ماهنامه علمى پژوهشى

مهندسی مکانیک مدر س



mme.modares.ac.ir

# بررسي برخورد دو حباب با اختلاف چگالي بالا توسط روش شبكه بولتزمن

# الهام ستارى $^1$ ، مجتبى آقاجانى دلاور $^{2^*}$ ، احسان فتاحى $^8$ ، كوروش صدبقى $^4$

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک تبدیل انرژی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل

3- دانشجوى دكترى، مهندسي مكانيك، دانشگاه صنعتى نوشيرواني، بابل

4- دانشيار، مهندسي مكانيك، دانشگاه صنعتي نوشيرواني، بابل

\* بابل، صندوق پستى 484، m.a.delavar@nit.ac.ir

چکيده	اطلاعات مقاله
در مقاله حاضر از روش اینامارو که بر گرفته از مدل انرژی آزاد شبکه بولتزمن است، برای شبیهسازی حرکت حباب و نحوه ادغام دو حباب تحت	مقاله پژوهشی کامل
تأثیر نیروی شناوری استفاده شده است. به منظور کاهش هزینه محاسباتی با تلفیق مدل دو بعدی تاناکا و سه بعدی اینامارو از مدل اینامارو در دو	دریافت: 06 آذر 1392
بعد استفاده شدهاست. در ابتدا با انجام صحت سنجی از درستی مدل فوق در اعمال نیروی کشش سطحی و قانون لاپلاس برای دو نسبت	پذیرش: 08 بهمن 1392
مگال . 50 . 1000 ایل نان حال شنان تر در مطور با از درستی مدل موق در اعمال نیروی که مدر ات سویت بر سین این مرال د	ارائه در سایت: 05 مهر 1393
جست بوایی ماو ۵۰۵۰ اصفینا عاص شداست. در مرحبه بعد او اعداد یی بعد عام بر مسلمه او جمعه عدد اوش، موری بر ریومد و ملک تهایی	<i>کلید واژگان:</i>
حباب برای یک حباب بررسی شدهاست. الگوهای جریانی متفاوتی در اعداد بی بعد متفاوت به دست آمده و با تغییر اعداد بی بعد تغییر شکل نهایی	جریان دو فاز
حباب مشاهده گردید. در مرحله آخر حرکت دو حباب و شکل نهایی حاصل از ادغام دو حباب در اعداد بی بعد متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است	روش شبکه بولتزمن
که شکل حباب اول تقریباً همان شکل تک حباب به دست می آید اما حباب دوم به دلیل قرار گرفتن در دنبالهی حباب اول و اختلاف فشار کمتر	مدل اینامارو
در دو طرف آن تغییر شکل متفاوتی را از خود نشان می دهد.	عدد اتوس

# Investigation of two bubble coalescence with large density differences with Lattice Boltzmann Method

## Elham Sattari, Mojtaba Aghajani Delavar\*, Ehsan fattahi, Korosh Sedighi

Department of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran \* P.O.B. 484 Babol, Iran, m.a.delavar@nit.ac.ir

ARTICLE INFORMATION	Abstract
Original Research Paper Received 27 November 2013 Accepted 28 January 2014 Available Online 27 September 2014	In present paper the Inamuro Model based on free energy approach of the Lattice Boltzmann Method was used to simulate the motion of bubble and coalescence of two bubbles under buoyancy force. By combining the Tanaka and Inamuro models, three-dimensional model of Inamuro was used in two-dimension for decreasing the computational cost. Firstly it was ensured
Keywords: Two Phase Flow Lattice Boltzmann Method Inamuro Model Etvos Number Morton Number	that the surface tension effect and Laplace low for two density ratio 50 and 1000 were properly implemented. Secondly in next step, effect of governing dimensionless numbers problem such as Etvos number and Morton number on Reynolds number and terminal shape of bubble were investigated. Different flow patterns in various dimensionless numbers were obtained and by changing the dimensionless number, terminal change of bubble's shape was seen. Finally, motion of two bubbles and terminal shape of coalescence of two bubbles were studied in different dimensionless number which shape of first bubble was same to single bubble but second bubble experienced various shapes due to its location in wake of first bubble and less difference pressure on two sides of this bubble.

#### 1- مقدمه

طراحی بویلرها دارد. همچنین سیالات دو فازی دارای کاربرد عمدهای در زمینهی طراحی راکتورهای هستهای میباشند. همچنین طراحی انواع مختلفی از وسایل پیشرفته مانند موتورهای موشک، دستگاههای تصفیه آب و ماشینهای پمپاژ خون نیاز به دانش دقیقی از دینامیک جریان چندفازی دارد. بررسی حرکت حباب درسیالات کاربردهای فراوانی در صنایع نفتی و شیمیایی دارد و علت آن مخلوط شدن گاز و مایع به طور وسیع در این صنايع است.

در نتیجه مطالعات عددی و آزمایشگاهی بسیاری در این زمینه انجام

بسیاری از پدیدههای روزمره در زندگی، به نوعی از دیدگاه عملی، مسائل دو فازی یا چندفازی محسوب می شوند. به عنوان مثال حرکت قطرات باران، حرکت ذرات گرد و غبار در هوا یا نحوهی حرکت موج بر روی سطح دریا و نحوهی شکست آن نمونه هایی از مسائل دوفازی میباشند که در طبیعت رخ میدهند. سیالات دو فازی دارای کاربردهای فراوانی در مسائل صنعتی نیز میباشند. از آن جمله میتوان به کاربرد در بویلرها اشاره کرد. در بویلرها مخلوطی از آب و بخار آب به عنوان سیال دو فاز نقش بسیار مهمی در

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using: E. Sattari, M. Aghajani Delavar, E. Fattahi, K. Sedighi, Investigation of two bubble coalescence with large density differences with Lattice Boltzmann Method, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 10, pp. 93-100, 2014 (In Persian)

