



مدل سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد در حالت ماندگار به روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

علی محتشمی¹، ابوالفضل اکبرپور^{2*}، مهدی ملازاده³

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند

2- دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند

3- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند

* بیرجند، صندوق پستی 9717434765، akbarpour@birjand.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 11 دی 1395

پذیرش: 12 بهمن 1395

ارائه در سایت: 04 اسفند 1395

کلید واژگان:

آب زیرزمینی

روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

حالت ماندگار

آبخوان بیرجند

چکیده

رفتار پیچیده آبخوان با حل معادلات حاکم بر جریان آب زیرزمینی هم به صورت تحلیلی و هم به صورت عددی بررسی می‌گردد. روش‌های عددی همچون تفاضل محدود که برای حل معادلات دیفرانسیل به کار می‌روند معمولاً معادلات را در شرایط هندسی ساده حل می‌کنند. اخیراً از روش‌های عددی جدیدی به نام روش‌های بدون شبکه به منظور حل معادلات دیفرانسیلی در شرایط ساده و هم‌چنین پیچیده استفاده می‌کنند. از آنجایی که در این روش‌ها نیازی به شبکه‌بندی دامنه مساله نیست، مشکلات ناشی از شبکه‌بندی‌ها حذف می‌شود. تاکنون مطالعات اندکی در زمینه مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی با استفاده از روش‌های بدون شبکه انجام شده است. در این مطالعه از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین با تابع تقریب حداقل مربعات متحرک و تابع وزن اسپیلاین به منظور مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد بیرجند در استان خراسان جنوبی در شرایط ماندگار استفاده شد. سطح آب زیرزمینی محاسبه شده توسط مدل با سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در چاه‌های مشاهداتی مقایسه شدند. نتایج به دست آمده رضایت بخش بود. به طوری که میانگین خطای نسبی و خطای جذر میانگین مربعات این روش به ترتیب 0.0002، 0.483 بود.

Modeling of groundwater flow in unconfined aquifer in steady state with meshless local Petrov-Galerkin

Ali Mohtashami, Abolfazl Akbarpour*, Mahdi Mollazadeh

Department of Civil Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

* P.O.B. 9717434765, Birjand, Iran, akbarpour@birjand.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 31 December 2016
Accepted 31 January 2017
Available Online 22 February 2017

Keywords:
Groundwater
Meshless local Petrov-Galerkin
Steady state
Birjand aquifer

ABSTRACT

The complex behavior of the aquifer system is studied by solving a set of governing equations using either analytical or numerical methods. Numerical techniques like finite difference method (FDM) are being used to solve differential equation in some simple cases. Recently Meshless methods are being developed in engineering fields. They are used for solving differential equations in both simple and complex cases. As these methods need no meshing or re-meshing on the domain the shortages of meshing disappeared. A few studies have already been performed in groundwater flow modeling with meshless method. In this study Meshless local Petrov-Galerkin with moving least squares approximation function and spline weight function is used to model groundwater flow in Birjand unconfined aquifer in steady condition. The computed surface of groundwater with meshless local Petrov-Galerkin method is compared with the results observation. The results are found satisfactory. The relative mean error and root mean square error of computed groundwater surface from Meshless Local Petrov-Galerkin are 0.0002 and 0.483 respectively.

می‌پذیرد [1].

1- مقدمه

بدون شک بهترین ابزار برای شناخت رفتارهای یک آبخوان، حل عددی معادله حاکم بر آن است. از روش‌های عددی متداول در مسائل آب زیرزمینی می‌توان به روش‌های تفاضل محدود و اجزای محدود اشاره نمود که انتخاب میان این دو، وابسته به نوع مسأله و نظر کاربر است. علی‌رغم مزایای فراوان، این روش‌ها دارای محدودیت‌هایی نیز می‌باشند. در طی سالیان گذشته بسیاری از محققان سعی در برطرف نمودن این محدودیت‌ها کرده‌اند، اما

با توجه به افزایش بی‌رویه جمعیت جهان، که منابع آب زیرزمینی را با خطر جدی تهدید می‌کند، ضرورت مدیریت این منابع بیش از پیش اهمیت یافته است. از آنجا که فرایند جریان آب‌های زیرزمینی در طبیعت امری پیچیده می‌باشد، پیش‌بینی تغییرات مکانی و زمانی آن در آبخوان (آکیوفر) امری ضروری و مهم است. بدین جهت مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی که نقش محوری و اساسی در طراحی و مدیریت آب‌های زیرزمینی ایفا می‌کند انجام

Please cite this article using:

A. Mohtashami, A. Akbarpour, M. Mollazadeh, Modeling of groundwater flow in unconfined aquifer in steady state with meshless local Petrov-Galerkin, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 2, pp. 393-403, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

2013 کواریک و موزیک با استفاده از روش بدون شبکه شعاعی بر پایه معادلات انتگرالی و توابع شعاعی چند ربعی به معادله جریان آب زیرزمینی پرداختند و نتایج خود را با نتایج روش‌های عددی دیگر مقایسه کردند. در همه موارد روش بدون شبکه به کار گرفته شده از دقت بیشتری برخوردار بود [8]. در 2013 سواتهی و الیهو جریان آب زیرزمینی را در آبخوان محصور در شرایط غیرماندگار مدل سازی نمودند، آن‌ها از روش بدون شبکه پتروو-گالرکین⁶ با توابع شکل پایه شعاعی استفاده کردند همچنین تابع وزن به کار رفته همان تابع شکلشان بود [9]. آن‌ها همچنین در سال 2014 جریان آب زیرزمینی را در آبخوان آزاد در شرایط غیر ماندگار با همان روش بدون شبکه با همان توابع شکل و وزن مدل سازی کردند و نتایج خود را با نتایج المان مرزی مقایسه نمودند [1].

در سال‌های اخیر مطالعات متعددی روی آبخوان بیرجند صورت گرفته است، در سال 2015 همراز و همکاران آبخوان بیرجند را براساس مدل مادفلو⁷ در نرم افزار متلب مدل سازی کردند و پارامتر عدم قطعیت را با روش گلو⁸ در دشت بیرجند بررسی نمودند [10]. سعیدی و همکاران تغییرات سطح آب زیرزمینی آبخوان دشت بیرجند را با استفاده از کد منبع باز پیش بینی نمودند. آن‌ها همچنین نشان دادند ارتفاع سطح آب زیرزمینی از شرق به غرب و جنوب غربی کاهش می‌یابد [11]. قوچانیان و همکاران آبخوان دشت بیرجند را در سال 2013 با استفاده از مدل‌های مادفلو و ویپ⁹، مدل سازی نمودند [12].

در این مطالعه، هدف مدل سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد دشت بیرجند در شرایط ماندگار است. این آبخوان دارای هندسه و مرز پیچیده‌ای است از این رو برای نخستین بار از روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین با تابع تقریب حداقل مربعات متحرک¹⁰ و تابع وزن اسپیلاین استفاده شد. در انتها پس از مدل سازی، سطح آب زیرزمینی به دست آمده از مدل، با سطح آب زیرزمینی مشاهده شده، مقایسه شدند.

2- منطقه مورد مطالعه

آبخوان دشت بیرجند با مساحت 265 کیلومتر مربع و متوسط ضخامت اشباع 30 متر، در استان خراسان جنوبی واقع گردیده است (شکل 1). وسعت کل حوضه آبریز دشت بیرجند در حدود 3408 کیلومتر مربع بوده که از این میزان حدود 1383 کیلومتر مربع را دشت و مابقی را ارتفاعات تشکیل می‌دهد. دشت بیرجند طبق طبقه بندی اقلیمی دوارتن جزء مناطق خشک محسوب می‌شود [13].

3- مواد و روش‌ها

3-1- تابع تقریب حداقل مربعات متحرک

معرفی و استفاده از تابع تقریب حداقل مربعات متحرک، گام بزرگی در توسعه و گسترش روش‌های بدون شبکه ضعیف بود. ایجاد یک محیط پیوسته برای درونبایی تابع میدان، در کل دامنه و همچنین توانایی تقریب سازی با مرتبه دلخواه از سازگاری از مهمترین ویژگی‌های این تابع است که بسیاری از محققان را به استفاده از آن، برای تولید توابع شکل سوق می‌دهد [14]. به طوری که اولین بار نیرولز و همکاران در سال 1992 این تابع را به منظور

همچنان تمامی روش‌های عددی در ارتباط با شبکه بندی میدان حل، مشکلاتی دارند. دلیل اصلی کاهش دقت محاسبات در هنگام شبکه بندی مجدد، انتقال اطلاعات از مش بندی و شبکه‌ی قدیم (مرحله ی قبلی) به شبکه جدید در مرحله جدید است. طبیعی است با توجه به تغییر هندسی ناپیوستگی، موقعیت مکانی تمام یا دست کم بخشی از المان‌ها و گره‌های وابسته به آن‌ها تغییر خواهد کرد. بنابراین هنگام انتقال اطلاعات ناگزیر به استفاده از توابع میان‌بایی برای تمام یا بخشی از گره‌ها بوده که باعث افزایش خطای محاسباتی خواهد شد.

