



تحلیل ضربه سرعت پایین تیر هدفمند شده سرامیک- فلزی تحت شرایط مرزی ساده و گیردار

فرشاد اکبری پناه^{1*}، رضا سعدوندی²، مهدی رنجبر³

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر
2- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر
3- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه
*malayeru.ac.ir@f.akbaripناه، 65719-95863

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 13 تیر 1396
پذیرش: 08 شهریور 1396
ارائه در سایت: 13 مهر 1396
کلید واژگان:
ضربه سرعت پایین
تیر هدفمند
تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تیر
قانون تماس هرتر
روش ریتز

چکیده

در این تحقیق بررسی تحلیلی و عددی تیر هدفمند شده سرامیک- فلزی تحت ضربه سرعت پایین با به کار بردن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تیر انجام شده است. ضربه زنده به صورت صلب و کروی در نظر گرفته شده است. با استفاده از ترکیب روش انرژی، ریتز و لاگرانژ، ماتریس‌های جرم و سفتی سیستم ارائه شده‌اند، همچنین شبیه‌سازی ضربه سرعت پایین بر تیرهای هدفمند شده سرامیک- فلزی در نرم‌افزار آباکوس انجام شده که به منظور هدفمند کردن تیر در نرم‌افزار آباکوس، تیر به 30 لایه در جهت ضخامت تقسیم‌بندی شده است. حداکثر نیروی تماسی بین ضربه زنده و تیر در مدل تحلیلی و شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس به ترتیب برابر 1062 و 1039 نیوتن با اختلاف 2.21 درصد و حداکثر جابه‌جایی ضربه زنده در مدل تحلیلی ارائه شده و شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس به ترتیب برابر 0.0104 و 0.0108 میلی‌متر با اختلاف حدود 3.85 درصد بوده است. در انتها تأثیر نوع تابع هدفمند شامل ترکیبی از توابع نمایی و چندجمله‌ای، سرعت ضربه زنده شامل 1، 2 و 3 متر بر ثانیه، شعاع ضربه زنده شامل 8، 12.7 و 16 میلی‌متر و شرایط مرزی ساده و گیردار بر پیشینه نیروی تماسی و لهیدگی تیر بررسی شده است. حداکثر و حداقل نیروی تماسی متعلق به تابع هدفمند چندجمله‌ای مرتبه اول و سوم و حداکثر و حداقل لهیدگی مربوط به تابع هدفمند چندجمله‌ای مرتبه سوم و اول بوده است.

Low velocity impact analysis of functionally graded ceramic-metal beam in simply and clamped supported boundary conditions

Farshad Akbaripناه^{1*}, Reza Saadvandi¹, Mehdi Ranjbar²

1- Department of Mechanical Engineering, Malayer University, Malayer, Iran
2- Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran
* P.O.B. 65719- 95863 Malayer, Iran, f.akbaripناه@malayeru.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 July 2017
Accepted 30 August 2017
Available Online 05 October 2017

Keywords:

Low velocity impact
Functionally graded beam
First order shear deformation beam theory
Hertz contact law
Ritz method

ABSTRACT

In this research, analytical and numerical investigation of the ceramic- metal FGM beam under low velocity impact is carried out by first order shear deformation beam theory. The impactor is considered as rigid and spherical. The mass and stiffness matrixes are proposed by combination of Energy method, Ritz and Lagrange method. Also, simulation of low velocity impact on the ceramic- metal FGM beam is carried out by ABAQUS software in which the beam is divided into about 30 layers in thickness direction in ABAQUS software to create a functionally graded beam. Maximum contact force between impactor and beam in analytical model and ABAQUS software is 1062 and 1039 N with 2.21 percent difference and maximum impactor displacement in analytical model and ABAQUS software is 0.0104 and 0.0108 mm with 3.85 percent difference. Finally, the effect of FGM function types include the combination of exponential and polynomial functions, impactor velocity include 1, 2 and 3 m/s, impactor radius include 8, 12.7 and 16 mm and simply and clamped supported boundary conditions are investigated on the contact force and indentation histories. The maximum and minimum contact forces belong to first and third order polynomial function and maximum and minimum indentations belong to third and first order polynomial function.

1- مقدمه

تشکیل شده باشد. ماتریس با احاطه تقویت‌کننده آن را در محل نسبی خودش نگه می‌دارد. استفاده انسان از مواد کامپوزیتی به کاغذهای پاپیروس ساخته شده توسط مصریان حدود 4000 سال پیش از میلاد مسیح

کامپوزیت¹ به ماده‌ای اطلاق می‌شود که از دو فاز ماتریس² و تقویت‌کننده³

¹ Composite
² Matrix

³ Reinforcement

Please cite this article using:

F. Akbaripناه, R. Saadvandi, M. Ranjbar, Low velocity impact analysis of functionally graded ceramic-metal beam in simply and clamped supported boundary conditions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 112-122, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

جبری مناسب و روش تابع وزنی گالرکین را مطالعه کردند. پایگانه و همکاران [15] پاسخ ورق ساندویچی با هسته مایع هوشمند مگنتورئولوژیکال به ضربه سرعت پایین را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حرکت ورق مستطیلی ساندویچی به کمک اصل هامیلتون استخراج شد و مسأله ارتعاشات آزاد ورق به کمک روش نویر به صورت تحلیلی حل شد.

