



بررسی برخورد دو حباب با اختلاف چگالی بالا توسط روش شبکه بولتزمن

الهام ستاری¹، مجتبی آقاجانی دلاور^{2*}، احسان فتاحی³، کوروش صدیقی⁴

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک تبدیل انرژی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل

3- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل

4- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی، بابل

* بابل، صندوق پستی 484، m.a.delavar@nit.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 06 آذر 1392

پذیرش: 08 بهمن 1392

ارائه در سایت: 05 مهر 1393

کلید واژگان:

جریان دو فاز

روش شبکه بولتزمن

مدل اینامارو

عدد اتوس

عدد مورتن

در مقاله حاضر از روش اینامارو که بر گرفته از مدل انرژی آزاد شبکه بولتزمن است، برای شبیه‌سازی حرکت حباب و نحوه ادغام دو حباب تحت تأثیر نیروی شناوری استفاده شده است. به منظور کاهش هزینه محاسباتی با تلفیق مدل دو بعدی تاناکا و سه بعدی اینامارو از مدل اینامارو در دو بعد استفاده شده است. در ابتدا با انجام صحت سنجی از درستی مدل فوق در اعمال نیروی کشش سطحی و قانون لاپلاس برای دو نسبت چگالی 50 و 1000 اطمینان حاصل شده است. در مرحله بعد اثر اعداد بی بعد حاکم بر مسئله از جمله عدد اتوس، مورتن بر رینولدز و شکل نهایی حباب برای یک حباب بررسی شده است. الگوهای جریان متفاوتی در اعداد بی بعد متفاوت به دست آمده و با تغییر اعداد بی بعد تغییر شکل نهایی حباب مشاهده گردید. در مرحله آخر حرکت دو حباب و شکل نهایی حاصل از ادغام دو حباب در اعداد بی بعد متفاوت مورد بررسی قرار گرفته است که شکل حباب اول تقریباً همان شکل تک حباب به دست می‌آید اما حباب دوم به دلیل قرار گرفتن در دنباله‌ی حباب اول و اختلاف فشار کمتر در دو طرف آن تغییر شکل متفاوتی را از خود نشان می‌دهد.

Investigation of two bubble coalescence with large density differences with Lattice Boltzmann Method

Elham Sattari, Mojtaba Aghajani Delavar*, Ehsan fattahi, Korosh Sedighi

Department of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

* P.O.B. 484 Babol, Iran, m.a.delavar@nit.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 27 November 2013
Accepted 28 January 2014
Available Online 27 September 2014

Keywords:

Two Phase Flow
Lattice Boltzmann Method
Inamuro Model
Etvos Number
Morton Number

ABSTRACT

In present paper the Inamuro Model based on free energy approach of the Lattice Boltzmann Method was used to simulate the motion of bubble and coalescence of two bubbles under buoyancy force. By combining the Tanaka and Inamuro models, three-dimensional model of Inamuro was used in two-dimension for decreasing the computational cost. Firstly it was ensured that the surface tension effect and Laplace law for two density ratio 50 and 1000 were properly implemented. Secondly in next step, effect of governing dimensionless numbers problem such as Etvos number and Morton number on Reynolds number and terminal shape of bubble were investigated. Different flow patterns in various dimensionless numbers were obtained and by changing the dimensionless number, terminal change of bubble's shape was seen. Finally, motion of two bubbles and terminal shape of coalescence of two bubbles were studied in different dimensionless number which shape of first bubble was same to single bubble but second bubble experienced various shapes due to its location in wake of first bubble and less difference pressure on two sides of this bubble.

1- مقدمه

طراحی بویلرها دارد. همچنین سیالات دو فازی دارای کاربرد عمده‌ای در زمینه‌ی طراحی راکتورهای هسته‌ای می‌باشند. همچنین طراحی انواع مختلفی از وسایل پیشرفته مانند موتورهای موشک، دستگاه‌های تصفیه آب و ماشین‌های پمپاژ خون نیاز به دانش دقیقی از دینامیک جریان چندفازی دارد. بررسی حرکت حباب درسیالات کاربردهای فراوانی در صنایع نفتی و شیمیایی دارد و علت آن مخلوط شدن گاز و مایع به طور وسیع در این صنایع است.

در نتیجه مطالعات عددی و آزمایشگاهی بسیاری در این زمینه انجام

بسیاری از پدیده‌های روزمره در زندگی، به نوعی از دیدگاه عملی، مسائل دو فازی یا چندفازی محسوب می‌شوند. به عنوان مثال حرکت قطرات باران، حرکت ذرات گرد و غبار در هوا یا نحوه‌ی حرکت موج بر روی سطح دریا و نحوه‌ی شکست آن نمونه‌هایی از مسائل دوفازی می‌باشند که در طبیعت رخ می‌دهند. سیالات دو فازی دارای کاربردهای فراوانی در مسائل صنعتی نیز می‌باشند. از آن جمله می‌توان به کاربرد در بویلرها اشاره کرد. در بویلرها مخلوطی از آب و بخار آب به عنوان سیال دو فاز نقش بسیار مهمی در

Please cite this article using:

E. Sattari, M. Aghajani Delavar, E. Fattahi, K. Sedighi, Investigation of two bubble coalescence with large density differences with Lattice Boltzmann Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 10, pp. 93-100, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

جوشش استفاده کرد [13].

علاوه بر اینامارو لی و سایرین هم روش پیشنهادی خود برای جریان دو فاز با اختلاف چگالی بالا را پیشنهاد نموده‌اند [14-17]. مدل اینامارو [4-8] یک مدل 3 بعدی بوده در نتیجه حجم محاسباتی بالایی داشت. مدل تاناکا [12,13] برای تبدیل مدل اینامارو در دو بعد برای شبیه‌سازی جوشش ترم‌های مشتق تانسور فشار را به مدل اینامارو اضافه کرده و موجب افزایش حجم محاسباتی در دو بعد شده بود. در این مقاله با اصلاح روش اینامارو به وسیله‌ی معادلات تاناکا [12,13]، ابتدا به معرفی مدل تلفیقی اینامارو [4-8] و تاناکا [12,13] پرداخته شده، بعد از آن با اعمال این مدل از درستی عملکرد اثرات کشش سطحی در آن اطمینان حاصل می‌گردد. به همین منظور دو تست انجام شده‌است. تست اول مربوط به یک حباب مربعی دو بعدی است که در داخل مایع قرار گرفته‌است. در تست دوم دو حباب دایره‌ای در کنار هم قرار داده می‌شوند و برخورد آنها مدل می‌گردد. بعد از آن درستی قانون لاپلاس چک شده و تأثیر اعداد بی بعد برای یک حباب که تحت نیروی شناوری در حال بالا رفتن است، بر روی عدد رینولدز و شکل نهایی حباب بررسی شده‌است و در آخر هم بالا رفتن دو حباب تحت نیروی شناوری در اعداد بی بعد متفاوت چک شده‌است.

