مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1394، دوره 15، شماره 11، ص‌ص 54-62

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل ارتعاشات آزاد سه بعدی نانوورق مستطیلی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی

احسان عبداله زاده شهربابکی[1]، اکبر علی بیگلو[2*]

1- دانشجو دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 14115-143، abeigloo@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت:29 تیر 1394

پذیرش: 21 شهریور 1394

ارائه در سایت: 11 مهر 1394

کلید واژگان:

سه بعدی

ارتعاشات

الاستیسیته غیرمحلی

نانوورق

چکیده

در روش‌های متداول ریتز و گلرکین بر اساس تئوری الاستیسیته محلی، معمولا از چند جمله ای به عنوان توابع تقریب استفاده می‌شود. اما این روش‌ها برای استفاده در تحلیل غیرمحلی سه بعدی مناسب نیستند. در مطالعه حاضر برای غلبه بر این مشکل نوعی راهبرد باقی‌مانده وزنی، با توابع مثلثاتی به عنوان توابع تقریب، ارائه شده است. با انتخاب توابع تقریب مناسب تأثیر تکیه‌گاه‌های مختلف در رفتار فرکانسی نانو ورق بررسی شده است. اعتبار سنجی فرمول‌بندی حاضر از طریق مقایسه نتایج عددی حاصل با نتایج ارائه شده در مقالات انجام پذیرفته است. طبق نتایج عددی حاصل ، رفتار فرکانسی نانو ورق قویا متأثر از پارامتر غیر محلی بوده و این اثر در مودهای ارتعاشی بالا به‌دلیل کوچک بودن طول موج مود از اهمیت بالائی برخوردار است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که تفاوت فاحشی بین رفتار جواب مدل سه بعدی نانوورق و مدل دو بعدی آن وجود دارد و همچنین اختلاف پاسخ تحلیل دو و سه بعدی در این حد در الاستیسیته کلاسیک بارز نیست. همچنین تأثیرات نسبت طول به ضخامت، نسبت ابعادی، پارامتر غیرمحلی، و شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی پایه نانوورق مورد مطالعه قرار گرفته است. این حل مرجع می‌تواند برای تخمین دقت تئوریهای دو بعدی مرسوم مورد استفاده قرار گیرد.

Three-dimensional free vibration analysis of rectangular nanoplates based on nonlocal theory of elasticity

Ehsan Abdollahzadeh Shahrbabaki, Akbar Alibeigloo*

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 14115-143 Tehran, Iran, abeigloo@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 20 July 2015
Accepted 12 September 2015
Available Online 03 October 2015

Keywords:
Three-dimensional
Vibration
Nonlocal Elasticity
Nanoplate

ABSTRACT

Conventional Ritz and Galerkin methods based on local theory of elasticity employ polynomials as their approximating functions, however these methods are not convenient to use in three-dimensional nonlocal analysis. In the present study, to conquer this difficulty, a type of weighted residual approach with a set of trigonometric approximating functions was developed. By using appropriate trigonometric approximating functions it is possible to consider the effect of various edges boundary conditions on frequency behavior of nanoplate. Validation of present formulation is carried out by comparing numerical result with the published results. It is concluded that the effect of nonlocal parameter on natural frequencies is significant, especially in higher modes due to the lower wavelength of the mode. The research shows that in nonlocal elasticity there are distinct discrepancies between behaviors of two and three-dimensional results. In addition, the difference between the two- and three-dimensional results in local elasticity is not as noticeable as in nonlocal elasticity. Furthermore, the effects of length to thickness ratio, aspect ratio, nonlocal parameter and different boundary conditions on fundamental natural frequency of nanoplates were studied. This benchmark solution can be used to assess the accuracy of conventional two-dimensional theories.

1- مقدمه

ریشه های پیدایش الاستیسیته غیرمحلی را می‌توان در سال 1967 جستجو کرد. این نوع الاستیسیته برای توصیف معادلات حاکم بر جسم الاستیک، هنگامی که در ابعاد نزدیک به شبکه مولکولی هستند بکار می‌رود و این اندازه ابعاد مرز تمایز تئوری‌های دینامیک شبکه و الاستیسیته معمولی است. روش‌های متداول حل در الاستیسیته معمولی از قبیل المان محدود، و روش انرژی، در مورد الاستیسیته غیرمحلی نیاز به اصلاحات دارد تا در مقیاس نانو بکار برده شوند. در تحلیل سازه‌های نانو به‌دلیل پرهزینه بودن روش‌های تجربی و زمان‌بر بودن روش شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، تحلیل‌گران به بررسی تحلیلی در شرایط مرزی و هندسه‌های ساده روی آورده‌اند. این تحلیل‌ها معمولا به حالت‌های یک و یا دو بعدی محدود می‌شود. باید توجه داشت که تحلیل دو و سه بعدی الاستیسیته غیرمحلی، بطور قابل ملاحظه‌ای

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

E. Abdollahzadeh Shahrbabaki, A. Alibeigloo, Three-dimensional free vibration analysis of rectangular nanoplates based on nonlocal theory of elasticity, *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 15, No. 11, pp. 54-62, 2015 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.34.0]

نتایج متفاوتی دارد که این مسأله در این حد در الاستیسیته کلاسیک دیده نمی‌شود.

ارینگن در سال 1983 [1] یک فرم دیفرانسیلی برای معادله رفتاری جامد الاستیک بر اساس الاستیسیته غیرمحلی ارائه نمود. پولیزوتو [2] اثبات کرد که قانون حداقل انرژی پتانسیل، در مورد مسائل استاتیکی در الاستیسیته غیرمحلی نیز قابل اعمال است. آقابابایی و ردی [3] ارتعاشات آزاد ورق با فرمول‌بندی درجات بالا با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی را بررسی کردند. پرادهان و فدیکار [4] یک تحلیل پارامتری برای رفتار ارتعاشی نانوورق کلاسیک و تغییر فرم برشی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده انجام دادند. مورمو و پرادهان [5] روش جداسازی متغیرها را برای یافتن یک حل تحلیلی برای ارتعاشات درون صفحه ورق کرشهوف با دو تکیه‌گاه ساده و دو تکیه‌گاه دلخواه بکار بردند. پرادهان و مورمو [6] روش مربعات تفاضلی (DQ) دو بعدی را برای تحلیل کمانش ورق کرشهوف مستطیلی با تکیه‌گاه‌های ساده استفاده کردند. شن و همکاران [7] با تکنیک آشفتگی دو گامی ارتعاشات آزاد غیر خطی نانوورق کلاسیک با تکیه‌گاه ساده در محیط گرمایی را مطالعه کردند. بر اساس فرمول بندی حساب تغییرات، فدیکار و پرادهان [8] از طریق المان محدود، کمانش و خمش و ارتعاشات آزاد نانوتیر اویلر برنولی و نانوورق کرشهوف را بررسی نمودند. لازم به‌ذکر است که این مقاله نقطه عطفی در بکارگیری المان محدود در الاستیسیته غیر محلی بود. جمعه‌زاده و سعیدی [9] با غیر کوپل نمودن معادلات الاستیسیته غیرمحلی سه بعدی، حل تحلیلی ارتعاشات آزاد سه بعدی نانوورق با تکیه‌گاه‌های ساده را ارائه کردند. پرادهان و کومار [10] ارتعاشات آزاد نانوورق کرشهوف ارتوتروپیک با شرایط مرزی مختلف (تکیه‌گاه ساده و گیردار) را با استفاده از روش عددی DQ دو بعدی مورد مطالعه قرار دادند. انصاری و همکاران [11] با استفاده از فرمول‌بندی رینسلر-میندلین به همراه روش DQ دو بعدی، به تحلیل ارتعاشات ورق گرافن چند لایه با شرایط مرزی مختلف (تکیه‌گاه ساده و گیردار) پرداختند. نارندر [12] مدل دو متغیره نانوورق با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را در تحلیل کمانش مورد استفاده قرار داد. شوارتز و همکاران [13] بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی و استفاده از روش المان مرزی رفتار خمشی سه بعدی نانوورق را بررسی کردند. علی بیگلو [14] حل ارتعاشات آزاد سه بعدی ورق چند لایه گرافن، قرار گرفته در محیط الاستیک، را ارائه نمود. علی بیگلو و پاشا زانوسی [15] تئوری الاستیسیته غیرمحلی را برای مطالعه رفتار خمشی نانوورق سه بعدی با تکیه‌گاه ساده بکار گرفتند. آنها در راستای مختصات ضخامتی، تکنیک فضای حالت را استفاده کردند. فرج پور و همکاران [16] روش DQ را در بحث کمانش نانوورق کرشهوف ارتوتروپیک با تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار اعمال کردند. آنها نانوورق را تحت تأثیر بار درون صفحه بصورت خطی متغیر فرض نمودند. قربانپور ارانی و همکاران [17] کنترل هوشمند کمانش ورق تک لایه گرافن با تکیه‌گاه ساده بر اساس مدل رینسلر-میندلین را بررسی نمودند. انصاری و همکاران [18] پتانسیل‌های بین اتمی را برای محاسبه ثوابت ماده یک ورق گرافن بکار گرفتند، و کمانش و ارتعاشات ورق کرشهوف با تکیه‌گاه ساده را با این ثوابت مطالعه کردند. بر اساس تئوری دو متغیره اصلاح شده، ملک زاده و شجاعی [19] با استفاده از روش DQ، ارتعاشات نانوورق با (با تکیه‌گاه ساده و گیردار) را بررسی کردند. خمش غیرخطی نانوورق دو لایه با تکیه‌گاه ساده تحت بار عمودی در محیط گرمایی توسط زو و همکاران [20] ارائه شد. تحلیل کمانش و حساسیت سنجی نانوورق ارتوتروپیک با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده توسط رادبه و ادلی [21] انجام شد. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، الزهرانی و همکاران [22] تحلیل استاتیکی ورق تک لایه گرافن با تکیه‌گاه های ساده بر روی بستر وینکلر-پسترناک و تحت بارهای همزمان مکانیکی-حرارتی-رطوبتی را به انجام رساندند.