در زمینه ضربه سرعت پایین بر تیرها، داریوشی و صدیقی [16] تئوری غیرخطی مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی را برای تحلیل رفتار یک تیر ساندویچی تحت بارگذاری ضربه سرعت پایین ارائه دادند. سازه ساندویچی در این تئوری به سه جزء رویه بالایی، هسته و رویه پایینی تقسیم شد که در آن رویه‌ها به صورت تیر تیموشنکو و هسته به صورت یک جسم دوبعدی که می‌تواند در راستای ضخامت فشرده شود، مدل‌سازی گردید. ملک‌زاده‌فرد و همکاران [17] رفتار تیر خمیده ساندویچی تحت بارگذاری ضربه‌ای کم‌سرعت با در نظر گرفتن تأثیر دمای محیط و با به‌کارگیری تئوری مرتبه بالای سازه‌های ساندویچی را مورد بررسی قرار دادند. تیر ساندویچی مورد مطالعه از ترکیب رویه‌های کامپوزیتی و هسته فومی تشکیل و شرایط تکیه‌گاهی در بارگذاری از نوع تکیه‌گاه دو طرف ساده با امکان تغییر مکان در راستای محیطی انتخاب شد، همچنین برای مدل‌سازی ضربه از مدل دو درجه آزادی جرم و فنر استفاده شد.

فلزات دارای ویژگی‌هایی مانند قابلیت ماشین‌کاری، شکل‌پذیری و استحکام بالاست، ولی در برابر خوردگی و حرارت ضعیف و آسیب‌پذیر است. از طرف دیگر سرامیک‌ها دارای خواصی هستند که مکمل خواص فلزات است، یعنی دارای مقاومت بالا در برابر حرارت و خوردگی است و در مقابل قابلیت شکل‌پذیری پایینی دارند. در نتیجه با ترکیب فلز و سرامیک می‌توانیم ماده‌ای را ایجاد کنیم که دارای خواص هر دو ماده باشد. مطالعه تحقیقات انجام شده در مورد ضربه سرعت پایین بر تیرها نشان می‌دهد که ضربه سرعت پایین بر تیرهای هدفمند سرامیک-فلزی طوری که خواص مکانیکی به صورت ترکیب توابع چندجمله‌ای و نمایی در راستای ضخامت تیر تغییر می‌کند، انجام نشده که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تیر برای ارائه جابه‌جایی‌های تیر استفاده شده است. خواص مکانیکی ترکیب سرامیک و فلز با توجه به قانون اختلاط تعریف شده است. از تئوری تماس هرگز برای تماس بین ضربه‌زننده و تیر استفاده شده است. از ترکیب روش انرژی، ریتز و لاگرانژ برای نوشتن معادلات حرکت ضربه‌زننده و تیر استفاده شده است. برای حل معادلات حرکت از روش رانج کاتای مرتبه چهار استفاده شده است. شبیه‌سازی ضربه سرعت پایین بر تیرهای هدفمند شده سرامیک-فلز در نرم‌افزار آباکوس⁴ انجام شده است. به منظور هدفمند کردن تیر در جهت ضخامت در نرم‌افزار آباکوس تیر به 30 لایه در جهت ضخامت تقسیم و به هر لایه میانگین خواص مکانیکی سطوح بالا و پایین آن لایه داده شده است. بین نتایج مدل تحلیلی حاضر و نتایج به‌دست‌آمده در نرم‌افزار آباکوس مقایسه صورت گرفته است. در انتها تأثیر نوع تابع هدفمند شامل ترکیبی از توابع نمایی و چندجمله‌ای، سرعت ضربه‌زننده، شعاع ضربه‌زننده و شرایط مرزی بر پاسخ ضربه سرعت پایین مورد بررسی قرار گرفته است.

2- مدل‌سازی

1-1- مدل‌سازی تحلیلی

در این بخش مدل‌سازی تحلیلی ضربه سرعت پایین بر تیرهای هدفمند شده

بازمی‌گردد [1]. مواد هدفمند¹ موادی ناهمگن، ولی ایزوتروپیک هستند که خواص آن‌ها به طور پیوسته از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر تغییر می‌کند. این تغییرات پیوسته نسبت به تغییرات گسسته خواص مواد کامپوزیت مشکل تغییرات ناگهانی در سطح تماس دو ماده‌ی متفاوت را حل می‌کند [2]. بسیاری از وسایل و تجهیزات جدید مستلزم استفاده از موادی با خواص متضاد است، به طوری که هیچ ماده تک‌فازی قادر به تأمین شرایط مورد نیاز نیست؛ بنابراین در اثر پیشرفت صنعتی در سال‌های اخیر نیاز به مواد هدفمند افزایش یافته است.

پاسخ ضربه سرعت پایین بر ساختارهای جامدات موضوعی مهم در مکانیک جامدات است. اس جابلوم و همکاران [3] و شیواکومار و همکاران [4] ضربه سرعت پایین را شبیه بارگذاری شبه-استاتیک با سرعت 1 تا 10 متربرثانه تعریف کردند. توفان نگرگ، سقوط ابزار و تصادف نمونه‌هایی از برخورد سرعت پایین هستند [5]. روش‌های متنوعی برای مدل کردن تماس بین ضربه‌زننده و هدف وجود دارد. در این زمینه روش جرم-فنر، روش بالانس انرژی و روش مستقیم مورد استفاده قرار گرفته است [6].