2- روش حل

در روش شبکه بولتزمن، محیط پیوسته سیال به صورت مجموعه‌ای از ذرات مجازی مدل شده که حرکت و برخورد آن‌ها بر روی مسیرهای مشخصی (شبکه بولتزمن) بیان می‌شود و تغییرات تابع توزیع با استفاده از معادله گسسته بولتزمن تعیین می‌گردد. با توجه به کاربرد گسترده روش بولتزمن محققان زیادی از این روش در شبیه‌سازی عددی پدیده‌های فیزیکی مختلف استفاده نموده‌اند [18-22]. مدل 9 سرعته ($N=9$) در کار حاضر استفاده شده‌است [13]. بردارهای سرعت این مدل در رابطه (1) داده شده‌است:

$$[c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

فضای فیزیکی به شکل مربعی شبکه بندی شده و تغییر در احتمال حضور ذرات با سرعت مشخص در هر مکان شبکه محاسبه می‌شود. در شبیه‌سازی از دو تابع توزیع سرعت ذره f_i و g_i استفاده گردید. تابع f_i برای محاسبه‌ی ضریب ترکیب که جداکننده دو فاز است و تابع g_i برای محاسبه‌ی پیش‌بینی سرعت سیال دوفاز بدون گرادیان فشار است. تغییر توابع توزیع ذرات $f_i(x,t)$ و $g_i(x,t)$ با سرعت c_i و در نقطه X و زمان t با معادلات (2) و (3) محاسبه می‌شود:

$$f_i(x + c_i \Delta x, t + \Delta t) = f_i^c(x, t) \quad (2)$$

$$g_i(x + c_i \Delta x, t + \Delta t) = g_i^c(x, t) \quad (3)$$

که f_i^c و g_i^c توابع توزیع تعادلی، Δx فضای مربع شبکه و Δt طول گام زمانی در مقیاس شبکه بولتزمن که ذرات در فضای شبکه حرکت می‌کنند است. ضریب ترکیب ϕ که محل فازها را تعیین می‌کند و سرعت پیش‌بینی شده‌ی u^* از سیال چندجزئی به وسیله توابع توزیع سرعت دو ذره به شکل معادله (4) تعریف می‌شود [4-8]:

$$u^* = \sum_{i=0}^8 g_i c_i, \quad \phi = \sum_{i=0}^8 f_i \quad (4)$$

توابع توزیع موجود در معادلات (2) و (3) بصورت معادلات (5) و (6) تعریف می‌شوند [4-8]:

شده‌است. مطالعات عددی در این باب به علت توانایی دسترسی به شرایط و فیزیک داخل قطره و حباب از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. در طول سال‌های گذشته مدل‌های مختلفی برای شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی با استفاده از روش شبکه بولتزمن¹ ارائه شده‌است. گنستن و همکاران [1] یک روش چند جزئی بر پایه روش شبکه گاز دو بعدی ارائه نموده‌اند. در این مدل توابع توزیع ذرات آبی و قرمز برای شبیه‌سازی دو سیال مختلف ارائه شدند. برای حفظ سطح تماس و جداسازی فازهای مختلف، مرحله تخصیص رنگ برای مجبور کردن سیالات رنگ شده به حرکت به سمت سیالات هم‌رنگ تعریف شده‌است. این مرحله توسط محاسبات گرادیان جزئی محلی رنگ‌ها انجام می‌شود و مکانیزم جدایی بین دوجزئی که با رنگ‌های مختلف مشخص شده‌اند را شبیه‌سازی می‌کند. دو اشکال عمده در این روش وجود دارد، یکی اینکه مرحله‌ی ضروری تخصیص رنگ، یک روند مصنوعی اغتشاشی ایجاد می‌کند که ممکن است منجر به ایجاد جریان پارازیتی بزرگی در نزدیکی سطح مشترک دو فاز شود. دومین مشکل این روش، زمان‌بر بودن مرحله‌ی تخصیص رنگ است؛ زیرا این مرحله براساس ماکزیمم پارامتری کار می‌کند که خود این پارامتر شامل گرادیان محلی تابع توزیع است [2,1].

شان و چن [2] یک مدل با در نظر گرفتن واکنش‌های میکروسکوپی برای جریان‌های چندفازی و چندجزئی گزارش نمودند. در این مدل برهم‌کنش غیر محلی بین ذرات در نقاط همسایه معرفی شده که در هر نقطه یک نیروی اضافی برای تخمین این برهم‌کنش اعمال می‌گردد. از مهم‌ترین عیب‌های آن ضعیف بودن در تحلیل ترمودینامیکی نسبت به مدل سویفت است و مزیت اصلی آن سادگی و تطبیق‌پذیری در حل جریان دو فاز است [3,2]. سویفت و همکاران [3] با استفاده از دیدگاه انرژی آزاد برای جریان‌های چند جزئی و چند فازی روشی را پیشنهاد کردند مزیت اصلی این روش این است که می‌تواند ترمودینامیک سیالات غیر ایده‌ال و چند جزئی را در دمای ثابت در نظر بگیرد. روش‌های اشاره شده از روش‌های اولیه دو فاز شبکه بولتزمن بوده و در آنها نسبت چگالی حداکثر 10 بوده است [3-1]. لذا همه آن‌ها در شبیه‌سازی جریان دوفاز با اختلاف چگالی بالا ناتوان بودند؛ در صورتی که در اکثر فرآیندهای بین گاز و مایع مثل آب و هوا نسبت چگالی در حدود 1000 است. مشکل اصلی در حل عددی جریان دوفاز با اختلاف چگالی بالا وجود ناپایداری در ناحیه فصل مشترک به دلیل پرش ناگهانی در چگالی است.

اینامارو و همکاران [5,4] یک روش جدید بر پایه روش انرژی آزاد برای جریان با اختلاف چگالی بالا ارائه نمودند. هدف اصلی کار آن‌ها ارائه یک روش برای جریان سیال دو فاز با اختلاف چگالی بالا بوده است و حرکت یک حباب را تحت تأثیر نیروی شناوری در سه بعد بررسی کردند. اینامارو و همکاران [7,6] از این روش برای شبیه‌سازی برخورد دو قطره با قطر یکسان با سرعت اولیه نسبی در سه بعد استفاده کردند. اینامارو و همکاران [8] از این روش برای شبیه‌سازی برخورد دو قطره با قطرهای نابرابر در سه بعد استفاده کردند. بعد از اینامارو، یان و همکاران [9-11] با ادغام روش بریانت و اینامارو محاسبات زاویه تماس را در روش اینامارو اعمال نموده و زاویه تماس در حالت دینامیکی و استاتیکی را در شرایط متفاوت خیس شدگی سطح در سه بعد بدست آوردند. بعد از آن تاناکا با مقداری تغییر در اصل روش اینامارو از این روش برای جریان‌های دو بعدی و واکنشی استفاده نمود. تاناکا و همکاران در [12] زاویه تماس‌های متفاوت و شکل نهایی حباب را در جریان‌های مانع دار مورد بررسی قرار داده و تاناکا از این روش برای شبیه‌سازی فرآیند

1- Lattice Boltzmann Method (LBM)

$$\mu = \frac{\rho - \rho_G}{\rho_L - \rho_G} (\mu_L - \mu_G) + \mu_G \quad (13)$$

که μ_L و μ_G به ترتیب ویسکوزیته فاز مایع و فاز گاز می‌باشند. کشش سطحی σ بصورت معادله (14) داده می‌شود [8-4]:

$$\sigma = k_g \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad (14)$$

که ξ عمود بر سطح مشترک است. از آنجایی که u^* در معادله پیوستگی صدق نمی‌کند ($\nabla \cdot u^* \neq 0$)، اصلاح u^* مورد نیاز است. سرعت جریان u که باید معادله پیوستگی ($\nabla \cdot u = 0$) را ارضا کند، با استفاده از معادله (15) بدست می‌آید [8-4]:

$$\text{Sh} \frac{u - u^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = \text{Sh} \frac{\nabla \cdot u^*}{\Delta t} \quad (15)$$

که $\text{Sh} = U/c$ عدد استروهال و ρ فشار شبکه بولتزمن است که با توجه به [8-4] بی‌بعد شده‌است. معادله پواسون (15) به روش‌های مختلفی قابل حل است. در کار حاضر معادله (15) در غالب روش شبکه بولتزمن حل شده‌است؛ یعنی تابع توزیع h_i برای فشار p استفاده می‌شود. طبق رابطه (16) داریم:

$$h_i^{n+1}(x + c_i \Delta x) = h_i^n(x) - \frac{1}{\tau_h} [h_i^n(x) - E_i P^n(x)] - \frac{1}{3} E_i \frac{\partial u_x^*}{\partial x} \Delta x \quad (16)$$

که n شماره تکرار است و τ_h زمان آرامش بصورت رابطه (17) است:

$$\tau_h = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \quad (17)$$

برای محاسبه فشار از معادله (18) داریم:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 h_i \quad (18)$$

تکرار معادله (16) تا زمانی ادامه می‌یابد که $|p^{n+1} - p^n|/\rho < \varepsilon$ در کل دامنه برقرار باشد. معادلات ذکر شده در این بخش بیشتر بر اساس مدل اینامارو [7-4] بیان شده اما معادلات (2, 3, 6, 7, 8, 10 و 11) بر اساس مدل تاناکا [13,12] اصلاح شده‌است.