شدهاست. مطالعات عددی در این باب به علت توانایی دسترسی به شرایط و فیزیک داخل قطره و حباب از جایگاه ویژهای برخوردار است. در طول سالهای گذشته مدلهای مختلفی برای شبیه سازی جریان های دوفازی با استفاده از روش شبکه بولتزمن<sup>1</sup> ارائه شدهاست. گنستن و همکاران [1] یک روش چند جزئی بر پایه روش شبکه گاز دو بعدی ارائه نمودهاند. در این مدل توابع توزیع ذرات آبی و قرمز برای شبیه سازی دو سیال مختلف ارائه شدند. برای حفظ سطح تماس و جداسازی فازهای مختلف، مرحله تخصیص رنگ برای مجبور کردن سیالات رنگ شده به حرکت به سمت سیالات همرنگ تعریف شدهاست. این مرحله توسط محاسبات گرادیان جزئی محلی رنگها انجام می شود و مکانیزم جدایی بین دوجزئی که با رنگ های مختلف مشخص شدهاند را شبیهسازی می کند. دو اشکال عمده در این روش وجود دارد، یکی اینکه مرحلهی ضروری تخصیص رنگ، یک روند مصنوعی اغتشاشی ایجاد می کند که ممکن است منجر به ایجاد جریان پارازیتی بزرگی در نزدیکی سطح مشترک دو فاز شود. دومین مشکل این روش، زمانبر بودن مرحلهی تخصيص رنگ است؛ زيرا اين مرحله براساس ماكزيمم پارامتري كار ميكند كه خود اين پارامتر شامل گراديان محلى تابع توزيع است [2،1].

شان و چن [2] یک مدل با در نظر گرفتن واکنشهای میکروسکوپیک برای جریانهای چندفازی و چندجزئی گزارش نمودند. در این مدل برهم کنش غیر محلی بین ذرات در نقاط همسایه معرفی شده که در هر نقطه یک نیروی اضافی برای تخمین این برهم کنش اعمال می گردد. از مهمترین عیبهای آن ضعیف بودن در تحلیل ترمودینامیکی نسبت به مدل سوییفت است و مزیت اصلی آن سادگی و تطبیق پذیری در حل جریان دو فاز است [3،2]. سوییفت و همکاران [3] با استفاده از دیدگاه انرژی آزاد برای جریانهای چند جزئی و چند فازی روشی را پیشنهاد کردند مزیت اصلی این روش این است که می تواند ترمودینامیک سیالات غیر ایدهال و چند جزئی را در دمای ثابت در نظر بگیرد. روشهای اشاره شده از روشهای اولیه دو فاز شبکه بولتزمن بوده و در آنها نسبت چگالی حداکثر 10 بوده است [1-3]. لذا همهٔ آنها در شبیهسازی جریان دوفاز با اختلاف چگالی بالا ناتوان بودند؛ در صورتی که در اکثر فرآیندهای بین گاز و مایع مثل آب و هوا نسبت چگالی در حدود 1000 است. مشكل اصلى در حل عددى جريان دوفاز با اختلاف چگالی بالا وجود ناپایداری در ناحیه فصل مشترک به دلیل پرش ناگهانی در چگالی است.

اینامارو و همکاران [5،4] یک روش جدید بر پایهٔ روش انرژی آزاد برای جریان با اختلاف چگالی بالا ارائه نمودند. هدف اصلی کار آنها ارائه یک روش برای جریان سیال دو فاز با اختلاف چگالی بالا بوده است و حرکت یک حباب را تحت تأثیر نیروی شناوری در سه بعد بررسی کردند. اینامارو و همکاران [7،6] از این روش برای شبیهسازی برخورد دو قطره با قطر یکسان با سرعت اولیه نسبی در سه بعد استفاده کردند. اینامارو و همکاران [8] از این روش برای شبیه سازی برخورد دو قطره با قطرهای نابرابر در سه بعد استفاده کردند. بعد از اینامارو، یان و همکاران [19-11] با ادغام روش بریانت و اینامارو محاسبات زاویه تماس را در روش اینامارو اعمال نموده و زاویه تماس در حالت دینامیکی و استاتیکی را در شرایط متفاوت خیس شدگی سطح در سه بعد بدست آوردند. بعد از آن تاناکا با مقداری تغییر در اصل روش اینامارو از این روش برای جریان های دو بعدی و واکنشی استفاده نمود. تاناکا و همکاران در [12] زاویه تماسهای متفاوت و شکل نهایی حباب را در جریانهای مانع دار مورد بررسی قرار داده و تاناکا از این روش برای شبیهسازی فرآیند

جوشش استفاده کرد [13].

علاوه بر اینامارو لی و سایرین هم روش پیشنهادی خود برای جریان دو فاز با اختلاف چگالی بالا را پیشنهاد نمودهاند [14-17].

مدل اینامارو [8-4] یک مدل 3 بعدی بوده در نتیجه حجم محاسباتی بالایی داشت. مدل تاناکا [13،12] برای تبدیل مدل اینامارو در دوبعد برای شبیهسازی جوشش ترمهای مشتق تانسور فشار را به مدل اینامارو اضافه کرده و موجب افزایش حجم محاسباتی در دو بعد شده بود. در این مقاله با اصلاح روش اینامارو به وسیلهی معادلات تاناکا [13،12]، ابتدا به معرفی مدل تلفيقي اينامارو [8-4] و تاناكا [13،12]پرداخته شده، بعد از آن با اعمال اين مدل از درستی عملکرد اثرات کشش سطحی در آن اطمینان حاصل می گردد. به همین منظور دو تست انجام شدهاست. تست اول مربوط به یک حباب مربعی دو بعدی است که در داخل مایع قرار گرفتهاست. در تست دوم دو حباب دایرهای در کنار هم قرار داده می شوند و برخورد آنها مدل می گردد. بعد از آن درستی قانون لاپلاس چک شده و تأثیر اعداد بیبعد برای یک حباب که تحت نیروی شناوری در حال بالا رفتن است، بر روی عدد رینولدز و شکل نهایی حباب بررسی شده است و در آخر هم بالا رفتن دو حباب تحت نیروی شناوری در اعداد بی بعد متفاوت چک شده است.

