



مدل تحلیلی مبتنی بر میکرومکانیک برای پیش بینی خواص الاستیک کامپوزیت های با الیاف بافته شده

محمود مهرداد شکرپیه^{1*}، روح الله قاسمی²، رضا مسلمانی³

1- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

2- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

* تهران، صندوق پستی 16846-13114، shokrieh@iust.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 اسفند 1394

پذیرش: 19 خرداد 1395

ارائه در سایت: 23 تیر 1395

کلید واژگان:

کامپوزیت های با الیاف بافته شده

مدل تحلیلی

میکرومکانیک

همگن سازی

چکیده

استفاده از الیاف بافته شده در ساخت مواد کامپوزیتی، به علت رفتار مکانیکی خاص آن ها گسترش یافته است. با توجه به پیچیدگی مدل سازی و شبیه سازی رفتار مکانیکی این نوع کامپوزیت ها، در این تحقیق یک مدل تحلیلی مبتنی بر میکرومکانیک برای تعیین خواص الاستیک کامپوزیت های با الیاف بافته شده، توسعه داده شده است. این مدل ضمن سادگی، دقت بالایی را در پیش بینی خواص الاستیک ارائه می دهد. یکی از مهمترین عوامل مؤثر در دقت یک مدل میکرومکانیکی، اتخاذ یک روند همگن سازی مناسب می باشد. بنابراین، یک روش جدید همگن سازی المان حجمی معرف با استفاده از شبیه سازی چندلایه ها برای یک کامپوزیت با الیاف بافته شده توسعه داده شده است. فرایند همگن سازی ارائه شده به صورت همگن سازی چندمقیاسی می باشد. این مدل مبتنی بر تبدیل المان حجمی معرف به تعدادی زیرالمان است، به نحوی که بتوان در هر مرحله ترکیبی از زیرالمان ها را به عنوان یک چندلایه در نظر گرفت. برای تعیین خواص مکانیکی معادل چندلایه ها، به جای فرض کرنش ثابت در کل چندلایه، فرضیات کرنش صفحه ای ثابت و تنش خارج صفحه ای ثابت لحاظ شده است. سپس، برای ارائه ی مدل نهایی، مدل همگن سازی پیشنهادی با یک مدل میکرومکانیکی ترکیب می شود. استفاده از فرضیات ارائه شده، منجر به بهبود پیش بینی های مدل میکرومکانیکی، بخصوص برای خواص خارج صفحه ای کامپوزیت می شود. کارایی روش همگن سازی ارائه شده با بررسی پنج مثال از منابع مختلف، مورد ارزیابی قرار گرفته و دقت این روش در تعیین خواص کامپوزیت بافته شده نشان داده شده است.

Micromechanics based analytical model for prediction of the elastic properties of woven fabric composites

Mahmood Mehrdad Shokrieh^{1*}, Roohallah Ghasemi¹, Reza Mosalmani²

1- School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

2- Mechanical Engineering Department, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

* P.O.B. 16846-13114, Tehran, Iran, shokrieh@iust.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 17 March 2016
Accepted 08 June 2016
Available Online 13 July 2016

Keywords:

Woven fabric composites
analytical model
micromechanics
homogenization

ABSTRACT

The application of woven fabrics in composites manufacturing has increased because of their special mechanical behavior. Due to the complexity of modeling and simulation of these composites, in this research a micromechanics based analytical model has been developed to predict the elastic properties of woven fabric composites. The present model is simple to use and has a high accuracy in predicting the elastic properties of woven fabric composites. One of the most important effective factors on the modeling accuracy is utilizing a proper homogenization method. Therefore, a new homogenization method has been developed by using a laminate analogy based method for the woven fabric composites. The proposed homogenization method is a multi-scale homogenization procedure. This model divides the representative volume element to several sub-elements, in a way that the combination of the sub-elements can be considered as a laminated composite. To determine the mechanical properties of laminates, instead of using an iso-strain assumption, the assumptions of constant in-plane strains and constant out of plane stress have been considered. Then, the proposed homogenization model has been combined with a micromechanical model to propose the new micromechanical model. The applied assumptions improve the prediction of mechanical properties of woven fabrics composites, especially the out-of-plane elastic properties. The proposed model is evaluated by comparing the predicted results with five available experimental results available in the literature, and the accuracy of the present model is shown.

1-مقدمه

توجه فعالین حوزه ی مواد مرکب قرار گرفته است. هزینه ی پایین ساخت این استفاده از پارچه های بافته شده در ساخت کامپوزیت، سال هاست که مورد نوع پارچه ها، امکان استفاده از طیف وسیعی از مواد در تولید این نوع

Please cite this article using:

M. M. Shokrieh, R. Ghasemi, R. Mosalmani, Micromechanics based analytical model for prediction of the elastic properties of woven fabric composites, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 1-11, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. M. Shokrieh, R. Ghasemi, R. Mosalmani, Micromechanics based analytical model for prediction of the elastic properties of woven fabric composites, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 7, pp. 1-11, 2016 (in Persian)

یکی از قدیمی‌ترین مدل‌های تحلیلی ارائه شده برای پیش‌بینی خواص کامپوزیت‌های با پارچه‌ی بافته شده، مدل ارائه شده توسط ایشیکاوا و چو [13] است. آن‌ها در مدل خود به نام مدل اعوجاج الیاف³، با تقسیم المان حجمی معرف به چند ناحیه که به صورت یک چندلایه قابل در نظر گرفتن باشد، خواص معادل هر ناحیه را با استفاده از تئوری کلاسیک چندلایه‌ها محاسبه کردند. سپس با انتگرال‌گیری در کل المان حجمی معرف خواص معادل المان حجمی معرف را استخراج کردند. نیک و شمبکار [2] نیز در روشی مشابه از شبیه‌سازی چندلایه‌ها برای توسعه مدل میکرومکانیکی کامپوزیت بافته شده استفاده کردند. آن‌ها سلول واحد را به نواحی کوچکتر که بتوان آن را با رویکرد کامپوزیت تک‌جهته و یا کامپوزیت متعامد تحلیل کرد، تقسیم کردند. بعد از محاسبه‌ی ماتریس‌های سفتی برای هر ناحیه، همگن‌سازی المان حجمی معرف با سرهم‌بندی این ماتریس‌ها انجام گرفت. فرض اساسی به کار رفته در تئوری کلاسیک چندلایه‌ها، فرض ثابت بودن تمام مولفه‌های کرنش در چندلایه است. این فرض اگرچه در حالت کرنش صفحه‌ای مناسب است، اما در حالت سه بعدی می‌تواند خطای قابل توجهی را وارد حل مساله کند.

مدل میکرومکانیکی هوانگ [14] خواص مکانیکی کامپوزیت بافته‌شده را پیش‌بینی می‌نماید. در این مدل ابتدا با تقسیم‌بندی مرزهای سلول واحد، المان حجمی معرف به تعدادی زیرالمان تقسیم می‌شود. در این مدل هر کدام از زیرالمان‌ها که به صورت یک چندلایه متشکل از الیاف تار، پود و ماده‌ی زمینه در نظر گرفته شده‌اند، با فرض اساسی تئوری کلاسیک چندلایه‌ها (کرنش برابر تمام لایه‌ها) همگن می‌شوند. همگن‌سازی کل سلول واحد نیز با فرض تنش برابر همه‌ی زیرالمان‌ها و با میانگین‌گیری از ماتریس نرمی زیرالمان‌ها صورت می‌گیرد. فرض کرنش ثابت در زیرالمان‌ها و تنش ثابت در المان حجمی معرف فرضیات ساده‌کننده‌ای هستند که در حالت سه‌بعدی کارآیی و دقت کافی را ندارند. ادمیتروی و باربرو [5] نیز برای پیش‌بینی خواص کامپوزیت بافته شده، مدل تحلیلی مشابه مدل هوانگ ارائه کردند. آنها پس از انتخاب المان حجمی معرف و تقسیم‌بندی آن به تعدادی بینهایت زیرالمان، پس از محاسبه‌ی خواص مکانیکی هر نقطه از المان حجمی معرف از تئوری کلاسیک چندلایه‌ها، خواص المان حجمی معرف را با دو فرض موازی/موازی (کرنش ثابت/کرنش ثابت) در کل المان و همچنین سری/موازی (تنش ثابت/کرنش ثابت) در کل المان محاسبه کردند. فرضیات همگن‌سازی به کار رفته در این مدل در مقایسه با فیزیک حاکم بر مسئله، مورد تردید می‌باشند.

در روش تحلیلی ارائه‌شده توسط تبیعی و همکارانش [15]، همگن‌سازی المان حجمی معرف با فرض شرایط مرزی ترکیبی تنش ثابت و کرنش ثابت صورت گرفته است. پس از مشخص کردن المان حجمی معرف، این المان به چهار زیرالمان تقسیم می‌شود. همگن‌سازی در این مدل در دو سطح صورت می‌گیرد؛ سطح اول همگن‌سازی زیرسلول‌ها و سطح دوم همگن‌سازی کل المان حجمی معرف. این مرجع با جداسازی مولفه‌های کرنش ثابت (مولفه‌های داخل صفحه‌ای) و تنش ثابت (مولفه‌های خارج صفحه‌ای) در بردار تنش و کرنش و با تبدیل ماتریس سفتی اجزاء به چهار ماتریس سفتی مجزا متناسب با فرضیات فوق، روابطی را برای ماتریس سفتی معادل کل المان حجمی معرف ارائه کرده است. سیدا و همکارانش [16]، به ارائه‌ی یک مدل تحلیلی برای محاسبه‌ی خواص کامپوزیت با پارچه‌ی بافته شده پرداختند. در

پارچه‌ها، به کارگیری ساده، ایجاد امکان ساخت قطعات با هندسه و سطوح پیچیده، خواص مکانیکی متوازن، تقویت‌کنندگی خوب در همه‌ی جهات [1]، خواص خارج صفحه‌ای بهتر و مقاومت به ضربه‌ی بیش‌تر نسبت به کامپوزیت‌های تک‌جهته [2]، از مزایای استفاده از این نوع پارچه‌ها در ساخت کامپوزیت است. با وجود این مزایا، هندسه‌ی پیچیده‌ی این پارچه‌ها، چالش‌های زیادی را در تحلیل کامپوزیت‌های ساخته‌شده با این پارچه‌ها بوجود آورده است. روش‌های کمتری در تحلیل و پیش‌بینی خواص این نوع کامپوزیت‌ها نسبت به کامپوزیت‌های تک‌جهته وجود دارد [1]. لذا مطالعه‌ی این نوع کامپوزیت‌ها و ارائه روشی مناسب و کارآمد برای تحلیل و پیش‌بینی خواص آن‌ها، ضروری می‌باشد.

