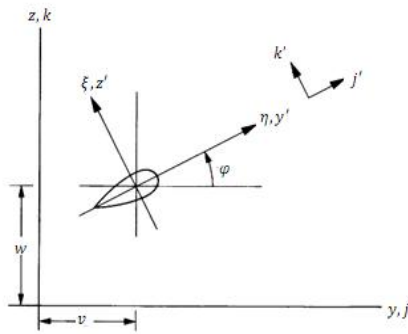
آیرو دینامیکی می‌شود و نیروهای آیرو دینامیکی جدیدی را بوجود می‌آورند، پدیده‌های آیروالاستیک آشکار می‌شوند. این نیروهای آیرو دینامیکی جدید ایجاد شده، خود ممکن است تغییر شکل‌های بیشتری در سازه ایجاد کنند که باعث ایجاد نیروهای آیرو دینامیکی بزرگتری می‌شوند. در واقع بارهای آیرو دینامیکی به تغییر شکل‌های الاستیک وابسته‌اند و خود این تغییر شکل‌ها در اثر بارگذاری های آیرو دینامیکی ایجاد می‌شوند. گاهی ممکن است برهمکنش این عوامل باعث بزرگتر شدن دامنه تغییر شکل های سازه شده و نهایتاً آن را متلاشی کنند [1]. یکی از خطرناکترین ناپایداری های آیروالاستیک دینامیکی که در طراحی و تحلیل بال هواپیما، مورد بررسی قرار می‌گیرد، فلاتر می‌باشد. این پدیده از برهمکنش نیروهای آیرو دینامیکی، نیروهای الاستیک و نیروهای اینرسی ایجاد شده و می‌تواند باعث گسیختگی ناگهانی سازه بال هواپیما شود.

مطالعات بسیاری بر روی فلاتر بال هواپیما انجام شده است. یکی از اولین آثار در تحلیل آیروالاستیکی بال، مقاله‌ای از گلند<sup>1</sup> است که مبتنی بر تعیین سرعت فلاتر بال یکسرگردار می‌باشد. او سرعت فلاتر را با انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل حرکت بال تعیین کرد [2]. این کار سپس بر روی بال یکنواخت که در آن وزن تنها به صورت یک نیروی متمرکز در نوک بال در نظر گرفته شده بود، توسط وی انجام شد [3]. تحلیل دینامیکی یک بال پرنده با زاویه رو به جلو توسط میلر<sup>2</sup>، وایکز<sup>3</sup> و برازنان<sup>4</sup> [4] نشان داد که مود واگرایی استاتیک یک بال یک سر در گیر با زاویه رو به جلو به علت کوپل شدن بین مود واگرایی بال و مود پرپود کوتاه، با یک مود فلاتر با فرکانس پایین جایگزین می‌شود. این کوپل شدن اثرات زیان‌باری روی ویژگی‌های پرواز و بارهای ناشی از تندباد دارد. اما این اثرات را می‌توان با یک سیستم کنترل فعال به حداقل رساند. آیروالاستیسیته‌ی استاتیک و دینامیک بال کامپوزیتی حامل مخازن خارجی توسط گرن<sup>5</sup> و لیبرسکو<sup>6</sup> بررسی شده است. در این تحقیق سازه‌ی بال به عنوان ورق کامپوزیتی مدل سازی شد. به منظور بررسی اثر مخزن بر رفتار استاتیک و دینامیک سیستم، وزن استاتیکی و اینرسی مخزن در نظر گرفته شده است. آنها از اثر آیرو دینامیک مخزن صرف‌نظر و برای شبیه سازی آیرو دینامیک بال از فرضیه نواری سه بعدی استفاده کردند و معادلات حرکت و شرایط مرزی را با استفاده از اصل هامیلتون استخراج نموده‌اند [5]. لوتاتی<sup>7</sup> سرعت واگرایی و فلاتر یک بال کامپوزیتی با زاویه عقب گرد که در ابتدای بال یک مخزن و در انتهای بال یک جرم متمرکز فرض شده و هواپیما در شرایط پروازی آزاد قرار دارد یعنی هیچ قیدی بر روی آن نباشد (مانند یک تیر دو سر آزاد) را به دست آورد. در این تحقیق از مدل بارگذاری ناپایا استفاده شده و برای تعیین سرعت واگرایی و فلاتر از حل دقیق استفاده شده است. نتایج به دست آمده در این تحقیق نشان می‌دهد که اثر اعوجاج و کوپل های پیچشی - خمشی بر رفتار دینامیکی سیستم مؤثر است و بر خلاف تیرهای یکسر درگیر، ناپایداری فلاتر در تیرهای بدون قید خیلی بحرانی تر از ناپایداری واگرایی می‌باشد و همچنین ناپایداری فلاتر به طور محسوسی در بال با زاویه عقب گرد کاهش پیدا می‌کند [6]. مزیدی و فاضل زاده تاثیر مانور غلتش<sup>8</sup> را بر ناپایداری استاتیکی و دینامیکی بال هواپیما و جرم متصل به آن مورد مطالعه قرار دادند. همچنین

1- Goland  
2- Miller  
3- Wykes  
4- Brosnon  
5- Gern  
6- Liberscu  
7- Lottati  
8- Roll



شکل 4 مقطع بال و جرم خارجی بعد از تغییر شکل



شکل 5 وضعیت سطح مقطع بال بعد از تغییر شکل

### 2-2-1- انرژی کرنشی بال

بیان رایج برای انرژی کرنشی بر اساس تنش‌ها و کرنش‌های مهندسی در رابطه (3) آورده شده است [11].

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \iint_A (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{x\eta} \epsilon_{x\eta} + \sigma_{x\xi} \epsilon_{x\xi}) d\eta d\xi dx \quad (3)$$

کمیت‌های رابطه (3) با رابطه (4) تعریف می‌شوند.

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} \quad , \quad \sigma_{x\eta} = G \epsilon_{x\eta} \quad , \quad \sigma_{x\xi} = G \epsilon_{x\xi} \quad (4)$$

تغییرات رابطه (3) به صورت رابطه (5) می‌باشد:

$$\delta U = \int_0^L \iint_A (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{x\eta} \delta \epsilon_{x\eta} + \sigma_{x\xi} \delta \epsilon_{x\xi}) d\eta d\xi dx \quad (5)$$

با جایگذاری روابط حاکم بر تنش‌ها و کرنش‌ها بر حسب جابجایی‌های تیر انعطاف پذیر [11]، در رابطه فوق و خطی‌سازی سیستم در نهایت انرژی کرنشی بال به صورت رابطه (6) به دست می‌آید.

$$\delta U = \int_0^L (EI_y w^{(4)} \delta w - GJ \phi'' \delta \phi) dx \quad (6)$$

### 2-2-2 انرژی جنبشی بال

مکان یک نقطه دلخواه روی بال بعد از تغییر شکل در موقعیت  $(x_1, y_1, z_1)$  مطابق رابطه (7) قرار می‌گیرد [11].

$$\begin{aligned} x_1 &= x - w'(\eta(\sin\phi) + \xi(\cos\phi)) \\ y_1 &= \eta(\cos\phi) + \xi(\sin\phi) \\ z_1 &= w + \eta(\sin\phi) + \xi(\cos\phi) \end{aligned} \quad (7)$$

لذا بردار سرعت این نقطه را می‌توان به صورت رابطه (8) نوشت.

$$\begin{aligned} \vec{V} &= [-w'(\eta \sin\phi + \xi \cos\phi) - w''\phi(\eta \cos\phi - \xi \sin\phi)] \vec{i} \\ &+ \phi[-\eta \sin\phi - \xi \cos\phi] \vec{j} + \phi[w' + \eta \cos\phi - \xi \sin\phi] \vec{k} \end{aligned} \quad (8)$$

انتقال می‌یابد.