3- اعتبار حل دوفازی

از آنجایی که مهم‌ترین و پیچیده‌ترین بخش تحلیل جریان‌های دوفازی مربوط به دینامیک سطح مشترک بین دو سیال است، اولین گام برای نشان دادن صحت شبیه‌سازی جریان، بررسی این موضوع است. برای این موضوع از دو آزمون استفاده می‌شود. در آزمون اول تغییر شکل یک قطره مربعی و دوبعدی که در یک صفحه افقی رها می‌شود، نشان داده شده‌است. با توجه به اثرات کشش سطحی بین دو سیال، قطره تمایل دارد که به پایدارترین شکل، با کمترین سطح مشترک تبدیل گردد.

با توجه به نتایج شبیه‌سازی که در شکل 1 نشان داده شده‌است، این قطره مربعی با گذشت زمان تغییر شکل داده و در نهایت به شکل یک دایره در می‌آید. این موضوع نشان می‌دهد اثرات کشش سطحی که مهم‌ترین بخش از تحلیل جریان دوفازی است، به درستی اعمال شده‌است. این آزمون توسط موسوی و همکاران در [23] به عنوان اعتبار حل دوفازی استفاده شده‌است.

این آزمون برای اختلاف چگالی 1000 هم انجام شده‌است. همانطور که اینامارو در [5,4] ذکر کرده، افزایش نسبت چگالی منجر به افزایش تکرار برای رسیدن به نتایج مطلوب می‌شود، همانطور که در شکل 2 نمایان است، تغییر شکل‌های مورد نظر در تکرارهای بالاتری اتفاق افتاده‌اند.

$$f_i^{\text{eq}} = H_i \phi + F_i \left[\rho_0 - k_f \phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\alpha^2} \right] + 3E_i \phi c_{i\alpha} u_\alpha + E_i k_f G_{\alpha\beta}(\phi) c_{i\alpha} c_{i\beta} \quad (5)$$

$$g_i^{\text{eq}} = E_i \left[1 + 3c_{i\alpha} u_\alpha - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + \frac{9}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha u_\beta \right] + E_i + \frac{3}{4} \Delta x \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) c_{i\alpha} c_{i\beta} + E_i \left[3c_{i\alpha} \frac{\Delta x}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left\{ \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right\} \right] + E_i \frac{k_g}{\rho} G_{\alpha\beta}(\rho) c_{i\alpha} c_{i\beta} - \frac{1}{2} F_i \frac{k_g}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \right)^2 \quad (6)$$

g شتاب گرانشی است و دیگرمتغیرهای μ ، ρ_L ، ρ با توجه به نسبت چگالی همانطور که در بخش نتایج توضیح داده شده، تعیین می‌شوند. E ضریب وزنی، C سرعت شبکه، H و F اعداد ثابتی هستند که بصورت معادله (7) تعریف می‌شوند [13,12]:

$$E_0 = \frac{4}{9}, \quad E_1 = \dots = E_4 = \frac{1}{9}, \quad E_5 = \dots = E_8 = \frac{1}{36} \\ H_0 = 1, \quad H_1 = \dots = H_8 = 0, \quad F_0 = -\frac{5}{3} \\ F_i = 3E_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 8) \quad (7)$$

و طبق معادله (8) داریم:

$$G_{\alpha\beta}(\phi) = \frac{9}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} - \frac{9}{4} \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x_\gamma} \delta_{\alpha\beta} \quad (8)$$

با $\alpha, \beta = x, y$ (زیرنویس α, β نشان‌دهنده مختصات کارتزین می‌باشند و γ جمع این زیرنویس است) [12, 13]. در معادلات (5)، (6) و (8)، $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونیکر است، k_f پارامتر ثابتی است که پهنای فصل مشترک را محاسبه می‌کند و k_g پارامتر ثابتی است که مقاومت کشش سطحی را محاسبه می‌کند که با توجه به نسبت چگالی مد نظر مقدار می‌گیرند. ρ_0 که همان فشار ترمودینامیکی است، بوسیله‌ی معادله (9) که معادله حالت این روش است. بصورت زیر تعریف می‌شود [13,12]:

$$\rho_0 = \phi T \frac{1}{1 - b\phi} - a\phi^2 \quad (9)$$

که T و b, a پارامترهای آزاد برای محاسبه مقادیر بیشینه و کمینه پارامتر ϕ می‌باشند. تقریب‌های زیر طبق روابط (10) و (11) برای محاسبات مشتقات معادلات (5)، (6) و (8) بکار می‌رود [13,12].

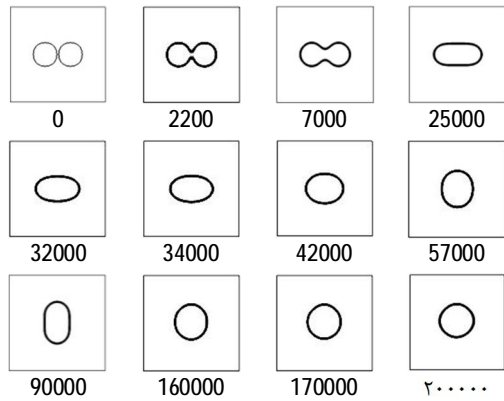
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \approx \frac{1}{6\Delta x} \sum_{i=1}^8 c_{i\alpha} \psi(x + c_i \Delta x) \quad (10)$$

$$\nabla^2 \phi \approx \frac{1}{3\Delta x^2} \left[\sum_{i=1}^8 \phi(x + c_i \Delta x) - 8\phi(x) \right] \quad (11)$$

چگالی در مرز مشترک بوسیله مقادیر حداقل و حداکثر ضریب ترکیب برای فازهای گاز و جامد ϕ_L^* و ϕ_G^* با استفاده از رابطه (12) محاسبه می‌شود [8-4].

$$\rho = \begin{cases} \rho_g & \phi < \phi_G^* \\ \frac{\Delta \rho}{2} \left[\sin \left(\frac{\phi - \phi_G^*}{\Delta \phi^*} \pi \right) + 1 \right] + \rho_g & \phi_G^* \leq \phi \leq \phi_L^* \\ \rho_l & \phi > \phi_L^* \end{cases} \quad (12)$$

که ρ_L و ρ_G به ترتیب چگالی فاز گاز و فاز مایع می‌باشند، $\Delta \rho = \rho_L - \rho_G$ و $\phi^* = (\phi_L^* + \phi_G^*)/2$ ، $\Delta \phi^* = \phi_L^* - \phi_G^*$ و بصورت رابطه (13) تعریف می‌شود [8-4]:



شکل ۵ نمایش برخورد و انعقاد دو قطره با یکدیگر و تشکیل قطره بزرگتر نسبت به گام‌های زمانی شبکه، برای نسبت چگالی 1000

اگر یک قطره ساکن در فضا قرار داشته باشد، در حالت تعادلی سرعت در تمام نقاط باید صفر باشد؛ اما در روش‌های عددی دوفازی یک سرعت مجازی غیرفیزیکی در اطراف سطح مشترک قطره ایجاد می‌شود. البته امروزه در راستای کاهش این سرعت‌های مجازی روش‌های عددی در حال بهبود هستند [۲۴]. به دلیل وجود این سرعت‌های مجازی و غیر فیزیکی در روش‌های عددی، برای یک قطره ساکن و تعادلی گردابه‌های ضعیفی در اطراف سطح مشترک قطره ایجاد می‌شود که به آن جریان پارازیتی اطراف سطح مشترک می‌گویند. شکل 3 جریان پارازیتی اطراف قطره ساکن در حال تعادل را برای شبیه‌سازی انجام گرفته نشان می‌دهد.