طبق بررسی‌های انجام شده مشخص شد که تحلیل ارتعاشات آزاد سه بعدی نانوورق مستطیلی با تکیه‌گاه‌های متفاوت تاکنون ارائه نشده است و این تحلیل در مقاله حاضر ارائه می‌شود. هدف این مقاله پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی نانوورق با استفاده از نوعی روش باقی‌مانده وزنی برای گسترش تحلیل‌های الاستیسیته غیرمحلی به سه بعد است. حل این مسأله تاکنون فقط برای تکیه‌گاه ساده انجام شده است که یکی از منابع صحت سنجی مقاله می‌باشد. در این تحقیق، ورق سه بعدی در نظر گرفته می‌شود و الاستیسیته خطی برای نوشتن کرنش‌ها بر حسب جابجایی‌ها بکار برده می‌شود. غیرمحلی بودن الاستیسیته فرض دیگری است که رابطه رفتاری را تعیین می‌کند. در بخش نتایج، تأثیر پارامتر غیرمحلی، شرایط مرزی مختلف، و نسبت‌های ابعادی نانوورق بر فرکانس‌های طبیعی آن بررسی می‌شود. نتایج این پژوهش دید روشنی از تأثیر عدد موج بر فرکانس‌های طبیعی یک جامد با رفتار الاستیسیته غیرمحلی بدست می‌دهد.

2- تئوری

2-1- الاستیسیته سه بعدی غیرمحلی

بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی، تنش غیرمحلی، σ ، در هر نقطه در یک جامد تابع کرنش‌ها در تمام نقاط دیگر آن است و در این تئوری فقط معادله رفتاری با الاستیسیته کلاسیک متداول متفاوت است. در الاستیسیته غیرمحلی جزء اضافی و متفاوت معادله رفتاری به شکل (1) است [23].

$$\sigma_{ij} = \int_V K\left(\left|\bar{x}-x\right|,\tau\right) t_{ij}\left(\bar{x}\right) d\bar{x} \qquad (1)$$

که در آن σ_{ij} مؤلفه های تنسور تنش غیرمحلی هستند. همچنین تابع هسته به شکل $K\left(\left|\bar{x}-x\right|,\tau\right)$ نماینده مدول غیرمحلی است. $\left|\bar{x}-x\right|$ فاصله در نرم اقلیدوسی است و τ یک ثابت ماده تعریف شده که به طول‌های مشخصه داخلی و خارجی (به‌ترتیب مانند فواصل شبکه کریستالی و طول موج) بستگی دارد [23]. بعلاوه $t_{ij}\left(\bar{x}\right)$ مؤلفه‌های تنسور تنش ماکروسکوپیک در نقطه‌ی با مختصات x برای ماده ایزوتروپیک بصورت رابطه (2) نوشته می‌شود [24]:

$$\begin{Bmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ t_{zz} \\ t_{yz} \\ t_{xz} \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \left[C\right]\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2)$$

که در آن λ و μ به‌ترتیب ثوابت لامه و مدول برشی هستند و $\left[C\right]$ ماتریس سفتی الاستیسیته است. همچنین ε_{ij} مؤلفه‌های تنسور کرنش هستند. مشابه الاستیسیته غیرمحلی رابطه کرنش-جابجایی، در مختصات کارتزین به شکل رابطه (3) است [24].

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.34.0]

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\ \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$
$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (3)$$

بطوری که u و v و w به‌ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستاهای x و y و z هستند. معادله حرکت برای تئوری‌های الاستیسیته غیرمحلی و کلاسیک یکسان و به قرار (4) است.

$$\sigma_{xx,x}+\sigma_{xy,y}+\sigma_{xz,z}=\rho\ddot{u}-F_x,$$
$$\sigma_{yx,x}+\sigma_{yy,y}+\sigma_{yz,z}=\rho\ddot{v}-F_y,$$
$$\sigma_{zx,x}+\sigma_{zy,y}+\sigma_{zz,z}=\rho\ddot{w}-F_z \qquad (4)$$

که در آن F_x و F_y و F_z به‌ترتیب مؤلفه‌های نیرو در راستاهای x و y و z هستند و ρ چگالی ماده است. همچنین نقطه بالای هر پارامتر به معنای مشتق نسبت به زمان است. ارینگن [1] نشان داد که رابطه (1)، معادل معادله دیفرانسیلی بصورت (5) می‌باشد.

$$\left(1-\beta\nabla^2\right)\sigma_{ij}=\Gamma\left(\sigma_{ij}\right)=t_{ij} \qquad i,j=x,y,z \qquad (5)$$

که $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ عملگر لاپلاس است و $\beta=\left(\bar{a}e_0\right)^2$ پارامتر غیرمحلی نام دارد. در آن $\bar{a}$ طول مشخصه‌ای از ماده، مثلا فواصل شبکه کریستالی، است [23]. نماد Γ را می‌توان عملگر غیرمحلی نامید. با اعمال عملگر غیرمحلی بر دو طرف روابط (4) و استفاده از رابطه (5) می‌توان روابط (6) را نوشت:

$$t_{xx,x}+t_{xy,y}+t_{xz,z}=\left(1-\beta\nabla^2\right)\left(\rho\ddot{u}-F_x\right) \qquad (6\text{-الف})$$
$$t_{yx,x}+t_{yy,y}+t_{yz,z}=\left(1-\beta\nabla^2\right)\left(\rho\ddot{v}-F_y\right) \qquad (6\text{-ب})$$
$$t_{zx,x}+t_{zy,y}+t_{zz,z}=\left(1-\beta\nabla^2\right)\left(\rho\ddot{w}-F_z\right) \qquad (6\text{-ج})$$

در غیاب نیروهای جسمی جایگذاری روابط (2) و (3) در رابطه (6)، معادلات برداری حاکم بر حرکت بر حسب جابجایی‌ها در الاستیسیته سه‌بعدی غیرمحلی برای ماده همسانگرد را به صورت (7) نتیجه می‌دهد.

$$\mu\nabla^2\vec{u}+\left(\lambda+\mu\right)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{u}\right)=\left(1-\beta\nabla^2\right)\left(\rho\ddot{\vec{u}}\right) \qquad (7)$$

که در آن $\vec{u}=[u\quad v\quad w]^T$ بردار میدان جابجایی است و بردار گرادیان بصورت $\vec{\nabla}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\quad\frac{\partial}{\partial y}\quad\frac{\partial}{\partial z}\right]^T$ است.

