



## تحلیل ارتعاشات کوپل هیدروالاستیک در مخازن کروی با کفی غشایی حاوی سیال بدون اصطکاک

بهنام چراغی<sup>1</sup>، بابک میرزاوند بروجنی<sup>2\*</sup>، مازیار شفافی<sup>2</sup>

1- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران

\* تهران، صندوق پستی 143951561، mirzavand@ut.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 29 آذر 1394

پذیرش: 11 اسفند 1394

ارائه در سایت: 28 فروردین 1395

کلید واژگان:

ارتعاشات کوپل هیدروالاستیک

مخزن کروی

کفی غشایی

سطح آزاد سیال

### چکیده

یک تحلیل ارتعاش هم‌گیر هیدروالاستیک برای سیال بدون اصطکاک با در نظر گرفتن سطح آزاد سیال و همچنین کف انعطاف‌پذیر، در مخزن کروی ارائه شده است. دیواره به صورت صلب در نظر گرفته شده است. کف به صورت غشایی در فاصله مشخص از مرکز کره قرار دارد. همچنین سطح سیال نیز در یک فاصله مشخص در بالای مرکز کره در نظر گرفته شده است. همچنین در نهایت با استفاده از روش گالکین و اعمال آن بر معادلات نهایی، نتایج مورد نظر بدست آمده اند. تأثیر پارامترهای مختلفی از جمله: کشش کف، چگالی سیال و پارامترهای هندسی سیستم شامل شعاع مخزن، پارامتر مشخص کننده فاصله سطح سیال و پارامتر مشخص کننده فاصله کف، دیده شده است. استفاده از سیستم دستگاه‌های مختصات اصلی و کمکی به منظور تطابق مدل در نظر گرفته شده با فیزیک واقعی مورد نظر ما، امری است اجتناب‌ناپذیر که در این مطالعه مورد استفاده قرار گرفته است. فرکانس‌های طبیعی تالطم این سیستم سیال و سازه ارائه شده اند که نشان می‌دهد: نتایج بدست آمده از این حل تحلیلی در تطابق با نتایج حاصل از مدل‌سازی سیستم مشابه در نرم‌افزار آنسیس نیز می‌باشد. این نتایج نشان‌دهنده صحت روش تحلیلی ارائه شده است که می‌تواند به عنوان حالت پایه برای مسائل پیچیده‌تر با اعمال المان‌های خاص، مورد استفاده قرار گیرد.

## Hydroelastic coupled vibrations in spherical containers of membrane bottom, partially filled with frictionless liquids

Behnam Cheraghi, Babak Mirzavand Boroujeni\*, Maziar Shafaei

Department of New Sciences and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran.

\*P.O. B. 143951561, Tehran, Iran, mirzavand@ut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 20 December 2015

Accepted 01 March 2016

Available Online 16 April 2016

### Keywords:

Hydroelastic coupled vibrations

spherical container

membrane bottom

liquid free surface

### ABSTRACT

Free hydroelastic coupled vibration analysis of frictionless liquids with a free surface in spherical tanks with a flexible bottom has been performed. The side wall has been considered as a rigid body. The flexible bottom behaves as a membrane at a certain distance below the center point, and the free surface is considered as a cross cut at the top of the center point. The spherical coordinate system is adopted to derive the governing coupled equations, and finally a vibration analysis is carried out, using the traditional Galerkin's method, leading to closed-form solutions. Effects of various system parameters, i.e., membrane tension, liquid density, geometric parameters of the system such as the container radius, free surface distance discriminate parameter, and bottom distance discriminate parameter on the vibration behavior are investigated. The novelty of the present work is to obtain direct formulas for hydroelastic coupled vibration analysis of the mentioned system, which can be easily used in engineering design applications. Coupling between two mode numbers can be clearly seen in the results, in other words, there is a coupling between vibration modes as interaction in spherical geometry.

### 1- مقدمه

دستگاه مختصات کروی در مقایسه با سیستم‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای و کارتین، تحلیل ارتعاشی برای مخازن کروی در مقایسه با دیگر انواع مخازن به صورت محدودتری صورت گرفته است.

به منظور رسیدن به مدل سیستم سازه سیال هم‌گیر<sup>2</sup>، چندین تحلیل ارتعاشی ارائه شده است، که در برخی، کف به صورت یک صفحه‌ی ارتجاعی ایفای نقش می‌کند [4-1]، و یا به صورت

یکی از مهمترین و پرکاربردترین چیدمان‌های سازه‌ای، مخزن کروی تمام‌پر یا قسمتی‌پر<sup>1</sup> می‌باشد. به علت کمینه بودن حجم این نوع از مخازن و متعاقب آن کمینه بودن جرم آن‌ها، همواره مخازن کروی مورد توجه بوده‌اند. تحلیل ارتعاش هیدروالاستیک برای مخازن تمام یا قسمتی‌پر در انواع هندسه‌ها، موضوع بسیاری از مطالعه‌ها بوده است. به دلیل پیچیدگی بیشتر سیستم

<sup>2</sup> Coupled

<sup>1</sup> Partially filled

Please cite this article using:

B. Cheraghi, B. Mirzavand Boroujeni, M. Shafaei, Hydroelastic coupled vibrations in spherical containers of membrane bottom, partially filled with frictionless liquids, Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, No. 4, pp. 155-162, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