گونس و آیدین [7] در زمینه مطالعات ضربه سرعت پایین بر ساختارهای هدفمند پاسخ سه بعدی صفحه دایره‌ای هدفمند را با استفاده از نرم‌افزار المان محدود بررسی کردند. گونس و همکاران [8] کار پیشین خود را برای پاسخ ضربه تیر هدفمند الاستیک-پلاستیک گسترش دادند. در مدل آن‌ها طرح موری-تاناکا² برای تخمین خواص هر لایه استفاده شد. شبیه‌سازی عددی ضربه سرعت پایین بر تیر ساندویچی توسط اعتمادی و همکاران [9] مورد بررسی قرار گرفت. برای استخراج پاسخ ضربه سرعت پایین بر صفحه‌های هدفمند، لارسون و همکاران [10] ترکیب روشی آزمایشگاهی، عددی و تحلیلی را توسعه دادند. آن‌ها در این تحقیق خواص الاستیک دو فازی را برای صفحه هدفمند تحت نیروی ضربه‌ای ارائه دادند. شبیه‌سازی عددی و تست‌های آزمایشگاهی بر صفحه‌های هدفمند تیتانیوم-تیتانیوم بوراید³ انجام شد. نتایج به‌دست‌آمده برای مدل کردن مسأله‌های اجزا محدود استفاده شده است. آن‌ها نشان دادند که پاسخ ضربه سرعت پایین بر صفحه بر مبنای نتایج اجزا محدود و تست‌های آزمایشگاهی تطابق دارد. خلیلی و همکاران [11] پاسخ صفحه مستطیلی نازک هدفمند را تحت ضربه سرعت پایین بررسی کردند. در این تحقیق اینرسی در صفحه نادیده گرفته شد. با معرفی تابع تنش ایری، معادلات در صفحه حرکت به وسیله معادلات سازگاری جایگزین شد و حالت صفحه با تکیه‌گاه ساده در تحقیق آن‌ها در نظر گرفته شد. سفتی تماس بر مبنای مدل فنر-جرم استخراج شد و نتایج با نرم‌افزار آباکوس سازگار بود. در تحقیق دیگر دای و همکاران [12] ضربه سرعت پایین صفحه دایره‌ای هدفمند را بررسی کردند، همچنین فرمول‌بندی تماس جیاناکوپولوس در مدل آن‌ها به‌کار برده شد.

در زمینه ضربه سرعت پایین بر صفحات کامپوزیتی آشنای قاسمی و همکاران [13] اثر بار ضربه‌ای عرضی با سرعت پایین یک جرم کوچک یا بزرگ بر رفتار دینامیکی یک ورق کامپوزیتی یکسرگیردار چندلایه با لایه فلزی به روش حل تحلیلی- عددی مطالعه کردند. رفتار متقابل بین ضربه‌زننده با ورق کامپوزیتی به کمک یک سیستم دو درجه آزادی جرم-فنر و با استفاده از نرم‌افزار المان محدود آباکوس مدل‌سازی شد. پاک‌نژاد و همکاران [14] اثرات بار ضربه‌ای با جرم کوچک و سرعت پایین روی یک ورق کامپوزیتی لایه‌ای با تکیه‌گاه تمام گیردار با بهره‌گیری از چند جمله‌ای‌های

¹ Functionally graded material

² Mori-Tanaka

³ Titanium-Titanium Boride (Ti-TiB)

⁴ ABAQUS

جدول 1 مقدار $V_{c,t}$ برای مقادیر مختلف α و β

مقدار $V_{c,t}$	مقادیر α و β
$\beta h e^{\beta h} - e^{\beta h} + 1/\beta^2 h^2 e^{\beta h}$	$\alpha = 1$ و β متغیر
$1/1+\alpha$	$\beta = 0$ و α متغیر

در این رابطه u_0 و w_0 جابه‌جایی‌های طولی و جانبی سطح میانی تیر و φ دوران سطح مقطع است. روابط کرنش و جابه‌جایی به صورت رابطه (5) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y,z,t)}{\partial x} = \varphi + \frac{\partial w_0(x,t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

در این روابط ε_{xx} و γ_{xz} به ترتیب نشان‌دهنده کرنش محوری در جهت x و کرنش برشی در صفحه xz است. روابط تنش و کرنش به صورت رابطه (6) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q_{11} \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xz} &= K_S Q_{55} \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (6)$$

در این روابط σ_{xx} و σ_{xz} به ترتیب نشان‌دهنده تنش محوری در جهت x و کرنش برشی در صفحه xz همچنین K_S ضریب اصلاح برشی است که برابر $\pi^2/12$ در نظر گرفته می‌شود [19].

ترم‌های Q_{11} و Q_{55} برحسب خواص مکانیکی ماده به صورت رابطه (7) نوشته می‌شوند [19].