2-2- توابع تقریب مثلثاتی

نظر به اینکه عملگر غیرمحلی در توابع مثلثاتی و نمایی مانند یک ضریب عمل می‌کند یعنی:

$$\Gamma\left(\sin(p_x x)\sin\left(p_y y\right)\sin\left(p_z z\right)\right)=$$
$$\left(1+\beta\left(p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2\right)\right)\sin(p_x x)\sin\left(p_y y\right)\sin\left(p_z z\right) \qquad (8\text{-الف})$$

پس معکوس عملگر غیرمحلی بر چنین توابعی بصورت زیر عمل خواهد کرد

$$\Gamma^{-1}\left(\sin(p_x x)\sin\left(p_y y\right)\sin\left(p_z z\right)\right)=$$
$$\left(1+\beta\left(p_x{}^2+p_y{}^2+p_z{}^2\right)\right)^{-1}\sin(p_x x)\sin\left(p_y y\right)\sin\left(p_z z\right) \qquad (8\text{-ب})$$

به‌طوری که دیده می‌شود، اگر میدان جابجایی با توابع مثلثاتی تقریب زده شود، می‌توان نتیجه گرفت که عملگر غیرمحلی در روابط (5-7) ساده‌تر می‌شود و بصورت یک سری ضرایب جبری در می‌آید. این ضرایب همان‌طور که در رابطه (8) ملاحظه می‌شود به طول موج ترم‌های میدان جابجایی ربط دارد. لازم به یاداوری است که استفاده از توابع تقریب مثلثاتی (اگرچه به همراه ترم‌های جبری) در راستای ضخامت بی سابقه نیست و این نوع مدل ورق، تئوری ورق سینوسی خوانده می‌شود [26،25].

2-3- فرمول‌بندی مسأله و حل آن

نانوورق مستطیلی بطول a، عرض b، و ضخامت h در دستگاه مختصات کارتزین مطابق شکل 1 فرض می‌شود. در روش باقی‌مانده وزنی در پژوهش حاضر، ابتدا طرفین سه معادله (6) در حالت نیروهای جسمی صفر به‌ترتیب در u و v و w ضرب می‌شود سپس معادلات حاصل با هم جمع می‌شود. نهایتا یک معادله بدست می‌آید و از دو طرف آن در روی کل حجم ورق انتگرال‌گیری انجام می‌شود.

$$\frac{1}{2}\iiint_V t_{ij,j}u_i dV=\frac{1}{2}\iiint_V u_i\left(1-\beta\nabla^2\right)\left(\rho\ddot{u}_i\right)dV \qquad (9)$$

در قدم بعدی با اعمال انتگرال جز به جز به سمت چپ معادله انتگرالی حاصل، به روش کتاب الاستیسیته [24] که برای رسیدن از فرم نیوتنی به فرم انرژی استفاده شده است، انرژی پتانسیل کرنشی کل ورق بر اساس تنش محلی بعلاوه ترم شرایط مرزی بصورت رابطه (10) به‌دست می‌آید.

$$-\frac{1}{2}\iiint_V t_{ij}\varepsilon_{ij}dV+\frac{1}{2}\iint_B u_i t_{ij}s_j ds=\frac{1}{2}\iiint_V u_i\left(1-\beta\nabla^2\right)\left(\rho\ddot{u}_i\right)dV \qquad (10)$$

که در آن $T_j=t_{ij}s_j$ مؤلفه‌های نیروی کشش محلی بر سطح مرز و s_j کسینوس‌های هادی بردار عمود بر سطح مرز هستند. ترم شرط مرزی در معادله (10) در حالتی که تمام ترم‌های توابع تقریب بکار رفته، مثلثاتی باشد برای حالت‌های کشش صفر (آزاد تئوری سه بعدی) یا جابجایی صفر (گیردار تئوری سه بعدی) از بین می‌رود (حالت نیروی معین شامل بحث فعلی نیست).

برای اثبات این مطلب ابتدا ذکر این نکته ضروریست که می‌توان ثابت کرد در حالتی که تمام ترم‌های توابع تقریب بکار رفته، مثلثاتی باشد، هر فرکانسی که $\sigma_{ij}s_j$ را صفر کند $t_{ij}s_j$ را نیز صفر می‌کند و بالعکس.

اثبات صفر بودن ترم شرط مرزی این است که اگر جابجایی صفر باشد مشخصا ترم صفر می‌شود و در حالتی که تمام ترم‌های توابع تقریب بکار رفته، مثلثاتی باشد، اگر کشش غیر محلی صفر باشد $\left(T_j=\sigma_{ij}s_j=0\right)$ کشش محلی نیز صفر می‌شود $\left(t_{ij}s_j=0\right)$ و به طبع آن ترم شرط مرزی صفر می‌شود. پس مادامی که قصد پیدا کردن بردارهای ویژه نباشد و فقط فرکانس طبیعی مد نظر باشد در آخرین مرحله حل، معادله (10) بدون ترم مرزی که صفر شده است، با در نظر داشتن کمیت‌های فیزیکی (11) بی بعد می‌شود.

$$X=\frac{2x}{a},\ Y=\frac{2y}{b},\ Z=\frac{2z}{h},\ U=\frac{u}{h},\ V=\frac{v}{h},\ W=\frac{w}{h},$$
$$\varepsilon_{ij}^*=\frac{ab}{h^2}\varepsilon_{ij},\ \beta^*=\frac{\beta}{h^2}=e_0^2\left(\frac{\bar{a}}{h}\right)^2 \qquad (11)$$

بی بعد شده سمت راست معادله (10) را می‌توان به صورت رابطه (12) نوشت.

$$\frac{1}{2}\iiint_V u_i\left(1-\beta\nabla^2\right)\left(\rho\ddot{u}_i\right)dV=\frac{\rho h^3 ab}{16}\times$$
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(U\left(1-\beta^*\left(\left(\frac{2h}{a}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\left(\frac{2h}{b}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+2^2\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)\right)\ddot{U}+\right.$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.34.0]

$$V\left(1-\beta^{*}\left(\left(\frac{2h}{a}\right)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial X^{2}}+\left(\frac{2h}{b}\right)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial Y^{2}}+2^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial Z^{2}}\right)\right)\ddot{V}+$$
$$W\left(1-\beta^{*}\left(\left(\frac{2h}{a}\right)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial X^{2}}+\left(\frac{2h}{b}\right)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial Y^{2}}+2^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial Z^{2}}\right)\right)\ddot{W})dV \qquad (12)$$

پارامتر غیرمحلی بی بعد، $\beta^{*}=e_{0}^{2}\left(\bar{a}\,/\,h\right)^{2}$ ، در رابطه بالا شامل نسبت طول مشخصه ماده به طول مشخصه (در اینجا ضخامت) نانوورق است. سمت چپ معادله (10) هم که انرژی کرنشی، بر اساس تنش محلی نانوورق است، برای ماده ارتوتروپیک در مختصات مادی بصورت بی بعد (13) می‌باشد.

$$\frac{1}{2}\iiint_{V}t_{ij}\varepsilon_{ij}dV=$$
$$\frac{h^{5}E}{16(ab)}\times\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}C_{11}^{*}\left(\varepsilon_{xx}^{*}\right)^{2}+C_{22}^{*}\left(\varepsilon_{yy}^{*}\right)^{2}+C_{33}^{*}\left(\varepsilon_{zz}^{*}\right)^{2}dV+$$
$$\frac{h^{5}E}{16(ab)}\times\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}4\left(C_{44}^{*}\left(\varepsilon_{yz}^{*}\right)^{2}+C_{55}^{*}\left(\varepsilon_{xz}^{*}\right)^{2}+C_{66}^{*}\left(\varepsilon_{xy}^{*}\right)^{2}\right)dV+$$
$$\frac{h^{5}E}{16(ab)}\times\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}2\left[C_{12}^{*}\left(\varepsilon_{xx}^{*}\varepsilon_{yy}^{*}\right)+C_{13}^{*}\left(\varepsilon_{xx}^{*}\varepsilon_{zz}^{*}\right)+C_{23}^{*}\left(\varepsilon_{yy}^{*}\varepsilon_{zz}^{*}\right)\right]dV \qquad (13)$$

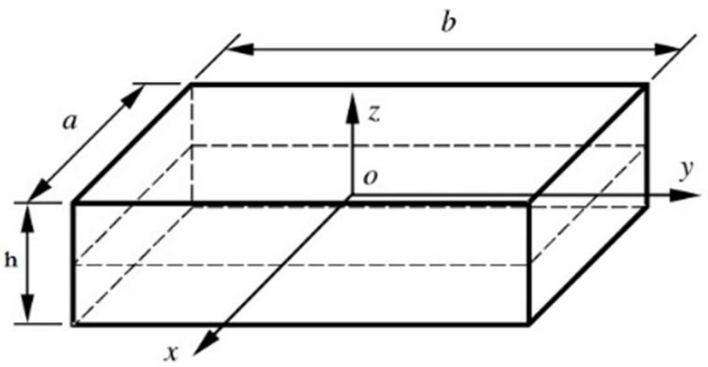
که در آن روابط (14) برقرارند.