در آزمون دوم دو قطره دایره‌ای دوبعدی و یکسان با قطری برابر با 0/3 ضلع دامنه و فاصله‌ی 0/05 قطر با چگالی 1 و ویسکوزیته 0/01 و در مجاورت یکدیگر قرار دارند. با توجه به اثرات نیروهای کشش سطحی و واندروالسی، این دو قطره با یکدیگر برخورد کرده و در نهایت تشکیل یک قطره پایدار دایره‌ای و بزرگتر می‌دهند. نتایج شبیه‌سازی برای این پدیده در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده‌اند. این آزمون در [23,17] به عنوان اعتبار حل دو فازی استفاده شده‌است.

۳-۱- قانون لاپلاس

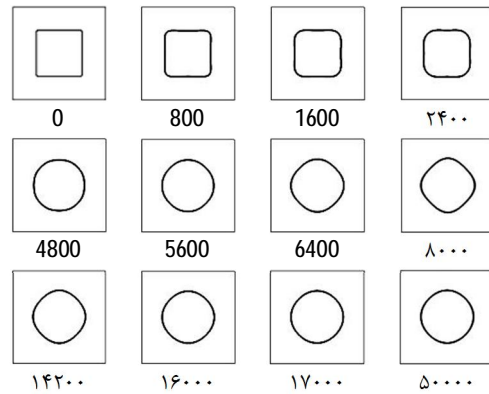
قانون لاپلاس بیان کننده ارتباط بین فشار درون (P_{in}) و بیرون (P_{out}) قطره با کشش سطحی بین دو سیال σ است. بر اساس قانون لاپلاس برای قطره دو بعدی رابطه (19) برقرار است:

$$P_{in} - P_{out} = \frac{\sigma}{R} \quad (19)$$

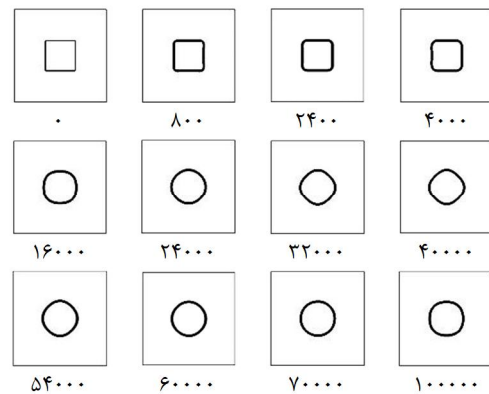
از آنجایی که در جریان‌های تراکم پذیر و هم دما کشش سطحی یکی از خواص ثابت بین دو سیال است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که بین اختلاف فشار درون و بیرون قطره با معکوس شعاع در شرایط یکسان بدون تغییر خواص آن یک رابطه خطی برقرار است؛ اما با تغییر خواص سیال مثل نسبت چگالی آنگاه نیروی کشش سطحی با تعویض نسبت چگالی که منجر به تغییر ثوابت k_f و k_g می‌شود، تغییر می‌کند. نتایج نشان داده شده در شکل 6 نشان می‌دهد که شبیه‌سازی انجام گرفته و فشار بدست آمده در شبکه بولتزمن با شعاع قطره که بر حسب مقیاس شبکه است به خوبی قانون لاپلاس را ارضا می‌کند. این تست در [23,17,3,1] به عنوان اعتبار حل دو فازی انجام شده‌است.

۳-۲- استقلال از شبکه

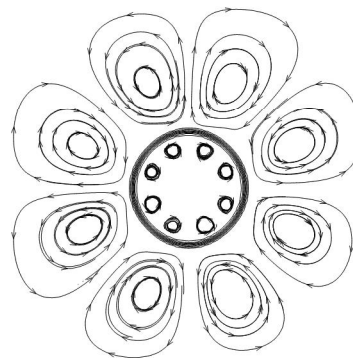
برای این کار دو تست مختلف انجام شده‌است. در تست اول قانون لاپلاس برای شبکه‌های مختلف انجام شده و با توجه به اینکه شیب نمودار مربوطه



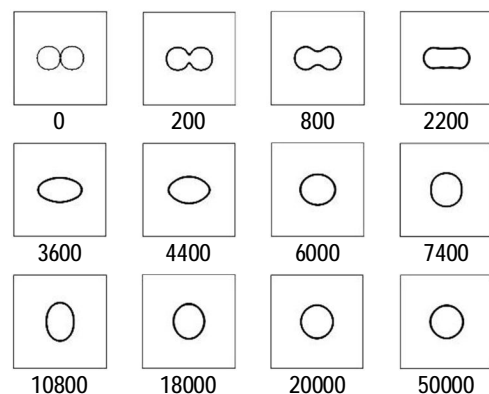
شکل ۱ نمایش تغییر شکل یک قطره مربعی رها شده در یک صفحه افقی نسبت به گام‌های زمانی شبکه، برای اختلاف چگالی ۵۰



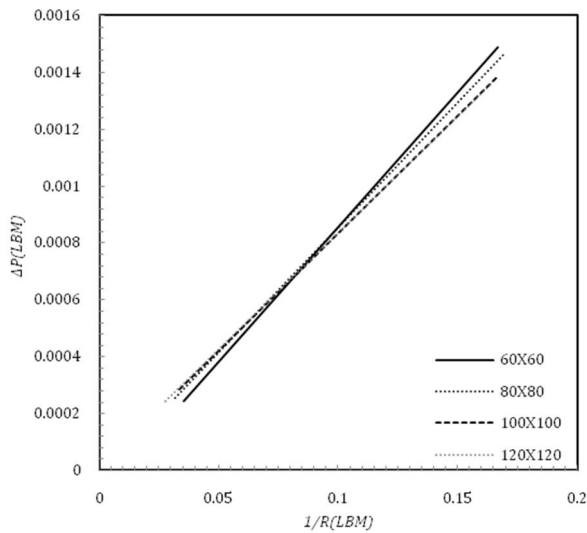
شکل ۲ نمایش تغییر شکل یک قطره مربعی رها شده در یک صفحه افقی نسبت به گام‌های زمانی شبکه، برای اختلاف چگالی ۱۰۰۰



شکل ۳ جریان پارازیتی اطراف قطره



شکل ۴ نمایش برخورد و انعقاد دو قطره با یکدیگر و تشکیل قطره بزرگتر نسبت به گام‌های زمانی شبکه، برای نسبت چگالی 50



شکل 7 قانون لاپلاس در شبکه‌های مختلف

جدول 2 شکل نهایی حباب در شبکه‌های مختلف با اعداد بی بعد متفاوت

اعداد بی بعد	50×100	1000×200	150×300
دایره‌ای	دایره‌ای	دایره‌ای	دایره‌ای
$Eo = 1, M = 0.001$			
بیضی	بیضی	بیضی	بیضی
$Eo = 5, M = 0.001$			
دایره‌ای	کلاه بیضی	کلاه بیضی	کلاه بیضی
$Eo = 116, M = 266$			
بیضی	دیسک	دیسک	دیسک
$Eo = 20, M = 0.0001$			
کلاه بیضی	کلاه دایره‌ای	کلاه دایره‌ای	کلاه دایره‌ای
$Eo = 42, M = 0.001$			
دامنی شکل	دامنی شکل	دامنی شکل	دامنی شکل
$Eo = 339, M = 43$			