مدل‌سازی خواص الاستیک کامپوزیت‌های با الیاف بافته‌شده مورد توجه برخی از محققین قرار گرفته است. کروکستون و همکاران [3] و انگوینی و همکاران [4] در مقالاتی مروری به بررسی انواع مختلف مدل‌های موجود برای پیش‌بینی خواص کامپوزیت‌های با الیاف بافته‌شده پرداختند. این مدل‌ها را می‌توان در دو شاخه‌ی عمده‌ی مدل‌های تحلیلی و مدل‌های عددی (مبتنی بر تحلیل اجزاء محدود) دسته‌بندی کرد [5]. مراجع [6-9] به تحلیل کامپوزیت‌های با الیاف بافته‌شده با استفاده از تحلیل اجزاء محدود پرداختند. مدل‌های مبتنی بر تحلیل اجزاء محدود به دلیل فرضیات ساده‌کننده‌ی کمتر و در نظر گرفتن جزئیات بیش‌تر در مدل‌سازی دقت بالاتری دارند، اما اجرای آن‌ها در عمل، کاری دشوار و زمان‌بر است. پیاده‌سازی یک مدل دقیق اجزاء محدود نیاز به صرف زمان و هزینه‌ی بسیار دارد. این موضوع استفاده از این مدل‌ها را دچار محدودیت می‌کند. به همین دلیل توسعه‌ی مدل‌های تحلیلی خصوصاً در زمانی که نیاز به مطالعه‌ی پارامتری باشد، ضروری به نظر می‌رسد. مدل‌های تحلیلی به کار رفته برای پیش‌بینی خواص کامپوزیت با الیاف بافته‌شده [10, 11] مبتنی بر راهکار مدل‌سازی چندمقیاسی هستند که به آن‌ها روش‌های بالا به پایین- پایین به بالا¹ می‌گویند [12]. روش‌های همگن‌سازی در این مدل‌ها از دو فاز تشکیل شده است؛ در مرحله‌ی اول (بالا به پایین) توصیف هندسه‌ی مدل، نوع بافت، توزیع المان‌ها و تعیین کسر حجمی انجام می‌گیرد. در این مرحله المان حجمی معرف شناسایی می‌شود. سپس این المان حجمی معرف به نواحی کوچکتر تقسیم می‌شوند که به آنها زیرالمان² می‌گویند. در مرحله‌ی دوم (پایین به بالا) فرایند همگن‌سازی برای محاسبه‌ی خواص معادل المان حجمی معرف از پایین به بالا انجام می‌شود. در ابتدا همگن‌سازی زیرالمان‌ها که معمولاً به صورت یک چندلایه قابل مشاهده هستند، با استفاده از تئوری کلاسیک چندلایه‌ها انجام می‌شود و خواص معادل زیرالمان‌ها بدست می‌آید. فرض اساسی در این تئوری برابر بودن مولفه‌های کرنش در تمام لایه‌هاست. زیرالمان‌ها می‌توانند به صورت یک چندلایه شامل ماده‌ی زمینه، الیاف تار و الیاف پود باشند. در ادامه نیز خواص معادل المان حجمی معرف با همگن‌سازی خواص زیرالمان‌ها محاسبه می‌شود. در این مرحله با همگن‌سازی زیرالمان‌ها با فرضیات تنش ثابت، کرنش ثابت و یا ترکیبی از این دو، خواص معادل المان حجمی معرف را محاسبه می‌کنند. اتخاذ این فرضیات عموماً بدون در نظر گرفتن سری یا موازی بودن زیرالمان‌ها انجام می‌شود و این فرضیات صرفاً برای ساده‌سازی روند حل مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرند. این فرضیات ساده‌کننده گاهی اوقات می‌توانند منشاء برخی از خطاهای قابل توجه باشند که بایستی در نظر گرفته شوند.

¹ Top-down-bottom-up methods² Sub-element³ Fiber undulation model

هندسی هر یک از اجزا در داخل المان معرفی می‌شود. در مرحله‌ی بعد اضلاع المان حجمی معرف به N قسمت تقسیم می‌شوند و $N \times N$ زیرالمان تولید می‌شود. هر یک از این زیرالمان‌ها به صورت یک کامپوزیت چندلایه شامل لایه‌های الیاف تار، الیاف پود و ماده‌ی زمینه در نظر گرفته می‌شود. پس از مشخص شدن کسر حجمی الیاف در هر یک از این لایه‌ها و همچنین کسر حجمی هر یک از لایه‌ها در زیرالمان، خواص هر لایه با استفاده از یک روش میکرومکانیکی محاسبه می‌شود. در این مطالعه از مدل میکرومکانیکی پل‌زنی⁵ [18] برای محاسبه خواص هر لایه استفاده شده است. پس از محاسبه‌ی خواص هر لایه، خواص معادل زیرالمان‌ها محاسبه می‌شود. در مرحله‌ی بعد خواص معادل زیرالمان‌های موجود در هر ردیف استخراج شده و نهایتاً با همگن‌سازی خواص ردیف‌ها، خواص الاستیک معادل المان حجمی معرف بدست می‌آید. در ادامه جزئیات مدل میکرومکانیکی پایه‌گذاری شده در این تحقیق ارائه می‌شود.

3-1- توصیف هندسی المان حجمی معرف

هندسه‌ی پارچه و جهات تار و پود برای یک مدل پارچه با بافت دوبعدی در "شکل 2" نشان داده شده است. سلول واحد تکرار شونده⁶ در "شکل 2" با نقطه‌چین نشان داده شده است. المان حجمی معرف (صورت یک چهارم سلول واحد تکرار شونده) نیز به صورت خط‌چین، در این شکل مشخص شده است. به دلیل یکسان بودن اعوجاج الیاف تار و پود، یکسان بودن کسر حجمی الیاف در چهار بخش سلول واحد تکرار شونده و رفتار مکانیکی کاملاً مشابه آن‌ها، تفاوتی در تحلیل هر کدام از یک چهارم‌های سلول واحد تکرار شونده وجود ندارد. بنابراین، تنها ناحیه‌ی تقاطع الیاف تار و پود به همراه فضای خالی اطراف آن به عنوان المان حجمی معرف در نظر گرفته می‌شود. "شکل 3" نمایی سه بعدی از المان حجمی معرف و مقطعی از آن را نشان می‌دهد.

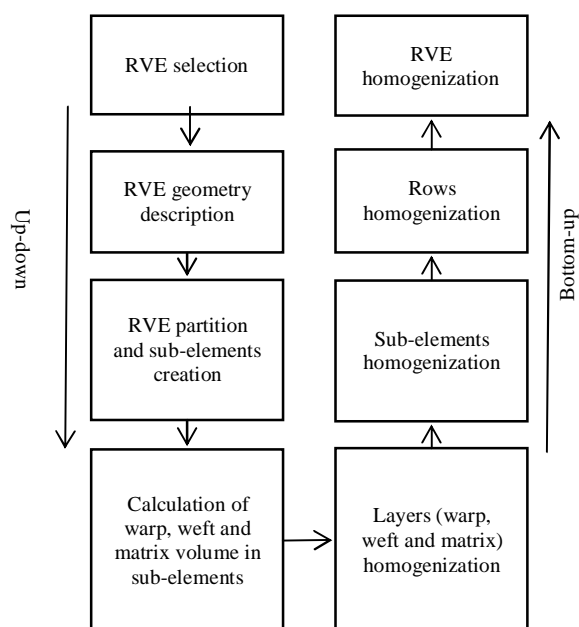


Fig. 1 Diagram of steps of micromechanical model

شکل 1 نمودار مراحل مدل میکرومکانیکی

این مدل که به مدل مزوتکس¹ موسوم است، ابتدا سلول واحد به نواحی کوچکی که بتوان آن را به صورت یک چندلایه در نظر گرفت، تقسیم می‌شود. در هر یک از این نواحی کوچک، با فرض کرنش ثابت، ماتریس سختی معادل از تئوری کلاسیک چندلایه‌ها، محاسبه می‌شود. در مرحله بعد با انتگرال‌گیری در طول سلول واحد، با فرض کرنش ثابت، ماتریس سختی متوسط کل سلول واحد محاسبه می‌شود. در هر دو مرحله‌ی همگن‌سازی، فرض کرنش ثابت برای محاسبه‌ی خواص معادل استفاده شده است. فرض کرنش ثابت در دو مرحله از همگن‌سازی، در حالت واقعی صحیح نیست و باعث ایجاد خطا در نتایج مدل‌سازی می‌شود. در مدل ارائه شده توسط شنگ و هوا [17]، مبتنی بر یک مدل هندسی سه‌بعدی و اصول حساب تغییرات، خواص معادل کامپوزیت با الیاف بافته‌شده محاسبه می‌شود. در این مدل برای محاسبه‌ی ماتریس سختی معادل از فرض کرنش ثابت در کل سلول واحد (روش انرژی پتانسیل²) و برای محاسبه‌ی ماتریس نرمی معادل از فرض تنش ثابت در کل سلول واحد (روش انرژی مکمل³) استفاده شده است. روش انرژی پتانسیل بیانگر حد بالای ثوابت مهندسی و روش انرژی مکمل بیانگر حد پایین ثوابت مهندسی هستند [17].