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_x}{1 - \nu_x^2} \\ Q_{55} &= G_x \end{aligned} \quad (7)$$

سفتی تماس بین ضربه‌زننده و تیر K_{imp} به صورت رابطه (8) نوشته می‌شود [20].

$$K_{imp} = \frac{4}{3} \sqrt{R} \left(\frac{1}{E_{33,imp}} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \right)^{-1} \quad (8)$$

در این رابطه E_s و ν_s مدول یانگ و ضریب پواسون ضربه‌زننده و $E_{33,imp}$ مدول یانگ عرضی تیر در سطح تماس با ضربه‌زننده است که از رابطه (2) برابر E_z فرض می‌شود [20]. انرژی پتانسیل P و انرژی جنبشی T سیستم ضربه‌زننده و تیر به صورت رابطه (9) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + K_S \sigma_{xz} \gamma_{xz}) dA dx \\ &\quad + \frac{2}{5} K_{imp} (y - w_0(x_{imp}, t))^2 \\ T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dA dx + \frac{1}{2} M_{imp} \dot{y}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

در روابط بالا x_{imp} مکان برخورد بین ضربه‌زننده و تیر، y جابه‌جایی ضربه‌زننده و $w_0(x_{imp}, t)$ جابه‌جایی تیر در مکان ضربه است. اختلاف مقدار جابه‌جایی ضربه‌زننده و جابه‌جایی تیر در مکان ضربه میزان لهیدگی تیر در اثر ضربه را نشان می‌دهد برابر با $(y - w_0(x_{imp}, t))$ است، همچنین در رابطه بالا M_{imp} جرم ضربه‌زننده را نشان می‌دهد. از روش ریتز هر یک توابع u_0 ، w_0 و φ_0 به صورت رابطه (10) نوشته می‌شوند [21].

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) N_n^u(x) \\ w_0(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) N_n^w(x) \\ \varphi_0(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) N_n^\varphi(x) \end{aligned} \quad (10)$$

در جهت ضخامت شامل سرامیک و فلز انجام شده است. برای این منظور تیری به ضخامت h طول L و عرض b در سیستم مختصات مستطیلی در نظر گرفته شده است. سیستم مختصات یادشده در مرکز تیر انتخاب شده است، به طوری که $-L/2 \leq x \leq L/2$ ، $-b/2 \leq y \leq b/2$ و $-h/2 \leq z \leq h/2$ است (شکل 1).

یک تابع هدفمند ابتکاری به صورت ترکیب توابع چندجمله‌ای و نمایی برای کسر حجمی سرامیک V_c به صورت رابطه (1) ارائه شده است.

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^\alpha e^{\beta(z-\frac{h}{2})} \quad (1)$$

جایی که α و β مقادیر ثابت برای تشکیل توابع هدفمند متنوع و مقدار کسر حجمی فلز V_m برابر با $1 - V_c$ است؛ بنابراین در $z = -h/2$ مقدار کسر حجمی سرامیک صفر و کسر حجمی فلز برابر یک است، در $z = h/2$ مقدار کسر حجمی سرامیک یک و کسر حجمی فلز برابر صفر و به همین منظور در این رابطه $\alpha \neq 0$ است. همچنین خواص مکانیکی ترکیب سرامیک و فلز با توجه به قانون اختلاط به صورت رابطه (2) نوشته می‌شود [18].

$$\begin{aligned} E_x &= (E_c - E_m) V_{c,t} + E_m \\ \rho_x &= (\rho_c - \rho_m) V_{c,t} + \rho_m \\ \nu_x &= (\nu_c - \nu_m) V_{c,t} + \nu_m \\ E_z &= \left(\frac{V_{c,t}}{E_c} + \frac{(1 - V_{c,t})}{E_m} \right)^{-1} \\ G_x &= \left(\frac{V_{c,t}}{G_c} + \frac{(1 - V_{c,t})}{G_m} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

در این روابط E_x ، ρ_x ، ν_x ، E_z و G_x به ترتیب نشان دهنده مدول یانگ طولی، چگالی طولی، ضریب پواسون طولی، مدول یانگ عرضی و مدول برشی طولی تیر هدفمند است. زیروندهای c و m پارامترهای یادشده را برای سرامیک و فلز نشان می‌دهند. عبارت $V_{c,t}$ نشان‌دهنده کسر حجمی کل سرامیک است که به صورت رابطه (3) به دست می‌آید.

$$V_{c,t} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} V_c dz \quad (3)$$

در این تحقیق با توجه به مقادیر مختلف α و β دو حالت مختلف برای تابع V_c در رابطه (1) در نظر گرفته شده که پس از انتگرال‌گیری توسط رابطه (3)، مقادیر $V_{c,t}$ در جدول 1 ارائه شده است.

طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تیر، جابه‌جایی طولی u و جابه‌جایی جانبی تیر w به صورت رابطه (4) نوشته می‌شود [6].

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,t) + z\varphi(x,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,t) \end{aligned} \quad (4)$$

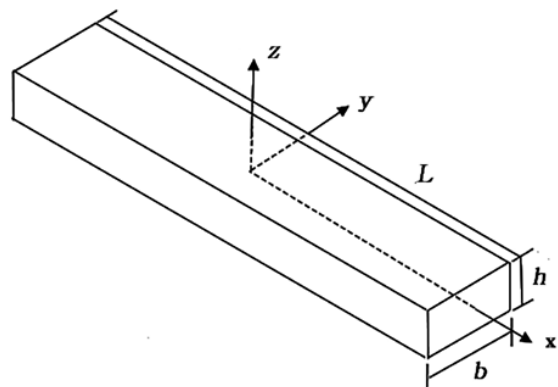


Fig. 1 Schematic of the beam in rectangular coordinate system

شکل 1 شماتیک تیر در سیستم مختصات مستطیلی

در رابطه بالا M ماتریس جرم و K ماتریس سفتی در روش ریتز که المان‌های آن‌ها در پیوست ارائه شده است. نیروی تماسی بین ضربه‌زننده و تیر F_{imp} به صورت رابطه (14) نوشته می‌شود.