# 2- روش حل

(1)

در روش شبکه بولتزمن، محیط پیوسته سیال به صورت مجموعهای از ذرات مجازی مدل شده که حرکت و برخورد آنها بر روی مسیرهای مشخصی (شبکه بولتزمن) بیان میشود و تغییرات تابع توزیع با استفاده از معادلهٔ گسسته بولتزمن تعیین می گردد. با توجه به کاربرد گسترده روش بولتزمن محققان زیادی از این روش در شبیهسازی عددی پدیدههای فیزیکی مختلف استفاده نمودهاند [22-18]. مدل 9 سرعته (۸=۹) در کار حاضر استفاده شدهاست [13]. بردارهای سرعت این مدل در رابطه (1) داده شدهاست:

[ <i>c</i> <sub>0</sub> , <i>c</i>	1, <i>C</i>	2 <sup>, C</sup>	3 <sup>, C</sup> 4 <sup>,</sup>	°5 <sup>, c</sup> 6	, <sup>C</sup> 7	, <b>c<sub>8</sub></b> ]:	=		
Ó	1	0	- 1	0	1	- 1	- 1	1ù	
Õ	0	1	0	- 1	1	1	- 1	<b>1</b> นี้	

فضای فیزیکی به شکل مربعی شبکه بندی شده و تغییر در احتمال حضور ذرات با سرعت مشخص در هر مکان شبکه محاسبه می شود. در شبیه سازی از دو تابع توزیع سرعت ذره , **ا** و , **g** استفاده گردید. تابع , **ا** برای محاسبهی ضریب ترکیب که جداکننده دو فاز است و تابع , g برای محاسبهٔ پیشبینی سرعت سیال دوفاز بدون گرادیان فشار است. تغییر توابع توزیع ذرات ر (x,t) و (x,t) و (x,t) و در نقطه X و زمان t با معادلات (x,t) (2) و (3) محاسبه می شود:

(2)  $f_i(\mathbf{X} + \mathbf{C}_i \Delta \mathbf{X}_i \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) = f_i^c(\mathbf{X}_i \mathbf{t})$ (3)  $\boldsymbol{g}_{i}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_{i}\Delta\boldsymbol{x}_{i}\boldsymbol{t}+\Delta\boldsymbol{t})=\boldsymbol{g}_{i}^{c}(\boldsymbol{x}_{i}\boldsymbol{t})$ 

که "**f** و **g** توابع توزیع تعادلی، **X** فضای مربع شبکه و **۱** طول گام **f** زمانی در مقیاس شبکه بولتزمن که ذرات در فضای شبکه حرکت می کنند است.  $\phi$  ضريب تركيب  $\phi$  كه محل فازها را تعيين مىكند و سرعت پیشبینی شدهی \* از سیال چندجزئی به وسیله توابع توزیع سرعت دو ذره

$$\boldsymbol{u}^{*} = \sum_{i=0}^{8} \boldsymbol{g}_{i} \boldsymbol{c}_{i} \quad , \quad \phi = \sum_{i=0}^{8} \boldsymbol{f}_{i}$$
(4)

به شکل معادله (4) تعریف می شود [4-8]:

توابع توزيع موجود در معادلات (2) و (3) بصورت معادلات (5) و (6) تعريف مىشوند [8-8]:

<sup>1-</sup> Lattice Boltzmann Method(LBM)

$$\mu = \frac{\rho - \rho_{\mathbf{G}}}{\rho_{\mathbf{L}} - \rho_{\mathbf{G}}} (\mu_{\mathbf{L}} - \mu_{\mathbf{G}}) + \mu_{\mathbf{G}}$$
(13)  
Description 20 (13)  
Descriptio

سطحی ح بصورت معادله (14) داده میشود [8-4]:

$$\sigma = \mathbf{k}_{g} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^{2} d\xi$$
(14)

که <sup>‡</sup> عمود بر سطح مشترک است. از آنجایی که **ن** در معادلهٔ پیوستگی صدق نمی کند (0 ≠ **u** · ∇)، اصلاح **u** مورد نیاز است. سرعت جریان **u** که باید معادله پیوستگی (0=**u** · ∇) را ارضا کند، با استفاده از معادله (15) بدست میآید [8-4]:

$$\operatorname{Sh}\frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}}{\Delta \boldsymbol{t}} = -\frac{\nabla \boldsymbol{p}}{\rho}, \qquad \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \boldsymbol{p}}{\rho}\right) = \operatorname{Sh}\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{u}}{\Delta \boldsymbol{t}}$$
(15)

که  $\mathbf{Sh} = U/c$  عدد استرودهال و p فشار شبکه بولتزمن است که با توجه به [8-4] بی بعد شده است. معادله پواسون (15) به روش های مختلفی قابل حل است. در کار حاضر معادله (15) در غالب روش شبکه بولتزمن حل شده است؛ یعنی تابع توزیع  $h_i$  برای فشار p استفاده می شود. طبق رابطه (16) داریم:

$$h_{i}^{p+1}(x+c_{i}\Delta x) = h_{i}^{p}(x) - \frac{1}{\tau_{h}} \Big[ h_{i}^{p}(x) - E_{i}P^{p}(x) \Big] - \frac{1}{3} E_{i} \frac{\partial u_{a}}{\partial x_{a}} \Delta x$$
(16)

که 🗖 شماره تکرار است و 
$$\tau_{h}$$
 زمان آرامش بصورت رابطه (17) است:

$$\tau_{\rm h} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \tag{17}$$

برای محاسبه فشار از معادله (18) داریم:

$$p = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \tag{18}$$

تکرار معادله (16) تا زمانی ادامه مییابد که  $\rho < \varepsilon = |\rho|^n - |\rho^n|$  در کل دامنه برقرار باشد. معادلات ذکر شده در این بخش بیشتر بر اساس مدل اینامارو [7-4] بیان شده اما معادلات (2، 3، 6، 7، 8، 10 و11) بر اساس مدل تاناکا [13،12] اصلاح شدهاست.

# 3- اعتبار حل دوفازي

از آنجایی که مهمترین و پیچیدهترین بخش تحلیل جریانهای دوفازی مربوط به دینامیک سطح مشترک بین دو سیال است، اولین گام برای نشان دادن صحت شبیهسازی جریان، بررسی این موضوع است. برای این موضوع از دو آزمون استفاده میشود. در آزمون اول تغییر شکل یک قطره مربعی و دوبعدی که در یک صفحه افقی رها میشود، نشان داده شدهاست. با توجه به اثرات کشش سطحی بین دو سیال، قطره تمایل دارد که به پایدارترین شکل، با کمترین سطح مشترک تبدیل گردد.