$$,\varepsilon_{yy}^{*}=\frac{2a}{h}\frac{\partial V}{\partial Y},\varepsilon_{zz}^{*}=\frac{2ab}{h^{2}}\frac{\partial W}{\partial Z}\ ,\varepsilon_{xx}^{*}=\frac{2b}{h}\frac{\partial U}{\partial X}$$
$$\varepsilon_{yz}^{*}=\frac{a}{h}\left(\frac{\partial W}{\partial Y}+\frac{b}{h}\frac{\partial V}{\partial Z}\right),\varepsilon_{xz}^{*}=\frac{b}{h}\left(\frac{a}{h}\frac{\partial U}{\partial Z}+\frac{\partial W}{\partial X}\right),$$
$$\varepsilon_{xy}^{*}=\left(\frac{a}{h}\frac{\partial U}{\partial Y}+\frac{b}{h}\frac{\partial V}{\partial X}\right) \qquad (14)$$

و $\mathrm{C}_{ij}^{*}=C_{ij}\,/\,E$ ماتریس سفتی الاستیسیته بی بعد است. میدان جابجایی با مجموعه توابع تقریب مثلثاتی (15) جایگزین می‌شود

$$U=\sum_{k=0}^{n_z}\sum_{j=0}^{n_y}\sum_{i=0}^{n_x}A_{ijk}^{\mathrm{u}}P_{i}\left(X\right)P_{j}\left(Y\right)P_{k}\left(Z\right)\exp(i\omega t)\ ,$$
$$V=\sum_{q=0}^{n_z}\sum_{m=0}^{n_y}\sum_{l=0}^{n_x}A_{lmq}^{\mathrm{v}}P_{l}\left(X\right)P_{m}\left(Y\right)P_{q}\left(Z\right)\exp(i\omega t)\ ,$$
$$W=\sum_{t=0}^{n_z}\sum_{s=0}^{n_y}\sum_{r=0}^{n_x}A_{rst}^{\mathrm{w}}P_{r}\left(X\right)P_{s}\left(Y\right)P_{t}\left(Z\right)\exp(i\omega t) \qquad (15)$$

که در آن A_{ijk}^{u} و A_{lmq}^{v} و A_{rst}^{w} ضرایبی هستند که با حداقل یابی تعیین می‌شوند و ω فرکانس طبیعی نانوورق است. همچنین n_x و n_y و n_z تعداد ترمهای مجموعه توابع تقریب، به‌ترتیب در راستاهای x ، y و z



شکل 1 هندسه و مختصات استفاده شده در تحلیل نانوورق

و $P_{i}\left(x_{j}\right)$ ترم‌های توابع تقریب هستند. با توجه به شرایط مرزی، سه مجموعه توابع، بصورت زیر بکار گرفته می‌شوند. لازم به تذکر است اولین انتخاب از هر فرمول برای حالت متقارن و دومین انتخاب برای حالت نامتقارن مود است.

الف. برای راستای ضخامت با توجه به اینکه در دو سطح بالا و پایین ورق شرط مرزی کشش صفر حاکم است لذا برای هر سه U و V و W می توان از رابطه (16) استفاده نمود.

$$P_{k}(Z)=\begin{cases}\cos\left(\frac{k\pi Z}{2}\right)\\ \sin\left((k+1)\frac{\pi}{2}Z\right)\end{cases}\qquad k=0,1,2,\ldots \qquad (16)$$

ب. در شرایط مرزی دوسرگیردار در هر راستایی که باشد، برای هر سه U و V و W از رابطه (17) استفاده می‌شود.

$$P_{i}(X_{j})=\begin{cases}\cos\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi X_{j}\right)\\ \sin\left((i+1)\pi X_{j}\right)\end{cases}\qquad i=0,1,2,\ldots \qquad (17)$$

ج. در شرط مرزی تکیه‌گاه ساده سه بعدی، برای مثال اگر در راستای x باشد، برای V و W می توان رابطه (18- الف) را نوشت.

$$P_{i}^{\mathrm{L}}(X)=\begin{cases}\cos\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi X\right)\\ \sin((i+1)\pi X)\end{cases}\qquad i=0,1,2,\ldots \qquad (18\text{- الف})$$

و به همین ترتیب برای U از رابطه (18- ب) استفاده می‌شود.

$$P_{i}^{\mathrm{A}}(X)=\begin{cases}\sin\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)\pi X\right)\\ \cos((i+1)\pi X)\end{cases}\qquad i=0,1,2,\ldots \qquad (18\text{- ب})$$

جایگذاری معادلات (15) تا (18) در معادلات (11) و (12) و حداقل‌یابی برای باقی‌مانده‌ها به مساله مقدار ویژه به رابطه (19) منجر می‌شود.

$$\left[K\right]\left\{A^{*}\right\}-\varpi^{2}\left[\chi\right]\left[M\right]\left\{A\right\}^{*}=0 \qquad (19)$$

که در آن $\varpi=\omega\left(ab\,/\,h\right)\sqrt{\rho\,/\,E}$ فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق است، در حالی که $\left\{A\right\}^{*}$ برداری از ضرایب مجهول A_{ijk}^{u} و A_{lmq}^{v} و A_{rst}^{w} است. $\left[K\right]$ و $\left[M\right]$، ماتریس‌های سفتی و جرم نانوورق هستند. بر اساس انرژی پتانسیل کرنشی محلی و جنبشی ورق، مؤلفه های این دو به شکل روابط (20) بدست می‌آیند.

$$K_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial A_{i}^{*}\partial A_{j}^{*}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}C_{ijkm}^{*}\varepsilon_{km}^{*}\varepsilon_{ij}^{*}dXdYdZ \qquad (20\text{- الف})$$

$$M_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial A_{i}^{*}\partial A_{j}^{*}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(U^{2}+V^{2}+W^{2}\right)dXdYdZ \qquad (20\text{- ب})$$

چون تمام توابع تقریب، مثلثاتی هستند، لذا اعمال عملگر غیر محلی بر هر ترم، تنها به یک ضریب منجر می‌شود. $\left[\chi\right]$ ماتریس قطری از این ضرایب است که مؤلفه‌های قطر اصلی آن بصورت رابطه (21) معرفی می‌شود.

$$\chi_{ii}=1+\pi^{2}\beta^{*}\left(\left(n_{i}\right)^{2}\left(\frac{h}{a}\right)^{2}+\left(m_{i}\right)^{2}\left(\frac{h}{b}\right)^{2}+\left(k_{i}\right)^{2}\right) \qquad (21)$$

به‌طوری که $n_{i}\,/\,(2a)$ و $m_{i}\,/\,(2b)$ و $k_{i}\,/\,(2h)$ اعداد موج ترم iام تابع تقریب، در سه راستای مختصات اصلی هستند. حل غیر صفر برای معادله (19) منجر به معادله جبری (22) می‌شود.

$$\left|\left[K\right]-\varpi^{2}\left[\chi\right]\left[M\right]\right|=0 \qquad (22)$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.34.0]

3- نتایج عددی و بحث

3-1- همگرایی

برای نشان دادن همگرایی پاسخ‌ها نتایج عددی 10 فرکانس طبیعی بی بعد اول در جدول 1 داده شده است. این نتایج برای مودهای متقارن متقارن نا متقارن (م م ن) به‌ترتیب در راستاهای x و y و z است. همان‌طور که دیده می‌شود همگرایی کند بوده که از خصوصیات استفاده از توابع مثلثاتی به عنوان توابع تقریب است. گرچه بکارگیری این توابع تقریب یک نکته مثبت دارد و آن اینکه انتگرال‌گیری از ترم‌های آنها در روش‌های مختلف می‌تواند بصورت دستی انجام شود.

3-2- صحه گذاری فرمول‌بندی

برای صحت سنجی روش حاضر، نتایج عددی برای 10 فرکانس طبیعی بی بعد اول یک ورق مربعی بصورت $\varpi = \omega\left(ab\,/\,h\right)\sqrt{\rho\,/\,E}$ با دو نسبت طول به ضخامت مختلف در جدول 2 داده شده است. تکیه‌گاه ورق چهار طرف گیردار فرض شده و ورق در ابعاد کوچک نیست. از مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج مرجع [27] همخوانی خوبی بین پاسخ‌ها دیده می‌شود.