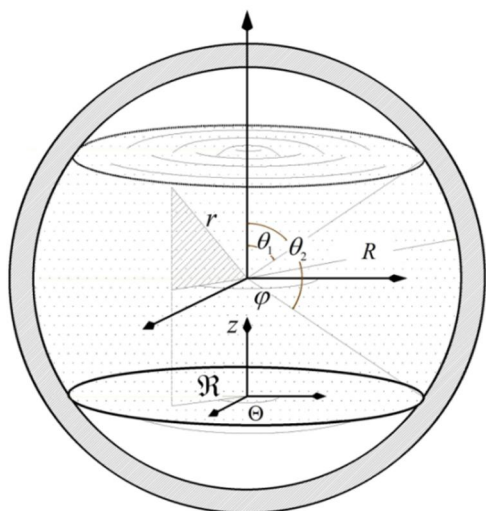


Fig. 1 Spherical container with a membrane bottom and adopted coordinate systems

شکل 1 مخزن کروی با کفی غشایی حاوی سیال و دستگاه‌های مختصات

$$\frac{d\Phi}{dr} = 0, \quad r = R \quad (2)$$

شرایط مرزی در سطح آزاد سیال شامل شرط مرزی سطح آزاد سینماتیکی<sup>6</sup> و شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی<sup>7</sup> است. در معادله نایبر استوکس، با ثابت بودن ویسکوزیته دینامیکی<sup>8</sup> و شرط غیر لزج بودن<sup>9</sup> (صرفنظر از اثرات ویسکوزیته)، معادله اولر<sup>10</sup> حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن نیروهای حجمی پایستار<sup>11</sup> و عملیات ریاضی و همچنین شرط غیر چرخشی<sup>12</sup> بودن سیال، معادله به فرم مورد نظر درمی‌آید. به دلیل اینکه نیروهای گرانشی به طور ذاتی در مورد موج‌های سطحی دارای اهمیت می‌باشند، جاذبه باید در جمله‌ی نیروهای حجمی در نظر گرفته شود [13]. همچنین در سطح آزاد، فشار برابر است با فشار محیط<sup>13</sup> که معادل با مقدار صفر جمله‌ی فشار در معادله‌ی یادشده می‌باشد. در نهایت به دلیل کوچک بودن مؤلفه‌های سرعت جریان سیال در تحلیل مورد نظر ما و خطی کردن معادلات، جمله‌ی مربوط به سرعت خود سیال در معادله حذف خواهد شد. ترم‌های کشش سطحی<sup>14</sup> و دیگر ترم‌ها می‌توانند به این معادله وارد افزوده شوند. شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی در دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به صورت رابطه (3) بیان می‌شود [14]:

$$\frac{d\Phi}{dt} + g\Gamma = \text{const}, \quad z = h \quad (3)$$

که در آن  $\Gamma$ ، تغییر مکان سطح آزاد سیال و  $g$ ، شتاب جاذبه می‌باشند. با تبدیل معادله‌ی (3) از سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به سیستم دستگاه مختصات کروی اصلی، معادله‌ی شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی را می‌توان به صورت رابطه (4) بیان نمود:

$$\frac{d\Phi}{dt} + g\Gamma = \text{const}, \quad r \cos \theta = R \cos \theta_1 \quad (4)$$

شرط مرزی دیگری که در سطح آزاد سیال حاکم است، شرط مرزی

غشا<sup>1</sup> [3-7]. در تعدادی از مطالعه‌های گفته‌شده نیز اثر کشش سطحی<sup>2</sup> دیده شده است [1-4, 8]. به عنوان نتایج کلی این مطالعات می‌توان گفت؛ به طور کلی فرکانس‌های طبیعی هم‌گیر تلاطم<sup>3</sup>، با کاهش سختی<sup>4</sup> کف، مقداری کم می‌شوند. در حالی که اثر کشش سطحی، فرکانس‌های طبیعی تلاطم را افزایش می‌دهند. در چنین سیستم‌هایی، رفتار دینامیکی سیال و کف انعطاف‌پذیر به صورت هم‌گیر می‌باشند که درجه هریک وابسته به پارامترهای دخیل در آن سیستم است، مانند؛ پارامتر ارتفاع سیال، نسبت چگالی‌ها و پارامتر سختی کف. چپبا و همکاران [8] یک تحلیل جامع ارتعاشات هم‌گیر را در مخزن استوانه‌ای همراه با سطح آزاد سیال و کف غشا، برای انواعی از شرایط مرزی ارائه داده‌اند. تحلیل‌های پایه‌ای برای هندسه‌ی کروی نیز در مطالعات زیادی گزارش شده‌اند [9-11]. همچنین تحلیلی هیدروالاستیک با استفاده از روش گالرکین<sup>5</sup> نیز انجام شده است [12]. معادلات پایه و اثبات آن‌ها را در دو کتاب مطرح و مرجع معرفی شده می‌یابیم [13، 14]. سالم و همکاران [15] تحلیلی برای تلاطم سیال در حالت مخازن قسمتی پر از سیال بر مبنای روش آونگی ارائه نموده‌اند. مخازن انعطاف‌پذیر نیز در تحلیل آقای نیکولیکی و بیلینگان [16] دیده می‌شود. عموم مطالعات مربوط به حل‌های تحلیلی در این زمینه، بصورت مسائل مقدار مرزی و البته شرایط مرزی بسیار پیچیده می‌باشند. مطالعات در حوزه‌ی حل‌های تحلیلی برای هندسه‌ی استوانه‌ای و مستطیلی در دو و سه بعد به وفور گزارش شده است اما در هندسه‌ی کروی جز در چندین مورد پایه‌ای، مورد برجسته‌ای گزارش نشده است.

در مطالعه‌ی حاضر، تمرکز ما بر ارتعاشات هیدروالاستیک هم‌گیر در محیط کروی با دیواره‌ی صلب و یک کف انعطاف‌پذیر است که به صورت قسمتی‌پر از سیال بدون اصطکاک در نظر گرفته می‌شود، کف به صورت غشا فرض شده است. تبدیلات مختصاتی خاص و استفاده از سیستم دستگاه مختصات کمکی نیز مشهود است. در نتایج عددی، فرکانس‌های هم‌گیر ارتعاشی برای مقادیر مشخص پارامترهای سیستم، تعیین شده‌اند.