با توجه به نتایج شبیه سازی که در شکل 1 نشان داده شده است، این قطره مربعی با گذشت زمان تغییر شکل داده و در نهایت به شکل یک دایره در میآید. این موضوع نشان می دهد اثرات کشش سطحی که مهم ترین بخش از تحلیل جریان دوفازی است، به درستی اعمال شده است. این آزمون توسط موسوی و همکاران در [23] به عنوان اعتبار حل دو فازی استفاده شده است.

این آزمون برای اختلاف چگالی 1000 هم انجام شدهاست. همانطور که اینامارو در [5.4] ذکر کرده، افزایش نسبت چگالی منجر به افزایش تکرار برای رسیدن به نتایج مطلوب میشود، همانطور که در شکل 2 نمایان است، تغییر شکلهای مورد نظر در تکرارهای بالاتری اتفاق افتادهاند.

95

$$f_{i}^{eq} = H_{i}\phi + F_{i}\left[p_{0} - k_{i}\phi\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x_{\alpha}}\right] + 3E_{i}\phi C_{i\alpha}U_{\alpha}$$

$$+ E_{i}k_{f}G_{\alpha\beta}(\phi)C_{i\alpha}C_{i\beta}$$

$$(5)$$

$$g_{i}^{eq} = E_{i}\left[1 + 3c_{u}u_{\alpha} - \frac{3}{2}u_{u}u_{\alpha} + \frac{9}{2}c_{u}c_{i\mu}u_{u}u_{\mu}\right]$$

$$+ E_{i} + \frac{3}{4}\Delta x \left(\frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial u_{\mu}}\right)c_{u}c_{i\mu}$$

$$+ E_{i}\left[3c_{u}\frac{\Delta x}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left\{\frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_{\mu}}\right\}\right]$$

$$+ E_{i}\frac{k_{\mu}}{\rho}G_{\alpha\beta}(\rho)C_{i\alpha}C_{i\beta} - \frac{1}{2}F_{i}\frac{k_{\mu}}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_{\alpha}}\right)^{2}$$

$$(6)$$

g شتاب گرانشی است و دیگرمتغیرهای  $\rho$ ،  $\rho_{\iota}$ ،  $\mu$  با توجه به نسبت چگالی همانطور که در بخش نتایج توضیح داده شده، تعیین میشوند. ضریب وزنی، C سرعت شبکه، H و F اعداد ثابتی هستند که بصورت معادله (7) تعریف میشوند [13.12]:

$$E_{0} = \frac{4}{9}, \qquad E_{1} = ... = E_{4} = \frac{1}{9}, \qquad E_{5} = ... = E_{8} = \frac{1}{36}$$

$$H_{0} = 1, \qquad H_{1} = ... = H_{8} = 0, \qquad F_{0} = -\frac{5}{3}$$

$$F_{i} = 3E_{i} \qquad (i = 1, 2, 3, ..., 8) \qquad (7)$$

و طبق معادله (8) داريم:

$$G_{\alpha\beta}(\phi) = \frac{9}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\beta}} - \frac{9}{4} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\gamma}} \delta_{\alpha\beta}$$
(8)

با  $\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{x}, \mathbf{y}$  (زیرنویس  $\alpha$  و  $\beta$  نشاندهنده مختصات کارتزین می، اشند و  $\gamma$  جمع این زیرنویس است) [12، 13]. در معادلات (5)، (6) و (8)،  $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونیکر است،  $k_f$  پارامتر ثابتی است که پهنای فصل مشترک را محاسبه میکند و  $k_g$  پارامتر ثابتی است که مقاومت کشش سطحی را محاسبه میکند که با توجه به نسبت چگالی مد نظر مقدار می گیرند.  $\mathbf{p}$  که همان فشار ترمودینامیکی است، بوسیلهی معادله (9) که معادله حالت این روش است. بصورت زیر تعریف می شود [13،12]:

$$p_0 = \phi T \frac{1}{1 - b\phi} - a\phi^2 \tag{9}$$

که b, a و T پارامترهای آزاد برای محاسبه مقادیر بیشینه و کمینه پارامتر ¢ میباشند. تقریب های زیر طبق روابط (10) و(11) برای محاسبات مشتقات معادلات (5)، (6) و (8) بکار میرود [13،12].

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} \approx \frac{1}{6\Delta x} \sum_{i=1}^{8} C_{i\alpha} \psi \left( x + C_{i} \Delta x \right)$$
(10)

$$\nabla^2 \phi \approx \frac{1}{3\Delta x^2} \left[ \sum_{i=1}^{8} \phi(x + c_i \Delta x) - 8\phi(x) \right]$$
(11)

چگالی در مرز مشترک بوسیله مقادیر حداقل و حداکثر ضریب ترکیب برای فازهای گاز و جامد  $\phi_{\mathbf{0}}^{*}$  و  $\phi_{\mathbf{0}}^{*}$  با استفاده از رابطه (12) محاسبه می شود [8-4]،

$$\rho = \begin{cases} \frac{\rho_{g}}{2} & \phi < \phi_{G} \\ \frac{\Delta \rho}{2} \left[ \sin\left(\frac{\phi - \overline{\phi}^{*}}{\Delta \phi^{*}} \pi\right) + 1 \right] + \rho_{g} & \phi_{G}^{*} \le \phi \le \phi_{L}^{*} \\ \rho_{I} & \phi > \phi_{L}^{*} \end{cases}$$
(12)

 $\Delta \rho = \rho_{\rm L} - \rho_{\rm G}$  و میاشند،  $\rho_{\rm L}$  به ترتیب چگالی فاز گاز و فاز مایع می باشند،  $\rho_{\rm L}$  و  $\rho_{\rm G}$  و  $\phi_{\rm G}^* = \phi_{\rm L}^* - \phi_{\rm G}^* = \phi_{\rm L}^* - \phi_{\rm G}^* = \phi_{\rm L}^* - \phi_{\rm G}^*$  ویسکوزیته  $\mu$  در سطح مشترک بصورت رابطه (13) تعریف می شود [8-4]:





**شکل ۵** نمایش برخورد و انعقاد دو قطره با یکدیگر و تشکیل قطره بزرگتر نسبت به گامهای زمانی شبکه، برای نسبت چگالی 1000

اگر یک قطره ساکن در فضا قرار داشته باشد، در حالت تعادلی سرعت در تمام نقاط باید صفر باشد؛ اما در روشهای عددی دوفازی یک سرعت مجازی غیرفیزیکی در اطراف سطح مشترک قطره ایجاد میشود. البته امروزه در راستای کاهش این سرعتهای مجازی روشهای عددی در حال بهبود هستند [۲۴]. به دلیل وجود این سرعتهای مجازی و غیر فیزیکی در روشهای عددی، برای یک قطره ساکن و تعادلی گردابههای ضعیفی در اطراف سطح مشترک قطره ایجاد میشود که به آن جریان پارازیتی اطراف سطح مشترک می گویند. شکل 3 جریان پارازیتی اطراف قطره ساکن در حال تعادل را برای شبیهسازی انجام گرفته نشان میدهد.

در آزمون دوم دو قطره دایرهای دوبعدی و یکسان با قطری برابر با 0/3 ضلع دامنه و فاصلهی 20/0 قطر با چگالی 1 و ویسکوزیته 0/01 و در مجاورت یکدیگر قرار دارند. با توجه به اثرات نیروهای کشش سطحی و واندروالسی، این دو قطره با یکدیگر برخورد کرده و در نهایت تشکیل یک قطره پایداردایرهای و بزرگتر میدهند. نتایج شبیهسازی برای این پدیده در شکلهای ۴ و ۵ نشان داده شدهاند. این آزمون در [23.17] به عنوان اعتبار حل دو فازی استفاده شدهاست.

### ٣-١- قانون لاپلاس

قانون لاپلاس بیان کننده ارتباط بین فشار درون (**P**<sub>in</sub>) و بیرون (**P**<sub>out</sub>) قانون لاپلاس برای قطره با کشش سطحی بین دو سیال *σ* است. بر اساس قانون لاپلاس برای قطره دو بعدی رابطه (19) برقرار است:

#### (19)

$$P_{\rm in} - P_{\rm out} = \frac{\sigma}{R}$$

از آنجایی که در جریانهای تراکم پذیر و هم دما کشش سطحی یکی از خواص ثابت بین دو سیال است، لذا می توان نتیجه گرفت که بین اختلاف فشار درون و بیرون قطره با معکوس شعاع در شرایط یکسان بدون تغییر خواص آن یک رابطهٔ خطی برقرار است؛ اما با تغییر خواص سیال مثل نسبت چگالی آنگاه نیروی کشش سطحی با تعویض نسبت چگالی که منجر به تغییر ثوابت ۲٫۸ و **K** و را می می و می ندد. نتایج نشان داده شده در شکل 6 نشان می دهد که شیه سازی انجام گرفته و فشار بدست آمده در شبکه بولتزمن با شعاع قطره که بر حسب مقیاس شبکه است به خوبی قانون لاپلاس را ارضا می کند. این تست در [23.17.31] به عنوان اعتبار حل دو فازی انجام شده است.

#### 3-2- استقلال از شبکه

برای این کار دو تست مختلف انجام شدهاست. در تست اول قانون لاپلاس برای شبکههای مختلف انجام شده و با توجه به اینکه شیب نمودار مربوطه



**شکل ا** نمایش تغییر شکل یک قطره مربعی رها شده در یک صفحه افقی نسبت به گامهای زمانی شبکه، برای اختلاف چگالی۵۰



**شکل 2** نمایش تغییر شکل یک قطره مربعی رها شده در یک صفحه افقی نسبت به گامهای زمانی شبکه، برای اختلاف چگالی ۱۰۰۰





**شکل** 4 نمایش برخورد و انعقاد دو قطره با یکدیگر و تشکیل قطره بزرگتر نسبت به گامهای زمانی شبکه، برای نسبت چگالی 50

برابر با نیروی کشش سطحی است، مقدار آن در شبکههای مختلف بدست آمده و باهم مقایسه شدهاست.

در تست دوم سه شبکه مختلف 50×100.100 و 150 و 105×300 و 100 استفاده شده اند و شکل نهایی حباب (رژیم نهایی جریان) باهم مقایسه شدهاست. نتیجه تست اول که در جدول 1 و شکل 7 نشان داده شدهاست، بیانگر این موضوع است که عدد 100 برای ضلع محیط حل مناسب است زیرا مقدار نیروی کشش سطحی در شبکه 100×100 و 120×120 تقریباً باهم برابر است.

در تست دوم که نتایج آن در جدول 2 نشان داده شدهاست، شکل نهایی حباب در شبکه 100×50 با تغییر اعداد بی بعد با توجه به کارهای قبلی درست نیست؛ اما شکل نهایی حباب و رژیم جریان متناسب در شبکههای 200×100 و 200×300 کاملاً یکسان است به منظور جلوگیری از افزایش هزینه محاسباتی از شبکه 100×200 در این مقاله استفاده شدهاست.