دستگاه مختصات  $x', y', z'$  دستگاه متصل به بال بعد از تغییر شکل می‌باشد. شکل (4) مقطع بال و جرم خارجی متصل شده به آن را به همراه دستگاه‌های مختصاتی بعد از تغییر شکل بال نشان می‌دهد. دو درجه آزادی  $\theta$  و  $h$  مربوط به حرکت جرم خارجی متصل به بال می‌باشد و دستگاه مختصات  $x'', y'', z''$  با بردارهای یکه  $\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}''$  بر روی مرکز جرم جسم خارجی قرار دارد.

در شکل (5) سطح مقطع تیر بعد از تغییر شکل نشان داده شده است. محورهای دستگاه مختصات  $\xi, \eta$  محورهای اصلی سطح مقطع هستند. هنگامی که تغییر شکل در تیر ایجاد می‌شود، مرکز برش آن (مبدأ دستگاه مختصات  $\xi, \eta$ ) به اندازه  $u$  در جهت  $x$  (که در شکل (5) نشان داده نشده است)،  $v$  در جهت  $y$  و  $w$  در جهت  $z$  جابجا می‌شود. ضمناً در این شکل صفحه  $j'k'$  بر صفحه  $jk$  منطبق نیست و فقط تصویر آن در صفحه  $jk$  نمایش داده شده است. همچنین زاویه پیچش سطح مقطع حول محور  $x'$  به اندازه  $\phi$  می‌باشد. در ادامه تنها دو درجه آزادی  $w$  و  $\phi$  برای بال در نظر گرفته شده و از تغییر شکل‌های محوری  $u$  و عرضی  $v$  به علت ناچیز بودن آن‌ها صرف‌نظر شده است.

برای به دست آوردن معادلات حرکت نیاز به تبدیل دستگاه‌های مختصات مختلف به یکدیگر می‌باشد. چندین تبدیل دستگاه مختصات در اینجا استفاده شده است که در رابطه (1) ارائه شده‌اند [11].

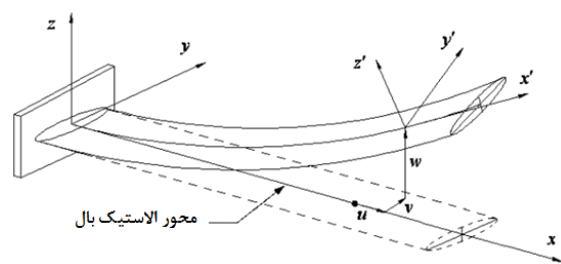
$$\begin{aligned} \vec{i} &= \cos\Lambda \vec{I} - \sin\Lambda \vec{J} \\ \vec{j} &= \sin\Lambda \vec{I} + \cos\Lambda \vec{J} \\ \vec{k} &= \vec{K} \\ \vec{i}' &= \left(1 - \frac{1}{2}w'^2\right) \vec{i} + w' \vec{k} \\ \vec{j}' &= -w'(\sin\phi) \vec{i} + (\cos\phi) \vec{j} + \left(1 - \frac{1}{2}w'^2\right)(\sin\phi) \vec{k} \\ \vec{k}' &= -w'(\cos\phi) \vec{i} - (\sin\phi) \vec{j} + \left(1 - \frac{1}{2}w'^2\right)(\cos\phi) \vec{k} \\ \vec{i}'' &= \vec{i}' \\ \vec{j}'' &= \cos\theta \vec{j}' + \sin\theta \vec{k}' \\ \vec{k}'' &= -\sin\theta \vec{j}' + \cos\theta \vec{k}' \end{aligned} \quad (1)$$

### 2-2-2 استخراج معادلات حرکت

معادلات حرکت و شرایط مرزی برای بال با استفاده از اصل هامیلتون به دست می‌آید. اصل هامیلتون به صورت رابطه (2) بیان می‌شود [11].

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(U - T) - \delta W] dt = 0 \quad (2)$$

که در رابطه فوق  $U, T, W$  به ترتیب انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی می‌باشند.



شکل 3 وضعیت بال قبل و بعد از تغییر شکل‌های الاستیک

4-2-2- انرژی پتانسیل فنر

با در نظر گرفتن اتصال الاستیک در محل تماس جرم خارجی به بال انرژی پتانسیل فنر طبق رابطه (15) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \delta U &= (kh - kw + ky_e \sin \Lambda w' - ky_e \cos \Lambda \varphi) \delta h \\ &+ (-khy_e \cos \Lambda h + ky_e \cos \Lambda w - ky_e^2 \cos \Lambda \sin \Lambda w' \\ &+ ky_e^2 (\cos \Lambda)^2 \varphi) \delta \varphi + (-kh + kw \\ &- ky_e^2 (\sin \Lambda)^2 w'' + ky_e \cos \Lambda \varphi) \delta w \end{aligned} \quad (14)$$

5-2-2- کار مجازی نیروی های خارجی

کار مجازی انجام شده بر روی بال را می توان به دو قسمت، شامل کار انجام شده توسط نیروی دمپر و کار انجام شده توسط نیروهای آیرودینامیک تقسیم بندی کرد (رابطه (15)).

$$\delta W_T = \delta W_A + \delta W_F \quad (15)$$

در رابطه (15)  $\delta W_F$  کار نیروی دمپر و  $\delta W_A$  کار نیروهای آیرودینامیک می باشد که از رابطه (16) به دست می آید.

$$\delta W_A = \int_0^L (L \delta w + M \delta \theta) dx \quad (16)$$

در معادله (16)  $L, M$  به ترتیب گشتاور آیرودینامیکی و نیروی برای آیرودینامیکی می باشد که در بخش (3) توضیح داده می شود. کار انجام شده توسط دمپر با رابطه (17) محاسبه می شود.

$$\delta W_F = \int_0^L (C \bar{R}_d \delta \bar{R}_d) \delta_D (x - x_e) dx \quad (17)$$

که  $R_d$  تغییر طول دمپر می باشد که طبق رابطه (18) بیان شده است.

$$\begin{aligned} \bar{R}_d &= h \bar{k}' - [(R_x \cos \Lambda - R_y \sin \Lambda) \bar{i} + (R_x \sin \Lambda + R_y \cos \Lambda) \bar{j} \\ &+ (w + R_z) \bar{k} - (y_e \sin \Lambda) \bar{i}' + (y_e \sin \Lambda) \bar{j}'] \end{aligned} \quad (18)$$

در نهایت با جایگذاری رابطه (18) در معادله (17) و خطی سازی سیستم، رابطه (19) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \delta W_F &= \int_0^L [(ch - cw' + cy_e \sin \Lambda w' - cy_e \cos \Lambda \varphi) \delta h \\ &+ (-cy_e \cos \Lambda h + cy_e \cos \Lambda w - cy_e^2 \cos \Lambda \sin \Lambda w' \\ &+ cy_e^2 (\cos \Lambda)^2 \varphi) \delta \varphi + (-ch + kw - cy_e^2 (\sin \Lambda)^2 w'' \\ &+ cy_e \cos \Lambda \varphi + cy_e^2 \cos \Lambda \sin \Lambda \varphi') \delta w] \delta_D (x - x_e) dx \end{aligned} \quad (19)$$

6-2-2- مدل آیروالاستیک سیستم

با جایگذاری روابط (6)، (11)، (13)، (14)، (16) و (19) در رابطه (2) و توجه به این نکته که در اصل هامیلتون ضرایب  $\delta w, \delta \varphi, \delta h$  و باید برابر صفر باشد، معادلات آیروالاستیک سیستم بال و جرم خارجی متصل به آن را می توان به فرم کلی رابطه (20) نوشت.