در جدول 3 نتایج تحلیلی فرکانس پایه نانوورق با چهار تکیه‌گاه ساده آمده است. از مقایسه نتایج حاضر با نتایج مرجع [9] تطابق بسیار خوبی مشاهده می‌شود.

در انتها چون برای نانوورق در تحلیل سه بعدی مرجعی جز برای تکیه‌گاه ساده موجود نیست صحت سنجی برای تکیه‌گاههای دیگر با قیاس نتایج عددی منبع [28] برای مدل دوبعدی ورق با نتایج سه بعدی مطالعه حاضر در جدول 4 انجام می‌شود. تفاوت‌ها بین دو سری جواب به‌دلیل دو بعدی بودن تئوری ورق در منبع [28] است که با افزایش پارامتر غیرمحلی بی بعد تفاوت افزایش می یابد.

3-3- مطالعات پارامتری

در این قسمت تأثیرات عواملی مانند پارامتر بی بعد غیرمحلی، نسبت‌های ابعادی و طول به ضخامت، بر فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد نانوورق در نمودارها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نمودار 2 فرکانس پایه بی بعد نانوورق مربعی با شرط مرزی چهار طرف گیردار بر حسب نسبت طول به ضخامت متفاوت را نشان می‌دهد. طبق شکل با افزایش نسبت طول به ضخامت این فرکانس به سمت عدد مشخصی که

جدول 1 همگرایی ده فرکانس طبیعی بی بعد اول $\varpi = \omega\left(ab\,/\,h\right)\sqrt{\rho\,/\,E}$ ورق با شرط مرزی چهار طرف گیردار (دسته مود م م ن) با پارمترهای $\beta^* = 0$ و $\nu = 0/3$ و $a=b=10h$

مود	8×14×14	8×22×22	8×26×26	8×28×28
1	9/9984	9/9498	9/9395	9/9359
2	31/565	31/430	31/403	31/394
3	31/871	31/731	31/703	31/693
4	48/230	48/055	48/021	48/008
5	62/842	62/589	62/542	62/526
6	63/007	62/749	62/701	62/684
7	75/296	75/052	75/006	74/990
8	75/805	75/540	75/490	75/472
9	98/063	97/762	97/706	97/686
10	98/289	97/872	97/801	97/779

جدول 2 مقایسه بین ده فرکانس طبیعی بی بعد اول $\varpi = \omega\left(ab\,/\,h\right)\sqrt{\rho\,/\,E}$ ورق مربعی با شرط مرزی چهار طرف گیردار برای تمام دسته مودهای برون صفحه با پارمترهای $\beta^* = 0$ و $\nu = 0/3$

$\frac{a}{h}$	م م ن		"م ن ن " و "ن م ن"		ن ن ن	
	ϖ	ϖ [27]	ϖ	ϖ [27]	ϖ	ϖ [27]
10	9/9395	9/9086	18/984	18/932	26/631	26/564
	31/403	31/324	38/002	37/915	51/655	51/553
	31/703	31/619	46/349	46/245	52/131	52/021
	48/021	47/918	60/686	60/572	72/106	71/981
	62/542	62/412	67/474	67/343	48/019	83/877
	62/701	62/567	79/883	79/735	84/333	84/182
	75/006	74/876	85/506	85/368	100/16	100/01
	75/490	75/350	91/117	90/968	100/57	100/41
	97/706	97/550	101/68	101/51	119/63	119/44
	97/803	97/628	111/56	111/40	119/84	119/65
5	8/1500	8/1360	14/265	14/245	19/182	19/160
	21/888	21/864	25/993	25/967	33/758	33/731
	22/191	22/164	30/618	30/589	34/027	33/997
	31/825	31/796	38/883	38/853	45/130	45/098
	39/579	39/546	42/422	42/389	51/206	51/170
	39/746	39/710	48/803	48/769	51/244	51/209
	46/662	46/628	52/226	52/192	53/573	53/572
	46/795	46/759	52/714	52/702	56/450	56/433
	57/062	57/042	55/028	54/990	59/934	59/894
	58/101	58/067	57/753	57/750	59/981	59/942

جدول 3 مقایسه بین فرکانس طبیعی بی بعد اول $\varpi = \omega\left(ab\,/\,h\right)\sqrt{\rho\,/\,E}$ نانوورق مربعی با شرط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده برای دسته مود م م ن $\nu = 0/3$

$\frac{h}{a}$	β^*	$\frac{a}{b}=1$		$\frac{a}{b}=2$	
		ϖ	ϖ [9]	ϖ	ϖ [9]
0/1	۰	5/7769	5/7769	7/3096	7/3098
0/2	۰	5/3036	5/3036	6/9025	6/9026
0/1	۱	5/1256	5/1260	6/7536	6/7536
0/2	0/25	4/7512	4/7513	6/4079	6/408
0/1	۲	4/6545	4/6550	6/3079	6/308
0/2	0/5	4/3433	4/3433	6/0069	6/007
0/1	۳	4/2933	4/2938	5/9402	5/9404
0/2	0/75	4/0257	4/0258	5/6731	5/6732
0/1	۴	4/0049	4/0056	5/6301	5/6302
0/2	۱	3/7693	3/7694	5/3896	5/3898

جدول 4 مقایسه بین فرکانس طبیعی بی بعد اول $\varpi = \omega\left(ab\,/\,h\right)\sqrt{\rho\,/\,E}$ نانوورق با شرط مرزی دوطرف مقابل گیردار و دو طرف مقابل تکیه‌گاه ساده برای دسته مودهای بیرون از صفحه مختلف با پارمترهای $\nu = 0/3$ و $a=b=10h$

β^*	ϖ			[28] ϖ	
	م م ن	م ن ن	ن ن ن	م م ن	ن ن ن
0	26/891	49/399	79/575	26/736	79/195
4	18/315	26/032	35/589	19/568	37/776
16	11/319	14/631	19/310	12/622	20/725
36	7/9423	10/001	13/091	8/9809	14/080
64	6/0720	7/5696	9/8773	6/9061	10/635

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.34.0]

تابع ضریب غیر محلی می‌باشد، میل می‌کند که فرکانس نانوورق بر اساس تئوری کرشهوف است. همان‌طور که در این پژوهش اثر پارامتر غیر محلی بصورت ماتریس ضرایب غیر محلی، $[\chi]$، از فرکانس می‌کاهد آقابابایی و ردی [3] نیز اثر پارامتر غیر محلی را در ورق دوبعدی غیرمحلی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بصورت فاکتوری کاهنده یافتند. ضمیمه الف فرکانس نانوورق بر اساس تئوری کرشهوف را برای تکیه‌گاه ساده ارائه می‌کند. در واقع تحقیق کنونی تعمیم این روند به سه بعد و تمام شرایط مرزی است.

همچنین در شکل 2 دیده می‌شود که برای پارامترهای غیرمحلی بزرگتر وابستگی فرکانس طبیعی به نسبت طول به ضخامت خطی می‌شود و نزدیک شدن پاسخ به عدد نهایی آن به تعویق می‌افتد.

تأثیر نسبت ابعادی بر فرکانس پایه بی بعد برای نانوورق های مستطیلی ضخیم، نسبتا ضخیم و نازک در شکل‌های 3 تا 5 دیده می‌شود.

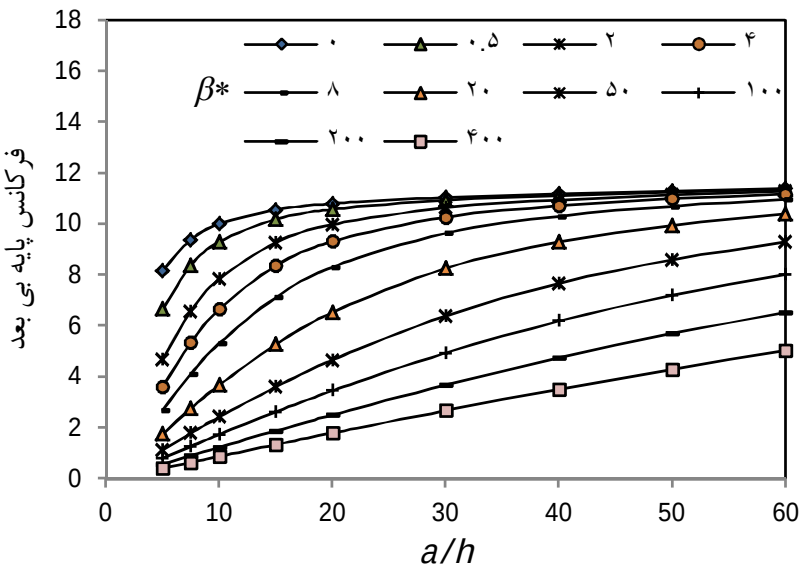
طبق شکل 3 با افزایش نسبت طول به عرض ورق ضخیم فرکانس پایه بصورت خطی روند افزایشی دارد. بعلاوه می توان نتیجه گرفت که با افزایش پارامتر غیرمحلی، اثر افزایش نسبت طول به ضخامت در فرکانس پایه کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که اثر پارامتر غیرمحلی در ورق مربعی حداقل بوده و با باریک شدن ورق این اثر افزایش می یابد.