0.0016 0.0014 0.0012 0.001 P(LBM) 0.0008 0.0006 0.0004 60X60 80X80 0.0002 ---- 100X100 120X120 0 0.1 0.15 0 0.05 0.2 1/R(LBM) **شکل 7** قانون لاپلاس در شبکههای مختلف

**جدول 2** شکل نهایی حباب در شبکههای مختلف با اعداد بی بعد متفاوت

اعداد بیبعد	50×100	1000×200	150×300
Eo=1,M=0.001	دايرەاي	دايرەاي	دايرەاي
Eo=5,M=0.001	دايرەاي	بيضى	بيضى
Eo=116,M=266	دايرەاي	کلاہ بیضی	کلاہ بیضی
Eo=20,M=0.0001	بيضى	دیسک	دیسک
Eo=42,M=0.001	کلاہ بیضی	کلاہ دایرہای	کلاه دایرهای
Eo = 339,M = 43	دامنی شکل	دامنی شکل	دامنی شکل

#### 4- نتايج

در این قسمت حرکت یک حباب در یک محیط که از مایع پر شدهاست، بررسی شدهاست. برای در نظر گرفتن تأثیر نیروی گرانش که تنها نیروی حجمی وارد بر حباب است، ترم  $\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{F}_{c_{\mu}} (\mathbf{1} - \rho_{0}/\rho) \mathbf{g} \Delta \mathbf{x}$  به تابع توزیع سرعت معادله (6) اضافه میشود. پارامترهای بی بعد این پدیده عدد مورتن، اتوس و رینولدز می باشند که در آن / سرعت نهایی حباب و D قطر اولیه حباب می باشند. طبق روابط (20) داریم:

$$M = \frac{g\mu_{L}(\rho_{L} - \rho_{G})}{\rho_{L}^{2}\sigma^{3}}$$

$$Eo = \frac{g(\rho_{L} - \rho_{G})D^{2}}{\sigma}$$

$$Re = \frac{\rho_{L}DV}{\mu_{L}}$$
(20)

مرزهای روبروی هم دارای شرایط مرزی پریودیک هستند. شبکه مورد استفاده 100×200 است. قطر اولیه حباب برابر با 30 واحد شبکه است. در معادلات (6) و (7) مقادیر **50.6** و  $k_r = 0.1 = k_r$  برای نسبت چگالی 50 و مقادیر (7) مقادیر **50.6** =  $k_r$  و <sup>5</sup>-10 =  $k_r$  برای نسبت چگالی 50 و مقادیته مایع با استفاده از شتاب گرانش و اعداد بیبعد به دست میآید و ویسکوزیته گاز برابر با 100 و  $\mu_g = \mu$  است [4-8]. در نسبت چگالی 50، چگالی مایع برابر با 50 و چگالی گاز برابر با 1 در نظر گرفته شده، در نسبت چگالی 1000، چگالی مایع برابر با 1000 و چگالی گاز برابر با 1 در نظر گرفته شده، شده است.

نتایج در زمان بی بعد  $T = t/t_n = \sqrt{d/g}$  که  $T = t/t_n = \sqrt{d/g}$  و t تعداد تکرار می باشند، نشان داده شده است. مقایسه رفتار حباب در دو بعد نشان می دهد که تغییر شکل حباب تابعی از اعداد بدون بعد اتوس و مورتن است. با توجه به شکل نهایی حباب که در اعداد بی بعد مختلف کاملاً متفاوت می باشند،

97

الگوهای جریان بسیار متفاوتی در جریان دو فاز خواهیم داشت که بر اساس شکل نهایی حباب همانطور که در شکل 10 نشان داده شدهاست به 6 دسته اصلی تقسیم میشود: 1) دایرهای 2) بیضی 3) کلاه بیضوی 4) دیسک 5) کلاه دایرهای 6) دامنی شکل.

در حرکت حباب به سمت بالا، ابتدا حرکت حباب به علت اختلاف چگالی با سیال اطراف در اثر نیروی شناوری آغاز می گردد. به علت حرکت حباب در داخل سیال، به حباب نیروی درگ وارد میشود و در صورتیکه حباب پاره نشود به یک سرعت و شکل ثابت خواهد رسید. در این صورت نیروی شناوری با نیروی درگ سیال برابر میشود و حباب با همین سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد. در شکل 8 در ستون سمت راست کانتور خطی چگالی به همراه بردار سرعت برای عدد بی بعد مربوطه در زمانی که شکل حباب پایدار شده رسم شدهاست و در ستون سمت چپ حرکت و تغییر شکل حباب در زمانهای بی بعد متفاوت رسم شدهاست. همانطور که در شکل 8 دیده می شود، شکل حباب برای هر کدام از جریانها در دو زمان بی بعد آخر به دلیل برابر شدن نیروی شناوری و درگ و پایدار شدن حباب یکسان است. 8-و نشان داده شدهاست، حباب پاره شده و قسمتهایی از آن جدا می شود.

همانطور که در شکل 8 مشاهده میشود، تغییر شکل حباب به صورت فرورفتگی از ناحیه پایین سطح حباب است در قسمت پایین حباب به علت اینکه فشار هیدرولیکی بیشتری دارد باید خودش را با فشار داخل حباب بالانس کند بنابراین تحدب در مایع و تقعر در داخل حباب شکل می گیرد. هرچه میزان این اختلاف فشار بیشتر باشد ناحیه گردابهای اطراف حباب بزرگتر و تغییر شکل حباب بیشتر است. در شکل 8-الف تقریباً ناحیهٔ مذکور ایجاد نشده در نتيجه شكل حباب ثابت مانده از شكل 8-ب به بعد اندازه اين ناحيه افزايش یافته در نتیجه تغییر شکل حباب نیز بیشتر می شود. در شکل 8-الف حباب دارای تغییر شکل زیادی نشده اما همانطور که از تعریف اعداد بی بعد نمایان است، با افزایش عدد اتوس همانطور که در شکل 8-الف و 8-ب پیداست نیروی شناوری افزایش یافته و در نتیجه حباب دچار تغییر شکل بیشتری می شود. همچنین با افزایش عدد اتوس کاهش نیروی کشش سطحی را خواهیم داشت و چون نیروی کشش سطحی مقاوم در برابر تغییر شکل است، به عبارت دیگر افزایش عدد اتوس موجب افزایش تغییر شکل خواهد شد. افزایش عدد مورتن نیز موجب افزایش تغییر شکل حباب می شود اما تأثیر کمتری بر تغییر شکل حباب دارد زیرا عدد مورتن با کشش سطحی به توان 1/3 ارتباط دارد همانطور که از شکل 8-ه و 8-د پیداست. با توجه به زمان بیبعد متفاوت در شکلها نشان میدهد که با تغییر اعداد بیبعد، زمان لازم برای طی کردن طول کانال توسط حباب تغییر کرده که نشان دهنده تغییر در سرعت و رینولدز نهایی است. در جدول 3 مقادیر رینولدز نهایی برای اعداد بی بعد مختلف محاسبه شدهاست.