## 2- معادلات حاکم

یک مخزن کروی با دیواره‌ی صلب و کف غشا، در زاویه‌ی  $\theta_2$  که تا زاویه‌ی سطح  $\theta_1$  از یک سیال غیر لزج و تراکم‌ناپذیر پر شده است را مطابق شکل 1 در نظر می‌گیریم، همچنین سیستم دستگاه مختصات اصلی کروی  $(r, \theta, \varphi)$  و سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای  $(R, \Theta, Z)$  نیز نشان داده شده است. برای سرعت‌های کم سیال، معادلات حاکم می‌توانند به فرم خطی شده درآیند [8، 12]. از تغییر شکل استاتیکی غشای کف صرفنظر می‌کنیم. از آنجا که رفتار سیال به صورت غیر چرخشی فرض شده، پتانسیل سرعت سیال  $\Phi(r, \theta, \varphi, t)$ ، در معادله‌ی لاپلاس به صورت رابطه (1) صدق می‌کند [13]:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1)$$

یکی از شرایط مرزی که باید ارضا شود، شرط مرزی دیواره است. این شرط مرزی بیان می‌کند که مؤلفه‌ی سرعت عمودی سیال در مواجهه با دیواره کروی مخزن صفر می‌شود که به صورت رابطه (2) بیان می‌شود:

<sup>6</sup> Free Surface Kinematic BC

<sup>7</sup> Free Surface Dynamic BC

<sup>8</sup> Dynamic Viscosity

<sup>9</sup> Inviscid

<sup>10</sup> Euler

<sup>11</sup> Conservative

<sup>12</sup> Irrotational

<sup>13</sup> Ambient Pressure

<sup>14</sup> Surface Tension

<sup>1</sup> Membrane

<sup>2</sup> Surface tension

<sup>3</sup> Sloshing

<sup>4</sup> Stiffness

<sup>5</sup> Galerkin

صورت (12) ارائه و پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned} \Phi_t(r, \theta, \varphi, t) &= i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} r^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ &+ i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ &+ i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} r^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \\ &+ i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \end{aligned} \quad (12)$$

همچنین پاسخ تغییر شکل غشای کف به صورت (13) پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned} W_t(r, \theta, \varphi, t) &= e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ W_{mn} \left( (r^n + r^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (R^n + R^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta_2) \cos m\varphi \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

که  $P_n^m(\cos \theta)$  تابع لژاندر وابسته‌ی نوع اول<sup>2</sup> می‌باشد، همچنین  $A_{mn}$ ،  $B_{mn}$ ،  $C_{mn}$  و  $D_{mn}$  نیز ضرایب مجهول هستند. لازم به ذکر است که فرم جواب در نظر گرفته شده برای خیز کف (13)، به صورت خودبه‌خود شرط مرزی حلقوی اتصال کف و دیواره‌ی (11) را ارضا می‌نماید. با اعمال فرم جواب پیشنهادی (12) در شرط مرزی دیواره‌ی (3)، نتیجه‌ی (4) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi_t}{\partial r} \right|_{r=R} &\equiv i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} n r^n P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ &+ i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -B_{mn} (n + 1) r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ &+ i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} n r^n P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \\ &+ i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -C_{mn} (n + 1) r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

برطبق رابطه‌ی (14) می‌توان گفت در صورتی که رابطه‌ی (15) برقرار باشد، فرم جواب پیشنهاد شده‌ی (12)، شرط مرزی دیواره را می‌تواند ارضا نماید:

$$B_{mn} = A_{mn} n R^{2n+2} \quad \& \quad C_{mn} = D_{mn} n R^{2n+2} \quad (15)$$

بنابراین، جواب پیشنهاد شده‌ی (12) با استفاده از رابطه‌ی (15) به صورت (16) اصلاح می‌گردد:

$$\begin{aligned} \Phi_{tm} &= i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (r^n + nR^{2n+2} r^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ &+ i\omega e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} (r^n + nR^{2n+2} r^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \end{aligned} \quad (16)$$

دو شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی (4) و شرط مرزی سطح آزاد

سینماتیکی سطح آزاد سیال است. بطور کلی این شرط بیان کننده‌ی برابری سرعت مرز و سیال داخل می‌باشد [13]. فرآیند انجام شده‌ی بالا برای تبدیل شرط مرزی سطح آزاد دینامیکی از دستگاه مختصات کمکی به اصلی برای شرط مرزی سینماتیکی نیز انجام می‌شود. شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد سیال در سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به صورت زیر ارائه می‌شود [8, 13, 14]:

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad z = h \quad (5)$$

که با تبدیل به دستگاه مختصات اصلی کروی به صورت رابطه (6) بیان می‌شود:

$$\cos \theta \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad r \cos \theta = R \cos \theta_1 \quad (6)$$

برای برقراری شرط سازگاری<sup>1</sup> سیال و غشا در کف، مولفه‌ی عمودی سرعت سیال و سرعت غشای کف نیز باید با یکدیگر برابر باشند. در سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای، این شرط به صورت ساده‌ی (7) نوشته می‌شود [8, 14]:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\Phi}{dz}, \quad z = 0 \quad (7)$$

که در رابطه (7)  $W$ ، خیز غشای کف می‌باشد. با تبدیل این معادله از سیستم دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به سیستم مختصات اصلی کروی به شرط مرزی سازگاری در کف به صورت رابطه (8) می‌رسیم:

$$\cos \theta \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad r \cos \theta = R \cos \theta_2 \quad (8)$$

معادله‌ی حرکت غشای کف در دستگاه مختصات کمکی استوانه‌ای به صورت (9) می‌باشد [8, 14]:

$$\begin{aligned} T \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \Re^2} + \frac{1}{\Re} \frac{\partial W}{\partial \Re} - \frac{1}{\Re^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \Theta^2} \right) &= \rho_m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho_f g W, \quad z \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن  $\rho_m$  و  $\rho_f$  به ترتیب چگالی سیال و چگالی سطحی کف می‌باشند. این معادله در سیستم دستگاه مختصات اصلی کروی، شکل (10) را به خود می‌گیرد:

$$\begin{aligned} T \left( \left( \frac{1}{r} + \frac{\cos \theta}{r} \right) \frac{\partial W}{\partial r} + \left( \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \right) \frac{\partial W}{\partial \theta} \right. & \\ \left. - \left( \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial r} \right. & \\ \left. + (\sin^2 \theta) \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \left( \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right. & \\ \left. + \left( \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) & \\ = \rho_m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho_f g W & \\ , \quad r \cos \theta = R \cos \theta_2 & \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن  $T$ ، کشش کف و  $\rho_m$ ، جرم واحد سطح غشای کف می‌باشد. در نهایت، محل اتصال دیواره مخزن به غشای کف که همان مرز حلقوی غشا می‌باشد، ایجاب می‌کند که [8, 13]:

$$W = 0, \quad r = R \quad \& \quad \theta = \theta_2 \quad (11)$$

### 3- روش و فرآیند حل

حل معادله‌ی لاپلاس (1)، که می‌تواند شرایط مرزی را برآورده نماید، به

<sup>2</sup> Associated Legendre Function of the First Kind

<sup>1</sup> Compatibility Condition

همچنین برای معادله‌ی کف نیز داریم:

$$\iint (R_2)((r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)(\cos m\varphi + \sin m\varphi))\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta^2}\right)^2 d\theta d\varphi = 0 \quad (23)$$

در نهایت برای وجود جواب غیر بدیهی باید دترمینان سیستم معادلات (22) و (23) برابر با صفر شود که این نیز منجر به بدست آمدن فرکانس‌های سیستم، می‌گردد.