هرچند فهم و برنامه نویسی مدل‌های تفاضل محدود نسبتاً آسان است، اما کاربرد این روش محدود به شبکه‌های مستطیلی است که این گونه شبکه‌ها نمی‌توانند به خوبی مسأله را پوشش دهند. همچنین از جمله اشکالات عمده روش اجزای محدود، نیازمند بودن این روش به شبکه بندی کامل هندسه مسأله است. از این رو در مسائلی با شرایط مرزی متغیر لازم است تا شبکه بندی هندسی مسأله به طور مرتب به روز شود. این امر مستلزم صرف زمان زیادی است، و برنامه نویسی این روش‌ها کار پیچیده‌ای خواهد بود. از این رو در طی سال‌های اخیر توجه فراوانی به گسترش روش‌های بدون شبکه شده است. ایده اولیه روش‌های بدون شبکه در سال 1977 توسط جینگولد و موناهان ارائه شد آن‌ها برای مدل سازی پدیده‌های نجومی همچون گسترش ستارگان و توده ابرهای غباری روش هیدرودینامیک ذرات هموار¹ را به کار گرفتند [2]. هدف اصلی در روش‌های بدون شبکه، حذف بخشی از ساختار سنتی در روش‌های وابسته به المان همچون اجزای محدود می‌باشد. ایده اصلی در روش‌های بدون شبکه تقریب‌زنی تمامی میدان مسأله آن هم تنها با استفاده از گره‌ها می‌باشد.

تاکنون از روش‌های بدون شبکه در مدل سازی عددی، در مبحث دینامیک سیالات محاسباتی استفاده‌های گسترده‌ای شده است به طوری که در سال 2011 فیروزجائی و افشار معادله آب کم عمق را با روش بدون شبکه در حالت ماندگار مدل سازی کردند و نتایج خود را با نتایج تحلیلی و میدانی مقایسه کردند [3]. همچنین سان و همکاران در سال 2013 از روش بدون شبکه برای مدل سازی معادلات مربوط به آب‌های کم عمق در سه مسئله استفاده کردند [4]. در زمینه انتقال رسوب در سال 2007 جباری و سعیدپناه با استفاده از روش بدون شبکه، به مدل سازی انتقال رسوب در مناطق ساحلی پرداختند و نتایج خود را با نتایج مدل سازی مقالات قبلی در آن منطقه مقایسه کردند [5].

در بحث مدل سازی جریان آب زیرزمینی با استفاده از روش‌های بدون شبکه، مطالعات اندکی انجام شده است. در سال 2011 سعیدپناه و همکاران از یک روش بدون شبکه به نام توابع درونبای شعاعی محلی² به منظور مطالعه تاثیر نشت، بر پاسخ جزرومد آبخوان ساحلی پرداختند [6]. آن‌ها از تابع پله‌ای هوساید³ و توابع شعاعی چند ربعی⁴ به ترتیب به عنوان تابع وزن و تابع شکل استفاده نمودند. نتایج آن‌ها نشان داد که نشت در آبخوان موجب کاهش دامنه جزر و مدی سطح آب زیرزمینی و همچنین فاصله تا آبخوان می‌شود. در سال 2011 متگانوکار و الیهو با استفاده از روش مرتب سازی نقاط⁵ بر پایه توابع شعاعی چند ربعی یک مدل جریان آب زیرزمینی و مدل انتقال را توسعه دادند و نتایج خود را با نتایج مدل اجزای محدود مقایسه نمودند [7]. در سال

⁶ Meshless local Petrov-Galerkin

⁷ Modflow

⁸ Glue

⁹ Weap

¹⁰ Moving Least squares approximation

¹ Smoothed Particle Hydrodynamic

² Local Radial Point Interpolation Method

³ Heaviside

⁴ Multi quadratic

⁵ Point Collocation Method

باید مینیمم شود [14]:

$$J = \sum_I^n W(X - X_I)[P^T(X_I)a(X) - U_I]^2 \quad (5)$$

در رابطه (5)، $W_I(X)$ نشان دهنده تابع وزن مربوط به نقطه گرهی I و مقدار داخل کروشه اختلاف بین مقدار تخمین زده شده در نقطه I و مقدار داده شده در همان نقطه می باشد. همچنین n تعداد نقاط در ناحیه حمایتی است به نحوی که تابع وزن $W_I(X)$ مقادیر غیر صفری در آن خواهد داشت [14]. به منظور مینیمم کردن تابع J شرط رابطه (6) مورد بررسی قرار می گیرد:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad (6)$$

که نهایتاً منجر به رابطه خطی (7) می شود.

$$a(X) = A^{-1}(X)B(X)U_s \quad (7)$$

در معادله (7)، $A(X)$ ، $B(X)$ و U_s به ترتیب در روابط (8)، (9) و (11) تعریف می شوند.

$$A(X) = \sum_I^n W(X_I)p(X_I)P^T(X_I) \quad (8)$$

$$B(X) = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n] \quad (9)$$

$$B(X) = [W_1p(X_1) \ W_2p(X_2) \ \dots \ W_n p(X_n)] \quad (10)$$

$$U_s = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n] \quad (11)$$

با جای گذاری رابطه (7) در رابطه (1) تقریب حداقل مربعات متحرک به صورت روابط (12) و (13) ارائه می گردند:

$$U^h(X) = \sum_I^n \sum_J^m p_j(X)(A^{-1}(X)B(X))_{jI} U_I \quad (12)$$

$$U^h(X) = \sum_I^n \phi_I(X)U_I \quad (13)$$

که در آن $U^h(X)$ تقریب تابع، $\phi_I(X)$ تابع شکل و U_I پارامتر گرهی می باشد. به عبارتی دیگر تابع شکل به صورت (14) بیان می گردد:

$$\phi_I(X) = \sum_J^m p_j(X)(A^{-1}(X)B(X))_{jI} = P^T A^{-1} B_I \quad (14)$$

در این پژوهش، برای جلوگیری از منفرد شدن ماتریس A در رابطه (7) تعداد جملات به کار رفته در ساخت بردار پایه شش ($m = 6$) و از درجه دو ($l = 2$) است. همچنین تعداد گره های ناحیه حمایتی (n) در این تابع تقریب به نحوه توزیع گره ها و تعداد توابع پایه بستگی دارد و باید تنها شرط وجود معکوس ماتریس A در رابطه (7) را ارضا نماید، به همین علت تعداد این گره ها خیلی بیشتر از تعداد توابع پایه در نظر گرفته می شود ($n \gg m$). قابل ذکر است نظریه ای برای تعیین بهترین مقدار n وجود ندارد و باید از طریق آزمون های عددی مقدار آن را تعیین نمود [14]. در این مطالعه تعداد گره های به کار رفته برای ساخت تابع شکل در ناحیه حمایتی به اندازه تعداد نقاط پراکنده شده در دامنه مساله است که این تعداد نقاط برابر 1175 می باشد.

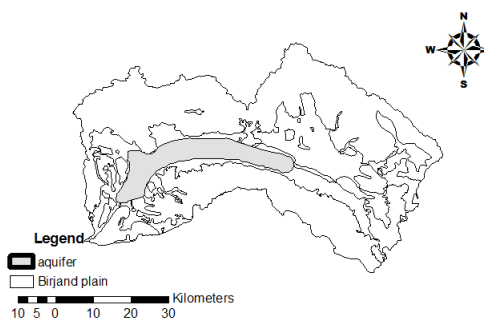
3-2- انتخاب تابع وزن

انتخاب تابع وزن نقش مهمی در عمل تقریب سازی توسط تابع تقریب حداقل مربعات متحرک دارد. تابع وزن چهار ویژگی دارد [19]:

- مقدار تابع وزن در داخل ناحیه حمایتی مثبت است.
- مقدار تابع وزن در خارج ناحیه حمایتی صفر است.



(الف)



(ب)

Fig. 1 Geographical location of Birjand

شکل 1 موقعیت جغرافیایی آبخوان دشت بیرجند

1994 گسترش روش المان توسعه ای¹ معرفی کردند [15]. بلچکو و همکاران در سال و آتلوری و ژو در سال 1998 برای ساخت توابع شکل خود به ترتیب در روش های بدون المان گالرکین² و روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین از تابع تقریب حداقل مربعات متحرک بهره برده اند [16-18].