رابطه انرژی جنبشی بال به صورت رابطه (9) تعریف می شود.

$$T_w = 1/2 \int_0^L \int_A \rho_w \bar{V} \bar{V} d\eta d\xi dx \quad (9)$$

که تغییرات آن به صورت رابطه (10) می باشد.

$$\delta T_w = \int_0^L \int_A \rho_w \bar{V} \cdot \delta \bar{V} d\eta d\xi dx = - \int_0^L \int_A \rho_w \bar{a} \cdot \delta \bar{R} d\eta d\xi dx \quad (10)$$

با جایگذاری رابطه (8) در رابطه (10) و خطی سازی سیستم رابطه (11)

به دست می آید.

$$\begin{aligned} \delta T_w &= - \int_0^L \rho_w (-I_y \cdot \ddot{\varphi} \delta \varphi - A e_A \ddot{w}' \delta \varphi - A e_A \ddot{\varphi} \delta w \\ &- I_z \cdot \ddot{\varphi} \delta \varphi + I_y \cdot \ddot{w}'' \delta w - A \dot{w}' \delta w) dx \end{aligned} \quad (11)$$

3-2-2- انرژی جنبشی جرم خارجی

مکان یک نقطه دلخواه روی جرم خارجی بعد از تغییر شکل مطابق رابطه (12) می باشد.

$$\begin{aligned} R_e &= (x_e + R_x \cos \Lambda - R_y \sin \Lambda) \bar{i} \\ &+ (R_x \sin \Lambda + R_y \cos \Lambda) \bar{j} + (w + R_z) \bar{k} \\ &- y_e \sin \Lambda \bar{i}' + y_e \cos \Lambda \bar{j}' + (z_e + h) \bar{k}' + \eta \bar{j}'' + \xi \bar{k}'' \end{aligned} \quad (12)$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه انرژی جنبشی، واریشن انرژی جنبشی جرم خارجی به صورت رابطه (13) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \delta T_e &= - \int_0^L \int_A \rho_e \bar{a} \cdot \delta \bar{R} d\eta d\xi dx = \\ &- \int_0^L [\rho_e (-\dot{h} A \delta w + y_e A \sin \Lambda \dot{w}' \delta h - \\ &- A \dot{w} \delta w - y_e A e_A \cos \Lambda \ddot{\varphi} \delta \varphi - \\ &- 2y_e A e_A \cos \Lambda \ddot{\varphi} \delta \varphi - \dot{w} A \delta h - \\ &- y_e A e_A \cos \Lambda \ddot{\varphi} \delta \theta \\ &- \cos \Lambda \sin \Lambda A y_e^2 \ddot{\varphi}' \delta w - \dot{h} A \delta h + \\ &+ \cos \Lambda \sin \Lambda A y_e^2 \ddot{w}' \delta \varphi + \\ &+ y_e^2 A (\sin \Lambda)^2 \ddot{w}'' \delta w + \\ &+ 2z_e A e_A \ddot{w}'' \delta w + z_e^2 \ddot{w}'' \delta w \\ &+ I_y \cdot \ddot{w}'' \delta w - z_e A e_A \ddot{\varphi} \delta \varphi - \\ &- z_e A e_A \ddot{\theta} \delta \varphi - z_e^2 A \ddot{\varphi} \delta \varphi - \\ &- z_e A e_A \ddot{\varphi} \delta \theta - y_e^2 (\cos \Lambda)^2 A \ddot{\varphi} \delta \varphi \\ &- I_y \cdot \ddot{\varphi} \delta \varphi - I_y \cdot \ddot{\varphi} \delta \theta - I_y \cdot \ddot{\theta} \delta \varphi - \\ &- I_y \cdot \ddot{\theta} \delta \theta - \cos \Lambda y_e A \ddot{\varphi} \delta h \\ &- \cos \Lambda y_e A \ddot{\varphi} \delta w - \cos \Lambda y_e A \ddot{w} \delta \varphi \\ &- I_z \cdot \ddot{\theta} \delta \varphi - I_z \cdot \ddot{\theta} \delta \theta - I_z \cdot \ddot{\varphi} \delta \varphi \\ &- I_z \cdot \ddot{\varphi} \delta \theta - A e_A \ddot{\theta} \delta h - A e_A \ddot{\theta} \delta h - \\ &- A e_A \dot{h} \delta \varphi + y_e \sin \Lambda A e_A \dot{w}' \delta \theta \\ &+ y_e \sin \Lambda A e_A \dot{w}' \delta \varphi - A e_A \dot{h} \delta \theta - \\ &- y_e \sin \Lambda A e_A \ddot{\varphi}' \delta w - A e_A \ddot{\theta} \delta w \\ &- A e_A \ddot{\varphi} \delta w - A e_A \ddot{w} \delta \varphi - A e_A \ddot{w} \delta \theta)] \delta_D (x - x_e) dx \end{aligned} \quad (13)$$

حسب حرکت ایرفویل بیان شود. تئوری سیال تحریک شده پیترز و همکاران، به این صورت است که  $\lambda_0$  را بر حسب  $N$  مختصه حالت سیال تحریک شده  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  به صورت رابطه (22) بیان می‌کند [14].

$$\lambda_0 \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n \lambda_n \quad (22)$$

که  $b_n$  با استفاده از روش حداقل مربعات<sup>1</sup> به دست می‌آید. با در نظر گرفتن یک بردار  $\{\lambda\}$  شامل مقادیر  $\lambda_n$ ، می‌توان مجموعه‌ای از  $N$  معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول حاکم بر  $\{\lambda\}$  را به صورت رابطه (23) نوشت [8].

$$[A] \{\dot{\lambda}_n\} + \frac{U_\infty}{b} \{\lambda_n\} = \{c\} [\ddot{h} + U_\infty \cos \Lambda \dot{\theta} - U_\infty \sin \Lambda \dot{h}' + b \left( \frac{1}{2} - a \right) (\ddot{\theta} + U_\infty \sin \Lambda \dot{\theta}')] \quad (23)$$

#### 4- حل معادلات حرکت

به منظور دستیابی به پاسخ فلاتر بال هواپیما و همچنین پارامترهای موثر بر آن، دستگاه معادلات شامل روابط (20) و (23) باید بطور همزمان حل شود. به این منظور از روش جمع مودها [15] استفاده شده است. براساس این روش، پاسخ معادلات به صورت ترکیب خطی شکل مودها به صورت رابطه (24) فرض می‌شود:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n w_i(x) B_i(t) \\ \varphi(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) D_i(t) \quad (24)$$

در رابطه (24)،  $w_i(x)$  و  $\varphi_i(x)$  شکل مودهای ارتعاشات تیر و  $B_i(t)$  و  $D_i(t)$  ضرایب زمانی می‌باشند (رابطه (25)).

$$w_i(x) = \cos \beta_i x - \cos h \beta_i x \\ - \frac{\cos \beta_i L + \cos h \beta_i L}{\sin \beta_i L + \sinh \beta_i L} (\sin \beta_i x - \sinh \beta_i x) \\ \varphi_i(x) = \sin \left( \frac{2i-1}{2L} \pi x \right) \quad (25)$$

با جایگذاری رابطه (24) در رابطه (20) و ضرب طرفین این روابط، به ترتیب در شکل مودهای رابطه (25) و انتگرال‌گیری در سراسر طول بال معادلات دیفرانسیل معمولی به دست می‌آیند. به این منظور در اینجا از چهار مود برای خمش، چهار مود برای پیچش و شش مختصه سیال تحریک شده  $\lambda_n$  استفاده شده است.