در شکل 9 خطوط جریان نیز برای این حبابها رسم شدهاست. در سه حالت اول گردابهها فقط در داخل حباب تشکیل شدهاند اما از شکل 9-د به بعد گردابههای در زیر حباب نیز تشکیل شده که به آن دنباله حباب گویند که منجر به آشفتگی جریان اطراف حباب می شود.

و در شکل 10 اعتبار سنجی نتایج شکل 8 و اعداد رینولدز بدست آمده با کار ایناماروی سه بعدی [4] مقایسه شده که هم از لحاظ رژیم جریان هم عدد رینولدز بدست آمده که در جدول 3 گزارش شده، تطابق خوبی دارد.

8	، شکل	مختلف	حالتهای	د,	شدہ	محاسبه	;-	, ينولد	عدد	3	جدول
	0		0			•					<u> </u>

( <u></u>						
8-و	8-ه	8-د	8-ج	8-ب	8-الف	
34/84	93/47	105/08	7/63	21/95	4/62	Re







شکل ۱۰ مقایسه نتایج کار حاضر ■ با نتایج اینامارو در حل سه بعدی[۴]

نفاوت	بىبعد من	، در اعداد	م دو حباب	بىبعد ادغا	ل ۴ ارتفاع	جدو
11-و	-11	5-11	11-ج	١١-ب	١١ - الف	
•/79	۳۳/	٠/٣٢	• /۳۱	۰/۴	•/۵۵	x/H

### 4-1- بررسی برخورد دو حباب

در این قسمت بالا رفتن دو حباب که به صورت سری پشت سرهم قرار گرفتهاند، در اعداد بیبعد قسمت قبل بررسی شدهاست. دو حباب به فاصلهی D/3 از هم قرار دارند و ارتفاع کانال به اندازهای است که در همهی اعداد بیبعد مد نظر دوحباب به هم رسیده و به شکل پایدار برسند (400). همانطور که در قسمت قبل گفته شده شکل حباب به دلیل اختلاف فشار دو طرف حباب تغییر کرده که شکل و سرعت نهایی بسته به اعداد مورتن و اتوس متفاوت است. شکل 11 دوحباب را در اعداد بیبعد متفاوت از زمان برخورد و نحوهی ادغام دو حباب تا پایداری حباب نهایی نشان میدهد. حباب بالایی مشابه با حالت قبل تغییر شکل میدهد، اما حباب دوم به دلیل قرار گرفتن در دنباله حباب اول و در نتیجه ایجاد اختلاف فشار کمتر در دوطرف آن دچار تغییر شکل کمتری میشود. همانطور که گفته شده عامل حرکت در این پدیده نیروی شناوری بوده و نیروی درگ ناشی از اختلاف فشار دو طرف حباب از سرعت آن می کاهد و چون در حباب دوم اختلاف فشار کمتری در دو طرف حباب حاکم است موجب می شود که حباب پایینی با سرعت بیشتری نسبت به حباب بالایی حرکت کرده و در نتیجه بعد از مدت زمانی به هم میرسند. برای نمونه درشکل 12 مقدار سرعت حباب بالایی و پایینی در زمانهای بیبعد متفاوت برای حالت 11-الف تا قبل از رسیدن دو حباب به هم رسم شدهاست. همانطور که از نمودار پیداست سرعت حباب پایینی همواره از حباب بالایی بیشتر است.

در زمان ادغام دو حباب فیلم مایع بین دو حباب نازک شده تا زمانی که بالای حباب پایینی به پایین حباب بالایی برخورد کند. در شکل 11 فقط قسمت مربوط به دو حباب از ناحیه حل جدا شده اما در اعداد بی بعد متفاوت با توجه به متفاوت بودن رژیم جریان، نیروی گرانش و عدد رینولدز بدست آمده در هر حالت، در ارتفاع متفاوتی دو حباب به هم می رسند که در جدول

۴ آورده شدهاست.

در حالت ۱۱-و در هنگام ادغام دو حباب مقداری مایع در بین دو حباب گیر افتاده که بعد از مدتی از ناحیه پایینی حباب خارج می شود و همانطور که برای تک حباب ذکر شده بر خلاف حالتهای دیگر حباب نهایی ناپایدار است قسمتهایی از آن جدا می شود و حباب دو یا سه تکه می شود. با توجه به این موضوع که در روش استفاده شده برای فصل مشترک گرادیان چگالی خواهیم داشت، در حالت ۱۱-ه نواحی از حل که دارای چگالی بین ۱ و ۵۰ هستند باهم ادغام می شود که در حقیقت نشان دهنده ی مرز ادغام دو حباب است که با گذشت زمان از بین می رود و نباید تصور شود که مقداری مایع در حباب گیر افتاده و خودبخود از بین رفته است.