$$F_{imp} = K_{imp} \left(y - \sum_{n=1}^N W_n(t) N_n^w(x_{imp}) \right)^{\frac{3}{2}} \quad (14)$$

در نهایت شرایط اولیه معادلات حرکت به صورت رابطه (15) است.

$$\begin{aligned} U_n(0) &= 0, \dot{U}_n(0) = 0 \\ W_n(0) &= 0, \dot{W}_n(0) = 0 \\ \Phi_n(0) &= 0, \dot{\Phi}_n(0) = 0 \\ y(0) &= 0, \dot{y}(0) = V_{imp} \end{aligned} \quad (15)$$

در این رابطه V_{imp} نشان‌دهنده سرعت ضربه‌زننده در لحظه برخورد با تیر است. در این مقاله برای حل عددی روابط حرکت (13) با شرایط اولیه یادشده در رابطه (15) از روش رانج-کاتای³ مرتبه چهار استفاده شده است.

2-2- مدل سازی در نرم افزار آباکوس

در این بخش ضربه سرعت پایین بر تیرهای هدفمند شده سرامیک و فلز در جهت ضخامت در نرم افزار آباکوس شبیه سازی شده است. به همین منظور در نرم افزار آباکوس ضربه‌زننده به صورت سه بعدی تحلیلی صلب⁴ و تیر به صورت سه بعدی شکل پذیر⁵ در نظر گرفته شده است. در قسمت نوک ضربه‌زننده یک نقطه مرجع⁶ قرار داده شده و مشخصات جرم و ممان اینرسی ضربه‌زننده کروی به این نقطه مرجع اعمال شده است. تیر به 30 لایه در راستای عرضی تقسیم شده است (شکل 2-a) و به هر لایه میانگین خواص مکانیکی سطوح بالا و پایین تیر براساس رابطه (2) داده شده است. حل گر از نوع دینامیک صریح⁷ تعریف شده است. بین ضربه‌زننده و تیر تماس از نوع تماس سطح به سطح⁸ در نظر گرفته شده است (شکل 2-b) به نقطه مرجع ضربه‌زننده سرعت اولیه داده شده و به آن قید حرکت در راستای ضخامت تیر داده شده است. مش‌ها با مشخصات استاندارد، تنش سه بعدی و به صورت تعریف شده و در قسمت برخورد با تعداد بیشتری در نظر گرفته شده است (شکل 2-c). در کل برای دقیق شدن پاسخ‌ها حدود یک میلیون المان برای تیر در نظر گرفته شده است.

3- نتایج و بحث

در این بخش برخورد سرعت پایین ضربه‌زننده کروی بر تیرهای هدفمند شده سرامیک و فلز در جهت ضخامت بررسی شده است. ابتدا صحت‌سنجی مدل تحلیلی با شبیه سازی در نرم افزار آباکوس ارائه شده است؛ سپس تأثیر نوع تابع هدفمند شامل ترکیبی از توابع نمایی و چندجمله‌ای، سرعت ضربه‌زننده، شعاع ضربه‌زننده و شرایط مرزی بر پیشینه نیروی تماسی و لهیدگی تیر بررسی شده است.

برای این منظور تیری با طول 135 میلی‌متر، عرض 15 میلی‌متر و ضخامت 10 میلی‌متر با توزیع خطی هدفمند شده عرضی با $\alpha = 1, \beta = 0$ در رابطه (1) در نظر گرفته شده است. ضربه‌زننده کروی با جرم 10 گرم، سرعت اولیه 1 متر بر ثانیه و شعاع 12.7 میلی‌متر به سطح بالای تیر در مرکز تیر برخورد می‌کند. شرایط مرزی تیر به صورت تکیه‌گاه ساده فرض شده است. از ماده سیلیکون نیتراید⁹ به عنوان سرامیک و فولاد¹⁰ به عنوان فلز در

در روش ریتز توابع شکل N_n^u, N_n^w, N_n^ϕ و N_n^ψ باید براساس شرایط مرزی ضروری انتخاب شوند. با انتخاب توابع شکل مناسب با توجه به شرایط مرزی ضروری می‌توان شرایط مرزی متنوع را ایجاد کرد. توابع شکل N_n^u, N_n^w و N_n^ϕ به صورت رابطه (10) نوشته می‌شوند [22].

$$\begin{aligned} N_n^u(x) &= x^{n-1} L_u R_u \\ N_n^w(x) &= x^{n-1} L_w R_w \\ N_n^\phi(x) &= x^{n-1} L_\phi R_\phi \end{aligned} \quad (11)$$

برای شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده¹ SS و گیردار² CC در سمت چپ و راست تیر، توابع L و R در جدول 2 ارائه شده است [22]. سپس معادلات حرکت از معادلات تعمیم یافته لاگرانژ³ به صورت رابطه (12) به دست می‌آید [23].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial U_n} + \frac{\partial P}{\partial U_n} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{W}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial W_n} + \frac{\partial P}{\partial W_n} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Phi_n} + \frac{\partial P}{\partial \Phi_n} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (12)$$

در نهایت 3N+1 معادله حرکت وابسته به هم، غیرخطی و وابسته به زمان می‌تواند در فرم ماتریسی به صورت رابطه (13) نوشته شود.