این معادلات خطی حرکت را می‌توان به راحتی به فرم کلی و ماتریسی رابطه (26) نوشت.

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = Q \quad (26)$$

این معادلات را می‌توان برای سهولت در تحلیل پایداری به فرم فضای حالت تبدیل کرد (رابطه (27)).

$$\dot{\bar{Z}} = [A] \bar{Z} \quad (27)$$

که  $\bar{Z}$  در آن برداری است که به فرم رابطه (28) تعریف می‌شود.

$$\bar{Z} = \{q^T \quad \dot{q}^T\}^T \quad (28)$$

و ماتریس  $[A]$  به شکل رابطه (29) است.

$$EI_y w^{(4)} + [\rho_w (A e_A \ddot{\varphi} - I_y \ddot{w}'' + A \ddot{w}) - \rho_e (-\ddot{h} A - A \ddot{w} - A \cos \Lambda \sin \Lambda y_e^2 \ddot{\varphi}' + y_e^2 A (\sin \Lambda)^2 \ddot{w}'' + 2z_e A e_A' \ddot{w}'' + z_e^2 A \ddot{w}'' + I_y \ddot{w}'' - \cos \Lambda y_e A \ddot{\varphi}) + (-kh + kw - ky_e^2 (\sin \Lambda)^2 w'' + ky_e \cos \Lambda \varphi + ky_e^2 \cos \Lambda \sin \Lambda \varphi') - (-ch + kw - cy_e^2 (\sin \Lambda)^2 w'' + cy_e \cos \Lambda \dot{\varphi} + cy_e^2 \cos \Lambda \sin \Lambda \dot{\varphi}')] \delta_D (x - x_e) - L = 0$$

$$-GJ \varphi'' + [\rho_w (I_y \ddot{\varphi} + A e_A \ddot{w} + I_z \ddot{\varphi}) - \rho_e (-y_e A e_A \cos \Lambda \ddot{\theta} - 2y_e A e_A \cos \Lambda \dot{\varphi} + \cos \Lambda \sin \Lambda A y_e^2 \ddot{w}' - z_e A e_A' \ddot{\varphi} - I_y \ddot{\varphi} - I_y \ddot{\theta} - z_e A e_A' \ddot{\theta} - \cos \Lambda y_e A \ddot{w} - y_e^2 A (\cos \Lambda)^2 \ddot{\varphi} - z_e^2 A \ddot{\varphi} - I_z \ddot{\theta} - I_z \ddot{\varphi}) + (-khy_e \cos \Lambda + ky_e \cos \Lambda w - ky_e^2 \cos \Lambda \sin \Lambda w' + ky_e^2 (\cos \Lambda)^2 \varphi) - (-cy_e \cos \Lambda \dot{h} + cy_e \cos \Lambda \dot{w} - cy_e^2 \cos \Lambda \sin \Lambda \dot{w}') + cy_e^2 (\cos \Lambda)^2 \dot{\varphi}] \delta_D (x - x_e) - M = 0$$

$$[\rho_e (-A \ddot{h} + A y_e \sin \Lambda \ddot{w}' - A e_A \ddot{\varphi} - A y_e \cos \Lambda \dot{\varphi} - A \ddot{w} - A e_A \ddot{\theta}) + (kh - kw + ky_e \sin \Lambda w' - ky_e \cos \Lambda \varphi) - (ch - cw + cy_e \sin \Lambda w' - cy_e \cos \Lambda \dot{\varphi})] \delta_D (x - x_e) = 0$$

$$[\rho_e (-y_e A e_A \cos \Lambda \ddot{\varphi} - I_y \ddot{\varphi} - z_e A e_A' \ddot{\varphi} - I_y \ddot{\theta} - I_z \ddot{\theta} - I_z \ddot{\varphi})] \delta_D (x - x_e) = 0 \quad (20)$$

#### 3- مدل سیال ناپایای پیترز

در تحلیل آیرودینامیک ناپایای مختلفی مورد استفاده قرار می‌گیرد [12]. در این تئوری‌ها، نیروی برآ و گشتاور پیچشی از دو بخش تشکیل می‌شوند که مربوط به دو پدیده فیزیکی متفاوت اثرات چرخشی و غیرچرخشی می‌باشند. تئوری‌های حالت-محدود تخمینی از مدل آیرودینامیک حالت-نامحدود واقعی در محدوده دقت مهندسی هستند. یکی از این روش‌ها تئوری حالت-محدود سیال تحریک شده پیترز و همکاران، برای سیال غیر لزج تراکم ناپذیر است [13].

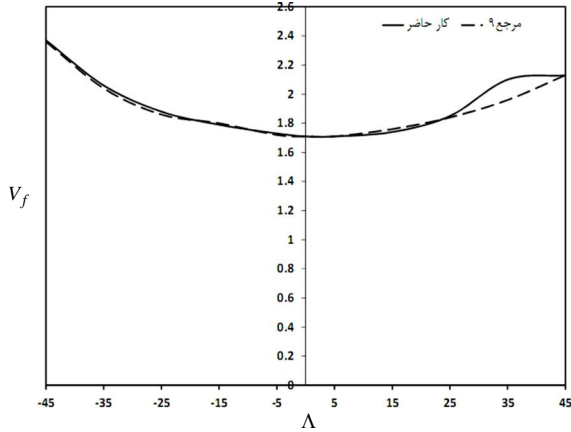
عبارات کلی نیروی برآ و گشتاور خمشی با در نظر گرفتن اثرات زاویه عقبگرد بال مطابق رابطه (21) عبارتند از [8]:

$$L = \pi \rho_\infty b^2 (-\ddot{h} + U_\infty \cos \Lambda \dot{\theta} - U_\infty \sin \Lambda \dot{h}') - ba (\ddot{\theta} - U_\infty \sin \Lambda \dot{\theta}') + 2\pi \rho_\infty U_\infty b \cos \Lambda [-\dot{h} + U_\infty \cos \Lambda \theta - U_\infty \sin \Lambda \dot{h}' + b \left( \frac{1}{2} - a \right) (\dot{\theta} + U_\infty \sin \Lambda \dot{\theta}') - \lambda_0] \\ M = b \left( \frac{1}{2} + a \right) L + \pi \rho_\infty b^3 \left[ -\frac{1}{2} \ddot{h} + U_\infty \cos \Lambda \dot{\theta} - U_\infty \sin \Lambda \dot{h}' + b \left( \frac{1}{8} - \frac{a}{2} \right) (\dot{\theta} + U_\infty \sin \Lambda \dot{\theta}') \right] \quad (21)$$