- [4] T. Inamuro, T. Ogata, F. Ogino, Numerical simulation of bubble flows by the lattice Boltzmann method, *Future Generation Computer Systems*, Vol. 20, No. 6, pp. 959-964, 2004.
- [5] T. Inamuro, T. Ogata, S. Tajima, N. Konishi, A lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows with large density differences, *Journal of Computational Physics*, Vol. 198, No. 2, pp. 628-644, 2004.
- [6] T. Inamuro, Lattice boltzmann methods for viscouse fluid flows and twophase fluid flows, in *Computational Fluid Dynamics Conference*, India: Springer, pp. 3-16, 2008.
- [7] T. Inamuro, S. Tajima, F. Ogino, Lattice Boltzmann simulation of droplet collision dynamics, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 47, No. 21, pp. 4649-4657, 2004.
- [8] B. Sakakibara, T. Inamuro, Lattice Boltzmann simulation of collision dynamics of two unequal-size droplets, *International journal of heat and* mass transfer, Vol. 51, No. 11, pp. 3207-3216, 2008.
- [9] Y. Yan, Y. Zu, A lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows on partial wetting surface with large density ratio, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 1, pp. 763-775, 2007.
- [10] Y. Y. Yan, Y. Q. Zu, Numerical modelling of bubble coalescence and droplet separation, *Computational Methods in Multiphase Flow* Vol. 56, 2007.
- [11] Y. Y. Yan, Y. Q. Zu, LBM simulation of interfacial behaviour of bubbles flow at low reynolds number in a square microchannel, *Computational Methods in Multiphase Flow* Vol. 63, 2009.
- [12] Y. Tanaka, Y. Washio, M. Yoshino, T. Hirata, Numerical simulation of dynamic behavior of droplet on solid surface by the two-phase lattice Boltzmann method, *Computers & fluids*, Vol. 40, No. 1, pp. 68-78, 2011.
- [13] Y. Tanaka, M. Yoshino, T. Hirata, Lattice Boltzmann simulation of nucleate pool boiling in saturated liquid, *Communication in Computational Physics*, Vol. 75, No. 5, pp. 830, 2011.
- [14] T. Lee, Effects of incompressibility on the elimination of parasitic currents in the lattice Boltzmann equation method for binary fluids, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 5, pp. 987-994, 2009.
- [15] T. Lee, C.-L. Lin, A stable discretization of the lattice Boltzmann equation for simulation of incompressible two-phase flows at high density ratio, *Journal of Computational Physics*, Vol. 206, No. 1, pp. 16-47, 2005.
- [16] T. Lee, L. Liu, Lattice Boltzmann simulations of micron-scale drop impact on dry surfaces, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, No. 20, pp. 8045-8063, 2010.
- [17] H. Zheng, C. Shu, Y. Chew, A lattice Boltzmann model for multiphase flows with large density ratio, *Journal of Computational Physics*, Vol. 218, No. 1, pp. 353-371, 2006.
- [18] M. Seddiq, M. Maerefat, M. Mirzaei, Analysis of electrochemical characteristics of proton exchanger membrane fuel cell at the cathode catalyst by lattice-boltzmann method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 115-127, 2012.(In persian)
- [19] O. R. Mohammadipoor, H. Niazmand, S. A. Mirbozorgi, A new curved boundary treatment for the lattice Boltmann method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 28-41, 2013. (In persian)
- [20] M. Nazari, M. H. Kayhani, A. Anaraki Haji Bagheri, comparison of heat transfer in a cavity between vertical and horizontal porous layers using LBM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 93-107, 2013.(In persian)
- [21] A. Alizadeh, S. A. Mirbozorgi, The analysis of thermal effects on the electro-osmotic flow in a microchannel whit the lattice boltzmann methode, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 68-80, 2012.(In persian)
- [22] M. M. Shahmardan, M. Nazari, S. Mosayebidorcheh, Analytical solution of steady heat transfer in a multi-layer porous media under local thermal non-equilibrium condition, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 1-8, 2012.(In persian)
- [23] S. M. Tilehboni, K. Sedighi, M. Farhadi, E. Fattahi, Lattice Boltzmann Simulation of Deformation and Breakup of a Droplet under Gravity Force Using Interparticle Potential Model, *International Journal of Engineering-Transactions A: Basics*, Vol. 26, No. 7, pp. 781, 2013.
- [24] T. Seta, K. Okui, Effects of truncation error of derivative approximation for two-phase lattice Boltzmann method, *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol. 2, No. 1, pp. 139-151, 2007.



شکل 13 بالا رفتن یک حباب برای اختلاف چگالی 1000 با اعداد بی بعد Eo=15,M=1



با توجه به این موضوع که در قسمتهای قبلی هم بیان شده با مقایسه شکلهای 1-4 در نسبت چگالیهای بالاتر نتایج مشابه با تکرار بیشتری حاصل میشود و دلیل آن هم جهش ناگهانی بیشتری برای چگالی در دو طرف سطح مشترک و افزایش ناپایداری نیازمند به زمان بیشتری برای پایدار شدن حباب است. برای نسبت چگالی 1000 نسبت به نسبت چگالی 50 افزایش حجم و زمان محاسباتی زیادی داریم.

نتایج به طور عمده برای اختلاف چگالی 50 آورده شده و فقط نمونهای از اختلاف چگالی 1000 در شکل 13 برای تک حباب و در شکل 14 برای دو حباب انجام شده که به همراه تستهای انجام شده بیانگر کارآمد و درست بودن این روش برای اختلاف چگالی 1000 است.

#### 5- نتيجه گيري

در این مقاله با تلفیق مدل دو بعدی تاناکا و مدل سه بعدی اینامارو از مدل اینامارو در مختصات دو بعدی استفاده شدهاست؛ که با توجه به نتایج مربوطه و درست بودن تستهای رها شدن یک مربع در یک محیط سیال و قرار گرفتن دو حباب در کنار هم و قانون لاپلاس برای دو نسبت چگالی 50 و 1000 میتوان با اطمینان از این روش برای نسبت چگالی بالا در حدود 1000 در دو بعد استفاده کرد. با مقایسه نتایج، تغییر اعداد بی بعد منجر به 1000 در دو بعد استفاده کرد. با مقایسه نتایج، تغییر اعداد بی بعد منجر به بریان متفاوتی به وجود می آید و عدد اتوس نسبت به عدد مورتن تأثیر بیشتری بر رژیم جریان دارد. در حرکت دو حباب به سمت بالا در اعداد می ماند اما حباب پایینی به علت قرار گرفتن در دنباله ی حباب باقی می ماند اما حباب پایینی به علت قرار گرفتن در دنباله ی حباب بالای تغییر شکل کمتر و سرعت بیشتری داشته که منجر به ادغام دو حباب می شود که ارتفاع ادغام دو حباب در اعداد بی عد متفاوت، متفاوت است.

#### 6- مراجع

- A. K. Gunstensen, D. H. Rothman, S. Zaleski, G. Zanetti, Lattice Boltzmann model of immiscible fluids, *Physical Review A*, Vol. 43, No. 8, pp. 4320, 1991.
- [2] X. Shan, H. Chen, Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components, *Physical Review E*, Vol. 47, No. 3, pp. 1815, 1993.
- [3] M. R. Swift, W. Osborn, J. Yeomans, Lattice Boltzmann simulation of nonideal fluids, *Physical Review Letters*, Vol. 75, No. 5, pp. 830, 1995.