اگر $U^h(X)$ یک تابع تغییرات میدانی در محدوده مورد بررسی Ω باشد، تقریب $U(X)$ در نقطه X با $U^h(X)$ نشان داده می شود. تقریب حداقل مربعات متحرک که متغیر میدان را به صورت محلی از ضرب ماتریس چند جمله ای در ماتریس ضرایب توصیف می کند به فرم رابطه (1) بیان می شود [14].

$$U^h(X) = \sum_J^m p_j(X)a_j(X) = P^T(X)a(X) \quad (1)$$

که در آن m تعداد جملات تشکیل دهنده $P(X)$ و $a(X)$ بردار ضرایب $P(X)$ است که به صورت رابطه (2) تعریف می شود.

$$a^T(X) = \{a_1(X) \ a_2(X) \ \dots \ a_m(X)\} \quad (2)$$

در رابطه (1)، $P(X)$ یک بردار از توابع پایه است، که اغلب شامل حداکثر تک جمله ای های لازم برای حصول حداقل کامل بودن، می باشد. در فضای یک بعدی، یک پایه چند جمله ای کامل از مرتبه l طبق رابطه (3) بیان می گردد.

$$P^T(X) = \{1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^l\} \quad (3)$$

و در فضای دو بعدی $[x, y]$

$$P^T(X, Y) = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ \dots \ y^l\} \quad (4)$$

به طور کلی بردار $P(X)$ بر اساس مثلث پاسکال ساخته می شود [15].

به منظور تعیین ضرایب مجهول $a(X)$ ، تابع وزن دار نرم L_2 در رابطه (5)

¹ Diffuse element method

² Element free Galerkin

• مقدار تابع وزن به صورت یکنواخت نسبت به نقطه دلخواه، کاهش می یابد.

• این تابع به میزان مناسبی روی مرزها هموار عمل می کند.

این تابع به صورت های متفاوت مورد استفاده قرار می گیرد، گوسی و اسپیلاین، از آن جایی که در این پژوهش از تابع وزن اسپیلاین استفاده شده است، نحوه محاسبه آن در رابطه (15) شرح داده می شود.

$$W_i(X) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - \frac{4}{3}\bar{r}_i^3 & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (15)$$

در رابطه (15)، $\bar{r}_i = d_i/r_w = (|x - x_i|)/r_w$ شعاع تاثیر نقطه گرهی x_i می باشد. برای هر نقطه، باید به گونه ای انتخاب شود که تعداد وزن های غیر صفر بزرگتر از تعداد تک تک جملات موجود در چند جمله ای باشند. ($n > m$).

3-3- روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین (MLPG)

روش بدون شبکه پتروو-گالرکین یکی از روش های بدون شبکه واقعی است، زیرا در هیچ یک از مراحل تحلیل اعم از تقریب متغیر میدان و انتگرال گیری عددی معادلات فرم ضعیف، نیازی به شبکه بندی بر روی کل دامنه مساله ندارد. این روش با استفاده از فرم ضعیف محلی، معادلات را حل می کند و برای اولین بار توسط آلتوری و ژو در سال 1998 ارائه شد. تابع تقریب در این روش حداقل مربعات متحرک می باشد و همچنین به منظور حل معادلات انتگرالی از روش انتگرال گیری گوسی¹ استفاده می گردد. [18]

3-4- فرمول بندی روش بدون شبکه پتروو-گالرکین

برای مسائل استاتیکی دو بعدی که معادله تعادل و شرایط مرزی روی دامنه Ω و مرز Γ احاطه شده است؛ به صورت روابط (16)، (17) و (18) نوشته می شوند.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (16) \quad \text{معادله تعادل}$$

$$u = \bar{u} \quad \text{روی } \Gamma_u \quad (17) \quad \text{شرط مرز اساسی}$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{روی } \Gamma_t \quad (18) \quad \text{شرط مرز طبیعی}$$

فرم ضعیف پتروو-گالرکین بر روی دامنه محلی (دامنه تربیع)² حول گره I ام می تواند به صورت رابطه (19) نوشته شود:

$$\int_{\Omega_q} (\sigma_{ij,j} + b_i) W_I d\Omega = 0 \quad (19)$$

با استفاده از انتگرال جزء به جزء و قضیه دیورژانس رابطه (19) را می توان ساده تر نمود.

$$\int_{\Omega_q} W_I \sigma_{ij,j} d\Omega = \int_{\Gamma_q} W_I n_j \sigma_{ij} d\Gamma - \int_{\Omega_q} W_{I,j} \sigma_{ij} d\Omega \quad (20)$$

بنابراین رابطه (21) با جای گذاری رابطه (20) در (19) به دست می آید.

$$\int_{\Omega_q} W_{I,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} W_I n_j \sigma_{ij} d\Gamma = \int_{\Gamma_{qt}} \bar{t}_i W_I d\Gamma + \int_{\Omega_q} W_I b_i d\Omega \quad (21)$$

در فرمول بندی به روش بدون شبکه پتروو-گالرکین تابع وزن به نحوی انتخاب می شود که در انتگرال گیری مقدار آن بر روی مرز داخلی دامنه تربیع صفر باشد [14].

در نهایت معادلات خطی گسسته سیستم برای گره I ام در شکل

¹ Gaussian integration

² Quadrature domain

ماتریسی برای مسائل استاتیکی به صورت رابطه (22) به دست می آید.

$$KU = F \quad (22)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega_q} V_I^T DB_J d\Omega - \int_{\Gamma_u} W_I n DB_J d\Gamma \quad (23)$$

$$F_I = \int_{\Omega_q} W_I b d\Omega + \int_{\Gamma_{qt}} \bar{t} W_I d\Gamma \quad (24)$$

در این روابط W ماتریس وزن کلی و V مشتق آن است.

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & W_2 & 0 & \dots & W_n & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & W_2 & \dots & 0 & W_n \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$V = \begin{bmatrix} W_{1,x} & 0 & W_{2,x} & 0 & \dots & W_{n,x} & 0 \\ 0 & W_{1,y} & 0 & W_{2,y} & \dots & 0 & W_{n,y} \\ W_{1,y} & W_{1,x} & W_{2,y} & W_{2,x} & \dots & W_{n,y} & W_{n,x} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (27)$$

3-5- گسسته سازی معادله آبخوان آزاد به روش محلی بدون شبکه

پتروو-گالرکین

فرم کلی معادله حاکم بر جریان آب های زیرزمینی در آبخوان آزاد در حالت ماندگار عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y H \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z H \frac{\partial H}{\partial z} \right) = R \quad (28)$$

در رابطه (28)، k_x ، k_y و k_z مولفه های تانسور هدایت هیدرولیکی، H پتانسیل، R مولفه تغذیه کننده و یا تخلیه کننده (به ترتیب با علامت مثبت یا منفی) آبخوان می باشند [20-22].

در آبخوان های آزاد ضخامت لایه اشباع با تغییر ارتفاع سطح آب زیرزمینی تغییر می کند. برای حل معادله جریان در این حالت دوپویی در سال 1863 فرضیاتی را در نظر گرفت [23] که عبارتند از:

(الف) جریان افقی است.

(ب) شیب هیدرولیکی مساوی شیب سطح آزاد می باشد.

معادله ای که براساس فرضیات دوپویی و معادله پیوستگی در شرایط وجود جریان دو بعدی و ماندگار استخراج گردیده عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y H \frac{\partial H}{\partial y} \right) = R \quad (29)$$

از آن جا که

$$\frac{\partial H^2}{\partial x} = 2H \frac{\partial H}{\partial x} \quad (30)$$

بنابراین رابطه (29) با جایگذاری معادله (30) در آن شکل ساده تری به خود می گیرد

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H^2}{\partial y} \right) = 2 \times (R) \quad (31)$$

گفتنی است در آبخوان دشت بیرجند ضریب هدایت هیدرولیکی در دو جهت افقی و عمودی مقداری یکسان دارد (شرایط همسان گرد).

$$k \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H^2}{\partial y} \right) \right] = 2 \times (R) \quad (32)$$

$$k \left[\left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) \right] = 2 \times (R) \quad (33)$$

با استفاده از روش باقی مانده های وزن دار معادله (33) گسسته می شود.

$$\iint_{\Omega} W_i k \left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) d\Omega = 2 \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (34)$$

عبارتند از: داده‌های مرز آبخوان (شرایط مرزی)، چاه‌ها، مقادیر تغذیه و تخلیه در آبخوان و مقادیر هدایت هیدرولیکی.