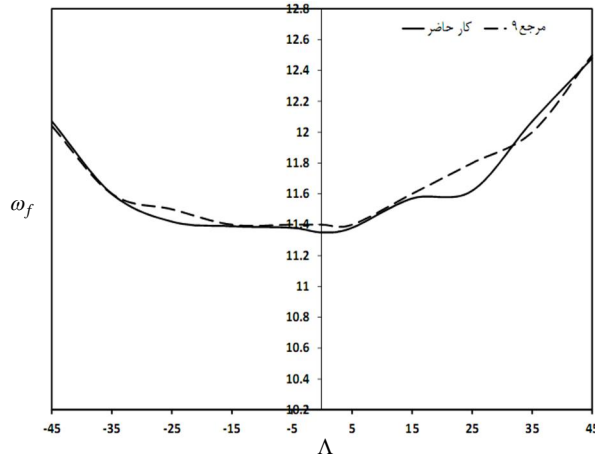
برای استفاده از این روابط سرعت سیال تحریک شده  $\lambda_0$  لازم است بر

1- Least squares method

در مرحله بعد جرم خارجی به صورت صلب به بال متصل شده است و سرعت و فرکانس فلاتر، برای فواصل مختلف نصب جرم خارجی در جدول (2) و جدول (3) با نتایج پژوهش مزیدی و فاضل زاده [8] مقایسه شده است. جوابها با دقت خوبی همخوانی دارد و نشان می دهد که با افزایش فاصله جرم خارجی از محل تکیه گاه سرعت و فرکانس فلاتر کاهش می یابد.



(الف)



(ب)

شکل 6 اثر تغییر زاویه عقبگرد بال تنها بر روی (الف) سرعت فلاتر و (ب) فرکانس فلاتر<sup>2</sup>

جدول 2 سرعت فلاتر بال با اتصال صلب جرم خارجی در فواصل گوناگون

موقیت جرم خارجی در جهت طولی ( $x_e$ )	مرجع [8]	کار حاضر	درصد خطا
0	1/88	1/88	0
0/2	1/82	1/83	0/55
0/4	1/7	1/69	0/59
0/6	1/64	1/58	3/65

جدول 3 فرکانس فلاتر بال با اتصال صلب جرم خارجی در فواصل گوناگون

موقیت جرم خارجی در جهت طولی ( $x_e$ )	مرجع [8]	کار حاضر	درصد خطا
0	11/85	11/85	0
0/2	11/65	11/69	0/34
0/4	10/9	10/88	0/18
0/6	10/1	10/62	5/1

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (29)$$

مرزهای ناپایداری سیستم را می توان با توجه به مقادیر ویژه ماتریس  $[A]$  مشخص نمود. در حالت کلی مقادیر ویژه به دست آمده به فرم رابطه (30) می باشند.

$$\Gamma_k \pm i\Omega_k \quad (30)$$

چنانچه  $\Gamma_k < 0$  باشد نوسانات همگرا بوده و سیستم از نظر دینامیکی پایدار می باشد. به ازای  $\Gamma_k > 0$  نوسانات واگرا خواهند بود و سیستم از لحاظ دینامیکی ناپایدار می باشد. برای حالت  $\Gamma_k = 0$  مرز بین دو حالت قبل پیش می آید که مرز پایداری<sup>1</sup> نامیده می شود. اگر این پاسخها برای سیستم آیرولاستیک باشد، شرایط ناپایداری دینامیکی، فلاتر نامیده می شود و مرز پایداری که معرف حرکت نوسانی ساده است، مرز فلاتر نامیده می شود [16,17].

## 5- نتایج

شبیه سازی برای بالی با مشخصات ساختاری و هندسی مطابق جدول (1) انجام شده است.

برای سهولت در ارائه نتایج از پارامترهای بدون بعد مطابق رابطه (31) استفاده شده است.

$$V_f = \frac{U_F}{b\omega_\phi}, \quad X_e = \frac{x_e}{L}, \quad Y_e = \frac{y_e}{b}, \quad Z_e = \frac{z_e}{b}, \quad \eta_e = \frac{M_e}{mL}, \quad \omega_f = \frac{\Omega_f}{2\pi} \quad (31)$$

که در رابطه فوق  $U_F$  سرعت فلاتر و  $\omega_\phi$  اولین فرکانس پیچشی غیرکوپل بال می باشد.

## 5-1- اعتبارسنجی

به منظور اعتبارسنجی ابتدا سرعت و فرکانس فلاتر بال بدون اتصال جرم خارجی و سپس با اتصال صلب جرم خارجی استخراج شده و با مقالات دیگر مقایسه شده است.

در شکل (6) سرعت و فرکانس فلاتر بال تنها برای زوایای مختلف عقبگرد بال ارائه شده است نتایج با پژوهشی که توسط مزیدی و فاضل زاده [9] انجام شده مقایسه شده و جوابها با دقت خوبی همخوانی دارد. جوابها نشان می دهد که با افزایش زاویه عقبگرد بال سرعت و فرکانس فلاتر بال افزایش می یابد. این افزایش در قسمت منفی نمودار مقدار بیشتری را برای سرعت فلاتر و مقدار کمتری را برای فرکانس فلاتر نشان می دهد.

جدول 1 مشخصات ساختاری و هندسی تیر

طول بال ( $L$ )	(m) 6/1
سختی خمشی ( $EI$ )	(Nm <sup>2</sup> ) 9765000
سختی پیچشی ( $GJ$ )	(Nm <sup>2</sup> ) 989000
جرم بر واحد طول بال ( $m$ )	(kg/m) 35/695
جرم خارجی ( $M_e$ )	(kg) 17/85
نصف طول وتر بال ( $b$ )	(m) 0/915
ضریب فنری ( $k$ )	(N/m) 10000
ضریب دمیر ( $C$ )	10(Ns/m)
چگالی هوا $\rho_\infty$	(kg/m <sup>3</sup> ) 1/224

1- Stability boundary

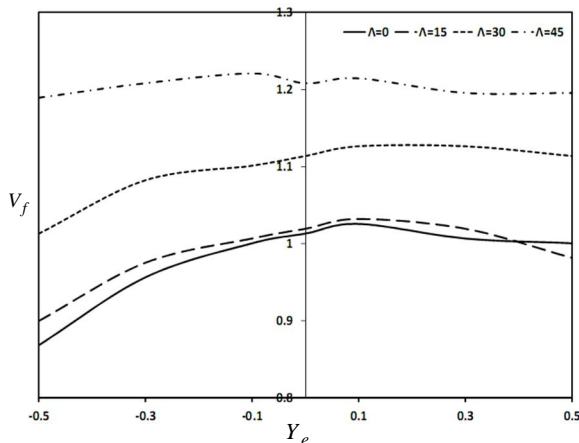
2-5- تحلیل فلاتر

در این بخش، جرم خارجی به صورت الاستیک و بوسیله یک فنر و دمپر به بال متصل شده است و سرعت و فرکانس فلاتر به دست آمده و جوابها ارائه شده است. در شکل (7) سرعت و فرکانس فلاتر بال به ازای موقعیت‌های مختلف نصب جرم خارجی در طول بال و زوایای مختلف عقبگرد بال نشان داده شده است. شکل (7- الف) نشان می‌دهد با افزایش فاصله نصب موتور نسبت به ابتدای بال سرعت فلاتر کاهش می‌یابد و با افزایش زاویه عقبگرد بال سرعت فلاتر افزایش می‌یابد. بیشترین سرعت فلاتر در موقعیت 0.15 طول بال می‌باشد که مکان مناسب جهت اتصال جرم خارجی می‌باشد. همچنین با توجه به شکل روشن است با افزایش زاویه عقبگرد به  $\Lambda > 15$  سرعت فلاتر سیستم و در نتیجه محدوده پایداری و ثبات سیستم افزایش می‌یابد. همچنین شکل (7- ب) نشان می‌دهد در حالت کلی حرکت دادن جرم خارجی به سمت نوک بال باعث کاهش فرکانس فلاتر می‌شود.