مقاله‌ی حاضر به توسعه‌ی یک مدل میکرومکانیکی - تحلیلی برای پیش‌بینی خواص الاستیک کامپوزیت با الیاف بافته‌شده می‌پردازد. این مدل برای همگن‌سازی المان حجمی معرف از شبیه‌سازی چندلایه‌ها استفاده می‌کند. فرایند همگن‌سازی ارائه شده به صورت همگن‌سازی چندمقیاسی⁴ است. همچنین فرضیات به‌کار رفته در فرایند همگن‌سازی المان حجمی معرف، به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که با فیزیک مسئله مطابقت داشته باشند و سری یا موازی بودن زیرالمان‌ها رعایت شده باشد. برای صحت‌سنجی مدل ارائه شده، نتایج پیش‌بینی شده با نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه می‌شوند.

2- تعریف مساله

مسئله‌ی مورد بررسی در مقاله حاضر، توسعه‌ی یک روش میکرومکانیکی مناسب برای پیش‌بینی ثوابت الاستیک کامپوزیت با الیاف بافته شده می‌باشد. فرض ثابت بودن مولفه‌های کرنش برای لایه‌ها در یک زیرالمان و همچنین فرض تنش ثابت و یا کرنش ثابت در کل المان حجمی معرف فرضیات ساده‌کننده‌ای هستند که عمدتاً در مدل‌های تحلیلی برای انجام فرایند همگن‌سازی المان حجمی معرف برای کامپوزیت با الیاف بافته شده به‌کار می‌روند. این فرضیات اگرچه در تعیین خواص داخل صفحه‌ای کامپوزیت دقت خوبی دارند، اما در تعیین خواص خارج صفحه‌ای می‌توانند حل مساله را دچار خطا کنند. بنابراین هدف این مقاله ارائه یک مدل میکرومکانیکی با استفاده از توسعه یک روش همگن‌سازی جدید است که قادر به پیش‌بینی خواص الاستیک کامپوزیت‌های با الیاف بافته‌شده باشد.

3- توسعه‌ی مدل میکرومکانیکی - تحلیلی

مدل تحلیلی حاضر مبتنی بر نگاه میکرومکانیکی و با معرفی المان حجمی معرف، به پیش‌بینی خواص مکانیکی کامپوزیت‌های با الیاف بافته‌شده می‌پردازد. این مدل با استفاده از رویکرد بالا به پایین، پایین به بالا مطابق با نمودار ارائه شده در "شکل 1" توسعه داده شده است. در این مدل ابتدا با مشخص کردن المان حجمی معرف، هندسه‌ی المان توصیف و مشخصات

¹ MesoTex

² Potential energy method

³ Complementary Energy Method (CM)

⁴ Multi-scale homogenization

⁵ Bridging micromechanical model

⁶ Repeating Unit Cell (RUC)

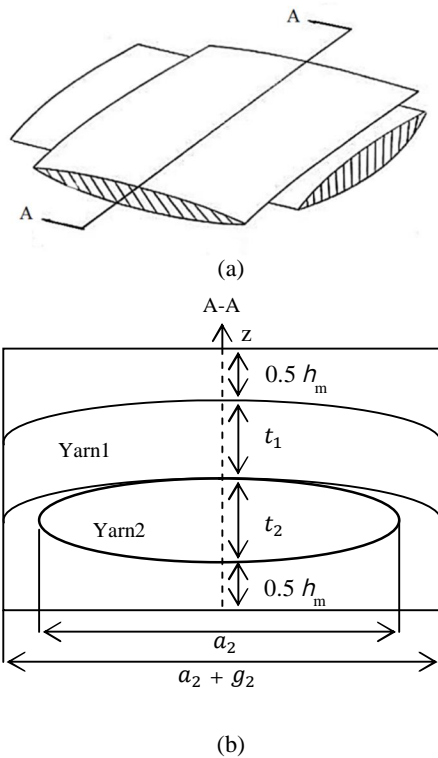


Fig. 3 Schematic of a) geometry of RVE b) section AA in RVE [19]

شکل 3 طرحی شماتیک از (a) هندسه‌ی المان حجمی معرف (b) مقطع AA از المان حجمی معرف [19]

تک‌جهته، نمو تنش در ماده‌ی زمینه در یک المان حجمی معرف با استفاده از ماتریس پل‌زنی مطابق با رابطه‌ی (5)، برحسب نمو تنش در الیاف بیان می‌شود [18].

$$\{d\sigma_i^m\} = [A_{ij}]\{d\sigma_j^f\} \quad (5)$$

که در آن $\{d\sigma_i\} = \{d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4, d\sigma_5, d\sigma_6\}^T$ مولفه‌های تنش، معادل $\{d\sigma_{xx}, d\sigma_{yy}, d\sigma_{zz}, d\sigma_{yz}, d\sigma_{xz}, d\sigma_{xy}\}^T$ می‌باشد و بالانویس‌های f و m به ترتیب اشاره به ماده‌ی زمینه و الیاف دارند. ماتریس پل‌زنی $[A_{ij}]$ نشان‌دهنده‌ی نحوه تقسیم نیرو بین اجزای سازنده‌ی کامپوزیت (ماده‌ی زمینه و الیاف) می‌باشد. ماتریس نرمی سراسری کامپوزیت با در نظر گرفتن تقسیم تنش بین الیاف و ماده‌ی زمینه به صورت رابطه‌ی (6) بدست می‌آید.

$$[S_{ij}] = (V_f[S_{ij}^f] + V_m[S_{ij}^m][A_{ij}]) (V_f[I] + V_m[A_{ij}])^{-1} \quad (6)$$

در رابطه‌ی (6)، V کسر حجمی، S ماتریس نرمی و $[I]$ ماتریس یک‌ه می‌باشد. در صورتی که الیاف همسانگرد عرضی و ماده‌ی زمینه همسانگرد باشد، کامپوزیت تک‌جهته‌ی حاصل همسانگرد عرضی خواهد بود. بنابراین در نهایت پنج عضو مستقل $[S_{ij}]$ در $[A_{ij}]$ نیز وجود دارد. علاوه بر این $[S_{ij}]$ باید متقارن باشد. ماتریس پل‌زنی، یک ماتریس بالامتثالی است که به جز مولفه‌های معرفی شده در معادلات (7) تا (10)، بقیه مولفه‌های آن صفر می‌باشد. a_{ij} مولفه‌های ماتریس پل‌زنی A می‌باشد.

$$a_{11} = \frac{E_m}{E_{11}^f} \quad (7)$$

$$a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0.5 \left(1 + \frac{E_m}{E_{22}^f} \right) \quad (8)$$

در معادلات (1) تا (4) به ترتیب معادلات سطوح بالا و پایین الیاف تار و پود ارائه شده‌اند. برای توصیف این سطوح علاوه بر معادلات سطح مقطع، معادلات اعوجاج الیاف نیز باید در نظر گرفته شوند. قسمت اول معادلات (1) تا (4)، سطح مقطع و قسمت دوم این معادلات، اعوجاج الیاف را نشان می‌دهد. بنابراین در مختصات محلی، توابع توصیف‌کننده‌ی سطوح بالایی و پایینی برای الیاف تار (الیاف 1) به صورت روابط (1) و (2) بیان می‌شود [19].

$$z_1^{\text{lower}} = -\frac{t_1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2x_1}{a_1}\right)^2} + \frac{t_2}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_1}{a_2 + g_2}\right)^2} \quad (1)$$

$$z_1^{\text{upper}} = \frac{t_1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2x_1}{a_1}\right)^2} + \frac{t_2}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_1}{a_2 + g_2}\right)^2} \quad (2)$$

به طور مشابه برای الیاف پود (الیاف 2) این توابع به صورت روابط (3) و (4) بیان می‌شوند.

$$z_2^{\text{lower}} = -\frac{t_2}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2x_2}{a_2}\right)^2} - \frac{t_1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_2}{a_1 + g_1}\right)^2} \quad (3)$$

$$z_2^{\text{upper}} = \frac{t_2}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2x_2}{a_2}\right)^2} - \frac{t_1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y_2}{a_1 + g_1}\right)^2} \quad (4)$$

که در آن a_1 و a_2 عرض الیاف و g_1 و g_2 فضای بین الیاف که از ماتریس پرشده است می‌باشد [19]. $t_1, t_2, g_1, g_2, a_1, a_2$ در "شکل 3" قابل مشاهده هستند. a_1 و g_1 به طریقی مشابه و با فرض ایجاد مقطعی عمود بر مقطع AA در "شکل 3" قابل استنباط می‌شوند. در "شکل 3"، h_m بیانگر میزان ضخامت لایه‌ی ماده‌ی زمینه در بالا و پایین الیاف است.