3-6-1- شرایط مرزی

به‌طور کلی نقاط مرز آبخوان در دو گروه جای می‌گیرند. یکی نقاطی با هد ثابت و دیگری نقاطی غیرفعال² یا بدون جریان³. نقاط مرزی بدون جریان یا غیرفعال، نقاطی هستند که ورود و خروج جریان در آن‌ها نیست و به عبارتی غیرفعال هستند. در نقاط مرزی با هد ثابت⁴، سطح آب زیرزمینی برای مرز تعیین شده و مقدار آن در امتداد مرز ثابت می‌ماند. این مرزها شامل 9 جبهه ورودی و یک جبهه خروجی به‌صورت زهکش است که در "شکل 3" این مرزها با فلش‌هایی مشخص گشته‌اند؛ محدوده جبهه‌های ورودی و خروجی براساس نقشه خطوط هم پتانسیل آب زیرزمینی (ایزوپیز) آبخوان بیرجند تهیه می‌شود، خطوط جریان ورودی و خروجی مرز، عمود بر خطوط هم پتانسیل آب زیرزمینی‌ای هستند که تا مرز آبخوان کشیده شده‌اند. "شکل 4" نقاطی که به‌عنوان نقاط مرزی با هد ثابت در این جبهه‌ها در نظر گرفته شده است را نشان می‌دهد. جدول 1 مقادیر و مختصات سطح آب زیرزمینی در نقاط مرزی با هد ثابت را نشان می‌دهد.

3-6-2- چاه‌ها

برداشت از آبخوان از طریق چاه‌ها صورت می‌گیرد، در منطقه مورد مطالعه 190 حلقه چاه وجود دارد. در مدل استفاده شده هر کدام از این چاه‌ها با توجه به موقعیتشان به نزدیک‌ترین نقطه گرهی تغییر مکان می‌دهند. در "شکل 5" چاه‌ها با نماد مربع از دیگر نقاط گرهی متمایز شده‌اند. همچنین مقادیر نرخ برداشت از چاه‌ها در جدول 2 ذکر شده‌اند.

3-6-3- مقادیر تغذیه و تخلیه

با توجه به اقلیم خشک منطقه و بارش ناچیز نزولات جوی، همین مقدار اندک بارندگی به‌عنوان مقدار تغذیه در آبخوان در نظر گرفته می‌شود. مقدار بارندگی 0.000727 متر بر روز است؛ این مقدار براساس داده‌های ایستگاه باران‌سنجی دشت بیرجند در سال 1390-1391 استخراج شده است. مقدار آب برداشت شده در واحد زمان از چاه‌ها به‌عنوان مقدار تخلیه در مدل در نظر گرفته می‌شود.

3-6-4- ضریب هدایت هیدرولیکی

به‌منظور ورود اطلاعات هدایت هیدرولیکی به نقاط گرهی در آبخوان دشت بیرجند، این آبخوان توسط نرم‌افزار جی‌آی‌اس به چندین تیسن همگن (چند ضلعی) تقسیم‌بندی شد و به هر تیسن یک مقدار به‌عنوان عدد هدایت هیدرولیکی، نسبت داده می‌شود. اعداد هدایت هیدرولیکی براساس آزمایش‌های انجام شده در آبخوان به‌دست آمده‌اند. واحد تمامی این اعداد متر بر روز می‌باشد. مقادیر هدایت هیدرولیکی در هر چندضلعی در "شکل 6" ذکر شده است.

4- نتایج

پس از ساخت هندسه آبخوان و پخش نقاط گرهی، با ورود اطلاعات اولیه، مدل در حالت ماندگار برای یک سال 1390-1391 اجرا شد. تراز آب زیرزمینی در همه نقاط پخش شده در آبخوان محاسبه گردید. به‌منظور

$$\iint_{\Omega} W_i k \left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} \right) d\Omega + \iint_{\Omega} W_i k \left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) d\Omega = 2 \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (35)$$

عبارت اول و دوم سمت چپ معادله (35) با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء ساده‌تر می‌شود

$$k \left[\int_{\Gamma} W_i \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} W_i \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (36)$$

از آن‌جا که در آبخوان دشت بیرجند جریان نرمال که از مرز آبخوان وارد یا خارج شود وجود ندارد، جملات اول و سوم سمت چپ معادله (36) برابر صفر هستند.

$$-k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial H^2}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial H^2}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (37)$$

با جایگذاری معادله (30) در معادله (37):

$$-2k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} H \frac{\partial H}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} H \frac{\partial H}{\partial y} d\Omega \right] = 2 \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (38)$$

مقدار تخمینی در نظر گرفته شده برای مجهول:

$$H = \sum_{i=1}^m H_i \phi_i(x, y) \quad (39)$$

با جایگذاری رابطه (39) در (38):

$$k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\Omega \right] H^2 = \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (40)$$

همان شکل معادله خطی (22) به وجود می‌آید. ماتریس‌های سختی، مجهولات و بار به ترتیب در روابط (41)، (42) و (43) تعریف می‌شوند.

$$[K] = k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\Omega \right] \quad (41)$$

$$[U] = H^2 \quad (42)$$

$$[F] = \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (43)$$

ماتریس بار در رابطه (43) مشخص کننده میزان تخلیه و تغذیه می‌باشد، این ماتریس دبی‌های برداشتی و یا ورودی به سفره را که به‌صورت گسترده و متمرکز هستند را نشان می‌دهد.

$$[F] = \iint_{\Omega} W_i R d\Omega = \iint_{\Omega} W_i Q_k \delta(x - x_k)(y - y_k) d\Omega + \iint_{\Omega} W_i q d\Omega \quad (44)$$

جمله اول سمت راست معادله (44) دبی متمرکز (چاه) را در نقطه x_k و y_k و جمله دوم از سمت راست دبی گسترده همچون بارندگی و یا تبخیر را نشان می‌دهد.

3-6- مدل سازی کمی آبخوان

هندسه آبخوان بیرجند با استفاده از نرم‌افزار متلب مدل سازی گردید، سپس نقاط گرهی در آن به‌صورت یکنواخت¹ پخش شدند به‌طوری‌که فاصله هر دو نقطه متوالی در جهات افقی و عمودی، 500 متر می‌باشد؛ فاصله در نظر گرفته شده براساس مطالعات قبل صورت گرفته در آبخوان دشت بیرجند انتخاب شده است ($\Delta x = \Delta y = 500m$) [22,20]. "شکل 2" هندسه مدل شده آبخوان در محیط متلب و همچنین نقاط پراکنده شده در آن را نشان می‌دهد. چهار لایه اطلاعاتی برای ساخت مدل جریان آب زیرزمینی در آبخوان بیرجند