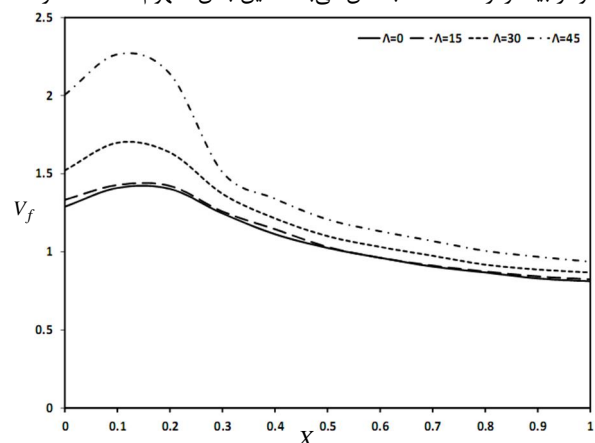
شکل (8) سرعت و فرکانس فلاتر بال را بر حسب موقعیت‌های مختلف جرم خارجی در عرض بال و زوایای عقبگرد مختلف بال ارائه کرده است. شکل (8- الف) نشان می‌دهد با انتقال جرم خارجی به سمت لبه حمله بال، سرعت فلاتر افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش زاویه عقبگرد بال سرعت فلاتر افزایش می‌یابد. هم‌امطور که در شکل دیده می‌شود شیب در قسمت منفی نمودار بیشتر از قسمت مثبت آن می‌باشد. این بدان مفهوم است که سرعت

فلاتر تاثیر زیادتری از موقعیت عرضی جرم خارجی در نیمه عقبی بال می‌پذیرد. با افزایش زاویه عقبگرد بال شیب در قسمت منفی نیز کاهش یافته و برای  $\Lambda = 45^\circ$  شیب در قسمت منفی با شیب در قسمت مثبت تقریباً برابر است. همچنین با توجه به شکل (8- ب) با افزایش زاویه عقبگرد و انتقال جرم خارجی به سمت لبه حمله بال فرکانس فلاتر به صورت کلی کاهش می‌یابد.

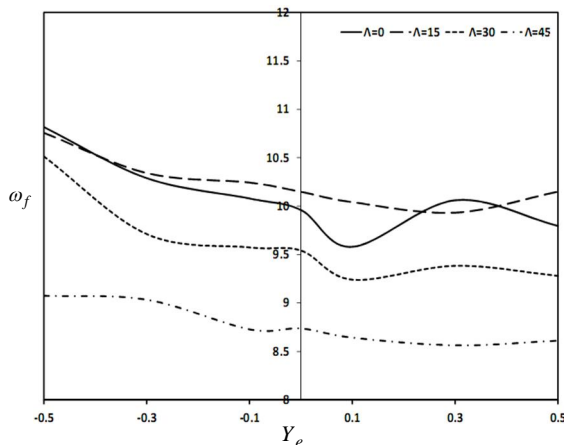
شکل (9) اثر ارتفاع نصب جرم خارجی نسبت به بال را بر روی سرعت و فرکانس فلاتر بال به ازای مقادیر مختلف زاویه عقبگرد نشان می‌دهد. در این شکل ارتفاع جرم خارجی در محدوده  $-1 < Z_e < 1$  تغییر می‌کند. با توجه به شکل (9- الف) با افزایش  $Z_e$  چه در جهت مثبت و چه در جهت منفی، سرعت فلاتر کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر هرچه فاصله جرم خارجی از محور الاستیک در جهت عمود بر بال افزایش یابد، سرعت فلاتر کاهش می‌یابد. همچنین مشابه قبل در این شکل نیز واضح است که با افزایش زاویه عقبگرد بال سرعت فلاتر افزایش می‌یابد. شکل (9- ب) نشان می‌دهد که افزایش  $Z_e$  چه در جهت مثبت و چه در جهت منفی، باعث افزایش فرکانس فلاتر می‌شود. به عبارت دیگر نمودار نسبت به محور عمودی دارای تقارن می‌باشد. بعلاوه در این شکل می‌توان مشاهده نمود که در حالت کلی با افزایش زاویه عقبگرد بال فرکانس فلاتر کاهش می‌یابد.



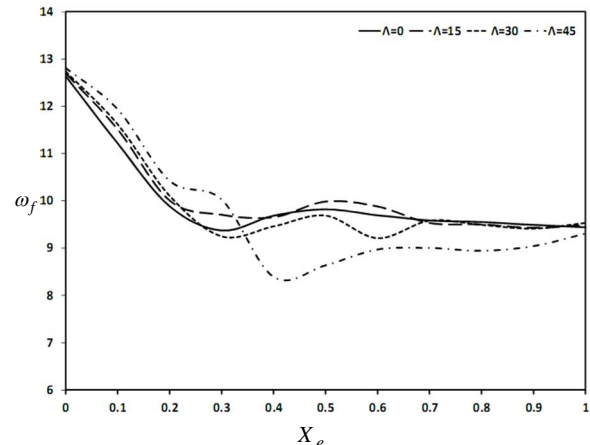
(الف)



(الف)



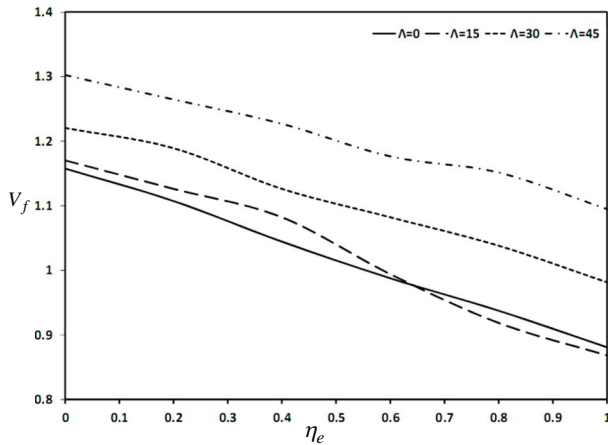
(ب)



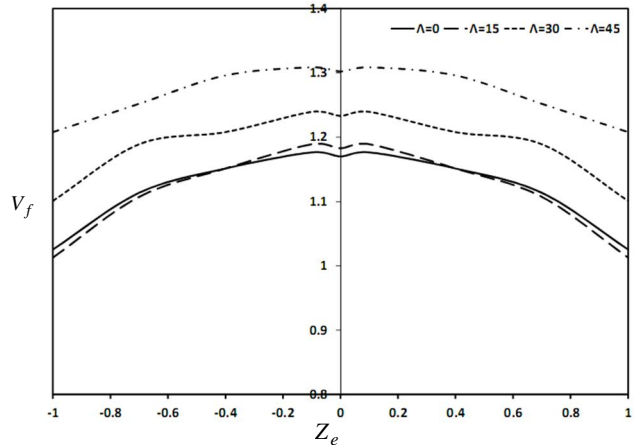
(ب)