بر اساس شکل‌های 4 و 5 در ورق نسبتا ضخیم و نازک با افزایش نسبت طول به عرض ورق فرکانس پایه در پارامترهای غیرمحلی پائین ابتدا با شیب تند کاهش یافته و سپس افزایش تدریجی دارد ولی در پارامترهای غیر محلی بالا همواره فرکانس پایه روند افزیشی تدریجی دارد.

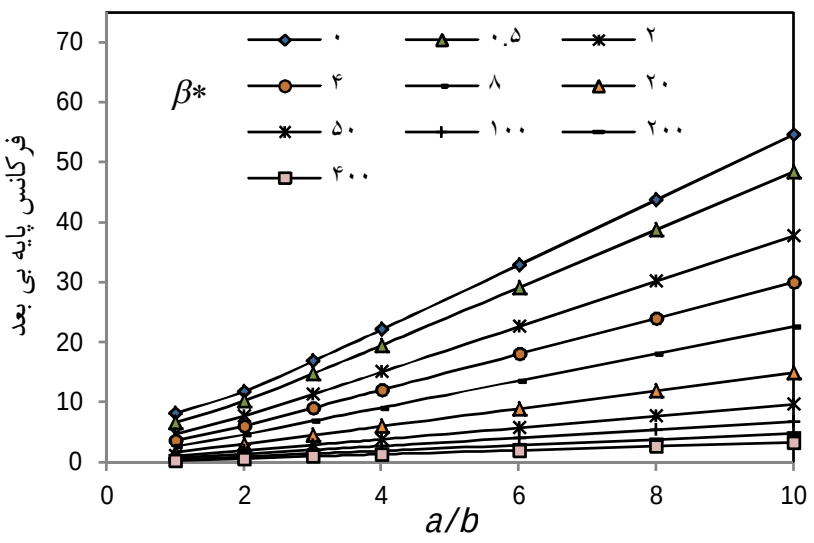
فرمول به شکل بسته ضمیمه ب که برای حالت ساده موج در یک محیط بی نهایت در آمده از دید روند تغییرات کاملا مشابه شکل‌های 4 و 5 دارد از رویت آن می‌توان تا حدی به عوامل تغیر دهنده و نقش آنها در این دو شکل پی برد.

تأثیر شرایط مرزی بر پنج فرکانس طبیعی اول نانو ورق‌ها در دسته مودهای مختلف در جداول 5 تا 7 آمده است. طبق جداول و همان‌طور که انتظار می‌رود بدون توجه به پارامتر غیرمحلی، فرکانس طبیعی با افزایش قید افزایش می‌یابد. یعنی فرکانس نانوورق با چهار مرز گیردار بیشترین، و برای نانوورق با چهار تکیه‌گاه ساده کمترین می باشد. همچنین دیده می‌شود که فرکانسهای تمام دسته مودها با افزایش پارامتر غیرمحلی کاهش می‌یابد.

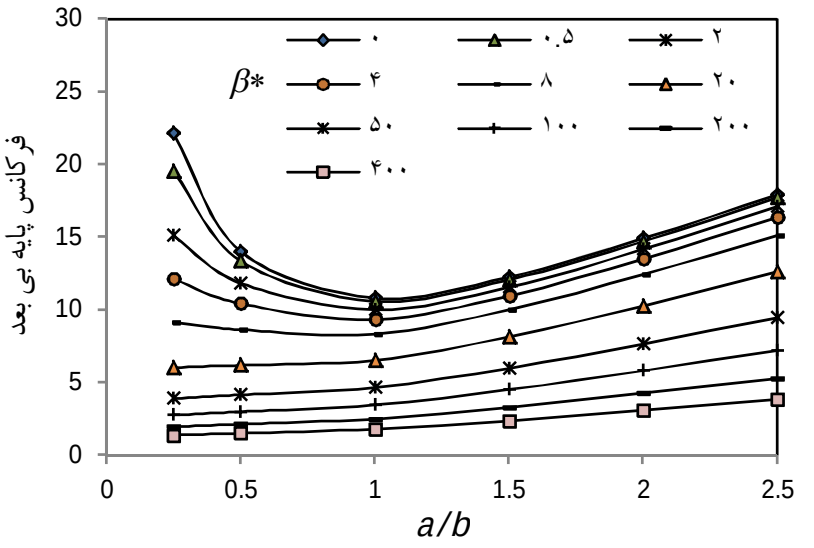
طبق جداول 5 تا 7 تأثیر پارامتر غیرمحلی در مودهای بالاتر بیشتر است. به‌طوری که که در مودهای بالا فرکانس‌ها تقریبا تابع پارامتر غیرمحلی بوده و مستقل از عدد موج (شماره مود) می‌باشد.



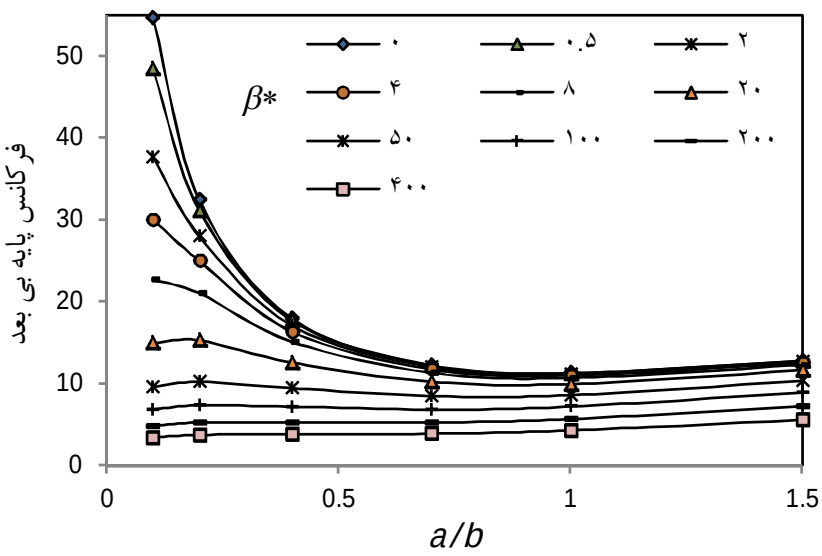
شکل 2 تأثیر نسبت طول به ضخامت بر اولین فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق مربعی با چهار تکیه‌گاه گیردار برای پارامترهای غیرمحلی بی بعد مختلف $\nu = 0/3$



شکل 3 تأثیرات نسبت ابعادی بر اولین فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق با چهار تکیه‌گاه گیردار برای پارامترهای غیرمحلی بی بعد مختلف $\nu = 0/3$ و $b=5h$



شکل 4 تأثیرات نسبت ابعادی بر اولین فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق با چهار تکیه‌گاه گیردار برای پارامترهای غیرمحلی بی بعد مختلف $\nu = 0/3$ و $b=20h$



شکل 5 تأثیرات نسبت ابعادی بر اولین فرکانس طبیعی بی بعد نانوورق با چهار تکیه‌گاه گیردار برای پارامترهای غیرمحلی بی بعد مختلف $\nu = 0/3$ و $b=50h$

لازم به ذکر است در منابع [4] و [10] مقدار فاکتور کاهش فرکانس طبیعی در نمودارها بر حسب کوچک بودن ابعاد ورق می‌تواند تا 0/5 باشد که کاملا با بازه کاهش فرکانس در اثر تغییر پارامتر غیر محلی نشان داده شده در جداول و نمودارهای مطالعه کنونی همخوانی دارد.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.34.0]