² Inactive

³ No flow

⁴ Specified head or constant head

¹ Uniform

جدول 1 مختصات و مقادیر سطح آب زیرزمینی در نقاط مرزی با هد ثابت

Table 1 The coordinates and the values of specified head boundary nodes

شماره	مختصات افقی در سیستم UTM (m)	مختصات عمودی در سیستم UTM (m)	سطح آب زیرزمینی (m)	شماره	مختصات افقی در سیستم UTM (m)	مختصات عمودی در سیستم UTM (m)	سطح آب زیرزمینی (m)	شماره
1	670892.527	3626000	1263	64	699105.722	3637500	1355.1	1
2	671392.527	3626000	1263	65	698605.722	3637500	1367.71	2
3	671892.527	3626000	1263	66	698105.722	3637500	1365.71	3
4	672392.527	3626000	1263	67	697659.633	3637500	1364.17	4
5	672892.527	3626000	1264.82	68	697159.633	3637500	1362.17	5
6	673392.527	3626000	1266	69	696659.633	3637500	1361.37	6
7	673892.527	3626000	1268.18	70	696159.633	3637500	1359.64	7
8	675076.920	3626500	1274.18	71	695659.633	3637500	1357.22	8
9	674576.920	3626500	1270.88	72	695159.633	3637500	1354.34	9
10	670576.920	3626500	1263	73	694659.633	3637500	1351.13	10
11	670632.311	3627000	1263	74	694159.633	3637500	1347.99	11
12	675632.311	3627000	1282.6	75	693659.633	3637500	1345.11	12
13	676132.311	3627000	1285.34	76	693159.633	3637500	1342.83	13
14	676632.311	3627000	1288.16	77	692659.633	3637500	1341.18	14
15	714332.103	3634000	1396.78	78	692159.633	3637500	1339.9	15
16	714832.103	3634000	1397.01	79	691659.633	3637500	1338.9	16
17	715332.103	3634000	1398	80	691159.633	3637500	1337.12	17
18	715832.103	3634000	1394	81	690659.633	3637500	1334.03	18
19	716332.103	3634000	1394	82	673659.633	3637500	1305.69	19
20	716832.103	3634000	1395	83	673691.541	3638000	1307.53	20
21	717399.929	3634500	1394.5	84	692191.541	3638000	1340	21
22	713899.929	3634500	1395.04	85	692691.541	3638000	1342	22
23	713399.929	3634500	1394.79	86	693191.541	3638000	1344	23
24	711583.703	3635000	1392.09	87	693691.541	3638000	1347	24
25	712083.703	3635000	1392.23	88	694191.541	3638000	1351	25
26	712583.703	3635000	1393.24	89	694691.541	3638000	1354	26
27	713083.703	3635000	1394.18	90	695191.541	3638000	1357	27
28	717583.703	3635000	1396	91	695691.541	3638000	1360	28
29	717712.855	3635500	1396	92	696191.541	3638000	1361	29
30	711212.855	3635500	1390.47	93	696691.541	3638000	1362	30
31	710712.855	3635500	1390.15	94	697191.541	3638000	1363	31
32	710212.855	3635500	1388.75	95	697691.541	3638000	1364	32
33	709712.855	3635500	1387.09	96	698191.541	3638000	1365	33
34	674209.451	3635500	1294.09	97	698691.541	3638000	1360	34
35	674206.683	3636000	1295.07	98	699191.541	3638000	1360	35
36	707167.142	3636000	1380.39	99	715191.541	3638000	1394.98	36
37	707667.142	3636000	1381.38	100	715691.541	3638000	1394.7	37
38	708667.142	3636000	1384.2	101	716191.541	3638000	1394	38
39	709167.142	3636000	1385.92	102	716691.541	3638000	1395	39
40	717667.142	3636000	1396	103	715170.793	3638500	1395.65	40
41	717459.456	3636500	1396	104	679170.793	3638500	1310	41
42	706959.456	3636500	1380.01	105	673670.793	3638500	1309.8	42
43	705959.456	3636500	1376.15	106	673711.755	3639000	1310.64	43
44	705459.456	3636500	1375.01	107	674211.755	3639000	1310.05	44
45	674103.235	3636500	1296.29	108	674711.755	3639000	1310.05	45
46	673625.471	3637000	1302.73	109	675211.755	3639000	1309.98	46
47	703981.616	3637000	1370	110	675711.755	3639000	1309.83	47
48	704481.616	3637000	1370	111	676211.755	3639000	1309.96	48
49	704981.616	3637000	1373.45	112	676711.755	3639000	1309.96	49
50	705481.616	3637000	1375	113	677211.755	3639000	1309.96	50
51	717481.616	3637000	1396	114	677711.755	3639000	1310.72	51
52	717605.722	3637500	1396	115	678211.755	3639000	1310.08	52
53	717105.722	3637500	1395	116	678711.755	3639000	1311.5	53
54	704105.722	3637500	1370	117	677051.098	3639500	1311.44	54
55	703605.722	3637500	1370	118	676551.098	3639500	1311.21	55
56	703105.722	3637500	1370	119	676051.098	3639500	1311.05	56
57	702605.722	3637500	1367.75	120	675551.098	3639500	1311.06	57
58	702105.722	3637500	1364.97	121	675051.098	3639500	1310.98	58
59	701605.722	3637500	1365	122	674551.098	3639500	1310.98	59
60	701105.722	3637500	1364.64	123	674051.098	3639500	1310.99	60
61	700605.722	3637500	1364.64	124	708012.542	3640000	1383	61
62	700105.722	3637500	1360	125	708512.542	3640000	1385	62
63	699605.722	3637500	1359.59	126	709012.542	3640000	1386	63

جدول 2 مقادیر نرخ برداشت از چاه های آبخوان بیرجند

Table 2 The values of discharge in extraction wells

شماره	مختصات افقی در سیستم UTM (m)	مختصات عمودی در سیستم UTM (m)	نرخ برداشت از چاه (m ³ /day)	شماره	مختصات افقی در سیستم UTM (m)	مختصات عمودی در سیستم UTM (m)	نرخ برداشت از چاه (m ³ /day)
1	673076.920	3626500	-41.4	96	696691.541	3638000	-129.6
2	672576.920	3626500	-198	97	697691.541	3638000	-30.36
3	673132.311	3627000	-86.4	98	699191.541	3638000	-527.04
4	673632.311	3627000	-86.4	99	700191.541	3638000	-990
5	676205.505	3630000	-633.6	100	700691.541	3638000	-1080
6	677205.505	3630000	-163.2	101	702191.541	3638000	-528
7	677410.836	3630500	-147.744	102	703691.541	3638000	-3067.2
8	675410.836	3630500	-0.9	103	705191.541	3638000	-285
9	675662.818	3631000	-38.4	104	706691.541	3638000	-382.8
10	676540.334	3631500	-26.4	105	708191.541	3638000	-1080
11	675940.241	3632000	-50.952	106	711170.793	3638500	-21.6
12	676940.241	3632000	-75.6	107	709170.793	3638500	-252
13	677940.241	3632000	-518.4	108	705670.793	3638500	-518.4
14	678440.241	3632000	-21.6	109	705170.793	3638500	-432
15	677593.283	3632500	-1987.2	110	704170.793	3638500	-183.6
16	677093.283	3632500	-713.184	111	702670.793	3638500	-1728
17	675694.986	3633000	-849.6	112	702170.793	3638500	-1771.2
18	678864.154	3633500	-2781.6	113	699670.793	3638500	-177
19	677864.154	3633500	-2764.8	114	699170.793	3638500	-1600.8
20	676364.154	3633500	-691.2	115	698670.793	3638500	-50.976
21	675522.537	3634000	-921.6	116	697670.793	3638500	-1392
22	677022.537	3634000	-1900.8	117	697170.793	3638500	-117.504
23	678522.537	3634000	-1547.424	118	696670.793	3638500	-1809.6
24	679522.537	3634000	-2827.2	119	696170.793	3638500	-976.8
25	680022.537	3634000	-633.6	120	695170.793	3638500	-1468.8
26	680522.537	3634000	-501.72	121	692670.793	3638500	-1296
27	681159.263	3634500	-13.2	122	690670.793	3638500	-57.6
28	680659.263	3634500	-1192.8	123	689170.793	3638500	-1843.2
29	680159.263	3634500	-849.6	124	683670.793	3638500	-2980.8
30	679659.263	3634500	-1589.76	125	682170.793	3638500	-3124.87
31	678659.263	3634500	-1462.272	126	677670.793	3638500	-20.088
32	676659.263	3634500	-1214.4	127	684275.425	3639000	-712.8
33	679710.971	3635000	-18.144	128	686275.425	3639000	-1848
34	680710.971	3635000	-724.2	129	688775.425	3639000	-2058
35	717212.855	3635500	-28.8	130	689275.425	3639000	-2755.2
36	681209.451	3635500	-691.92	131	692275.425	3639000	-1209.6
37	680709.451	3635500	-3758.088	132	693775.425	3639000	-1269.6
38	679709.451	3635500	-1451.184	133	695275.425	3639000	-66
39	679209.451	3635500	-979.02	134	695775.425	3639000	-1224
40	677209.451	3635500	-3198	135	696275.425	3639000	-316.8
41	676209.451	3635500	-3369.6	136	698275.425	3639000	-92.4
42	679706.683	3636000	-3.6	137	707775.425	3639000	-162
43	680206.683	3636000	-648	138	708660.839	3639500	-1036.8
44	681206.683	3636000	-2763.072	139	707660.839	3639500	-2376
45	681706.683	3636000	-2983.68	140	707160.839	3639500	-285.12
46	710167.142	3636000	-1900.8	141	695160.839	3639500	-50.4
47	710667.142	3636000	-1425.6	142	694660.839	3639500	-1425.6
48	711667.142	3636000	-1036.8	143	694160.839	3639500	-1188
49	713667.142	3636000	-1209.6	144	691160.839	3639500	-169.2
50	714667.142	3636000	-864	145	684160.839	3639500	-1285.2
51	716667.142	3636000	-326.4	146	683160.839	3639500	-2971.77
52	714459.456	3636500	-540	147	684512.542	3640000	-2014.84
53	712459.456	3636500	-1382.4	148	688512.542	3640000	-4200
54	711459.456	3636500	-1512	149	691512.542	3640000	-2748.28
55	709959.456	3636500	-1209.6	150	692512.542	3640000	-244.8
56	708959.456	3636500	-552	151	693012.542	3640000	-3540
57	707459.456	3636500	-432	152	693512.542	3640000	-72
58	682103.235	3636500	-30.6	153	694012.542	3640000	-96
59	680103.235	3636500	-2125.44	154	698512.542	3640000	-2572.92
60	677103.235	3636500	-2646	155	704943.735	3640500	-396
61	675103.235	3636500	-2455.2	156	702943.735	3640500	-33.12
62	674125.471	3637000	-326.4	157	697943.735	3640500	-432
63	677625.471	3637000	-3752.4	158	690443.735	3640500	-10.8
64	678625.471	3637000	-2655	159	687943.735	3640500	-9
65	681625.471	3637000	-1916.352	160	685443.735	3640500	-3043.08
66	682625.471	3637000	-1470.528	161	684145.617	3641000	-2592
67	685625.471	3637000	-352.8	162	688145.617	3641000	-1830
68	707481.616	3637000	-432	163	696645.617	3641000	-2841.6
69	708481.616	3637000	-1944	164	700145.617	3641000	-8.4