2-3- مدل میکرومکانیکی پل‌زنی

برای توسعه مدل میکرومکانیکی حاضر از مدل میکرومکانیکی پل‌زنی استفاده شده است. مطابق این مدل میکرومکانیکی، در یک کامپوزیت الیافی

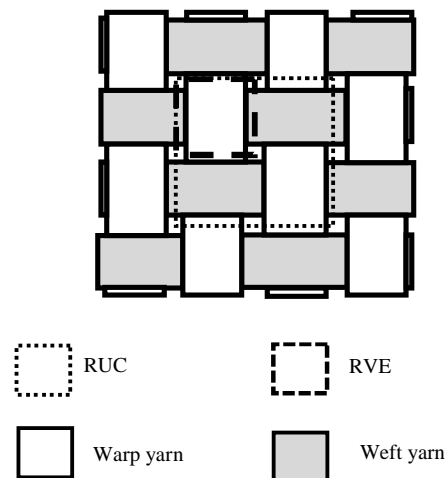


Fig. 2 Two dimensional woven fabric

شکل 2 پارچه با بافت دوبعدی

گوشه‌ای $(x_L^1, y_L^1), (x_L^2, y_L^2), (x_L^3, y_L^3), (x_L^4, y_L^4)$ مفروض است (شکل 5). حجم الیاف 1 (تار) و الیاف 2 (پود) به ترتیب با روابط (11) و (12) محاسبه می‌شود [14].

$$\bar{V}_{Y_1}^{(L)} = \int_{x_L^1}^{x_L^2} \int_{y_L^1}^{y_L^2} (Z_1^{\text{upper}}(x, y) - Z_1^{\text{lower}}(x, y)) dy dx \quad (11)$$

$$\bar{V}_{Y_2}^{(L)} = \int_{x_L^1}^{x_L^2} \int_{y_L^1}^{y_L^2} (Z_2^{\text{upper}}(x, y) - Z_2^{\text{lower}}(x, y)) dy dx \quad (12)$$

حجم کلی المان $(\bar{V}^{(L)})$ از رابطه‌ی (13) محاسبه می‌شود.

$$\bar{V}^{(L)} = s_1 s_2 H = s_1 s_2 (t_1 + t_2 + h_m) \quad (13)$$

در رابطه‌ی (13) ارتفاع المان حجمی معرف، h_m ارتفاع ناحیه‌ی ماده‌ی زمینه خالص (شکل 3)، $s_2 = \sqrt{(x_L^2 - x_L^1)^2 + (y_L^2 - y_L^1)^2}$ و $s_1 = \sqrt{(x_L^4 - x_L^1)^2 + (y_L^4 - y_L^1)^2}$ می‌باشد [14].

باید توجه شود که لایه‌های الیاف در نظر گرفته شده صرفاً از الیاف خالص تشکیل نشده‌اند؛ بلکه شامل ماده‌ی زمینه نیز هستند. کسر حجمی الیاف در تار و پود که چگالی تراکم الیاف، V_f^Y نامیده می‌شود، از رابطه‌ی (14) محاسبه می‌گردد.

$$V_f^Y = V_f \frac{V}{\sum_{L=1}^M \bar{V}_{Y_1}^{(L)} + \sum_{L=1}^M \bar{V}_{Y_2}^{(L)}} \quad (14)$$

با جای‌گذاری V_f^Y به جای V_f در معادله‌ی (6)، ماتریس نرمی الیاف 1 و الیاف 2 در دستگاه مختصات محلی‌شان تعریف می‌شود. ماتریس نرمی الیاف در مختصات سراسری که از رابطه‌ی (15) محاسبه می‌شود به خاطر جهت‌گیری متفاوت الیاف در یک زیرالمان، متفاوت از یکدیگر هستند [14].

$$[S_{ij}^G]_Y^{(L)} = ([T_{ij}]_Y^{(L)}) [S_{ij}] ([T_{ij}]^T)_Y^{(L)}, Y = Y_1, Y_2 \quad (15)$$

$$a_{55} = a_{66} = 0.5 \left(1 + \frac{G_m}{G_{12}^m} \right) \quad (9)$$

$$a_{13} = a_{12} = \frac{(S_{12}^f - S_{12}^m)(a_{11} - a_{22})}{(S_{11}^f - S_{11}^m)} \quad (10)$$

در معادلات فوق G_m, E_m به ترتیب مدول یانگ و مدول الاستیک برشی ماده‌ی زمینه می‌باشد. همچنین $E_{11}^f, E_{22}^f, G_{12}^f$ به ترتیب مدول طولی، مدول عرضی و مدول برشی داخل صفحه‌ی الیاف می‌باشند. S_{ij}^f و S_{ij}^m نیز به ترتیب ماتریس نرمی الیاف و ماده‌ی زمینه می‌باشد [18]. این روابط توسط مرجع [18] توسعه داده شده و مراجع [14] و [19] نیز این روابط را به صورت به‌کار رفته در مقاله‌ی حاضر استفاده کرده‌اند. مولفه‌های ماتریس پل‌زنی $[A_{ij}]$ به صورت نیمه‌تجربی استخراج شده است. یکی از فرضیات اصلی این روابط این است که تنش‌های طولی و عرضی در کامپوزیت تک‌جهته به ترتیب با تنش طولی الیاف و تنش عرضی ماده‌ی زمینه وابستگی دارد. مولفه‌ی مدول برشی عرضی و ضریب پواسون عرضی الیاف خود را در ترم a_{44} نشان می‌دهند که توسعه‌دهندگان مدل پل‌زنی، با توجه به فرض ذکرشده این ترم را برحسب E_m و E_{22}^f بازنویسی کردند. همچنین لازم به ذکر است که وجود ترم‌های S_{12}^f و S_{13}^m در ترم‌های a_{12} و a_{13} بیانگر وجود ضرایب پواسون طولی در ماتریس $[A_{ij}]$ است.

3-3- رویه‌ی گسسته‌سازی

برای بکارگیری مدل میکرومکانیک ارائه شده در کامپوزیت‌های بافته شده، ابتدا باید کامپوزیت را به تعدادی کامپوزیت تک‌جهته‌ی موضعی تقسیم کرد. بدین منظور پس از انتخاب المان حجمی معرف، مطابق "شکل 4" این المان به $M = N \times N$ زیرالمان، که N تعداد زیرالمان‌ها در راستای لبه‌ی المان حجمی معرف است، تقسیم می‌شود. هریک از لایه‌ها به عنوان یک کامپوزیت تک‌جهته در مختصات محلی خود فرض می‌شوند (در لایه‌های ماده‌ی زمینه‌ی خالص، کسر حجمی الیاف صفر است و ماتریس نرمی‌سفتی آن در همه‌ی سیستم‌های مختصاتی یکسان است). برای محاسبه‌ی ماتریس‌های سفتی و نرمی معادل یک زیرالمان، محاسبه‌ی حجمی از الیاف تار، الیاف پود و ماده زمینه که در یک زیرالمان قرار دارد، ضروری است. زیرالمان L ام با مختصات

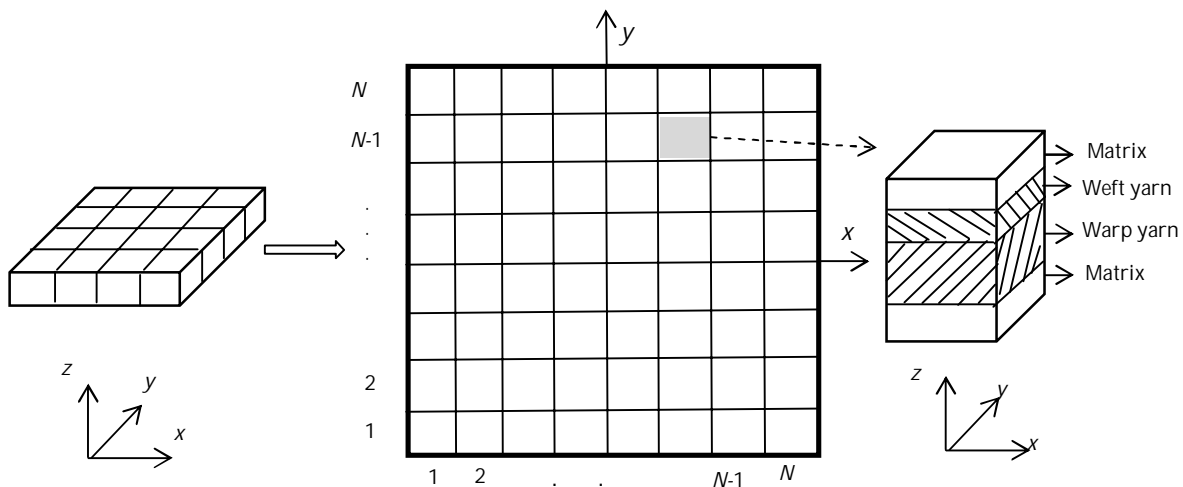


Fig. 4 Discretization of RVE and layers stacking in sub-elements

شکل 4 گسسته‌سازی المان حجمی معرف و چیدمان لایه‌ها در زیرالمان‌ها

4-3- همگن سازی

فرایند همگن‌سازی در چند سطح صورت می‌گیرد. نخست همگن‌سازی زیرالمان‌ها، سپس همگن‌سازی ردیف‌ها (مجموعه زیرالمان‌هایی که در یک ردیف افقی در کنار هم قرار می‌گیرند) و نهایتاً همگن‌سازی کل سلول واحد. همگن‌سازی در هر مرحله با رویکرد همگن‌سازی یک چندلایه انجام می‌شود. هر سلول واحد از $N \times N$ زیرالمان و N ردیف تشکیل می‌شود.