4- نتایج

در این قسمت حرکت یک حباب در یک محیط که از مایع پر شده است، بررسی شده است. برای در نظر گرفتن تأثیر نیروی گرانش که تنها نیروی حجمی وارد بر حباب است، ترم $-3E_g c_v (1 - \rho_g / \rho) g \Delta x$ به تابع توزیع سرعت معادله (6) اضافه می‌شود. پارامترهای بی بعد این پدیده عدد مورتن، اتوس و رینولدز می‌باشند که در آن V سرعت نهایی حباب و D قطر اولیه حباب می‌باشند. طبق روابط (20) داریم:

$$M = \frac{g \mu_L (\rho_L - \rho_g)}{\rho_L^2 \sigma^3}$$

$$Eo = \frac{g (\rho_L - \rho_g) D^2}{\sigma}$$

$$Re = \frac{\rho_L D V}{\mu_L} \quad (20)$$

مرزهای روبروی هم دارای شرایط مرزی پرپودیک هستند. شبکه مورد استفاده 200×100 است. قطر اولیه حباب برابر با 30 واحد شبکه است. در معادلات (6) و (7) مقادیر $k_f = 0.05$ و $k_g = 10^{-5}$ برای نسبت چگالی 50 و مقادیر $k_f = 0.1$ و $k_g = 10^{-7}$ برای نسبت چگالی 1000 لحاظ گردیده، ویسکوزیته مایع با استفاده از شتاب گرانش و اعداد بی بعد به دست می‌آید و ویسکوزیته گاز برابر با $\mu_g = \mu_l / 50$ است [4-8]. در نسبت چگالی 50، چگالی مایع برابر با 50 و چگالی گاز برابر با 1 در نظر گرفته شده، در نسبت چگالی 1000، چگالی مایع برابر با 1000 و چگالی گاز برابر با 1 در نظر گرفته شده است.

نتایج در زمان بی بعد $T = t/t_n$ که $t_n = \sqrt{d/g}$ و t تعداد تکرار می‌باشند، نشان داده شده است. مقایسه رفتار حباب در دو بعد نشان می‌دهد که تغییر شکل حباب تابعی از اعداد بدون بعد اتوس و مورتن است. با توجه به شکل نهایی حباب که در اعداد بی بعد مختلف کاملاً متفاوت می‌باشند،

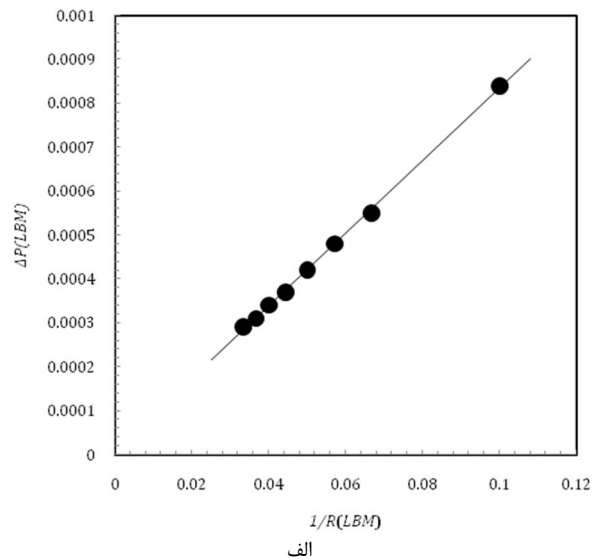
برابر با نیروی کشش سطحی است، مقدار آن در شبکه‌های مختلف بدست آمده و باهم مقایسه شده است.

در تست دوم سه شبکه مختلف 200×100 ، 100×100 و 300×150 استفاده شده اند و شکل نهایی حباب (رژیم نهایی جریان) باهم مقایسه شده است. نتیجه تست اول که در جدول 1 و شکل 7 نشان داده شده است، بیانگر این موضوع است که عدد 100 برای ضلع محیط حل مناسب است زیرا مقدار نیروی کشش سطحی در شبکه 100×100 و 120×120 تقریباً باهم برابر است.

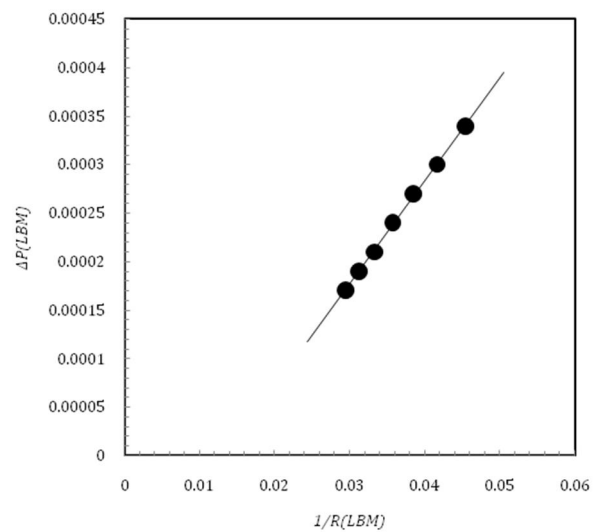
در تست دوم که نتایج آن در جدول 2 نشان داده شده است، شکل نهایی حباب در شبکه 50×100 با تغییر اعداد بی بعد با توجه به کارهای قبلی درست نیست؛ اما شکل نهایی حباب و رژیم جریان متناسب در شبکه‌های 200×100 و 300×200 کاملاً یکسان است به منظور جلوگیری از افزایش هزینه محاسباتی از شبکه 200×100 در این مقاله استفاده شده است.

جدول 1 مقدار نیروی کشش سطحی در شبکه‌های مختلف

شبکه مورد نظر	60×60	80×80	100×100	120×120
مقدار نیروی کشش سطحی	0/0094	0/0088	0/0082	0/0081

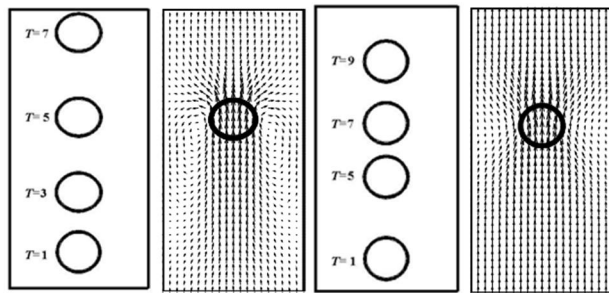


الف

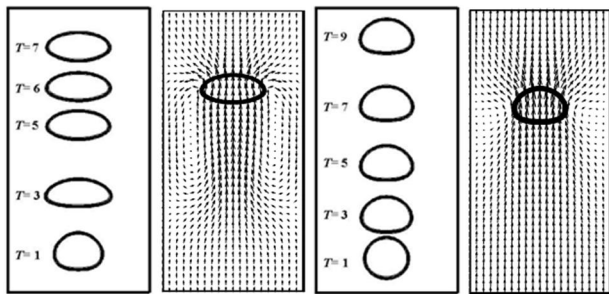


ب

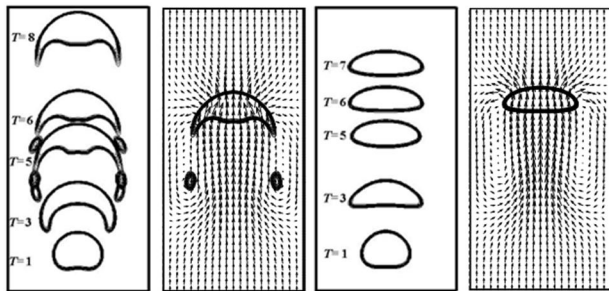
شکل 6 خط برازش اختلاف فشار درون و بیرون قطره بر حسب معکوس شعاع، (الف) نسبت چگالی 50، (ب) نسبت چگالی 1000