شکل 8 اثر موقعیت نصب عرضی جرم خارجی بر (الف) سرعت فلاتر و (ب) فرکانس فلاتر بال به ازای زوایای مختلف عقبگرد بال و برای  $X_e = -0.5, Z_e = -1, \eta_e = 0.5$

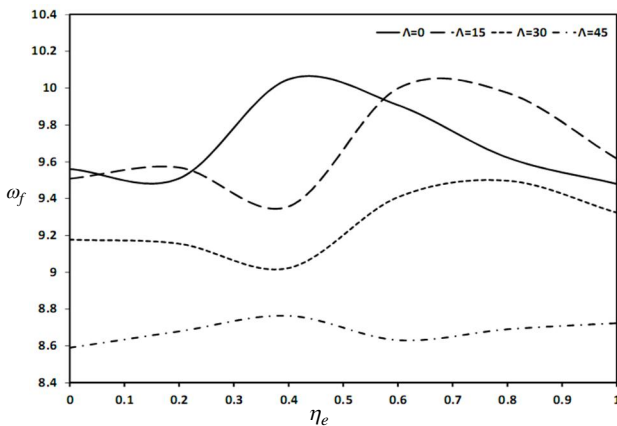
شکل 7 اثر موقعیت نصب طولی جرم خارجی بر (الف) سرعت فلاتر و (ب) فرکانس فلاتر بال به ازای زوایای مختلف عقبگرد بال و برای  $Y_e = -0.25, Z_e = -1, \eta_e = 0.5$



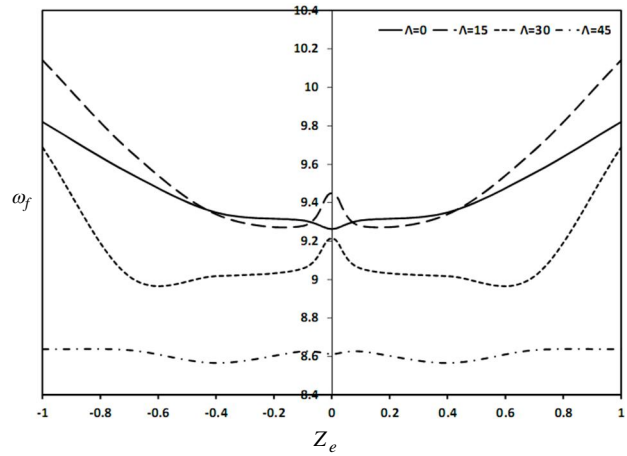
(الف)



(الف)



(ب)



(ب)

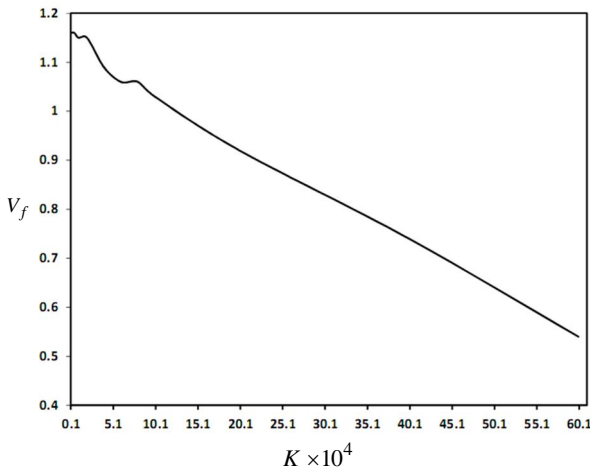
شکل 10 اثر اندازه جرم خارجی بر (الف) سرعت فلاتر و (ب) فرکانس فلاتر بال به ازای

زوایای مختلف عقبگرد بال و برای  $X_e = 0.5$ ,  $Y_e = -0.25$ ,  $Z_e = -1$

شکل 9 اثر موقعیت نصب عمودی جرم خارجی بر (الف) سرعت فلاتر و (ب) فرکانس

فلاتر بال به ازای زوایای مختلف عقبگرد بال و برای

$$X_e = 0.5, Y_e = -0.25, \eta_e = 0.5$$



شکل 11 اثر ثابت فنر بکار رفته در محل اتصال جرم خارجی به بال بر سرعت فلاتر

برای  $X_e = 0.5$ ,  $Y_e = -0.25$ ,  $Z_e = -1$ ,  $\eta_e = 0.5$

در واقع با افزایش ضریب فنر بکار رفته در محل اتصال جرم خارجی به بال، تاثیر نیروهایی که از طرف جرم خارجی به بال وارد می شود افزایش یافته و در نتیجه فلاتر در سرعت های پایینتری رخ می دهد.

## 6- نتیجه گیری

در این مقاله تاثیر اتصال الاستیک جرم خارجی بر سرعت فلاتر بال هواپیما بررسی شده است. معادلات حرکت بال و جرم خارجی با استفاده از اصل

تغییرات سرعت و فرکانس فلاتر بال بر حسب اندازه جرم خارجی متصل شده به آن و به ازای زوایای مختلف عقبگرد بال در شکل (10) نشان داده شده است. در این حالت فرض شده است که جرم خارجی در وسط طول بال به صورت الاستیک نصب شده است. همانطور که در شکل (10-الف) دیده می شود با افزایش جرم خارجی متصل به بال، سرعت فلاتر کاهش می یابد. افزایش جرم خارجی منجر به افزایش نیروهای اینرسی وارد به آن و همچنین افزایش تغییر شکل های الاستیک بال می شود که می تواند باعث کاهش سرعت فلاتر گردد. این امر مستقل از اندازه زاویه عقبگرد بال است. همچنین افزایش زاویه عقبگرد بال باعث افزایش سرعت فلاتر و گسترش محدوده پایداری می شود. شکل (10-ب) نیز اثرات اندازه جرم خارجی را بر فرکانس فلاتر نشان می دهد.

شکل (11) اثر مقدار ثابت فنر بکار رفته در اتصال الاستیک جرم خارجی به بال را بر سرعت فلاتر نشان می دهد. همانطور که دیده می شود با صلب تر شدن اتصال، سرعت فلاتر کاهش می یابد و پایداری سیستم محدودتر می شود. عبارت دیگر اتصال الاستیک جرم خارجی به بال باعث افزایش محدوده پایداری آیروالاستیک سیستم می شود.