فرض کرنش ثابت بین لایه‌ها در یک چندلایه و یا فرض تنش یا کرنش ثابت در سراسر المان حجمی معرف می‌تواند دقت نتایج را خصوصاً برای خواص خارج صفحه‌ای کاهش دهد. در یک چندلایه فرض ثابت بودن کرنش‌های خارج صفحه‌ای به معنای متفاوت بودن تنش‌های خارج صفحه‌ای در لایه‌های مختلف است که این موضوع منجر به ارضا نشدن شرایط تعادل می‌شود. این نکته زمانی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند که دانسته شود پارچه‌های بافته‌شده در بسیاری از موارد در کاربردهایی که بارگذاری خارج صفحه بر آن‌ها اعمال می‌شود (مانند بارگذاری ضربه‌ای)، به‌کار گرفته می‌شوند و پیش‌بینی خواص خارج صفحه‌ای اهمیت پیدا می‌کند. باید توجه کرد که فرض مولفه‌های کرنش برابر در تمام لایه‌ها تنها در حالت کرنش صفحه‌ای که در آن مولفه‌های خارج صفحه‌ای کرنش صفر هستند، متناسب با رفتار مکانیکی مسئله می‌باشد. این فرض منجر به ارضای شرایط پیوستگی بین‌لایه‌ها می‌شود، اما این فرض در حالتی که فرض کرنش صفحه‌ای برقرار نباشد، به دلیل ارضا نشدن شرایط تعادل در راستای لایه‌چینی توجیه فیزیکی ندارد. همچنین فرض تنش ثابت و یا کرنش ثابت در کل المان حجمی معرف نیز مشخصاً فرضیات ساده‌کننده‌ای هستند که از منظر فیزیکی درست نمی‌باشند؛ چراکه در این حالت معمولاً به سری یا موازی بودن زیرالمان‌ها توجهی نمی‌شود و این فرضیات صرفاً برای ساده کردن روند حل مسئله به‌کار گرفته می‌شود.

در این مطالعه، برای همگن‌سازی یک چندلایه در حالت سه‌بعدی تنش، فرض کرنش‌های صفحه‌ای برابر و تنش‌های خارج صفحه‌ای برابر برای تمام لایه‌ها، به‌کار رفته است. در حالت کلی اگر چندلایه مورد نظر در صفحه‌ی $x-y$ قرار داشته باشد و n لایه‌ی دلخواه در راستای z روی هم چیده شده باشند، دو فرض کرنش ثابت در صفحه و تنش ثابت در خارج صفحه به صورت روابط (24) و (25) قابل بیان می‌باشد [20].

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^k \quad (i = 1, 2, 6; k = 1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

$$\sigma_i = \sigma_i^k \quad (i = 3, 4, 5; k = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

در این حالت مولفه‌های خارج صفحه‌ای کرنش کل چندلایه و مولفه‌های داخل صفحه‌ای تنش چندلایه از روابط (26) و (27) محاسبه می‌شوند.

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^n V^k \varepsilon_i^k \quad (i = 3, 4, 5) \quad (26)$$

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^n V^k \sigma_i^k \quad (i = 1, 2, 6) \quad (27)$$

که در آن

$$V^k = \frac{\text{volume of } k^{\text{th}} \text{ layer}}{\text{volume of laminate}} \quad (28)$$

در صورتی که C_{ij}^k ماتریس سفتی لایه‌ی k ام باشد، برای محاسبه ثوابت ماتریس سفتی چندلایه از روابط (29) تا (33) استفاده می‌شود [20].

در رابطه‌ی (15)، $[S_{ij}]$ ماتریس نرمی در مختصات محلی و $[S_{ij}^G]$ ماتریس نرمی در مختصات سراسری برای الیاف تار یا پود است. در این رابطه ماتریس انتقال T از رابطه‌ی (16) محاسبه می‌شود.

$$T = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_2 l_3 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_2 m_3 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & n_2 n_3 \\ 2m_1 n_1 & 2m_2 n_2 & 2m_3 n_3 & m_2 n_3 + m_3 n_2 \\ 2n_1 l_1 & 2n_2 l_2 & 2n_3 l_3 & l_2 n_3 + l_3 n_2 \\ 2l_1 m_1 & 2l_2 m_2 & 2l_3 m_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 \\ l_3 l_1 & l_1 l_2 & & \\ m_3 m_1 & m_1 m_2 & & \\ n_3 n_1 & n_1 n_2 & & \\ m_1 n_3 + m_3 n_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & & \\ l_1 n_3 + l_3 n_1 & l_1 n_2 + l_2 n_1 & & \\ l_1 m_3 + l_3 m_1 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & & \end{bmatrix} \quad (16)$$

برای محاسبه‌ی مولفه‌های ماتریس دوران ابتدا باید در دستگاه مختصات محلی هر یک از الیاف، $P_1: (x_L^{P_1}, y_L^{P_1}, z_L^{P_1})$ ، $P_2: (x_L^{P_2}, y_L^{P_2}, z_L^{P_2})$ ، $P_3: (x_L^{P_3}, y_L^{P_3}, z_L^{P_3})$ و $P_4: (x_L^{P_4}, y_L^{P_4}, z_L^{P_4})$ مختصات وسط وجوه مختلف زیرالمان L م را از رابطه‌ی (17) محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} x_L^{P_1} &= 0.5(x_L^1 + x_L^2), \\ y_L^{P_1} &= 0.5(y_L^1 + y_L^2), \\ z_L^{P_1} &= 0.5[Z_1^{\text{upper}}(x_L^{P_1}, y_L^{P_1}) + Z_1^{\text{lower}}(x_L^{P_1}, y_L^{P_1})] \end{aligned} \quad (17)$$

محل نقاط P_1, P_2, P_3, P_4 در یک زیرالمان و مختصات گوشه‌های زیرالمان در "شکل 5" نشان داده شده است. مولفه‌های متناظر نقاط P_2, P_3, P_4 نیز به همین ترتیب محاسبه می‌شوند. در این صورت مولفه‌های ماتریس دوران از روابط (18) تا (20) محاسبه می‌شود.

$$l_1 = \frac{x_L^{P_3} - x_L^{P_1}}{s}, m_1 = \frac{y_L^{P_3} - y_L^{P_1}}{s}, n_1 = \frac{z_L^{P_3} - z_L^{P_1}}{s} \quad (18)$$

$$l_3 = \frac{b_1}{s_1}, m_3 = \frac{b_2}{s_1}, n_3 = \frac{b_3}{s_1} \quad (19)$$

$$l_2 = m_3 n_1 - n_3 m_1, m_2 = -l_3 n_1 + n_3 l_1, n_2 = l_3 m_1 - m_3 l_1 \quad (20)$$

که در آن‌ها

$$s = \sqrt{(x_L^{P_3} - x_L^{P_1})^2 + (y_L^{P_3} - y_L^{P_1})^2 + (z_L^{P_3} - z_L^{P_1})^2} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= m_1 (z_L^{P_4} - z_L^{P_2}) - n_1 (y_L^{P_4} - y_L^{P_2}), \\ b_2 &= -l_1 (z_L^{P_4} - z_L^{P_2}) + n_1 (x_L^{P_4} - x_L^{P_2}), \\ b_3 &= l_1 (y_L^{P_4} - y_L^{P_2}) - m_1 (x_L^{P_4} - x_L^{P_2}) \end{aligned} \quad (22)$$

$$s_1 = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2} \quad (23)$$

می‌باشد [14].

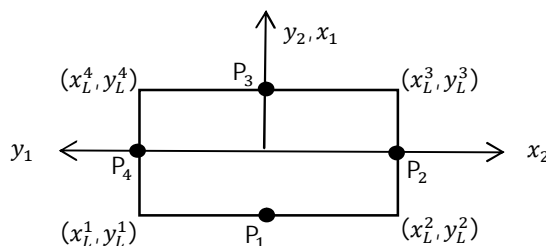


Fig. 5 Local coordinate system in one sub-element

شکل 5 دستگاه مختصات محلی در یک زیرالمان

باشد.

گام 2: در این مرحله فرض می‌شود که در هر ردیف افقی هر زیرالمان مانند یک لایه عمل می‌کند و N زیرالمان تشکیل یک چندلایه را می‌دهند که لایه‌ها در راستای x روی هم چیده شده‌اند (شکل 6). در این حالت فرض می‌شود که کرنش‌های $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ در تمام لایه‌ها برابر است و تنش‌های $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ لایه‌ها با هم برابر است. با این فرض، زیرالمان‌های موجود در یک ردیف، با بازنویسی روابط عمومی (29) تا (32) برای یک ردیف و با استفاده از روابط (39) تا (42) همگن شده و یک سلول معادل برای ردیف r ام بدست می‌آید.

$$\sigma_i^r = C_{ij}^r \varepsilon_j^r \quad (i, j = 1, \dots, 6) \quad (39)$$

$$C_{ij}^r = \sum_{L=1}^N V^L \left[C_{ij}^L - \frac{C_{i3}^L C_{3j}^L}{C_{33}^L} + \frac{C_{i3}^L \sum_{q=1}^N \frac{V^q C_{3j}^q}{C_{33}^q}}{C_{33}^L \sum_{q=1}^N \frac{V^q}{C_{33}^q}} \right] \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (40)$$

$$C_{ij}^r = C_{ji}^r = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4; j = 5, 6) \quad (41)$$

$$C_{ij}^r = \frac{\sum_{L=1}^N \frac{V^L}{\Delta_L'} C_{ij}^L}{\sum_{L=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{V^L V^q}{\Delta_L' \Delta_q'} (C_{44}^L C_{55}^q - C_{45}^L C_{54}^q)} \quad (i, j = 5, 6) \quad (42)$$

که در آن

$$\Delta_L' = \begin{vmatrix} C_{55}^L & C_{56}^L \\ C_{65}^L & C_{66}^L \end{vmatrix} \quad (43)$$

در معادلات فوق C_{ij}^r مولفه‌ی ij ام ماتریس سفتی زیرالمان L ام است و C_{ij}^L مولفه‌ی ij ام از ماتریس سفتی زیرالمان L ام که در ردیف r ام قرار دارد، می‌باشد.