الف) $Eo=1, M=10^{-3}$ ب) $Eo=5, M=10^{-3}$

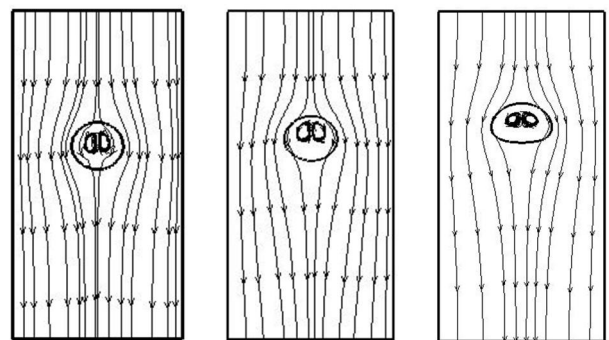


ج) $Eo=116, M=266$ د) $Eo=20, M=10^{-4}$

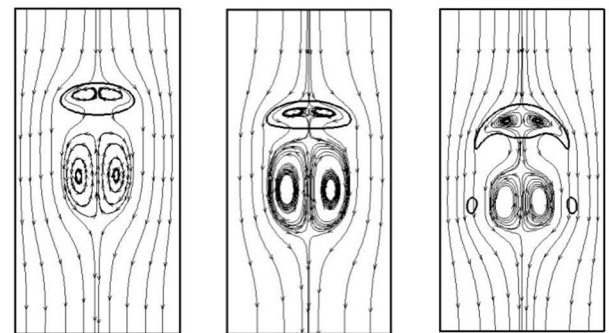


ه) $Eo=42, M=10^{-3}$ و) $Eo=43, M=339$

شکل 8 الگوهای جریان در اعداد بی بعد متفاوت



ا) $Eo=1, M=10^{-3}$ ب) $Eo=5, M=10^{-3}$ ج) $Eo=116, M=266$



د) $Eo=20, M=10^{-4}$ ه) $Eo=42, M=10^{-3}$ و) $Eo=43, M=339$

شکل 9 خطوط جریان در اعداد بی بعد متفاوت

الگوهای جریان بسیار متفاوتی در جریان دو فاز خواهیم داشت که بر اساس شکل نهایی حباب همانطور که در شکل 10 نشان داده شده است به 6 دسته اصلی تقسیم می شود: 1) دایره ای (2) بیضی (3) کلاه بیضی (4) دیسک (5) کلاه دایره ای (6) دامنی شکل.

در حرکت حباب به سمت بالا، ابتدا حرکت حباب به علت اختلاف چگالی با سیال اطراف در اثر نیروی شناوری آغاز می گردد. به علت حرکت حباب در داخل سیال، به حباب نیروی درگ وارد می شود و در صورتیکه حباب پاره نشود به یک سرعت و شکل ثابت خواهد رسید. در این صورت نیروی شناوری با نیروی درگ سیال برابر می شود و حباب با همین سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد. در شکل 8 در ستون سمت راست کانتور خطی چگالی به همراه بردار سرعت برای عدد بی بعد مربوطه در زمانی که شکل حباب پایدار شده رسم شده است و در ستون سمت چپ حرکت و تغییر شکل حباب در زمان های بی بعد متفاوت رسم شده است. همانطور که در شکل 8 دیده می شود، شکل حباب برای هر کدام از جریان ها در دو زمان بی بعد آخر به دلیل برابر شدن نیروی شناوری و درگ و پایدار شدن حباب یکسان است. البته برای شکل 8- و 8- جریان ناپایدار است و بعد از $T=5$ همانطور که در شکل 8- و نشان داده شده است، حباب پاره شده و قسمت هایی از آن جدا می شود.

همانطور که در شکل 8 مشاهده می شود، تغییر شکل حباب به صورت فرورفتگی از ناحیه پایین سطح حباب است در قسمت پایین حباب به علت اینکه فشار هیدرولیکی بیشتری دارد باید خودش را با فشار داخل حباب بالانس کند بنابراین تحدب در مایع و تغور در داخل حباب شکل می گیرد. هرچه میزان این اختلاف فشار بیشتر باشد ناحیه گردابه ای اطراف حباب بزرگ تر و تغییر شکل حباب بیشتر است. در شکل 8- الف تقریباً ناحیه مذکور ایجاد نشده در نتیجه شکل حباب ثابت مانده از شکل 8- ب به بعد اندازه این ناحیه افزایش یافته در نتیجه تغییر شکل حباب نیز بیشتر می شود. در شکل 8- الف حباب دارای تغییر شکل زیادی نشده اما همانطور که از تعریف اعداد بی بعد نمایان است، با افزایش عدد اتوس همانطور که در شکل 8- الف و 8- ب پیداست نیروی شناوری افزایش یافته و در نتیجه حباب دچار تغییر شکل بیشتری می شود. همچنین با افزایش عدد اتوس کاهش نیروی کشش سطحی را خواهیم داشت و چون نیروی کشش سطحی مقاوم در برابر تغییر شکل است، به عبارت دیگر افزایش عدد اتوس موجب افزایش تغییر شکل خواهد شد. افزایش عدد مورتن نیز موجب افزایش تغییر شکل حباب می شود اما تأثیر کمتری بر تغییر شکل حباب دارد زیرا عدد مورتن با کشش سطحی به توان $1/3$ ارتباط دارد همانطور که از شکل 8- ه و 8- د پیداست. با توجه به زمان بی بعد متفاوت در شکل ها نشان می دهد که با تغییر اعداد بی بعد، زمان لازم برای طی کردن طول کانال توسط حباب تغییر کرده که نشان دهنده تغییر در سرعت و رینولدز نهایی است. در جدول 3 مقادیر رینولدز نهایی برای اعداد بی بعد مختلف محاسبه شده است.

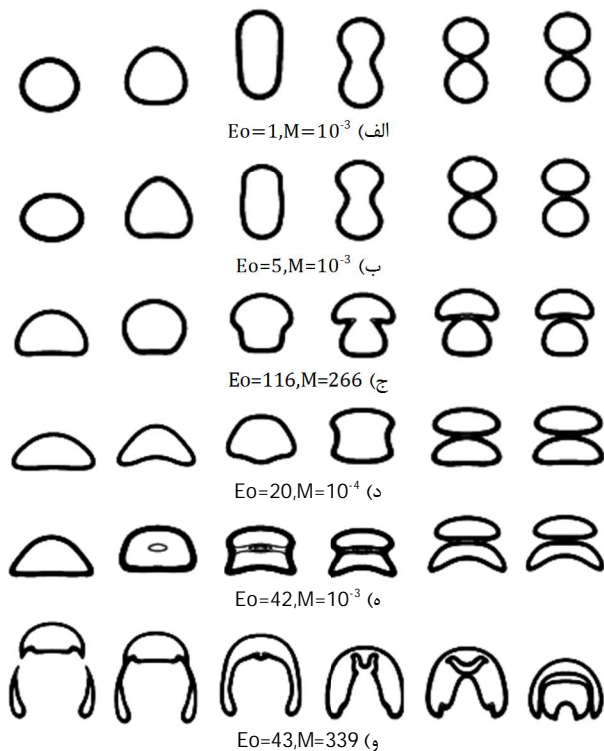
در شکل 9 خطوط جریان نیز برای این حباب ها رسم شده است. در سه حالت اول گردابه ها فقط در داخل حباب تشکیل شده اند اما از شکل 9- د به بعد گردابه های در زیر حباب نیز تشکیل شده که به آن دنباله حباب گویند که منجر به آشفته گی جریان اطراف حباب می شود. و در شکل 10 اعتبار سنجی نتایج شکل 8 و اعداد رینولدز بدست آمده با کار ایناماروی سه بعدی [4] مقایسه شده که هم از لحاظ رژیم جریان هم عدد رینولدز بدست آمده که در جدول 3 گزارش شده، تطابق خوبی دارد.