$$\begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] & [M_{23}] \\ [M_{31}] & [M_{32}] & [M_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{U}_n\} \\ \{\dot{W}_n\} \\ \{\dot{\Phi}_n\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_n\} \\ \{W_n\} \\ \{\Phi_n\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{imp} N_n^w(x_{imp}) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

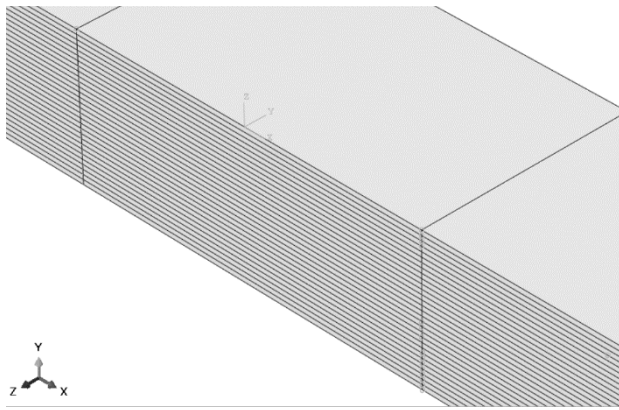
$$M_{imp} \ddot{y} = -F_{imp}$$

جدول 2 توابع L و R برای شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده و گیردار [22]

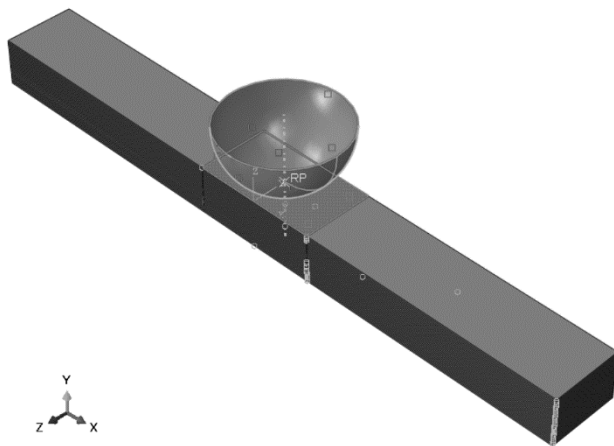
نوع تکیه‌گاه‌ها	توابع L و R
ساده	$L_u = 1, R_u = 1$
	$L_w = \left(\frac{L}{2} + x\right), R_w = \left(\frac{L}{2} - x\right)$
	$L_\phi = 1, R_\phi = 1$
گیردار	$L_u = \left(\frac{L}{2} + x\right)$
	$R_u = \left(\frac{L}{2} - x\right)$
	$L_w = \left(\frac{L}{2} + x\right)$
	$R_w = \left(\frac{L}{2} - x\right)$
	$L_\phi = \left(\frac{L}{2} + x\right)$
	$R_\phi = \left(\frac{L}{2} - x\right)$

¹ Simply supported
² Clamped supported

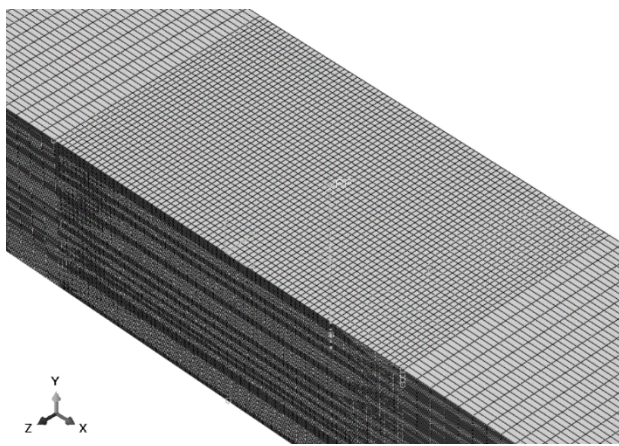
³ Runge-Kutta
⁴ 3D Analytical Rigid
⁵ 3D Deformable
⁶ Reference point
⁷ Dynamic Explicit
⁸ Surface to Surface Contact
⁹ Silicon Nitride
¹⁰ Stainless Steel



(الف) (a)



(ب) (b)



(ج) (c)

Fig. 2 Simulation in ABAQUS software, a- Partitioning of the beam in the thickness direction, b- Interaction between impactor and beam and c- Meshing of the beam

شکل 2 شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس، الف- پارتیشن‌بندی تیر در راستای ضخامت، ب- تماس بین ضربه‌زننده و تیر و ج- مش‌بندی تیر

ترتیب برابر با 0.0095، 0.0094، 0.0091، 0.0096 و 0.0098 میلی‌متر است. بنابراین بیشینه لهیدگی مربوط چند جمله‌ای مرتبه سوم و کمترین لهیدگی مربوط چند جمله‌ای مرتبه اول بوده است.

می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در توابع هدفمند نمایی با افزایش توان از مقادیر منفی به سمت صفر، همواره مقدار بیشینه نیروی تماسی افزایش و

تیر استفاده شده که خواص مکانیکی آن‌ها در جدول 3 ارائه شده است. در هر بخش برای بررسی تأثیر نوع تابع هدفمند شامل ترکیبی از توابع نمایی و چندجمله‌ای، سرعت ضربه‌زننده، شعاع ضربه‌زننده و شرایط مرزی، فقط مقادیر عددی پارامترهایی که تأثیر آن‌ها بررسی شده، تغییر کرده است و مقدار جدید یاد شده، ولی مقادیر عددی سایر پارامترها ثابت است.