جدول 5 پنج فرکانس طبیعی بی بعد اول $\varpi = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$ نانوورق مربعی با شروط مرزی مختلف برای تمام دسته مودها با پارمترهای $\beta = 0$ و $\nu = 0/3$

شروط مرزی	نوع مود		$a=b=10h$			
			م م ن	ن م ن	م ن ن	ن ن ن
چهار طرف گیردار	برون صفحه	1	9/9395	18/984	18/984	26/631
		2	31/403	38/002	38/002	51/655
		3	31/703	46/349	46/349	52/131
		4	48/021	60/686	60/686	72/106
		5	62/542	67/474	67/474	84/019
			م م م	ن م م	م ن م	ن ن م
	درون صفحه	1	61/646	37/412	37/412	44/415
		2	70/419	61/817	61/817	54/535
		3	76/429	74/801	74/801	79/666
		4	91/613	90/004	90/004	81/775
		5	105/05	99/185	99/185	91/637
			م م ن	ن م ن	م ن ن	ن ن ن
دوطرف ساده دوطرف گیردار	برون صفحه	1	8/1378	14/948	18/116	24/080
		2	26/448	36/442	34/227	47/627
		3	31/088	41/068	46/082	50/914
		4	45/431	57/509	58/947	69/816
		5	57/663	66/849	63/243	80/299
			م م م	ن م م	م ن م	ن ن م
	درون صفحه	1	36/656	59/000	34/408	46/270
		2	59/020	72/173	52/046	71/850
		3	73/713	89/459	62/895	81/055
		4	74/983	90/753	79/844	88/768
		5	97/974	107/38	87/185	101/26
			م م ن	ن م ن	م ن ن	ن ن ن
چهار طرف ساده	برون صفحه	1	5/7769	13/805	13/805	21/214
		2	25/869	32/491	32/491	46/581
		3	25/869	40/749	40/749	46/581
		4	42/725	55/724	55/724	67/527
		5	57/476	62/596	62/596	79/885
			م م م	ن م م	ن م م	ن ن م
	درون صفحه	1	27/553	43/566	43/566	55/107
		2	46/502	70/248	70/248	87/132
		3	61/611	73/349	73/349	87/132
		4	61/611	80/331	80/331	92/545
		5	82/660	97/416	97/416	110/21

4- جمع‌بندی

در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد سه بعدی نانو ورق مستطیلی، بر اساس نوعی روش باقی‌مانده وزنی ارائه شده است. در این روش بر خلاف شیوه‌های متداول از توابع تقریب مثلثاتی استفاده شد. حل سه بعدی حاضر می‌تواند برای تخمین دقت حل‌های دو بعدی فرکانس‌های طبیعی نانوورق بکار گرفته شود. از نتایج عددی این تحقیق می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

- افزایش پارامتر غیرمحلی باعث کاهش اتصال صلب بین اتم‌ها شده که نتیجتا منجر به کاهش فرکانس طبیعی می‌شود.
- اثر پارامتر غیرمحلی در اندازه ابعادی کوچک اهمیت دارد.
- اثر پارامتر غیرمحلی در مودهای ارتعاشی بالا بیشتر است.
- تأثیر پارامترهای غیرمحلی بزرگ بر تأثیر شرط مرزی در فرکانس ورق غالب تر است.
- تأثیر پارامتر غیرمحلی در نانوورق مربعی کمترین مقدار بوده و با افزایش نسبت طول به عرض ورق این اثر افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت طول به عرض ورق ضخیم، برخلاف ورق های نازک، فرکانس پایه بصورت خطی افزایش می یابد.

جدول 6 پنج فرکانس طبیعی بی بعد اول $\varpi = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$ نانوورق مربعی با شروط مرزی مختلف برای تمام دسته مودهای مختلف با پارمترهای $\beta = 1$ و $\nu = 0/3$

شروط مرزی	نوع مود		$a=b=10h$			
			م م ن	ن م ن	م ن ن	ن ن ن
چهار طرف گیردار	برون صفحه	1	8/6905	14/604	14/604	18/667
		2	20/976	23/811	23/811	28/805
		3	21/344	27/264	27/264	29/267
		4	27/580	31/718	31/718	34/905
		5	32/525	33/873	33/873	37/949
			م م م	ن م م	ن م م	ن ن م
	درون صفحه	1	45/423	33/484	33/484	36/161
		2	51/664	44/105	44/105	43/207
		3	51/770	49/478	49/478	49/003
		4	54/151	52/427	52/427	50/092
		5	54/455	54/088	54/088	52/054
			م م ن	ن م ن	م ن ن	ن ن ن
دوطرف ساده دوطرف گیردار	برون صفحه	1	7/1711	11/634	14/006	17/018
		2	17/827	22/970	21/583	26/725
		3	20/925	24/146	27/188	28/614
		4	26/244	30/202	30/973	33/966
		5	29/964	33/674	31/760	36/360
			م م م	ن م م	م ن م	ن ن م
	درون صفحه	1	32/841	43/538	30/509	37/229
		2	43/415	51/055	42/351	48/568
		3	47/660	51/306	44/217	49/279
		4	52/171	54/163	49/481	53/053
		5	53/530	54/820	50/958	54/132
			م م ن	ن م ن	م ن ن	ن ن ن
چهار طرف ساده	برون صفحه	1	5/1256	10/778	10/778	15/075
		2	17/464	20/549	20/549	26/186
		3	17/464	23/984	23/984	26/186
		4	24/749	29/330	29/330	32/923
		5	29/894	31/480	31/480	36/217
			م م م	ن م م	ن م م	ن ن م
	درون صفحه	1	25/180	35/649	35/649	41/194
		2	41/039	46/491	46/491	50/525
		3	43/708	49/090	49/090	50/525
		4	43/708	52/315	52/315	54/048
		5	49/607	53/388	53/388	55/396

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.34.0]

جدول 7 پنج فرکانس طبیعی بی بعد اول $\varpi = \omega(ab/h)\sqrt{\rho/E}$ نانوورق مربعی با شروط مرزی مختلف برای تمام دسته مودها با پارمترهای $\beta = 10$ و $\nu = 0/3$

شروط مرزی	نوع مود		$a=b=10h$			
			م م ن	ن م ن	م ن ن	ن ن ن
چهار طرف گیردار	برون صفحه	1	4/8794	6/7219	6/7219	7/8920
		2	8/5828	9/4014	9/4014	10/817
		3	8/9228	10/531	10/531	11/069
		4	10/473	11/667	11/667	12/580
		5	11/995	12/365	12/365	13/492
	درون صفحه		م م م	ن م م	م ن م	ن ن م
		1	18/598	18/547	18/547	17/962
		2	18/659	18/600	18/600	18/601
		3	18/660	18/661	18/661	18/663
		4	18/717	18/662	18/662	18/663
		5	18/717	18/718	18/718	18/720
دوطرف ساده دوطرف گیردار	برون صفحه		م م ن	ن م ن	م ن ن	ن ن ن
		1	4/1214	5/4586	6/4975	7/2636
		2	7/3603	9/1172	8/5606	10/067
		3	8/6859	9/2659	10/518	10/811
		4	9/9983	11/129	11/424	12/263
		5	11/006	12/308	11/555	12/916
	درون صفحه		م م م	ن م م	م ن م	ن ن م
		1	18/440	18/108	17/335	18/108
		2	18/977	19/064	18/733	19/064
		3	19/197	19/066	19/000	19/066
		4	19/291	19/267	19/168	19/267
		5	19/295	19/350	19/244	19/350
چهار طرف ساده	برون صفحه		م م ن	ن م ن	م ن ن	ن ن ن
		1	3/0029	5/0805	5/0805	6/4737
		2	7/2199	8/1670	8/1670	9/8723
		3	7/2199	9/2089	9/2089	9/8723
		4	9/4397	10/815	10/815	11/889
		5	10/984	11/458	11/458	12/870
	درون صفحه		م م م	ن م م	م ن م	ن ن م
		1	15/977	17/883	17/883	18/476
		2	18/687	18/889	18/889	19/133
		3	18/687	19/052	19/052	19/133
		4	19/081	19/225	19/225	19/308
		5	19/240	19/277	19/277	19/367

ضمیمه الف- فرکانس طبیعی نانوورق با تکیه‌گاههای ساده بر اساس الاستیسیته غیرمحلی و تئوری کرشهوف

می‌توان ثابت کرد که معادله حاکم در چنین ورقی بصورت (الف- 1) است.