گام 3: در این مرحله فرض می‌شود هر ردیف به صورت یک لایه عمل می‌کند و N لایه که از همگن‌سازی هر ردیف بدست آمده، تشکیل یک چندلایه را می‌دهند که در راستای y روی هم چیده شده‌اند (شکل 7). در این حالت فرض می‌شود که کرنش‌های $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5$ در تمام لایه‌ها برابر است و تنش‌های $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_6$ لایه‌ها با هم برابر است. با این فرض لایه‌های موجود در یک ستون (راستای y) با استفاده از روابط (44) تا (47) که از بازنویسی روابط (29) تا (32) برای این چندلایه‌ی فرضی بدست می‌آیند، همگن شده و بدین ترتیب همگن‌سازی کل سلول واحد صورت می‌گیرد.

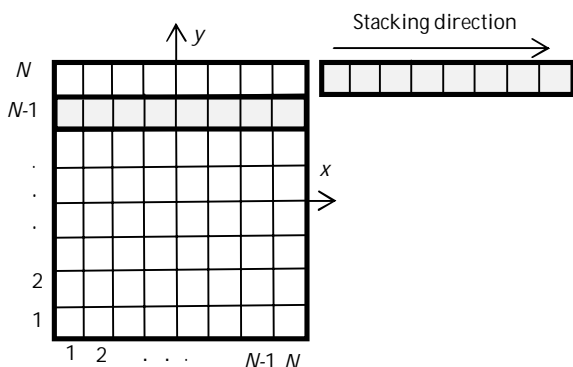


Fig. 6 Layers stacking in a row

شکل 6 چیدمان لایه‌ها در یک ردیف

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j = 1, \dots, 6) \quad (29)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n V^k \left[C_{ij}^k - \frac{C_{i3}^k C_{3j}^k}{C_{33}^k} + \frac{C_{i3}^k \sum_{l=1}^n \frac{V^l C_{3j}^l}{C_{33}^l}}{C_{33}^k \sum_{l=1}^n \frac{V^l}{C_{33}^l}} \right] \quad (i, j = 1, 2, 3, 6) \quad (30)$$

$$C_{ij} = C_{ji} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 6; j = 4, 5) \quad (31)$$

$$C_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{V^k}{\Delta_k'} C_{ij}^k}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{V^k V^l}{\Delta_k' \Delta_l'} (C_{44}^k C_{55}^l - C_{45}^k C_{54}^l)} \quad (i, j = 4, 5) \quad (32)$$

که در آن

$$\Delta_k' = \begin{vmatrix} C_{44}^k & C_{45}^k \\ C_{54}^k & C_{55}^k \end{vmatrix} \quad (33)$$

با استفاده از مدل همگن‌سازی چندلایه‌ی ارائه شده‌ی فوق، فرایند همگن‌سازی سلول واحد کامپوزیت با الیاف بافته شده در سه گام زیر انجام می‌شود:

گام 1: بعد از انتخاب المان حجمی معرف و تقسیم آن به $N \times N$ زیرالمان در صفحه‌ی $x-y$ ، هر کدام از زیرالمان‌ها را می‌توان به عنوان یک چندلایه تصور کرد که از سه لایه تشکیل شده است؛ لایه‌ی تار، لایه‌ی پود و لایه‌ی ماده‌ی زمینه (شکل 4). این لایه‌ها در راستای z روی هم قرار گرفته‌اند. در این حالت با این فرض که کرنش‌های $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ در تمام لایه‌ها برابر است و تنش‌های $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ لایه‌ها با هم برابر است، همگن‌سازی برای هر زیرالمان انجام می‌شود. با بازنویسی روابط عمومی (29) تا (32) برای یک زیرالمان، خواص معادل زیرالمان از روابط (34) تا (37) بدست می‌آیند.

$$\sigma_i^L = C_{ij}^L \varepsilon_j^L \quad (i, j = 1, \dots, 6) \quad (34)$$

$$C_{ij}^L = \sum_{k=m, Y_1, Y_2} V^k \left[C_{ij}^k - \frac{C_{i3}^k C_{3j}^k}{C_{33}^k} + \frac{C_{i3}^k \sum_{q=m, Y_1, Y_2} \frac{V^q C_{3j}^q}{C_{33}^q}}{C_{33}^k \sum_{q=m, Y_1, Y_2} \frac{V^q}{C_{33}^q}} \right] \quad (i, j = 1, 2, 3, 6) \quad (35)$$

$$C_{ij}^L = C_{ji}^L = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 6; j = 4, 5) \quad (36)$$

$$C_{ij}^L = \frac{\sum_{k=m, Y_1, Y_2} \frac{V^k}{\Delta_k'} C_{ij}^k}{\sum_{k=m, Y_1, Y_2} \sum_{q=m, Y_1, Y_2} \frac{V^k V^q}{\Delta_k' \Delta_q'} (C_{44}^k C_{55}^q - C_{45}^k C_{54}^q)} \quad (37)$$

که در آن

$$\Delta_k' = \begin{vmatrix} C_{44}^k & C_{45}^k \\ C_{54}^k & C_{55}^k \end{vmatrix} \quad (38)$$

در معادلات فوق C_{ij}^L مولفه‌ی ij ام از ماتریس سفتی لایه‌ی k ام در زیرالمان L ام است. C_{ij}^k معکوس ماتریس نرمی لایه‌ی k ام، $[S_{ij}^k]^{-1}$ است که S_{ij}^k پس از محاسبه از مدل پل‌زنی از رابطه‌ی (6) در مختصات محلی لایه‌ی الیاف تار و پود، با انتقال به مختصات سراسری از رابطه‌ی (15) بدست می‌آید. k در هر زیرالمان می‌تواند مربوط به لایه‌ی ماده‌ی زمینه (m)، تار (Y_1) و یا پود (Y_2)

جدول 1، جدول 2 و جدول 3 به ترتیب مشخصات هندسی، خواص مکانیکی الیاف و خواص مکانیکی ماده زمینه در این چهار مثال را نشان می‌دهد. مثال 1 به مقایسه‌ی ثوابت مهندسی محاسبه شده توسط مدل شنگ و هوا [17] و پیاده‌سازی مدل حاضر و نتایج تجربی برای کامپوزیت کربن/اپوکسی می‌پردازد. در مدل ارائه شده توسط شنگ و هوا، مبتنی بر یک مدل هندسی سه‌بعدی و اصول حساب تغییرات، خواص معادل کامپوزیت با الیاف بافته‌شده محاسبه می‌شود. در این مدل برای محاسبه‌ی ماتریس سفتی معادل از فرض کرنش ثابت در کل سلول واحد (PM) و برای محاسبه‌ی ماتریس نرمی معادل از فرض تنش ثابت در کل سلول واحد (CM) استفاده شده است. شنگ و هوا [17] ادعا کرده‌اند که روش PM و روش CM به ترتیب بیانگر حد بالا و حد پایین ثوابت مهندسی می‌باشند. هر چند مطابق با نتایج آزمایشگاهی ارائه شده در جدول 4، به نظر می‌رسد که در واقع مدل‌های PM و CM تنها تقریب مناسبی از حدود بالا و پایین ثوابت مهندسی را بدست می‌آورند.

در جدول 4 ثوابت مهندسی معادل کامپوزیت محاسبه شده در مرجع [17]، ثوابت محاسبه شده از مدل حاضر و نتایج آزمایشگاهی نشان داده شده است. هر چند در این مرجع برای خواص خارج صفحه‌ای، مقادیر تجربی ذکر نشده، اما از جدول 4 مشخص است که برای ثوابت مهندسی داخل صفحه‌ای، مدل حاضر تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد.

همچنین این جدول نشان می‌دهد که مقادیر محاسبه شده توسط مدل حاضر برای خواص خارج صفحه‌ای، بین حد بالا و پایین تعیین شده توسط مرجع [17] قرار دارند. مثال 2 به مقایسه‌ی ثوابت مهندسی محاسبه شده توسط مدل شنگ و هوا [17] و پیاده‌سازی مدل حاضر و نتایج تجربی برای کامپوزیت شیشه/اپوکسی می‌پردازد. جدول 5 ثوابت مهندسی معادل کامپوزیت محاسبه شده در مرجع [17]، ثوابت محاسبه شده از مدل حاضر و نتایج آزمایشگاهی را نشان می‌دهد. در این مثال نیز مرجع [17] برای خواص خارج صفحه‌ای، مقادیر تجربی ارائه نکرده است. در جدول 5 مشاهده می‌شود که مقادیر محاسبه شده توسط مدل حاضر برای خواص خارج صفحه‌ای، بین حد بالا و پایین تعیین شده توسط مرجع [17] قرار دارند، همچنین برای ثوابت مهندسی داخل صفحه‌ای مدل حاضر تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد. مثال 3، نتایج ارائه شده توسط سیدا و همکارانش [16] را بیان می‌کند. این نتایج شامل نتایج تجربی و نتایج حاصل از مدل تحلیلی ارائه شده توسط آن‌ها، موسوم به مزوتکس می‌باشد. در مدل مزوتکس، ابتدا سلول واحد به نواحی کوچکی که بتوان آن را به صورت یک چندلایه در نظر گرفت، تقسیم می‌شود. در هر یک از این نواحی کوچک، ماتریس سفتی از میانگین‌گیری ماتریس‌های سفتی لایه‌ها (لایه‌ی تار، لایه‌ی پود و لایه‌ی ماده زمینه)، با فرض کرنش ثابت محاسبه می‌شود.