#### 4- نتایج عددی

نتایج حاصل از تحلیل پارامتری برای نیم‌موج‌های مختلف در ادامه آورده شده‌اند. این نتایج با حذف مقادیر منفی و همچنین مقادیر مختلط به علت عدم تطابق با واقعیت فیزیکی، بدست آمده‌اند. فرکانس‌های ارتعاشی سیستم هم‌گیر سیال و سازه، برای پارامترهای مختلف سیستم شامل؛ پارامتر کشش غشای کف  $T$ ، پارامتر چگالی سیال  $\rho_f$ ، پارامتر چگالی سطحی غشا  $\rho_m$ ، شتاب گرانش  $g$ ، همچنین پارامترهای هندسی سیستم شامل پارامتر شعاع بیرونی  $R$ ، پارامتر تعیین کننده‌ی فاصله‌ی سطح سیال  $\theta_1$  و در نهایت پارامتر تعیین کننده‌ی فاصله‌ی کف غشا از مرکز  $\theta_2$ ، که در جدول 1 ارائه شده‌اند، بدست آمده‌اند و نتایج آن در جدول 2 ارائه شده‌اند.

#### 4-1- مدل نرم‌افزاری و نتایج

مخزن کروی به شعاع 0.5 متر و همچنین سطح آزاد سیال و کف بترتیب در زوایای  $\theta_1$  و  $\theta_2$ ، در نرم‌افزار انسیس مدل شده‌است. دیواره به صورت صلب و کف به صورت انعطاف‌پذیر مقید شده‌است. شکل 2، مود دوم و جدول 3، مودهای اول تا دهم این مدل را ارائه می‌دهند. لازم به‌ذکر است که ستون‌ها نشان دهنده‌ی عدد نیم طول موج  $n$ ، و سطرها نشان دهنده‌ی عدد نیم طول موج  $m$  می‌باشند. همچنین درجایی که عدد نیم طول موج  $m$  از عدد نیم طول موج  $n$  بزرگتر باشد، با توجه به فرم جواب‌های در نظر گرفته شده، جوابی غیر بدیهی بدست نمی‌آید؛ بنابراین این محدوده در جدول 2 در نظر گرفته نشده‌است. در نهایت نیز نتایج بدست آمده از حل به‌صورت مود اول ارتعاشی سطح سیال در شکل 3، مود اول ارتعاشی کف غشا در شکل 4، مود دوم ارتعاشی سطح سیال در شکل 5 و مود دوم ارتعاشی کف غشا در شکل 6 ارائه شده‌اند.

#### 5- نتیجه‌گیری

روش تحلیلی ارائه شده برای سیستم سازه سیال، همراه با سطح آزاد سیال و کف انعطاف‌پذیر را می‌توان یکی از چندین روش بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی تلاطم دانست. این روش به علت ماهیت تحلیلی خود می‌تواند به عنوان مرجع دیگر حل‌ها مورد استفاده قرار گیرد. همان‌طور که از نتایج بدست آمده از تحلیل عددی یا پارامتری و همچنین مدل‌سازی نرم‌افزاری مشاهده می‌شود، مقادیر محاسبه شده‌ی فرکانس‌های طبیعی به مقادیر بدست آمده از مدل نرم‌افزاری بسیار نزدیک است. تفاوت‌های دیده شده در مقادیر را می‌توان به‌علت دخیل بودن تعداد پارامترهای بیشتر در مدل تحلیلی نسبت به مدل نرم‌افزاری دانست. مقادیر فرکانس‌های بدست آمده از دوروش تحلیلی و نرم‌افزاری همراه با مقادیر اختلاف، در جدول 4 ارائه شده‌اند. این نتایج به‌وضوح دقت روش تحلیلی ارائه شده را نشان می‌دهند. همچنین این حالت می‌تواند به‌عنوان حالت پایه برای مسائلی با شرایط مرزی سطح و کف پیچیده‌تر نیز در نظر گرفته شود.

سینماتیکی (6) می‌تواند به صورت (17) تلفیق شوند:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \left( \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (17)$$

قراردگی جواب اصلاح شده‌ی پیشنهادی (16) در رابطه‌ی شرط مرزی تلفیق شده‌ی (17)، منجر به جواب (18) می‌شود:

$$\begin{aligned} & (-\omega^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn}(f_1) + C_{mn}(f_2)) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn}(U_1) + C_{mn}(U_2)) \\ & = R_1 \\ & , \quad r \cos\theta = R \cos\theta_1 \end{aligned} \quad (18)$$

که توابع  $U_1$ ،  $U_2$ ،  $f_1$ ،  $f_2$ ، توابعی از پارامترهای چگالی سیال و همچنین چندین پارامتر هندسی و غیر هندسی دیگر هستند و به تفصیل در پیوست الف داده شده‌اند و همچنین  $R_1$  نیز عبارت باقیمانده‌ی معادله‌ی (17) است. مجدداً با قراردگی حل‌های پیشنهاد شده و اصلاح شده برای معادله‌ی لاپلاس (16) و همچنین حل پیشنهادی برای خیز کف (13) در معادله‌ی سازگاری در کف (6)، ضریب مجهول  $W_{mn}$  برحسب دو ضریب مجهول دیگر یعنی  $A_{mn}$  و  $C_{mn}$  به صورت (19) نتیجه می‌شود:

$$W_{mn} = A_{mn}\Lambda_1 + C_{mn}\Lambda_2 \quad , \quad r \cos\theta = R \cos\theta_2 \quad (19)$$