-351	3641000	702645.617	165	-2030.4	3637000	709481.616	70
-105.6	3641000	703145.617	166	-1296	3637000	710481.616	71
-1123.2	3641000	703645.617	167	-134.4	3637000	710981.616	72
-2872.8	3641500	691716.317	168	-1166.4	3637000	711981.616	73
-588	3641500	687216.317	169	-326.4	3637000	712481.616	74
-2872.8	3642500	692687.306	170	-1076.4	3637000	713981.616	75
-43.2	3630000	677205.505	171	-1047.108	3637000	716481.616	76
-6	3631500	676540.334	172	-777.6	3637500	711605.722	77
-1322.49	3631500	676540.334	173	-46.8	3637500	711105.722	78
-929.760	3634000	680022.537	174	-14.4	3637500	710605.722	79
-1416	3634500	679659.263	175	-1260	3637500	707605.722	80
-1812.48	3635000	680710.971	176	-1641.6	3637500	705605.722	81
-2691.36	3635500	680709.451	177	-7.2	3637500	705105.722	82
-2954.88	3637000	681625.471	178	-133.92	3637500	703605.722	83
-3114.72	3637000	681625.471	179	-43.2	3637500	690159.633	84
-561.384	3637500	683159.633	180	-13.608	3637500	684159.633	85
-39.64	3638000	680191.540	181	-453.024	3637500	683159.633	86
-46.2	3638500	697170.793	182	-1418.58	3637500	681659.633	87
-302.4	3638500	704170.793	183	-2167.776	3637500	679659.633	88
-99	3638500	709170.793	184	-1684.8	3637500	678659.633	89
-7.2	3638500	709170.793	185	-2548.8	3638000	677691.540	90
-153.6	3638000	699191.541	186	-1399.68	3638000	680191.540	91
-1152	3638000	702191.541	187	-1344	3638000	686691.541	92
-475.2	3638000	708191.541	188	-1596	3638000	687691.541	93
-1728	3638000	708191.541	189	-486	3638000	692191.541	94
-76.8	3637000	707481.616	190	-1080	3638000	694191.541	95