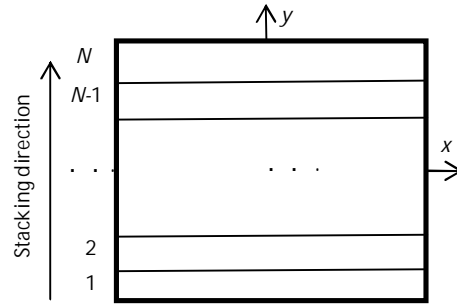


Fig. 7 Layers stacking in RVE

شکل 7 چیدمان لایه‌ها در المان حجمی معرف

$$\sigma_i^{RVE} = C_{ij}^{RVE} \varepsilon_i^{RVE} \quad (i, j = 1, \dots, 6) \quad (44)$$

$$C_{ij}^{RVE} = \sum_{r=1}^N V^k \left[C_{ij}^r - \frac{C_{i3}^r C_{3j}^r}{C_{33}^r} + \frac{C_{i3}^r \sum_{q=1}^N \frac{V^q C_{3j}^q}{C_{33}^q}}{C_{33}^r \sum_{q=1}^N \frac{V^q}{C_{33}^q}} \right] \quad (i, j = 1, 2, 3, 5) \quad (45)$$

$$C_{ij}^{RVE} = C_{ij}^{RVE} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 5; j = 4, 6) \quad (46)$$

$$C_{ij}^{RVE} = \frac{\sum_{r=1}^N \frac{V^r}{\Delta_r'} C_{ij}^r}{\sum_{r=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{V^r V^q}{\Delta_r' \Delta_q'} (C_{44}^r C_{55}^q - C_{45}^r C_{54}^q)} \quad (i, j = 4, 6) \quad (47)$$

که در آن

$$\Delta_r' = \begin{vmatrix} C_{44}^r & C_{46}^r \\ C_{64}^r & C_{66}^r \end{vmatrix} \quad (48)$$

در معادلات فوق، C_{ij}^r مولفه‌ی ij ام از ماتریس سفتی ردیف r ام در المان حجمی معرف است. r می‌تواند مقداری بین 1 تا N باشد. با اتمام این مرحله فرایند همگن‌سازی سلول واحد به اتمام می‌رسد.

4- نتایج و بحث

برای محاسبه‌ی خواص مکانیکی المان حجمی معرف شامل مدول‌های الاستیک و ضرایب پواسون، دو سری پارامتر به عنوان ورودی مدل وجود دارد. دسته‌ی اول پارامترهای مربوط به مشخصات هندسی المان حجمی معرف است که شامل پارامترهای $a_1, a_2, g_1, g_2, t_1, t_2, H$ و کسر حجمی الیاف (V_f) می‌باشد. دسته‌ی دوم نیز پارامترهای مربوط به خواص مکانیکی اجزاء سازنده کامپوزیت شامل الیاف و ماتریس است. در واقع این مدل با گرفتن مشخصات هندسی پارچه و خواص مکانیکی اجزاء سازنده، خواص کامپوزیت با الیاف بافته‌شده‌ی حاصل را پیش‌بینی می‌کند. برای اعتبارسنجی مدل فوق از نتایج ارائه شده توسط مراجع مختلف استفاده شده است. پنج مثال از مراجع مختلف برای بررسی کارایی روش همگن‌سازی انتخاب شدند.

جدول 1 پارامترهای هندسی سلول واحد

Table 1 Geometrical parameters of RVE

V_f	H (mm)	t_2 (mm)	t_1 (mm)	g_2 (mm)	g_1 (mm)	a_2 (mm)	a_1 (mm)	
0.44	0.16	0.075	0.075	0.151	0.011	0.96	1.10	مثال 1 [17]
0.25	0.15	0.050	0.050	0.230	0.230	0.50	0.50	مثال 2 [17]
0.55	0.10	0.050	0.050	0.100	0.100	0.60	0.60	مثال 3 [16]
0.35	0.20	0.100	0.100	0.320	0.320	0.70	0.70	مثال 4 [15]
0.20	0.228	0.114	0.114	0	0	1.680	1.680	مثال 5 [21]

جدول 2 خواص مکانیکی الیاف

ν_{12}^f	G_{32}^f (GPa)	G_{12}^f (GPa)	E_{22}^f (GPa)	E_{11}^f (GPa)	نوع الیاف	
0.26	14.3	24	40	230	کربن	مثال 1 [17]
0.3	27.7	27.7	72	72	شیشه	مثال 2 [17]
0.2	30.4	30.4	73	73	شیشه	مثال 3، 4 و 5 [16]

جدول 3 خواص مکانیکی رزین

ν_{12}^m	G_{12}^m (GPa)	E_{11}^m (GPa)	نوع رزین	
0.35	1.3	3.5	اپوکسی	مثال 1 [17]
0.35	1.3	3.5	اپوکسی	مثال 2 [17]
0.35	1.49	3.4	اپوکسی	مثال 3 [16]
0.35	1.3	3.5	اپوکسی	مثال 4 [15]
0.37	-	3.45	اپوکسی	مثال 5 [21]

جدول 4 مقایسه خواص مکانیکی محاسبه شده برای کامپوزیت بافته شده مثال 1 از روش همگن‌سازی حاضر با مرجع [17]

ν_{xz}	ν_{yz}	ν_{xy}	G_{yz} (GPa)	G_{xz} (GPa)	G_{xy} (GPa)	E_z (GPa)	E_y (GPa)	E_x (GPa)	
-	-	-	-	-	-	-	(47-50) 49.3	(56-61) 60.3	نتایج تجربی [17]
0.442	0.460	0.048	4.01	3.87	3.71	11.2	52.1	58.9	PM مرجع [17]
0.366	0.369	0.277	2.55	2.55	2.60	6.85	8.16	8.41	CM
0.428	0.426	0.056	2.69	2.62	3.58	9.35	53.76	60.13	مدل حاضر

جدول 5 مقایسه خواص مکانیکی محاسبه شده برای کامپوزیت بافته شده مثال 2 از روش همگن‌سازی حاضر با مرجع [17]

$\nu_{xz} = \nu_{yz}$	ν_{xy}	$G_{xz} = G_{yz}$ (GPa)	G_{xy} (GPa)	E_z (GPa)	$E_x = E_y$ (GPa)	
-	-	-	-	-	(10-16) 14.5	نتایج تجربی [17]
0.385	0.184	2.95	2.90	8.51	14.4	PM مرجع [17]
0.351	0.355	1.8	1.8	4.87	5.05	CM
0.414	0.190	1.84	2.60	6.29	14.67	مدل حاضر

مشخص شده قرار دارند در این مثال نشان داده شد که با نتایج آزمایشگاهی نیز تطابق مناسبی نیز دارند. در مثال چهارم نتایج مدل ارائه شده توسط تبیعی و همکارانش [15] و همچنین نتایج مدل‌سازی المان محدود چانگ و همکارانش [22] برای مساله بیان شده در مثال 4، با نتایج مدل حاضر مقایسه شده‌اند.

پارامترهای هندسی المان حجمی معرف برای این مثال به صورت سعی و خطا و به گونه‌ای انتخاب شدند که مقدار پارامتر چگالی تراکم الیاف در این مثال برابر با کسر حجمی الیاف در نخ‌های تار و پود (که در مرجع [15] ذکر شده و مقداری متفاوت از کسر حجمی الیاف در کل کامپوزیت دارد) شود. جدول 7 نتایج این مقایسه را نشان می‌دهد. در این جدول سطر اول، نتایج مدل‌سازی اجزاء محدود انجام شده توسط مرجع [22] را نشان می‌دهد. آن‌ها برای حل مدل خود از روش تعادل انرژی کرنشی استفاده کرده‌اند. همچنین شرایط مرزی از نوع جابه‌جایی را در مدل‌سازی خود به کار برده‌اند. مرجع

در مرحله بعد با انتگرال‌گیری در طول سلول واحد، ماتریس سفتی متوسط کل سلول واحد از فرض کرنش ثابت محاسبه می‌شود. در هر دو مرحله‌ی همگن‌سازی، فرض کرنش ثابت برای محاسبه‌ی خواص معادل استفاده شده است. این فرضیات، فرضیات ساده‌کننده‌ای هستند که با واقعیت فیزیکی تطابق چندانی ندارند و در حالت سه‌بعدی نمی‌توانند صحیح باشند. جدول 6 ثوابت مهندسی استخراج شده از آزمایش و همچنین مقادیر محاسبه شده توسط مدل مزوتکس، و مدل حاضر را نشان می‌دهد. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌شود، مدل حاضر نسبت به مدل مزوتکس برای ثوابت مهندسی G_{xy} ، G_{xz} ، E_z ، E_x و E_y پارامترهای E_x و E_y ضرایب پواسون پاسخ‌های نزدیک‌تری به نتایج آزمایشگاهی ارائه کرده است. بنابراین مطابق با مثال‌های 1 و 2، نتایج مدل ارائه شده بخصوص برای خواص خارج صفحه‌ای و برش درون صفحه‌ای علاوه بر این که مطابق با نتایج حاصل از مدل‌های PM و CM، در بازه‌ی

جدول 7 مقایسه خواص مکانیکی محاسبه شده برای کامپوزیت بافته شده مثال 4 از متد همگن‌سازی حاضر با مرجع [15]