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{12\rho\left(1-\nu^2\right)}{Eh^3}\left(1-\beta\nabla^2\right)\ddot{w} \qquad \text{(الف- 1)}$$

با بی بعد کردن معادله بالا، (الف- 2) به‌دست می‌آید.

$$4\frac{1}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{b^2}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{a^2}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)^2 W = \frac{a^2b^2}{h^2}\frac{\rho}{E}\left(1-4\beta^*\left(\frac{h^2}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{h^2}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\right)\ddot{W} \qquad \text{(الف- 2)}$$

مود ارتعاشی چنین ورقی میدان خیزی بصورت زیر دارد:

$$W = \sin(m\pi X)\sin(m\pi Y)\sin(\omega t)$$

پس فرکانس طبیعی ورق به صورت (الف- 3) می‌شود.

$$\varpi = \omega\frac{ab}{h}\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\pi\left(n^2\left(\frac{b}{a}\right)+m^2\left(\frac{a}{b}\right)\right)}{\sqrt{12\left(1-\nu^2\right)\left(\frac{1}{\pi^2}+\beta^*\left(n^2\left(\frac{h}{a}\right)^2+m^2\left(\frac{h}{b}\right)^2\right)\right)}} \qquad \text{(الف- 3)}$$

ضمیمه ب- فرکانس یک موج سه بعدی در جامد بی نهایت غیرمحلی

میدان جابجایی یک موج سه بعدی می‌تواند بگونه (ب- 1) باشد.

$$U = c_1\cos(m\pi X)\sin(m\pi Y)\sin(k\pi Z)\sin(\omega t),$$
$$V = c_2\sin(m\pi X)\cos(m\pi Y)\sin(k\pi Z)\sin(\omega t),$$
$$W = c_3\sin(m\pi X)\sin(m\pi Y)\cos(k\pi Z)\sin(\omega t) \qquad \text{(ب- 1)}$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله (7) و حل فرکانس طبیعی، روابط (ب- 2) و (ب- 3) به‌دست می‌آیند.

- موج غیر چرخشی سه بعدی

$$\varpi_{nmk} = \omega_{nmk}\left(\frac{ab}{h}\right)\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \sqrt{\frac{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((n)^2\left(\frac{b}{h}\right)^2+(m)^2\left(\frac{a}{h}\right)^2+(k)^2\left(\frac{a}{h}\frac{b}{h}\right)^2\right)}{\frac{1}{\pi^2}+\beta^*\left((n)^2\left(\frac{h}{a}\right)^2+(m)^2\left(\frac{h}{b}\right)^2+(k)^2\right)}} \qquad \text{(ب- 2)}$$

- موج هم حجم سه بعدی

$$\varpi_{nmk} = \omega_{nmk}\left(\frac{ab}{h}\right)\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2(1+\nu)}\left((n)^2\left(\frac{b}{h}\right)^2+(m)^2\left(\frac{a}{h}\right)^2+(k)^2\left(\frac{a}{h}\frac{b}{h}\right)^2\right)}{\frac{1}{\pi^2}+\beta^*\left((n)^2\left(\frac{h}{a}\right)^2+(m)^2\left(\frac{h}{b}\right)^2+(k)^2\right)}} \qquad \text{(ب- 3)}$$

5- مراجع

[1] A. Cemal Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of applied physics,* Vol. 54, No 9, pp. 4703-4710, 1983.
[2] C. Polizzotto, Nonlocal Elasticity and related Variational Principles, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 38, No. 42, pp. 7359-7380, 2001.
[3] R. Aghababaei, J.N. Reddy, Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 326, No. 1, pp. 277-289, 2009.
[4] S.C. Pradhan, J.N. Phadikar, Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 325, No. 1, pp. 206-223, 2009.
[5] T. Murmu, S.C. Pradhan, Small-scale effect on the free in-plane vibration of nanoplates by nonlocal continuum model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 41, No. 8, pp. 1628-1633, 2009.
[6] S.C. Pradhan, T. Murmu, Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics, *Computational materials science,* Vol. 47, No. 1, pp. 268-274, 2009.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.34.0]

[7] L. Shen, H-S. Shen, C-L. Zhang, Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer graphene sheets in thermal environments, *Computational Materials Science,* Vol. 48, No. 3, pp. 680-685, 2010.
[8] J.N. Phadikar, S.C. Pradhan, Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates, *Computational Materials Science,* Vol. 49, No. 3, pp. 492-499, 2010.
[9] E. Jomehzadeh, A.R. Saidi, Decoupling the nonlocal elasticity equations for three dimensional vibration analysis of nano-plates, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 2, pp. 1015-1020, 2011.
[10] S.C. Pradhan, A. Kumar, Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method. *Composite Structures,* Vol. 93, No. 2, pp. 774-779, 2011.
[11] R. Ansari, B. Arash, H. Rouhi, Vibration characteristics of embedded multi-layered graphene sheets with different boundary conditions via nonlocal elasticity, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 9, pp. 2419-2429, 2011.
[12] S. Narendar, Buckling analysis of micro-/nano-scale plates based on two-variable refined plate theory incorporating nonlocal scale effects, *Composite Structures,* Vol. 93, No. 12, pp. 3093-3103, 2011.
[13] M. Schwartz, N.T. Niane, R. Kouitat Njiwa, A simple solution method to 3D integral nonlocal elasticity: Isotropic-BEM coupled with strong form local radial point interpolation, *Engineering Analysis with Boundary Elements,* Vol. 36, No. 4, pp. 606-612, 2012.
[14] A. Alibeigloo, Three-dimensional free vibration analysis of multi-layered graphene sheets embedded in elastic matrix, *Journal of Vibration and Control,* Vol. 19, No. 16, pp. 2357-2371, 2013.
[15] A. Alibeigloo, A.A. Pasha Zanoosi, Static analysis of rectangular nano-plate using three-dimensional theory of elasticity, *Applied Mathematical Modelling,* Vol. 37, No. 10, pp. 7016-7026, 2013.
[16] A. Farajpour, A.R. Shahidi, M. Mohammadi, M. Mahzoon, Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics. *Composite Structures,* Vol. 94, No. 5, pp. 1605-1615, 2012.
[17] A. Ghorbanpour Arani, R. Kolahchi, H. Vossough, Buckling analysis and smart control of SLGS using elastically coupled PVDF nanoplate based on the nonlocal Mindlin plate theory, *Physica B: Condensed Matter,* Vol. 407, No. 22, pp. 4458-4465, 2012.
[18] R. Ansari, A. Shahabodini, H. Rouhi, Prediction of the biaxial buckling and vibration behavior of grapheme via a nonlocal atomistic-based plate theory, *Composite Structures,* Vol. 95, pp. 88-94, 2013.
[19] P. Malekzadeh, M. Shojaee, Free vibration of nanoplates based on a nonlocal two-variable refined plate theory, *Composite Structures,* Vol. 95, pp. 443-452, 2013.
[20] Y-M. Xu, H-S. Shen, C-L.Zhang, Nonlocal plate model for nonlinear bending of bilayer graphene sheets subjected to transverse loads in thermal environments. *Composite Structures,* Vol. 98, pp. 294-302, 2013.
[21] I.S. Radebe, S. Adali, Buckling and sensitivity analysis of nonlocal orthotropic nanoplates with uncertain material properties. *Composites Part B: Engineering,* Vol. 56, pp. 840-846, 2014.
[22] E. Alzahrani, A.M. Zenkour, M. Sobhy, Small scale effect on hygro-thermo-mechanical bending of nanoplates embedded in an elastic medium, *Composite Structures,* Vol. 105, pp. 163-172, 2013.
[23] J.N. Reddy, Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science,* Vol. 45, No. 2, pp. 288-307, 2007.
[24] M.H. Sadd, *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics,* 2nd Edition, pp. 69-122, Elsevier Academic Press, 2009.
[25] M. Touratier, An efficient standard plate theory, *International journal of engineering science,* Vol. 29, No. 8, pp. 901-916, 1991.
[26] A.M. Zenkour, Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading, *Composite Structures,* Vol. 65, No. 3, pp. 367-379, 2004.
[27] D. Zhou, Y.K. Cheung, F.T.K Au, S.H. Lo, Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method, *International Journal of Solids and Structures,* Vol. 39, No. 26, 6339-6353, 2002.
[28] S. Hosseini-Hashemi, M. Zare, R. Nazemnezhad, An exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nano-plates via nonlocal elasticity, *Composite Structures,* Vol. 100, pp. 290-299, 2013.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-19]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.11.34.0]