1-3- صحت‌سنجی

مقایسه پیشینه نیروی تماسی بین ضربه‌زننده و تیر، جابه‌جایی و سرعت ضربه‌زننده بین مدل تحلیلی و شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس در شکل 3 ارائه شده است. بیشینه نیروی تماسی بین ضربه‌زننده و تیر در مدل تحلیلی و شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس به ترتیب برابر 1062 و 1039 نیوتن است. اختلاف بیشینه نیروی تماسی مدل تحلیلی حاضر و شبیه‌سازی نرم‌افزار آباکوس 2.21% است، همچنین بیشینه جابه‌جایی بین ضربه‌زننده در مدل تحلیلی ارائه شده و شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس به ترتیب برابر 0.0104 و 0.0108 میلی‌متر و اختلاف آن‌ها حدود 3.85% است. این نکته قابل ذکر است که در این تحقیق از روش ریتز برای حل معادلات تئوری استفاده شده در حالی که در نرم‌افزار آباکوس روش اجزا محدود برای حل معادلات تعادل سیستم به کار گرفته شده است. کانتور تنش فون میسز در نرم‌افزار آباکوس در محدوده زمانی صفر تا 30 میکروثانیه در شکل 4 ارائه شده است.

2-3- تأثیر نوع تابع هدفمند

در این بخش تأثیر پنج نوع تابع هدفمند نشان داده شده در جدول 4 در ضربه سرعت پایین بر تیر هدفمند شده مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل 5 نحوه تغییر توابع هدفمند مختلف V_c در جهت ضخامت تیر نمایش داده شده است.

در شکل 6 تأثیر توابع هدفمند مختلف V_c بر بیشینه نیروی تماسی و لهیدگی تیر ارائه شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است، بیشینه نیروی تماسی برای موارد 1-5 به ترتیب برابر با 1056، 1050، 1062، 1047 و 1038 نیوتن است؛ بنابراین بیشینه نیروی تماسی مربوط به مورد سوم یعنی چندجمله‌ای مرتبه اول و کمترین نیروی تماسی مربوط به مورد پنجم یعنی چندجمله‌ای مرتبه سوم است. بیشینه لهیدگی برای موارد 1-5 به

جدول 3 خواص مکانیکی سیلیکون نیتراید و فولاد

Table 3 Mechanical properties of Silicon Nitride and Stainless Steel	
نوع ماده	خواص مکانیکی
سیلیکون نیتراید	$E = 348.43 \text{ GPa}$
	$\nu = 0.24$
	$\rho = 2370 \text{ kg/m}^3$
فولاد	$E = 348.43 \text{ GPa}$
	$\nu = 0.24$
	$\rho = 2370 \text{ kg/m}^3$

جدول 4 توابع هدفمند مختلف V_c برای مقادیر مختلف α و β

Table 4 Different FGM functions of V_c for different values of α and β		
مورد	مقادیر α و β	V_c
1	$\beta = -50$ و $\alpha = 1$	$(\frac{1}{2}z+h)e^{-50(\frac{z-h}{2})}$
2	$\beta = -25$ و $\alpha = 1$	$(\frac{1}{2}z+h)e^{-25(\frac{z-h}{2})}$
3	$\beta = 0$ و $\alpha = 1$	$(\frac{1}{2}z+h)$
4	$\beta = 0$ و $\alpha = 1$	$(\frac{1}{2}z+h)^2$
5	$\beta = 0$ و $\alpha = 1$	$(\frac{1}{2}z+h)^3$

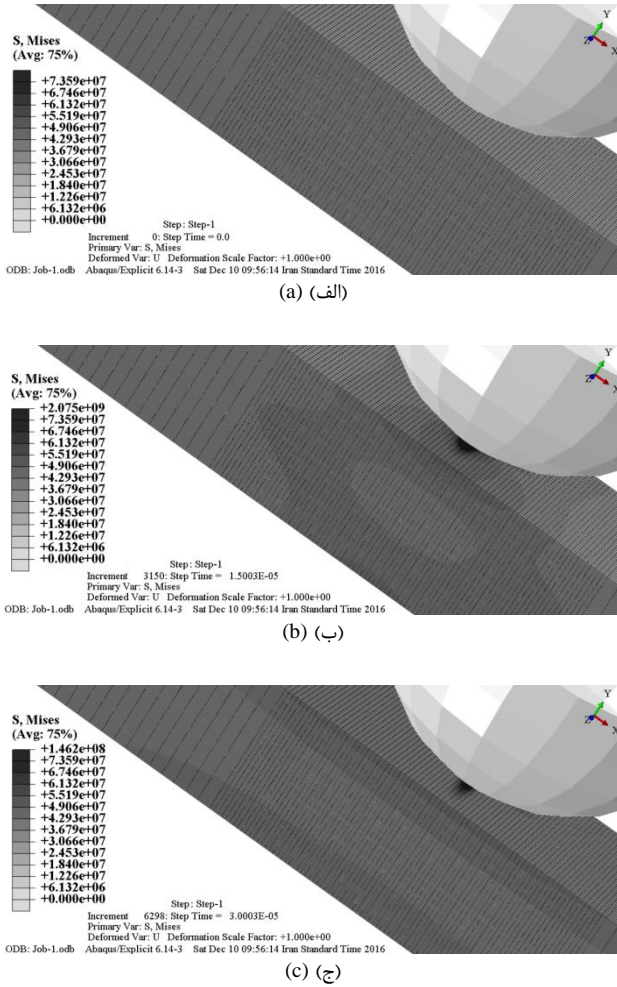


Fig. 4 The Von-Mises contour (Pa) in ABAQUS software in time a- 0 μ s, b- 15 μ s and c- 30 μ s