Table 7 Comparison of calculated woven fabric composite properties between example 4 and ref. [15]

ν_{zy}	ν_{xy}	G_{xz} (GPa)	G_{xy} (GPa)	E_z (GPa)	$E_x = E_y$ (GPa)	
0.3720	0.1745	2.422	3.190	8.346	18.634	مرجع [22]
0.4206	0.1429	2.712	3.485	7.398	15.569	مرجع [15]
0.4000	0.1400	2.322	2.900	7.685	18.933	مدل حاضر

جدول 8 مقایسه خواص مکانیکی محاسبه شده برای کامپوزیت بافته شده مثال 5 از متد همگن‌سازی حاضر با مرجع [21]

Table 8 Comparison of calculated woven fabric composite properties between example 5 and ref. [21]

ν_{zy}	ν_{xy}	G_{xz} (GPa)	G_{xy} (GPa)	E_z (GPa)	$E_x = E_y$ (GPa)	
0.408	0.181	1.84	2.15	6.14	11.81	مرجع [21]
0.465	0.146	1.90	2.32	5.42	11.17	مرجع [15]
0.460	0.162	1.87	1.93	6.24	11.83	مدل حاضر

می‌باشد. فرضیات به کار رفته در فرایند همگن‌سازی ارائه شده در مقایسه با سایر تحقیقات، با واقعیت فیزیکی مساله تطابق بیش‌تری دارند. در این فرایند همگن‌سازی، المان حجمی معرف به تعدادی زیرالمان تقسیم می‌شود به طوری که بتوان ترکیبی از زیرالمان‌ها را به عنوان یک چندلایه در نظر گرفت. برای تعیین خواص معادل هر چندلایه در حالت سه‌بعدی، به جای فرض کرنش ثابت در کل چندلایه، فرض کرنش صفحه‌ای ثابت در کل و تنش خارج صفحه‌ای ثابت لحاظ شده است. همچنین خواص مکانیکی هر تک‌لایه با استفاده از روش میکرومکانیکی پل‌زنی تعیین می‌شوند. در نهایت با بررسی پنج مثال از منابع مختلف، کارایی روش همگن‌سازی ارائه شده مورد ارزیابی قرار گرفت و دقت این روش در تعیین خواص الاستیک کامپوزیت بافته شده، خصوصا خواص خارج صفحه‌ای نشان داده شد.

6- مراجع

- [1] R. Tanov, A. Tabiei, Computationally efficient micromechanical models for woven fabric composite elastic moduli, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, No. 4, pp. 553-560, 2001.
- [2] N. Naik, P. Shembekar, Elastic behavior of woven fabric composites: I—Lamina analysis, *Journal of Composite Materials*, Vol. 26, No. 15, pp. 2196-2225, 1992.
- [3] J. Crookston, A. Long, I. Jones, A summary review of mechanical properties prediction methods for textile reinforced polymer composites, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials Design and Applications*, Vol. 219, No. 2, pp. 91-109, 2005.
- [4] S. L. Angioni, M. Meo, A. Foreman, A comparison of homogenization methods for 2-D woven composites, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 42, No. 2, pp. 181-189, 2011.
- [5] A. Adumitroaie, E. J. Barbero, Stiffness and strength prediction for plain weave textile reinforced composites, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 19, No. 1-3, pp. 169-183, 2012.
- [6] P. Kowalczyk, Enhanced geometric model for numerical microstructure analysis of plain-weave fabric-reinforced composite, *Advanced Composite Materials*, Vol. 24, No. 5, pp. 411-429, 2015.
- [7] M. Komeili, A. Milani, The effect of meso-level uncertainties on the mechanical response of woven fabric composites under axial loading, *Computers & Structures*, Vol. 90, pp. 163-171, 2012.
- [8] M. Rao, M. Pantiuk, P. Charalambides, Modeling the geometry of satin weave fabric composites, *Journal of Composite Materials*, Vol. 43, No. 1, pp. 19-56, 2009.
- [9] P. Kowalczyk, Parametric constitutive model of plain-weave fabric reinforced composite ply, *Advanced Composite Materials*, Vol. 25, No. 3, pp. 287-303, 2016.
- [10] N. Naik, E. Sridevi, An analytical method for thermoelastic analysis of 3D orthogonal interlock woven composites, *Journal of*

[15] پس از ارائه مدل تحلیلی خود برای کامپوزیت با الیاف بافته شده، برای صحت‌سنجی مدل، از نتایج مدل‌سازی اجزاء محدود مرجع [22] استفاده کرده است. جدول 7 نشان می‌دهد که نتایج پیش‌بینی شده توسط مدل حاضر دقت خوبی داشته است و نتایج نزدیکی را با نتایج ارائه شده در این مراجع ارائه کرده است. پنجمین و آخرین مثال برای اعتبارسنجی مدل حاضر، به مقایسه‌ی نتایج حاصل از مدل‌سازی اجزاء محدود ارائه شده توسط ماری و سانکار [21]، نتایج پیش‌بینی مرجع [15] و نتایج پیش‌بینی مدل حاضر برای کامپوزیت با الیاف بافته شده با مشخصات ارائه شده برای مثال پنج می‌پردازد. جدول 8 به ارائه نتایج سه مدل بیان شده می‌پردازد.

جدول 8 نشان می‌دهد که مدل حاضر در پیش‌بینی خواص کامپوزیت بافته شده‌ی مثال پنج موفقیت داشته است. مدل حاضر توانسته است با دقت بالاتری نسبت به مرجع [15]، نتایج نزدیک‌تری را به مدل اجزاء محدود ارائه کند. باید توجه شود که مرجع [21] کسر حجمی الیاف در تار و پود را معادل 26 درصد بیان کرده است. این پارامتر در مدل حاضر معادل چگالی تراکم الیاف، V_f^y ، است و کسر حجمی الیاف در کل کامپوزیت از رابطه‌ی (14) برابر 20 درصد است که این مقدار در جدول 1 گزارش شده است. با بررسی پنج مثال ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که مدل حاضر به خوبی می‌تواند برای پیش‌بینی ثوابت الاستیک کامپوزیت با الیاف بافته شده مورد استفاد قرار بگیرد.

5- نتیجه گیری

این تحقیق به توسعه‌ی یک روش برای همگن‌سازی المان حجمی معرف با استفاده از شبیه‌سازی چندلایه‌ها برای یک کامپوزیت با الیاف بافته شده می‌پردازد. با بررسی روش‌های همگن‌سازی مبتنی بر فرض تنش ثابت و کرنش ثابت در تعیین خواص کامپوزیت با الیاف بافته شده، بیان شد که فرض ثابت بودن مولفه‌های کرنش برای لایه‌ها در یک زیرالمان و همچنین فرض تنش ثابت و یا کرنش ثابت در زیرالمان‌ها فرضیات ساده‌کننده‌ای هستند که می‌توانند باعث خطای مدل‌سازی بخصوص در شرایط بارگذاری سه‌بعدی و خارج صفحه‌ای گردند. بنابراین در تحقیق حاضر، یک مدل میکرومکانیکی برای پیش‌بینی خواص کامپوزیت با الیاف بافته‌شده توسعه داده شد. این مدل برای همگن‌سازی المان حجمی معرف از شبیه‌سازی چندلایه‌ها استفاده کرده است. فرایند همگن‌سازی ارائه شده به صورت همگن‌سازی چندمقیاسی

- No. 4, pp. 505-517, 1999.
- [17] S. Z. Sheng, S. Van Hoa, Three dimensional micro-mechanical modeling of woven fabric composites, *Journal of Composite Materials*, Vol. 35, No. 19, pp. 1701-1729, 2001.
- [18] Z. M. Huang, A unified micromechanical model for the mechanical properties of two constituent composite materials, Part I: Elastic behavior, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, Vol. 13, No. 4, pp. 252-271, 2000.
- [19] Z. M. Huang, Fatigue life prediction of a woven fabric composite subjected to biaxial cyclic loads, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 33, No. 2, pp. 253-266, 2002.
- [20] P. Chou, J. Carleone, C. Hsu, Elastic constants of layered media, *Journal of Composite Materials*, Vol. 6, No. 1, pp. 80-93, 1972.
- [21] R. V. Marrey, B. V. Sankar, A micromechanical model for textile composite plates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, No. 12, pp. 1187-1213, 1997.
- [22] P. W. Chung, K. K. Tamma, Woven fabric composites—developments in engineering bounds, homogenization and applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 12, pp. 1757-1790, 1999.
- Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 21, No. 13, pp. 1149-1191, 2002.
- [11] N. Naik, V. Ganesh, An analytical method for plain weave fabric composites, *Composites*, Vol. 26, No. 4, pp. 281-289, 1995.
- [12] S. L. Angioni, M. Meo, A. Foreman, A critical review of homogenization methods for 2D woven composites, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 30, No. 22, pp. 1895-1906, 2011.
- [13] T. Ishikawa, T.-W. Chou, Stiffness and strength behaviour of woven fabric composites, *Journal of Materials Science*, Vol. 17, No. 11, pp. 3211-3220, 1982.
- [14] Z. ming Huang, The mechanical properties of composites reinforced with woven and braided fabrics, *Composites Science and Technology*, Vol. 60, No. 4, pp. 479-498, 2000.
- [15] I. Ivanov, A. Tabiei, Three-dimensional computational micro-mechanical model for woven fabric composites, *Composite Structures*, Vol. 54, No. 4, pp. 489-496, 2001.
- [16] D. Scida, Z. Aboura, M. Benzeggagh, E. Bocherens, A micromechanics model for 3D elasticity and failure of woven-fibre composite materials, *Composites Science and Technology*, Vol. 59,