تغییر طول فنر و دمپر	$R_d (m)$
بردار یک نقطه دلخواه روی موتور	$R_e (m)$
بردار یک نقطه دلخواه روی محور الاستیک بال بعد از تغییر شکل	$R_w (m)$
فاصله مرکز جرم هواپیما و محل اتصال بال به بدنه	$R_x, R_y, R_z (m)$
زمان	$t (s)$
انرژی جنبشی	$T (J)$
انرژی کرنشی	$U$
جابجایی‌های الاستیک در جهت‌های $x, y, z$	$u, v, w (m)$
بردار سرعت نقطه ای از بال (موتور)	$\vec{V} (ms^{-1})$
سرعت فلاتر	$V_f$
کار نیروهای خارجی	$W$
جابجایی در راستای محور $Z$	$w (m)$
دستگاه مختصات ثابت	$X, Y, Z$
دستگاه مختصاتی که محور $x$ آن در امتداد بال قبل از تغییر شکل است.	$x, y, z$
دستگاه مختصات در مرکز جرم هواپیما	$X_0, Y_0, Z_0$
دستگاه مختصات مماس بر محور تغییر شکل یافته	$x', y', z'$
دستگاه مختصات مماس بر موتور بعد از تغییر شکل	$x'', y'', z''$
مختصات یک نقطه بر روی محور تغییر شکل یافته	$x_1, y_1, z_1$
مختصات محل اتصال فنر و دمپر	$x_e, y_e, z_e$
عبارت‌هایی برای بیان انرژی	$\bar{Y}_w, \bar{Y}_\phi$
واریشن ( )	$\delta ( )$
تابع دلتای دیراک	$\delta_D$
مؤلفه‌های کرنش مهندسی	$\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}$
مختصات مقطعی متناظر با محور اصلی برای یک نقطه روی محور الاستیک	$\eta$
پیچش الاستیک موتور حول محور الاستیک	$\theta$
زاویه عقبگرد بال	$\Lambda$
مختصات مقطعی عمود بر محور $\eta$ در محور الاستیک	$\xi$
چگالی جرم خارجی	$\rho_e (kgm^{-3})$
چگالی بال	$\rho_w (kgm^{-3})$
چگالی هوا	$\rho_\infty (kgm^{-3})$
تنش‌های مهندسی	$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$
پیچش الاستیک بال حول محور الاستیک	$\phi$
فرکانس فلاتر	$\omega_f$

هامیلتون استخراج شده و با استفاده از روش مودهای فرضی و انتگرالگیری عددی حل شده است. به منظور اعتبارسنجی، اتصال صلب جرم خارجی به بال بررسی شده و نتایج آن با نتایج پژوهش‌های پیشین مقایسه شده است که همخوانی خوبی بین نتایج وجود دارد.

تأثیر پارامترهای مختلف همچون موقعیتهای نصب جرم خارجی در جهت طولی، عرضی و عمودی بال، زاویه عقبگرد بال و همچنین اندازه جرم خارجی و ثابت فنریت اتصال جرم خارجی بر سرعت و فرکانس فلاتر بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد مشابه اتصال صلب جرم خارجی به بال، در حالت اتصال الاستیک نیز با افزایش فاصله جرم خارجی از ریشه بال سرعت فلاتر کاهش می‌یابد. این پدیده مستقل از زاویه عقبگرد بال بوده و به ازای همه زوایای عقبگرد بال اتفاق مشابهی رخ می‌دهد. نتایج نشان داد در جهت عرضی، انتقال جرم خارجی به سمت لبه حمله بال باعث افزایش محدوده پایداری می‌شود و نصب جرم خارجی در بالا یا پایین بال اثر یکسانی در کاهش سرعت فلاتر دارد. در واقع نصب جرم خارجی در قسمت جلو بال تا حدی اثر گشتاورهای آیرودینامیکی که منجر به ناپایداری می‌شوند را تعدیل می‌کند. همچنین افزایش جرم خارجی و ثابت فنریت اتصال باعث کاهش سرعت فلاتر مجموعه می‌شود. در همه موارد فوق با زیادتر شدن زاویه عقبگرد بال، محدوده پایداری آیروالاستیک دینامیکی سیستم افزایش می‌یابد و فلاتر در سرعت‌های بالاتری رخ می‌دهد.

7- فهرست علائم

سطح مقطع	$A (m^2)$
بردار شتاب نقطه ای از بال (موتور)	$\bar{a} (ms^{-2})$
نصف طول وتر	$b (m)$
ضریب دمپر	$C (Ns.m^{-1})$
مدول یانگ	$E (Pa)$
مدول برشی	$G (GPa)$
جابجایی موتور در راستای $k'$	$h (m)$
بردارهای یکه ثابت	$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$
بردارهای یکه متصل به دستگاه مختصات بال قبل از تغییر شکل	$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$
بردارهای یکه ثابت به مرکز جرم هواپیما	$\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$
بردارهای یکه متصل به دستگاه مختصات بال بعد از تغییر شکل	$\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$
بردارهای یکه متصل به دستگاه مختصات موتور بعد از تغییر شکل	$\bar{i}'', \bar{j}'', \bar{k}''$
گشتاور اینرسی سطح مقطع محور نسبت به محور $y'$	$I_{y'} (m^4)$
گشتاور اینرسی سطح مقطع محور نسبت به محور $z'$	$I_{z'} (m^4)$
ثابت صلبیت پیچشی	$J$
ضریب فنریت	$K (Nm^{-1})$
نیروی آیرودینامیکی	$L (m)$
جرم بر واحد طول بال	$m (kgm^{-1})$
جرم موتور	$M_e (kgm^{-1})$
مومنوم آیرودینامیکی	$M$

8- مراجع

[1] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, and R. L. Halfman, *Aeroelasticity*, Dover publications, New York, 1955.

[2] M. Goland, The flutter of uniform cantilever wing, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.12, pp. 197-208, 1945.

[3] M. Goland, Y. L. Luke, The flutter of a uniform wing with tip weights, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.15, pp. 13-20, 1948.

[4] G. D. Miller, J. H. Wykes, M. J. Brosnan, Rigid-Body structural mode coupling on a forward swept wing aircraft, *Journal of Aircraft*, Vol. 20, No. 8, pp. 696-702, 1983.

[5] F. Gern and L. Librescu, Static and dynamic aeroelasticity of advanced aircraft wings carrying external stores, *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 7, pp.

- [12] M. Mohammadi-Amin, B. Ghadiri, H. Haddadpour, Unsteady aerodynamic analysis using boundary element method and continuous-time state-space modeling, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 1, pp. 89-101, 2011. (In Persian)
- [13] D. A. Peters, S. Karunamoorthy, W. M. Cao, Finite state induced flow models; Part I: Two-Dimensional thin airfoil, *Journal of Aircraft*, Vol. 32, pp. 313-322, 1995.
- [14] D. A. Peters, Two-dimensional incompressible unsteady airfoil theory - An overview, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 24, pp. 295-312, 2008.
- [15] S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, Wiley, New York, 2007.
- [16] E. H. Dowell, R. Clark, D. Cox, H. C. J. Curtiss, J. W. Edwards, K. C. Hall, D. A. Peters, R. H. Scanlan, E. Simiu, F. Sisto, Th. W. Strganac, *A Modern Course In Aeroelasticity*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2004.
- [17] D. H. Hodges, G. A. Pierce, *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- 1121-1129, 1998
- [6] I. Lottati, Aeroelastic stability characteristics of a composite swept wing with tip weights for an unrestrained vehicle, *Journal of Aircraft*, Vol. 24, No. 11, pp. 793-802, 1987.
- [7] S. A. Fazelzadeh, P. Marzocca, E. Rashidi, A. Mazidi, Effects of rolling maneuver on divergence and flutter of aircraft of wing-store, *Journal of Aircraft*, Vol. 47, No. 1, pp. 64-70, 2010.
- [8] A. Mazidi, S. A. Fazelzadeh, The flutter of a Swept Aircraft Wing with a Powered-Engine, *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 23, No. 4, pp. 243-250, 2010.
- [9] S. A. Fazelzadeh, A. Mazidi, Flutter of aircraft wing carrying powered engine under roll maneuver, *Journal of Aircraft*, Vol. 48, No. 3, pp. 874-884, 2011.
- [10] A. Mazidi, S. A. Fazelzadeh, Aeroelastic modeling and flutter prediction of swept wings carrying twin powered engines. *Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 26, No. 3, pp. 586-593, 2013.
- [11] D. H. Hodges, E. H. Dowell, Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades, *NASA Technical Note*, 1974.