جدول 3 عدد رینولدز محاسبه شده در حالت های مختلف شکل 8

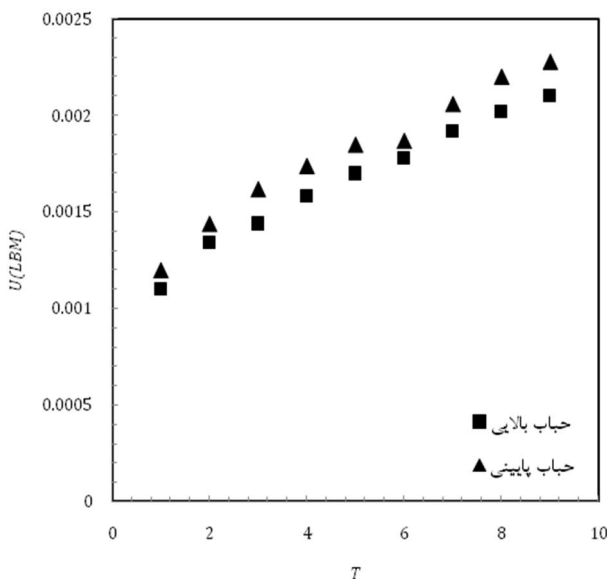
8-الف	8-ب	8-ج	8-د	8-ه	8-و
4/62	21/95	7/63	105/08	93/47	34/84
Re					

۴ آورده شده است.

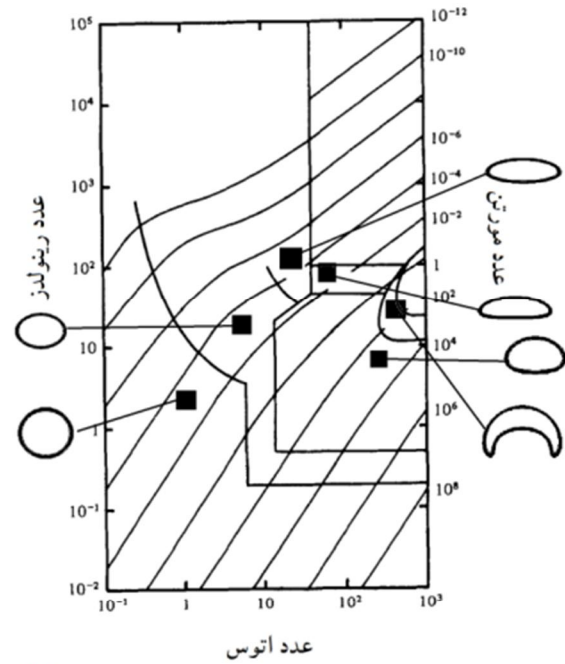
در حالت ۱۱-و در هنگام ادغام دو حباب مقداری مایع در بین دو حباب گیر افتاده که بعد از مدتی از ناحیه پایینی حباب خارج می شود و همانطور که برای تک حباب ذکر شده بر خلاف حالت های دیگر حباب نهایی ناپایدار است قسمت هایی از آن جدا می شود و حباب دو یا سه تکه می شود. با توجه به این موضوع که در روش استفاده شده برای فصل مشترک گرادیان چگالی خواهیم داشت، در حالت ۱۱-و نواحی از حل که دارای چگالی بین ۱ و ۵۰ هستند باهم ادغام می شود که در حقیقت نشان دهنده ی مرز ادغام دو حباب است که با گذشت زمان از بین می رود و نباید تصور شود که مقداری مایع در حباب گیر افتاده و خودبخود از بین رفته است.



شکل ۱۱ نحوه ی برخورد و ادغام دو حباب در اعداد بی بعد متفاوت



شکل ۱۲ سرعت حباب بالایی و پایینی در زمان های بی بعد متفاوت برای (۱۱-الف)



شکل ۱۰ مقایسه نتایج کار حاضر ■ با نتایج اینامارو در حل سه بعدی [۴]

جدول ۴ ارتفاع بی بعد ادغام دو حباب در اعداد بی بعد متفاوت

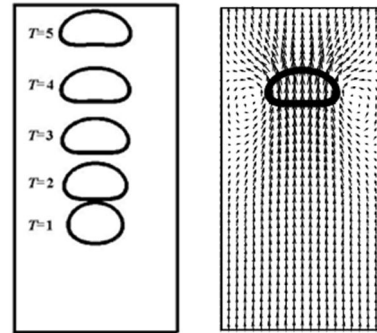
الف-۱۱	ب-۱۱	ج-۱۱	د-۱۱	ه-۱۱	و-۱۱	x/H
۰/۵۵	۰/۴	۰/۳۱	۰/۳۲	۰/۳۳	۰/۲۶	

۱-۴- بررسی برخورد دو حباب

در این قسمت بالا رفتن دو حباب که به صورت سری پشت سرهم قرار گرفته اند، در اعداد بی بعد قسمت قبل بررسی شده است. دو حباب به فاصله ی $D/3$ از هم قرار دارند و ارتفاع کانال به اندازه ای است که در همی اعداد بی بعد مد نظر دو حباب به هم رسیده و به شکل پایدار برسند (400). همانطور که در قسمت قبل گفته شده شکل حباب به دلیل اختلاف فشار دو طرف حباب تغییر کرده که شکل و سرعت نهایی بسته به اعداد مورتن و اتوس متفاوت است. شکل ۱۱ دو حباب را در اعداد بی بعد متفاوت از زمان برخورد و نحوه ی ادغام دو حباب تا پایداری حباب نهایی نشان می دهد. حباب بالایی مشابه با حالت قبل تغییر شکل می دهد، اما حباب دوم به دلیل قرار گرفتن در دنباله حباب اول و در نتیجه ایجاد اختلاف فشار کمتر در دو طرف آن دچار تغییر شکل کمتری می شود. همانطور که گفته شده عامل حرکت در این پدیده نیروی شناوری بوده و نیروی درگ ناشی از اختلاف فشار دو طرف حباب از سرعت آن می کاهد و چون در حباب دوم اختلاف فشار کمتری در دو طرف حباب حاکم است موجب می شود که حباب پایینی با سرعت بیشتری نسبت به حباب بالایی حرکت کرده و در نتیجه بعد از مدتی به هم می رسند. برای نمونه در شکل ۱۲ مقدار سرعت حباب بالایی و پایینی در زمان های بی بعد متفاوت برای حالت ۱۱-الف تا قبل از رسیدن دو حباب به هم رسم شده است. همانطور که از نمودار پیداست سرعت حباب پایینی همواره از حباب بالایی بیشتر است.