که در آن  $\Lambda_1$  و  $\Lambda_2$  توابعی از پارامترهای سیستم‌اند و در پیوست ب به صورت مبسوط آورده شده‌اند. همچون روند بالا، با قراردگی فرم پاسخ‌های پیشنهادی در معادله‌ی حرکت غشای (10) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{W_{mn}[T(F_1) + F_2]\} \\ & - \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{[W_{mn}(F_3)] \\ & + [A_{mn}(F_4) + C_{mn}(G_4)]\} = R_2 \\ & , \quad r \cos\theta = R \cos\theta_2 \end{aligned} \quad (20)$$

که  $F_1$  تا  $F_4$  و  $G_4$ ، توابعی از پارامترهای سیستم می‌باشند که در پیوست ج به صورت بسط یافته ارائه شده‌اند، همچنین  $R_2$  نیز عبارت باقیمانده‌ی معادله‌ی (10) است. بعد از آن با قراردگی نتیجه‌ی معادله‌ی سازگاری در کف (19)، در نتیجه‌ی معادله‌ی حرکت غشای (18)، داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn}\Lambda_1(T(F_1) + F_2)] \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [C_{mn}\Lambda_2(T(F_1) + F_2)] \\ & - \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn}(\Lambda_1 F_3 + F_4) \\ & + C_{mn}(\Lambda_2 F_3 + G_4)] \\ & , \quad r \cos\theta = R \cos\theta_2 \end{aligned} \quad (21)$$

مطابق با روش گالرکین، عبارات باقیمانده‌ی معادله‌ی سطح سیال و معادله‌ی غشای کف متعامد بر جواب خواهد بود، یعنی برای معادله‌ی سطح آزاد سیال خواهیم داشت:

$$\iint (R_1)((r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta)(\cos m\varphi + \sin m\varphi))\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta^2}\right)^2 d\theta d\varphi = 0 \quad (22)$$

<sup>1</sup> Residue

جدول 1 مقادیر در نظر گرفته شده برای پارامترهای سیستم

Table 1 Characteristic parameters of the system

$R$ (m)	$T$ (N/m)	$g$ (m/s <sup>2</sup> )	$\rho_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_m$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\sigma$ (N/m)	$\theta_1$ (rad)	$\theta_2$ (rad)	پارامتر
0.5	$10^5$	0.1	1000	39	0.01	$\pi/3$	$3\pi/4$	مقدار

جدول 2 مقادیر فرکانس‌های بدست آمده برای پارامترهای نیم موج مختلف

Table 2 System frequencies for different half wave parameters

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
12	10.7	9.15	7.76	4.68	4.99	3.79	2.97	-	1.15	1
11.9	10.4	8.98	7.8	6.24	4.8	3.9	7.2	-	-	2
13.3	14	8.98	7.68	7.64	9.65	2.5	-	-	-	3
11.9	10.4	8.95	7.65	7.42	21.1	-	-	-	-	4
12	10.9	6.8	11.4	-	6.99	-	-	-	-	5
12	11	12.4	-	-	-	-	-	-	-	6
14.5	19.9	-	-	-	-	-	-	-	-	7
23.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10

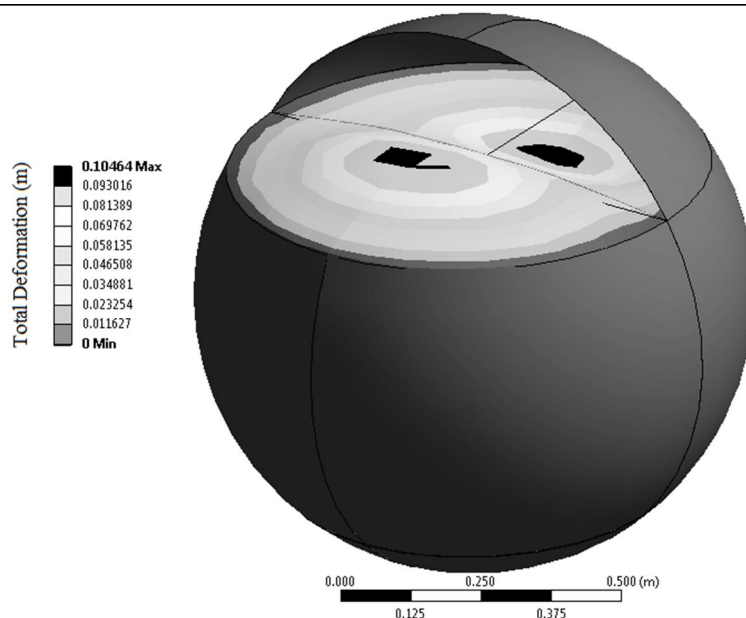


Fig. 2 2<sup>nd</sup> mode shape in software modeling

شکل 2 شکل مود دوم برای مدل ایجاد شده شامل مخزن، سیال، کفی و سطح آزاد

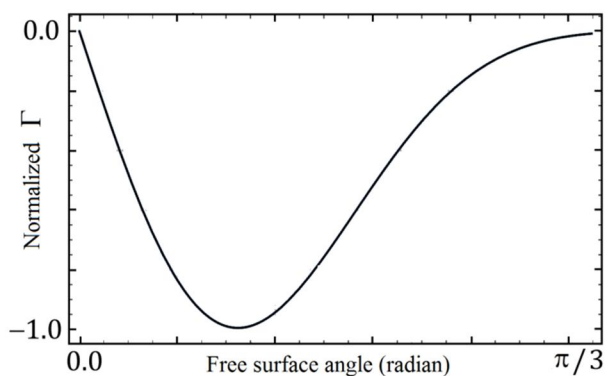


Fig. 3 1<sup>st</sup> vibration mode of the free surface

شکل 3 مود اول ارتعاشی سطح سیال

جدول 3 ده فرکانس طبیعی اول حاصل از مدل‌سازی نرم افزاری

Table 3 10 first natural frequencies obtained from software modeling

فرکانس (Hz)	مود
1.09	1
2.37	2
2.80	3
3.64	4
3.79	5
4.51	6
4.67	7
4.68	8
5.98	9
6.87	10

یکی دیگر از نتایج مهمی که می‌توان از این تحلیل دریافت نمود، بدست آوردن نمودارهای پارامترهای مختلف بر حسب فرکانس‌های طبیعی سیستم است. در این مطالعه، مهم‌ترین پارامترهای ما عبارتند از کشش غشای کف، چگالی سیال داخلی و شعاع مخزن. از این نمودارها می‌توان به صورت مستقیم در فرآیندهای طراحی بهره جست. در واقع در حالتی که تعداد پارامترهای تحت کنترل طراح محدود باشد، می‌تواند بدون نیاز به فرآیند بهینه‌سازی از نمودارهای زیر برای تعیین و تغییر فرکانس‌های طبیعی سیستم مورد نظر خود بهره گیرد.