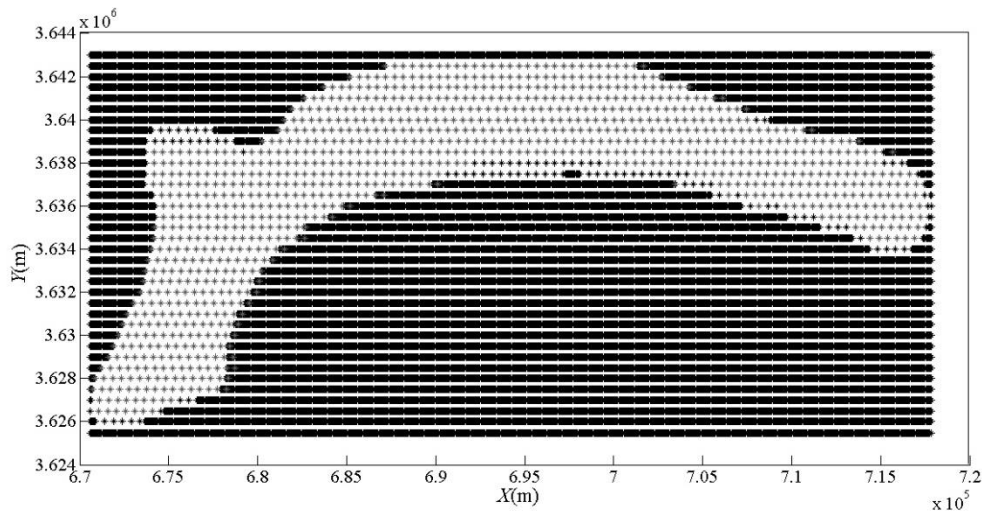


Fig. 2 Scattering nodal points in modeled aquifer in Matlab software

شکل 2 پخش نقاط گرهی در آبخوان مدل سازی شده در نرم افزار متلب

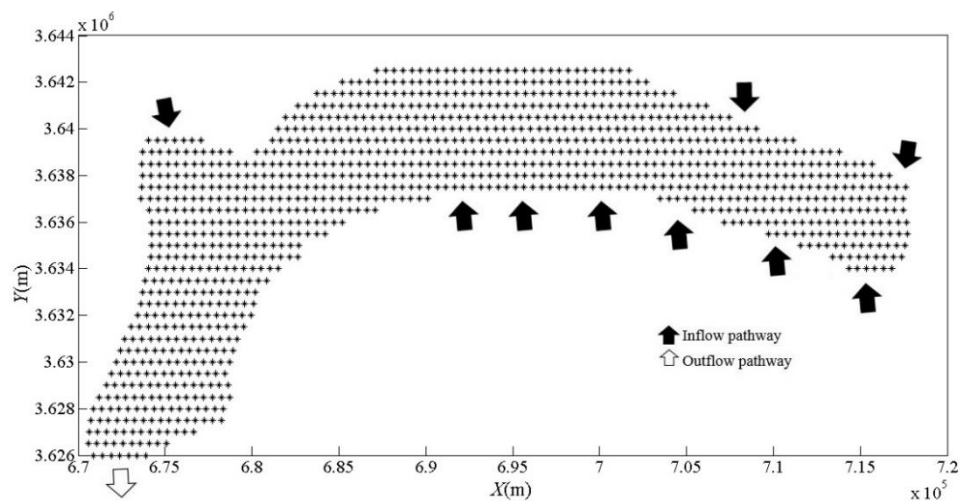


Fig. 3 Presented inflow and outflow pathways in Birjand plain aquifer

شکل 3 جبهه های ورودی و خروجی معرفی شده در آبخوان دشت بیرجند

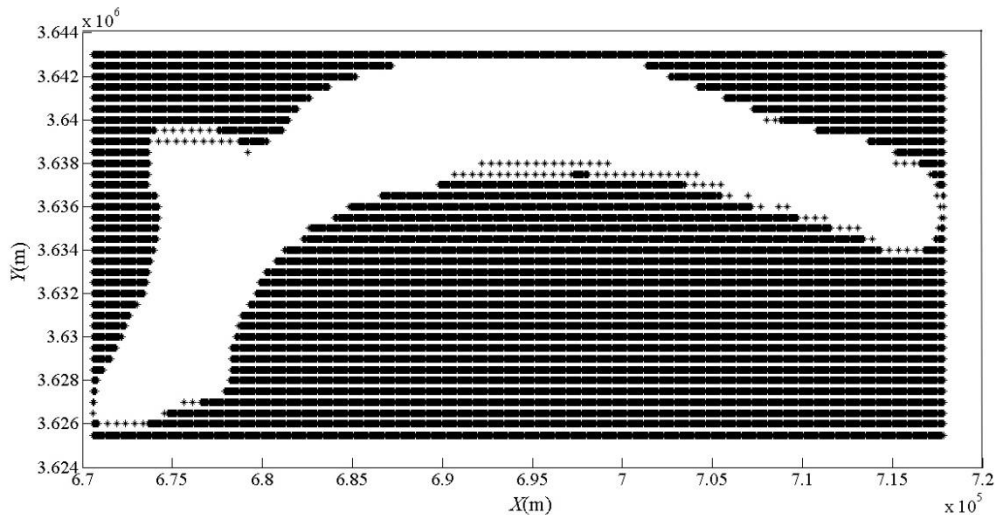


Fig. 4 Presenting specified boundary nodes in Birjand unconfined aquifer

شکل 4 نمایش نقاط مرزی با هد ثابت در آبخوان آزاد بیرجند

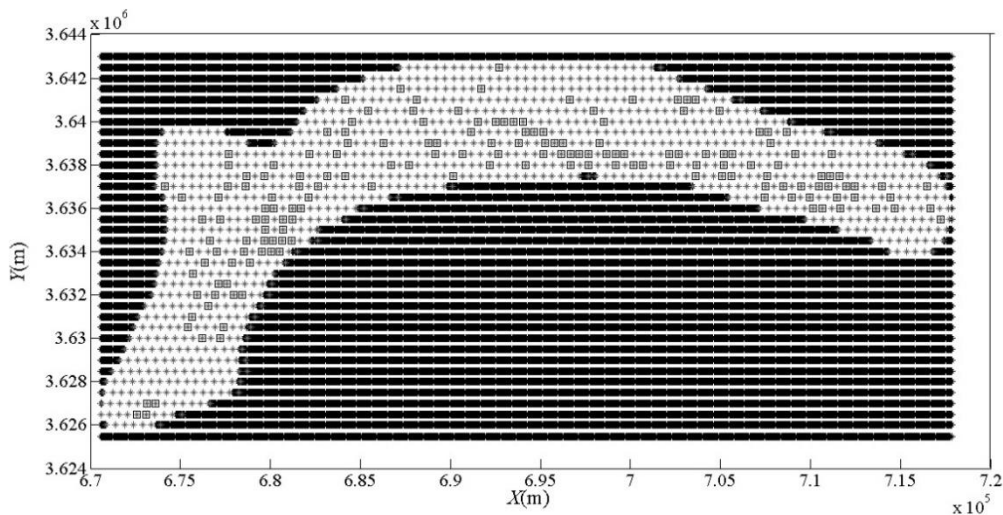


Fig. 5 Extraction wells in Birjand aquifer

شکل 5 چاه‌های برداشت در آبخوان دشت بیرجند

جدول 3 مقایسه نتایج مدل سازی و داده‌های مشاهداتی

Table 3 Comparison in results of MLPG and observation data

خطای نسبی	سطح آب در پیزومتر (m)	نتایج روش MLPG (m)	مختصات عمودی در سیستم (UTM)	مختصات افقی در سیستم (UTM)	شماره
7e-5	1264.30	1264.41	3626500	672076.92	1
2e-4	1291.55	1291.85	3629000	673616.684	2
5e-4	1306.87	1306.21	3638500	674670.794	3
3e-4	1296.43	1296.93	3634500	675659.263	4
3e-4	1300.77	1300.30	3628000	677358.12	5
8e-5	1309.98	1310.13	3638000	681191.541	6
8e-4	1322.41	1321.30	3637500	684659.633	7
1e-4	1342.24	1342.05	3641500	693716.317	8
3e-4	1357.71	1357.22	3639500	696160.839	9
2e-5	1362.9	1362.87	3639000	701775.426	10
1e-4	1392.2	1392.39	3636000	716167.142	11

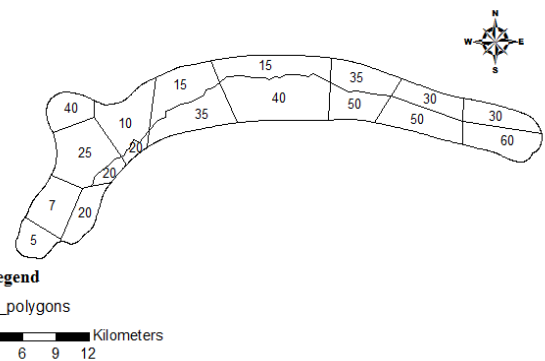


Fig. 6 Hydraulic conductivity Thiessen in aquifer

شکل 6 تیسن بندی هدایت هیدرولیکی آبخوان

قابل ذکر است در این آبخوان 11 پیزومتر یا چاه مشاهده‌ای وجود دارد که سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در آن‌ها با سطح آب زیرزمینی مدل سازی شده در نزدیکترین نقطه به هر کدام از پیزومترها مقایسه می‌شود. پیزومترها در آبخوان در "شکل 7" با نماد دایره از بقیه نقاط گرهی متمایز شده‌اند.

بررسی دقت و خطای روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، سطح آب زیرزمینی مدل سازی شده از این روش با سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در پیزومترهای آبخوان مقایسه گردید. جدول 3 نتایج مقایسه را نشان می‌دهد.

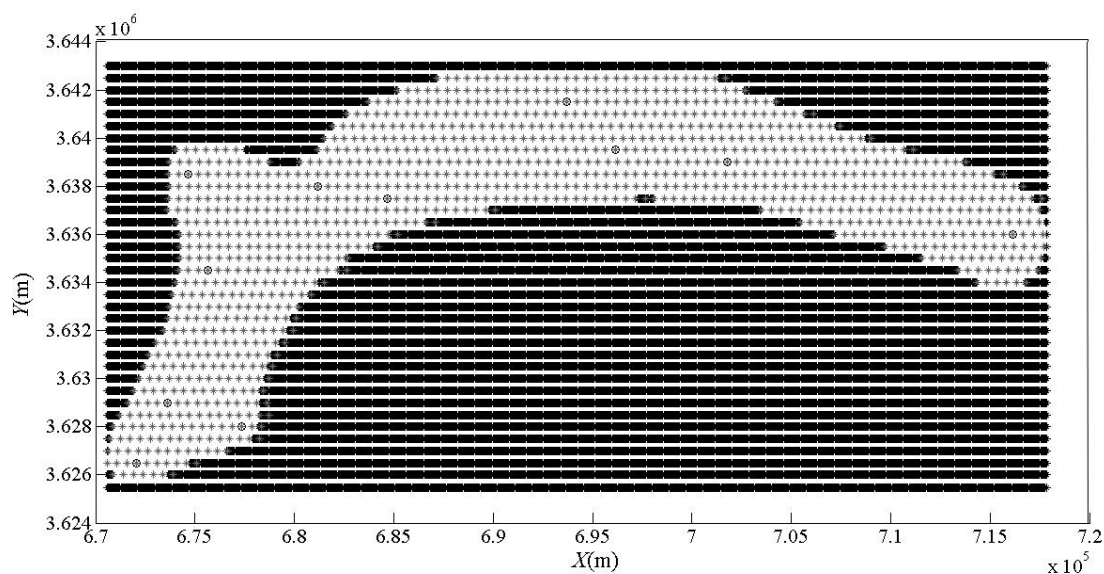


Fig.7 The location of piezometers(observation wells) in aquifer

شکل 7 موقعیت پیزومترها (چاه‌های مشاهداتی) در آبخوان

4-2- محاسبه بیلان آب

بیلان آب‌های زیرزمینی دشت بیرجند با توجه به مقادیر ورودی، برداشت‌ها و ذخیره آب در آبخوان می‌باشد بدین منظور با استفاده از مدل جریان آب زیرزمینی استفاده شده در این پژوهش، بیلان دشت برای شرایط ماندگار در جدول 5 ارائه شده است.

جدول 5 اختلاف ناچیز مقدار ورودی و خروجی دبی را نشان می‌دهد که بیانگر وجود تعادل میان ورودی و خروجی در آبخوان دشت بیرجند است.

4-3- سناریو

یکی از اهداف مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی، پیش‌بینی تغییرات سطح آب زیرزمینی برای سال‌های آینده و در نظر گرفتن تمهیدات لازم برای آن است. بنابراین بعد از تعریف سناریو پیشنهادی به شکل زیر تغییرات سطح آب زیرزمینی برای چند سال آینده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

با اعمال سناریو افزایش 5 درصد برداشت آب از چاه‌ها بصورت صعودی در سال و کاهش 5 درصدی بارندگی به صورت نزولی در هر سال از سال 1390-91 تا سال 1397-98 مدل اجرا گردید. جدول 6 مقادیر سطح آب زیرزمینی را پس اعمال سناریو در سال 97-98 در مقایسه با 90-91 در محل پیزومترها نشان می‌دهد.

طبق جدول 6 سطح آب زیرزمینی در سال 97-98 در حالت ماندگار در هر پیزومتر کاهش یک تا چند متری داشته است. به طوری که در پیزومتر شماره دو به دلیل ضخامت کم آبخوان در آن منطقه، تغییرات سطح آب قابل

جدول 5 بیلان آبخوان مدل MLPG در شرایط ماندگار

Table 5 Balance of MLPG model in steady state			
خروجی		ورودی	
دبی (MCM)		دبی (MCM)	
170.849	ذخیره	205.172	ذخیره
18.93	هدثابت	36.7	هدثابت
79.44	چاه‌ها	0	چاه‌ها
0	تغذیه	28.62	تغذیه
269.229	جمع	270.36	جمع

مقایسه سطح آب زیرزمینی مدل‌سازی شده و سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در حالت ماندگار در آبخوان بیرجند، نشان از قدرت بالای روش عددی به کار گرفته شده دارد.

4-1- ارزیابی عملکرد مدل

خطای میانگین، خطای میانگین مطلق و خطای جذر میانگین مربعات به عنوان معیارهایی برای تشخیص عملکرد مدل استفاده شدند. واحد این خطاها براساس واحد مقادیر وارد شده در آن‌هاست. این خطاها به ترتیب از روابط (45) تا (47) محاسبه می‌شوند.

$$ME = \frac{\sum_{i=1}^n (h_o - h_s)}{n} \quad (45)$$

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |h_o - h_s|}{n} \quad (46)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (h_o - h_s)^2}{n}} \quad (47)$$

که در آن h_o و h_s به ترتیب سطح آب زیرزمینی مشاهده شده و مدل‌سازی شده است و n بیانگر تعداد پیزومترهاست [13].