در زمان ادغام دو حباب فیلم مایع بین دو حباب نازک شده تا زمانی که بالای حباب پایینی به پایین حباب بالایی برخورد کند. در شکل ۱۱ فقط قسمت مربوط به دو حباب از ناحیه حل جدا شده اما در اعداد بی بعد متفاوت با توجه به متفاوت بودن رژیم جریان، نیروی گرانش و عدد رینولدز بدست آمده در هر حالت، در ارتفاع متفاوتی دو حباب به هم می رسند که در جدول

- [4] T. Inamuro, T. Ogata, F. Ogino, Numerical simulation of bubble flows by the lattice Boltzmann method, *Future Generation Computer Systems*, Vol. 20, No. 6, pp. 959-964, 2004.
- [5] T. Inamuro, T. Ogata, S. Tajima, N. Konishi, A lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows with large density differences, *Journal of Computational Physics*, Vol. 198, No. 2, pp. 628-644, 2004.
- [6] T. Inamuro, Lattice Boltzmann methods for viscous fluid flows and two-phase fluid flows, in *Computational Fluid Dynamics Conference*, India: Springer, pp. 3-16, 2008.
- [7] T. Inamuro, S. Tajima, F. Ogino, Lattice Boltzmann simulation of droplet collision dynamics, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 47, No. 21, pp. 4649-4657, 2004.
- [8] B. Sakakibara, T. Inamuro, Lattice Boltzmann simulation of collision dynamics of two unequal-size droplets, *International journal of heat and mass transfer*, Vol. 51, No. 11, pp. 3207-3216, 2008.
- [9] Y. Yan, Y. Zu, A lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows on partial wetting surface with large density ratio, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 1, pp. 763-775, 2007.
- [10] Y. Y. Yan, Y. Q. Zu, Numerical modelling of bubble coalescence and droplet separation, *Computational Methods in Multiphase Flow* Vol. 56, 2007.
- [11] Y. Y. Yan, Y. Q. Zu, LBM simulation of interfacial behaviour of bubbles flow at low Reynolds number in a square microchannel, *Computational Methods in Multiphase Flow* Vol. 63, 2009.
- [12] Y. Tanaka, Y. Washio, M. Yoshino, T. Hirata, Numerical simulation of dynamic behavior of droplet on solid surface by the two-phase lattice Boltzmann method, *Computers & fluids*, Vol. 40, No. 1, pp. 68-78, 2011.
- [13] Y. Tanaka, M. Yoshino, T. Hirata, Lattice Boltzmann simulation of nucleate pool boiling in saturated liquid, *Communication in Computational Physics*, Vol. 75, No. 5, pp. 830, 2011.
- [14] T. Lee, Effects of incompressibility on the elimination of parasitic currents in the lattice Boltzmann equation method for binary fluids, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 58, No. 5, pp. 987-994, 2009.
- [15] T. Lee, C.-L. Lin, A stable discretization of the lattice Boltzmann equation for simulation of incompressible two-phase flows at high density ratio, *Journal of Computational Physics*, Vol. 206, No. 1, pp. 16-47, 2005.
- [16] T. Lee, L. Liu, Lattice Boltzmann simulations of micron-scale drop impact on dry surfaces, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, No. 20, pp. 8045-8063, 2010.
- [17] H. Zheng, C. Shu, Y. Chew, A lattice Boltzmann model for multiphase flows with large density ratio, *Journal of Computational Physics*, Vol. 218, No. 1, pp. 353-371, 2006.
- [18] M. Seddiq, M. Maerefat, M. Mirzaei, Analysis of electrochemical characteristics of proton exchanger membrane fuel cell at the cathode catalyst by lattice-boltzmann method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 1, pp. 115-127, 2012. (In persian)
- [19] O. R. Mohammadipoor, H. Niazmand, S. A. Mirbozorgi, A new curved boundary treatment for the lattice Boltzmann method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 28-41, 2013. (In persian)
- [20] M. Nazari, M. H. Kayhani, A. Anaraki Haji Bagheri, comparison of heat transfer in a cavity between vertical and horizontal porous layers using LBM, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 8, pp. 93-107, 2013. (In persian)
- [21] A. Alizadeh, S. A. Mirbozorgi, The analysis of thermal effects on the electro-osmotic flow in a microchannel with the lattice Boltzmann method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 68-80, 2012. (In persian)
- [22] M. M. Shahmardan, M. Nazari, S. Mosayebidorcheh, Analytical solution of steady heat transfer in a multi-layer porous media under local thermal non-equilibrium condition, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 1-8, 2012. (In persian)
- [23] S. M. Tilehboni, K. Sedighi, M. Farhadi, E. Fattahi, Lattice Boltzmann Simulation of Deformation and Breakup of a Droplet under Gravity Force Using Interparticle Potential Model, *International Journal of Engineering-Transactions A: Basics*, Vol. 26, No. 7, pp. 781, 2013.
- [24] T. Seta, K. Okui, Effects of truncation error of derivative approximation for two-phase lattice Boltzmann method, *Journal of Fluid Science and Technology*, Vol. 2, No. 1, pp. 139-151, 2007.



شکل 13 بالا رفتن یک حباب برای اختلاف چگالی 1000 با اعداد بی بعد $E_0=15, M=1$



شکل 14 ادغام دو حباب برای اختلاف چگالی 1000 با اعداد بی بعد $E_0=15, M=1$

با توجه به این موضوع که در قسمت‌های قبلی هم بیان شده با مقایسه شکل‌های 1-4 در نسبت چگالی‌های بالاتر نتایج مشابه با تکرار بیشتری حاصل می‌شود و دلیل آن هم جهش ناگهانی بیشتری برای چگالی در دو طرف سطح مشترک و افزایش ناپایداری نیازمند به زمان بیشتری برای پایدار شدن حباب است. برای نسبت چگالی 1000 نسبت به نسبت چگالی 50 افزایش حجم و زمان محاسباتی زیادی داریم.

نتایج به طور عمده برای اختلاف چگالی 50 آورده شده و فقط نمونه‌ای از اختلاف چگالی 1000 در شکل 13 برای تک حباب و در شکل 14 برای دو حباب انجام شده که به همراه تست‌های انجام شده بیانگر کارآمد و درست بودن این روش برای اختلاف چگالی 1000 است.

5- نتیجه گیری

در این مقاله با تلفیق مدل دو بعدی تاناکا و مدل سه بعدی اینامارو از مدل اینامارو در مختصات دو بعدی استفاده شده است؛ که با توجه به نتایج مربوطه و درست بودن تست‌های رها شدن یک مربع در یک محیط سیال و قرار گرفتن دو حباب در کنار هم و قانون لاپلاس برای دو نسبت چگالی 50 و 1000 می‌توان با اطمینان از این روش برای نسبت چگالی بالا در حدود 1000 در دو بعد استفاده کرد. با مقایسه نتایج، تغییر اعداد بی بعد منجر به تغییر نیروی گرانش و نیروی کشش سطحی می‌شود در نتیجه رژیم‌های جریان متفاوتی به وجود می‌آید و عدد اتوس نسبت به عدد مورتن تأثیر بیشتری بر رژیم جریان دارد. در حرکت دو حباب به سمت بالا در اعداد بی‌بعد بررسی تک حباب، حباب بالایی در رژیم جریان تک حباب باقی می‌ماند اما حباب پایینی به علت قرار گرفتن در دنباله‌ی حباب بالایی تغییر شکل کمتر و سرعت بیشتری داشته که منجر به ادغام دو حباب می‌شود که ارتفاع ادغام دو حباب در اعداد بی‌بعد متفاوت، متفاوت است.

6- مراجع

- [1] A. K. Gunstensen, D. H. Rothman, S. Zaleski, G. Zanetti, Lattice Boltzmann model of immiscible fluids, *Physical Review A*, Vol. 43, No. 8, pp. 4320, 1991.
- [2] X. Shan, H. Chen, Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components, *Physical Review E*, Vol. 47, No. 3, pp. 1815, 1993.
- [3] M. R. Swift, W. Osborn, J. Yeomans, Lattice Boltzmann simulation of nonideal fluids, *Physical Review Letters*, Vol. 75, No. 5, pp. 830, 1995.