باید توجه داشت که در این مطالعه، نمودارهای رسم شده به صورت مجموعه‌ای از نقاط گسسته هستند که برای هر میزان از پارامترها محاسبه شده‌اند و به صورت منحنی برازش شده نمی‌باشند بلکه مجموعه‌ای از خطوط به هم متصل شده هستند. علت این نوع از رسم منحنی، تاکید بر مقدار فرکانس‌های طبیعی و جدول فرکانسی است، به عبارت دیگر نمودارهای تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب پارامترها، هدف اصلی این مطالعه نبوده است.

اولین نمودار مورد بررسی نمودار تغییرات فرکانس طبیعی سیستم بر حسب تغییرات کشش غشای کف می‌باشد. شکل 7 نشان می‌دهد که افزایش کشش غشای کف منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌گردد. این افزایش فرکانس تا بی‌نهایت ادامه نمی‌یابد بلکه تا حدی است که کف به حالت صلبیت خود نزدیک شود. به عبارت بهتر حد افزایش فرکانس با افزایش کشش کف حد صلبیت غشا است. با توجه به این نمودار می‌توان مشاهده نمود که هرچه مود فرکانسی افزایش می‌یابد، میزان تغییرات نیز زیادتر می‌شود هرچند در نهایت تمامی مدها به حد مربوط به خود نزدیک می‌شوند. نمودار بعدی که مورد بررسی قرار گرفته، نمودار تغییرات چگالی سیال داخل مخزن با فرکانس‌های طبیعی سیستم است. شکل 8 بیان می‌کند که افزایش چگالی سیال منجر به کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. نکته‌ای که در اینجا باید به آن توجه نمود این است که هرچند تغییرات فرکانس‌ها در این نمودار چشم‌گیر است اما با توجه به اینکه تغییر چگالی به معنای تغییر سیال داخلی است، قدرت طراح برای انتخاب هر نوع هر سیالی محدود است چرا که در سیستم‌های فضایی عموماً سیال مورد استفاده در مخازن با توجه به ملاحظات دیگر و در مراحل دیگری تعیین می‌گردد.

سومین نمودار بررسی شده در این مطالعه، نمودار تغییرات فرکانس‌های طبیعی سیستم بر حسب تغییرات شعاع مخزن می‌باشد. شکل 9 نشان می‌دهد که افزایش شعاع مخزن به شدت به کاهش فرکانس‌های طبیعی منجر می‌شود. تغییرات مشاهده شده در این نمودار به مراتب بیشتر و شدیدتر

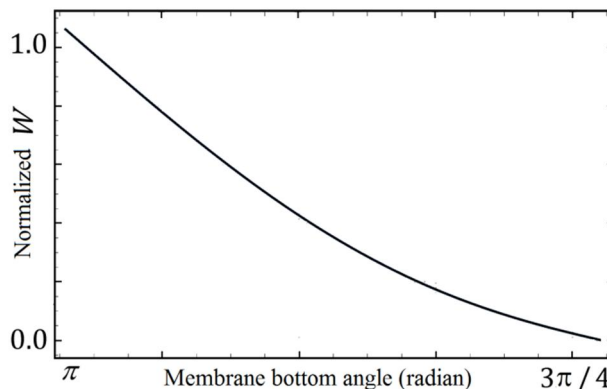


Fig. 4 1<sup>st</sup> vibration mode of the membrane bottom

شکل 4 مود اول ارتعاشی کف

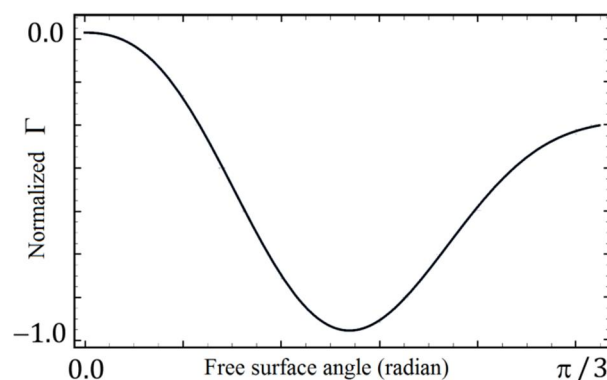


Fig. 5 2<sup>nd</sup> vibration mode of the free surface

شکل 5 مود دوم ارتعاشی سطح سیال

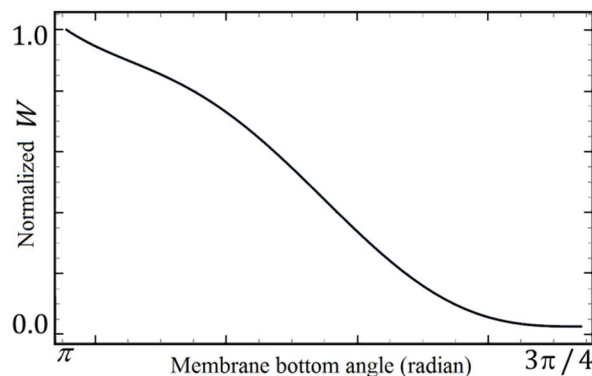


Fig. 6 2<sup>nd</sup> vibration mode of the membrane bottom

شکل 6 مود دوم ارتعاشی کف

جدول 4 مقایسه ده فرکانس طبیعی اول بدست‌آمده از حل تحلیلی و مدل‌سازی نرم‌افزاری

Table 4 Comparison between natural frequencies of analytical method and those of software modeling