خطاهای ذکر شده محاسبه شدند و نتایج آن در جدول 4 مشخص گشته اند.

در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی زمانی نتایج قابل قبول هستند که خطای جذر میانگین مربعات آن در بازه ± 1.9 باشد [24]، بنابراین با توجه به جدول 4 مقدار خطاها به ویژه خطای جذر میانگین مربعات قابل قبول است، به عبارتی روش استفاده شده به منظور مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی کارآمد و دقیق بوده است.

جدول 4 محاسبه خطای میانگین، مطلق میانگین و جذر میانگین مربعات

Table 4 Computed ME, MAE and RMSE	
0.234	خطای میانگین
0.381	خطای مطلق میانگین
0.483	خطای جذر میانگین مربعات

equation problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, pp. 1339-1350, 2013.

- [5] E. Jabbari, I. Saeedpanah, Simulation of Sediment Transport in Coastal Areas with Meshless Local Petrov- Galerkin Scheme, *Journal of Coastal Research*, No. 50, pp. 934-948, 2007.
- [6] I. Saeedpanah, E. Jabbari, M. A. Shayanfar, Numerical simulation of ground water flow via a new approach to the local radial point interpolation meshless method, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 25, No. 1, pp. 17-30, 2011.
- [7] M. Mategaonkar, T. I. Eldho, Simulation of groundwater flow in unconfined aquifer using meshfree point collocation method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, pp. 700-707, 2011.
- [8] K. Kovarik, J. Muzik, A meshless solution of two dimensional density-driven groundwater flow, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, pp. 187-196, 2013.
- [9] B. Swathi, T. I. Eldho, Groundwater flow simulation in confined aquifers using meshless Local Petrov-Galerkin, *ISH Journal of Hydraulic engineering*, Vol. 19, No. 3, pp. 335-348, 2013.
- [10] B. S. Hamraz, A. Akbarpour, M. Pourreza Bilondi, S. Sadeghi Tabas, On the assessment of ground water parameter uncertainty over an arid aquifer, *Arabian journal of Geosciences*, Vol. 8, No. 12, pp. 10759-10773, 2015.
- [11] H. Saeedi, A. Baqvand, M. H. Niksokhan, A. Akbapour, S. Sadegh Tabas, Prediction of One year trend of changes in water table using open source code: A case study of Birjand plain, southern Khorasan province, *International Bulletin of Water Resources and Development*, Vol. 3, No. 2, pp. 67-75, 2015. (In persian فارسی)
- [12] E. Ghoochanian, B. Etebari, A. Akbarpour, Integrating groundwater managment with WEAP and MODFLOW models (case study: Birjand Plain, east of Iran), 2013.
- [13] S. Sadeghi Tabas, S. Z. Samadi, A. Akbarpour, M. Pourreza Bilondi, Sustainable groundwater modeling using single-and multi-objective optimization algorithms, *Journal of Hydroinformatics*, Vol. 18, No. 5, pp. 1-18, 2016.
- [14] G. R. Liu, Y. T. Gu, An introduction to Meshfree Methods and Their Programming, Singapore: Springer, 2005.
- [15] N. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, *Computaional Mechanics*, Vol. 10, No. 5, pp. 307-318, 1992.
- [16] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods, *Mathematics of Computaion*, Vol. 37, pp. 141-158, 1981.
- [17] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Elements free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, No. 2, pp. 229-256, 1994.
- [18] S. Atluri, T. A. Zhu, A new Meshless method (MLPG) approach in computational mechanics, *computaional mechanics*, Vol. 22, No. 2, pp. 117-127, 1998.
- [19] G. Liu, Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, Boca Raton: CRC press, 2002.
- [20] S. Sadeghi Tabas, A. Akbarpour, M. Pourreza Bilondi, S. Z. Samadi, Application of Cuckoo Optimization Algorithm in Automatic Calibration of Aquifer Hydrodynamic Parameters using Mathematical Model, *Iranian Journal of Irrigation and Drainage*, Vol. 9, No. 2, pp. 345-356, 2015. (In persian فارسی)
- [21] S. Sadeghi Tabas, M. Pourreza Bilondi, A. Akbarpour, S. Z. Samadi, Application of Multi Objective Optimization Method AMALGAM in detemining the policy of Optimum Discharge from Groundwater Resources using mathematical model, *Iranian Journal of Irrigation and Drainage*, Vol. 9, No. 3, pp. 470-480, 2015. (In persian فارسی)
- [22] S. Sadeghi Tabas, A. Akbarpour, M. Pourreza-Bilondi, S. Samadi, Toward reliable calibration of aquifer hydrodynamic parameters: characterizing and optimization of arid groundwater system using swarm intelligence optimization algorithm, *Arabian Journal of Geosciences*, Vol. 9, No. 719, 2016.
- [23] J. Duouit, *Estudes Theoriques et Pratiques sur le Mouvement desEaux*, pp. 44-52, Paris: Dunod, 1863.
- [24] M. Anderson, W. Woessner, R. Hunt, Applied Groundwater Modeling Second Edition: Simulation of Flow and advective Transport, pp. 133-135, 2nd, Academic Press, 2015.

جدول 6 تغییرات سطح آب زیرزمینی در حالت ماندگار سال 1397-98

Table 6 Changes on groundwater table in steady state in 1397-98

شماره	مختصات افقی در سیستم (UTM)	مختصات عمودی در سیستم (UTM)	سطح آب در پیزومتر در (m)	سطح آب در پیزومتر در (m)	مختصات
1	672076.92	3626500	1260.23	1264.30	672076.92
2	673616.684	3629000	1276.65	1291.55	673616.684
3	674670.794	3638500	1302.43	1306.87	674670.794
4	675659.263	3634500	1295.30	1296.43	675659.263
5	677358.12	3628000	1294.20	1300.77	677358.12
6	681191.541	3638000	1303.86	1309.98	681191.541
7	684659.633	3637500	1294.67	1322.41	684659.633
8	693716.317	3641500	1273.13	1342.24	693716.317
9	696160.839	3639500	1332.86	1357.71	696160.839
10	701775.426	3639000	1360.48	1362.9	701775.426
11	716167.142	3636000	1391.91	1392.2	716167.142

ملاحظه‌ای به وجود آمده است و در پیزومترهای هفت، هشت و نه نیز به دلیل تجمع چاه‌های برداشت در اطراف آن و سیر صعودی برداشت، افت قابل ملاحظه‌ای مشهود بوده است که برای این مناطق بایستی تمهیدات لازم انجام گیرد.

5- نتیجه گیری

به منظور درک رفتار پیچیده آبخوان مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی امری ضروری است. در این مطالعه جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد دشت بیرجند واقع در استان خراسان جنوبی، با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین به همراه تابع تقریب حداقل مربعات متحرک و تابع وزن اسپیلاین در نرم‌افزار برنامه نویسی متلب مدل‌سازی شد. این روش، یک روش بدون شبکه واقعی است به طوری که استفاده از آن علاوه بر حذف مشکلات به وجود آمده ناشی از شبکه‌بندی‌های متعدد در میدان حل، امکان مدل‌سازی را برای مسائلی با شرایط هندسی نامنظم و پیچیده فراهم می‌سازد. پس از ساخت هندسه آبخوان و پخش نقاط گرهی در آن با ورود اطلاعات اولیه همچون مقادیر ضرایب هیدرولیکی، شرایط مرزی، و مقادیر تغذیه و تخلیه مدل اجرا گردید و سطح آب زیرزمینی برای هر نقطه گرهی محاسبه شد. گفتنی است شرایط مرزی موجود در آبخوان بیرجند از نوع هد ثابت (دیریشلت) است. در نهایت سطح آب زیرزمینی به دست آمده از مدل با سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در پیزومترها مقایسه شد و خطای نسبی این روش محاسبه گردید. نتایج رضایت

بخش بوده به طوری که میانگین خطای نسبی و خطای جذر میانگین مربعات به ترتیب 0.0002 و 0.483 شد. مقدار کم خطا توانایی و قدرت این روش عددی در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی را نشان می‌دهد.

6- مراجع

- [1] B. Swathi, T. I. Eldho, Groundwater flow simulation in unconfined aquifers using meshless local Petrov-Galerkin method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 48, pp. 43-52, 2014.
- [2] R. A. Gingold, J. J. Moraghan, smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- [3] A. R. Firoozjaee, M. H. Afshar, Discrete Least Squares Meshless (DLSM) method for simulation of steady state shallow water flows, *Scientia Iranica*, Vol. 18, No. 4, pp. 835-845, 2011.
- [4] C. P. Sun, D. L. Young, L. H. Shen, T. F. Chen, C. C. Hsian, Application of localized meshless methods to 2D shallow water