مود	فرکانس حل تحلیلی (Hz)	فرکانس، نرم‌افزاری (Hz)	درصد اختلاف
1	1.15	1.09	0.055
2	2.50	2.37	0.054
3	2.97	2.80	0.060
4	3.79	3.64	0.041
5	3.90	3.79	0.29
6	4.68	4.51	0.037
7	4.80	4.67	0.027
8	4.99	4.86	0.026
9	6.24	5.98	0.043
10	6.99	6.87	0.017

6- فهرست علائم

$g$	شتاب گرانشی ( $ms^{-2}$ )
$R$	شعاع بیرونی مخزن (m)
$r$	شعاع در مختصات کروی اصلی (m)
$\mathcal{R}$	شعاع در دستگاه مختصات استوانه‌ای کمکی (m)
$T$	کشش کف ( $Nm^{-1}$ )
$W$	خیز غشا

علائم یونانی

$\Phi$	تابع پتانسیل سیال
$\Gamma$	جایجایی سطح سیال (m)
$\theta_1$	زاویه‌ی سطح آزاد سیال (rad)
$\theta_2$	زاویه‌ی غشای کف (rad)
$\rho_f$	چگالی سیال ( $kgm^{-3}$ )
$\rho_m$	چگالی سطحی غشا ( $kgm^{-2}$ )

زیرنویس‌ها

$f$	سیال
$m$	غشا
$t$	پاسخ کلی
$t_m$	پاسخ کلی اصلاح شده

7- پیوست‌ها

پیوست الف

توابع  $U_2, U_1, f_2, f_1$  عبارتند از:

$$f_1 = (r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi$$

$$f_2 = (r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) \sin m\varphi$$

$$U_1 = ((g \cos\theta)(nr^{n-1} - n(n+1)R^{2n+2}r^{-n-2})P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi - \left(g \frac{\sin\theta}{r} r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1} \frac{d(P_n^m(\cos\theta))}{d\theta} \cos m\varphi\right))$$

$$U_2 = ((g \cos\theta)(nr^{n-1} - n(n+1)R^{2n+2}r^{-n-2})P_n^m(\cos\theta) \sin m\varphi - \left(g \frac{\sin\theta}{r} r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1} \frac{d(P_n^m(\cos\theta))}{d\theta} \sin m\varphi\right))$$

پیوست ب

توابع  $\Lambda_2$  و  $\Lambda_1$  عبارتند از:

$$\Lambda_1 = \frac{(\cos\theta \alpha_2 P_n^m(\cos\theta) - \frac{\sin\theta}{r} \alpha_1 \frac{d(P_n^m(\cos\theta))}{d\theta})}{[(r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) - (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)]} \tan m\varphi$$

$$\Lambda_2 = \frac{(\cos\theta \alpha_2 P_n^m(\cos\theta) - \frac{\sin\theta}{r} \alpha_1 \frac{d(P_n^m(\cos\theta))}{d\theta})}{[(r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) - (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)]}$$

که:

$$\alpha_1 = (r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1})$$

$$\alpha_2 = (nr^{n-1} - n(n+1)R^{2n+2}r^{-n-2})$$

پیوست ج

توابع  $F_1$  تا  $F_4$  عبارتند از:

$$F_2 = (\rho_f g)((r^n + r^{-n-1})P_n^m(\cos\theta) - (R^n + R^{-n-1})P_n^m(\cos\theta_2)) \cos m\varphi$$

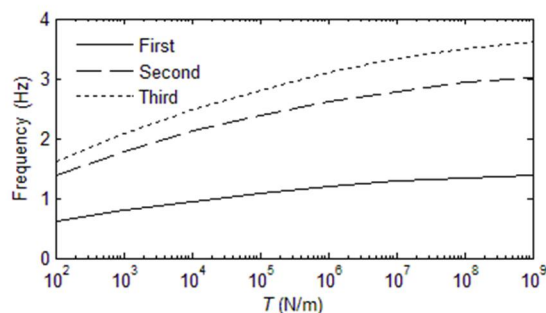


Fig. 7 Dependence of three natural frequency modes on membrane tension

شکل 7 تغییرات فرکانس طبیعی برای سه مود اول بر حسب کشش غشای کف

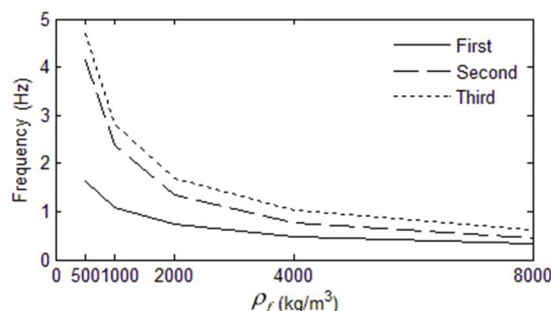


Fig. 8 Dependence of three natural frequency modes on liquid density

شکل 8 تغییرات فرکانس طبیعی برای سه مود اول بر حسب چگالی سیال

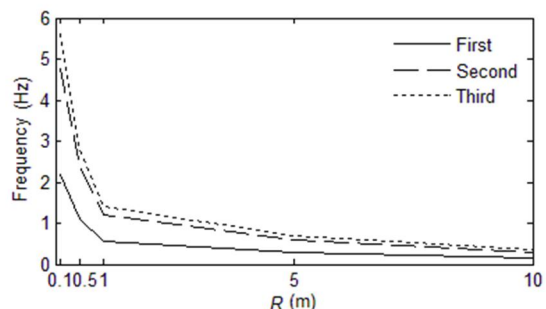


Fig. 9 Dependence of three natural frequency modes on container radius

شکل 9 تغییرات فرکانس طبیعی برای سه مود اول بر حسب شعاع مخزن

از دو نمودار قبل است، اما مجدداً باید به نکته گفته شده در مورد شکل 8 دقت نمود. در واقع کنترل طراح بر میزان تغییرات شعاع مخزن عاملی است که می‌تواند به کم شدن کاربرد این نمودار کمک نماید.

در حقیقت در سامانه‌های فضایی عوامل مؤثر دیگری هستند که مقدار شعاع مخزن را تعیین می‌کنند، بنابراین به منظور تعیین و تغییر بازه فرکانس‌های طبیعی مورد دلخواه طراح، می‌بایست از ابزارهای دیگری همچون بهینه‌سازی چند متغییره نیز بهره جست، هر چند که داشتن دید کلی نسبت به پارامترها و عوامل مؤثر بر تغییر فرکانس‌ها بسیار مهم است. البته کاربرد اصلی نمودارهای بالا و دیگر نمودارهای مشابه در تغییر پارامترهای گفته شده به منظور رسیدن به فرکانس یا محدوده فرکانس طبیعی به قوت خود باقی است.

در نهایت همانگونه که گفته شد، این روش و الگو می‌تواند به عنوان حالت پایه و اولیه در هندسه‌ی کروی همراه با غشای کف و سطح سیال در نظر گرفته شود.



8- مراجع

[1] H. F. Bauer, J. Siekmann, J. T. S. Wang, Axisymmetric hydroelastic sloshing in an annular cylindrical container, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 5, No. 8, pp. 981-983, 1968 .

[2] Y. Kerboua, A. A. Lakis, M. Thomas, L. Marcouiller, Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid. *Journal of Mathematical Modelling*, Vol. 32, No. 1, pp. 2570-2586, 2008.

[3] M. Chiba, Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid. Part II: Linear axisymmetric vibration analysis, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 7, No. 1, pp. 57-73, 1993.

[4] M. Chiba, Axisymmetric Free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation , *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, No. 3, pp. 387-394, 1994.

[5] H. F. Bauer, W. Eidel, Hydroelastic vibrations in a two-dimensional rectangular container filled with frictionless liquid and a partly elastically covered free surface, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, No. 2, pp. 209-220, 2004 .

[6] M. Chiba, K. Abe, Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom containing liquid-analysis using harmonic balance method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 34, No. 3, pp. 233-260, 1999 .

[7] J. Siekmann, S.-C. Chang, On the dynamics of liquids in a cylindrical tank with a flexible bottom, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 37, No. 2, pp. 99-109, 1968 .

[8] M. Chiba, H. Watanabe, H. F. Bauer, Hydroelastic coupled vibrations in a cylindrical container with a membrane bottom, containing liquid with surface tension, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, No. 4, pp. 717-740, 2002 .

[9] H. F. Bauer, Oscillations of immiscible liquids in free space or in spherical containers in zero-gravity environment, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 51, No. 6, pp. 363-381, 1982.

[10] H. F. Bauer, *Oscillations of non-viscous liquid in various container geometries*: First Edition, pp.223-230, Neubiberg : Institut für Raumfahrttechnik, 1999 .

[11] H. F. Bauer, W. Eidel, Nonlinear liquid oscillations in spherical systems under zero-gravity, *Acta Mechanica*, Vol. 65, No. 1-4, pp. 107-126, 1987.

[12] Y. K. Cheung, D. Zhou, Hydroelastic vibration circular container bottom plate using the galerkin method, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 16, No. 4, pp. 561-580, 2002 .

[13] I. G. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids*, Fourth Edition, pp.27-37, Boca Raton: CRC, Taylor & Francis, 2012.

[14] R. A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics*: First Edition ,pp.490-497, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005

[15] M. I. Salem, V. H. Mucino, E. Saunders, M. Gautam, A. Lozano, Lateral sloshing in partially filled elliptical tanker trucks using a trammel pendulum vibration analysis, *International Journal of Heavy Vehicle Systems*, Vol. 16, No. 1, pp. 207-224, 2009

[16] S. Nicolici, R. M. Bilegan, Fluid structure interaction modeling of liquid sloshing phenomena in flexible tanks, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 258, No. 0, pp. 51-56, 2013.

$$\begin{aligned}
 F_3 &= (-\rho_m) \left( (r^n + r^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta) \right. \\
 &\quad \left. - (R^n + R^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta_2) \right) \cos m\varphi \\
 F_4 &= (\rho_f) \left( (r^n + nR^{2n+2}r^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta) \right. \\
 &\quad \left. - (R^n + R^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta_2) \right) \cos m\varphi \\
 G_4 &= (\rho_f) \left( (r^n + nR^{2n+2}r^{-(n+1)}) P_n^m(\cos \theta) \right. \\
 &\quad \left. - (R^n + R^{-(n+1)}) P_n^m(\cos \theta_2) \right) \sin m\varphi \\
 F_1 &= \left( \left[ \left( \frac{1 + \cos \theta^2}{r} \right) \left( nr^{n-1} - (n+1)r^{-n-2} \right) P_n^m(\theta) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (R^n + R^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta) \right) \cos m\varphi \right] \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{\cot \theta - 2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \right) \left( r^n \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + r^{-n-1} \right) \frac{d(P_n^m(\cos \theta))}{d\theta} \right. \\
 &\quad \left. - (R^n + R^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta_2) \right) \cos m\varphi \right] \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \right) \left( nr^{n-1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (n+1)r^{-n-2} \right) \frac{d(P_n^m(\cos \theta))}{d\theta} \right. \\
 &\quad \left. - (R^n + R^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta_2) \right) \cos m\varphi \right] \\
 &\quad + \left[ (\sin \theta^2) \left( (n(n-1)r^{n-2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (n+1)(n+2)r^{-n-3} \right) P_n^m(\cos \theta) \right. \\
 &\quad \left. - (R^n + R^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta_2) \right) \cos m\varphi \right] \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{\cos \theta^2}{r^2} \right) \left( r^n \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + r^{-n-1} \right) \frac{d^2(P_n^m(\cos \theta))}{d\theta^2} \right. \\
 &\quad \left. - (R^n + R^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta_2) \right) \cos m\varphi \right] \\
 &\quad + \left[ \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta^2} \right) \left( (r^n + r^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (R^n \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + R^{-n-1}) P_n^m(\cos \theta_2) \right) (-m^2) \cos m\varphi \right] \Big)
 \end{aligned}$$