شکل 4 کانطور تنش فون میسز (پاسکال) در نرم افزار آباکوس در زمان، الف- صفر میکروثانیه، ب- 15 میکروثانیه و ج- 30 میکروثانیه

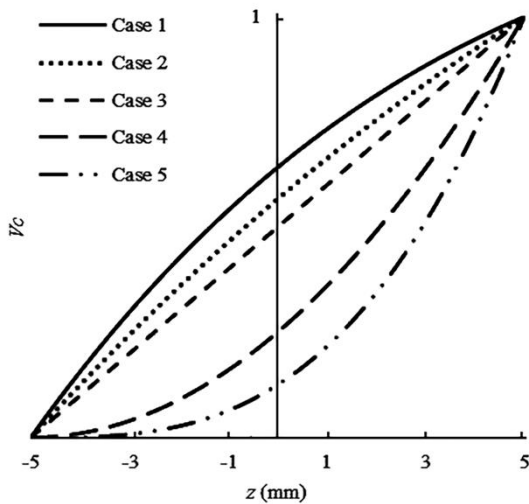
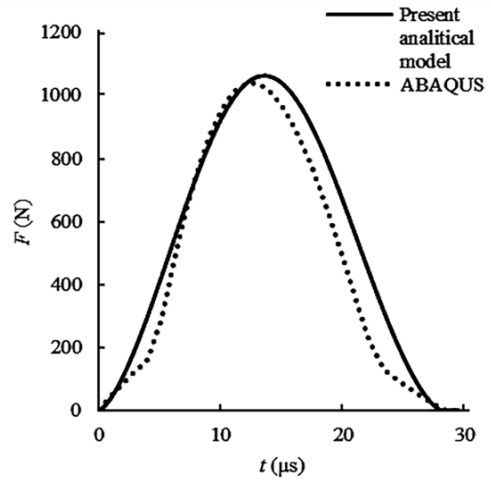


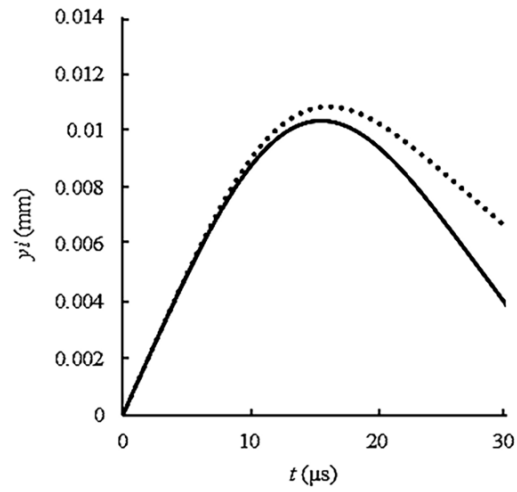
Fig. 5 The variation of different FGM functions of V_c in beam thickness direction

شکل 5 نحوه تغییر توابع هدفمند مختلف V_c در جهت ضخامت تیر

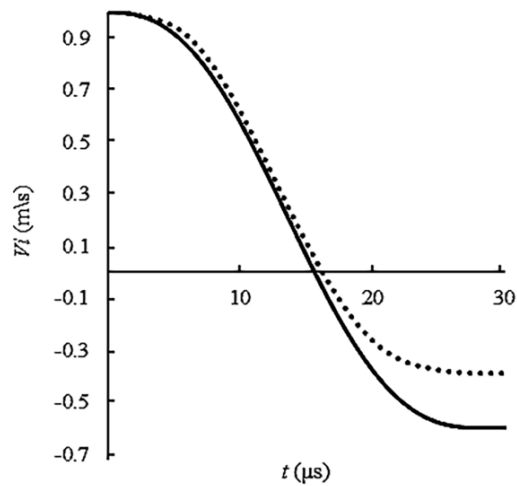
بیشینه لهیدگی کاهش یافته است. در توابع هدفمند چندجمله‌ای با افزایش



(a) الف



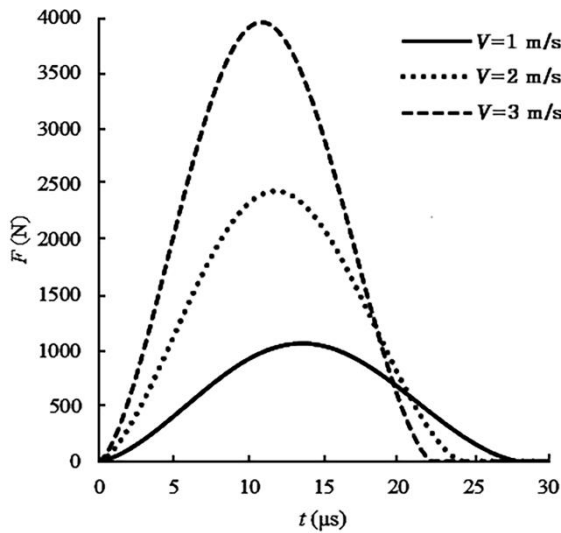
(b) ب



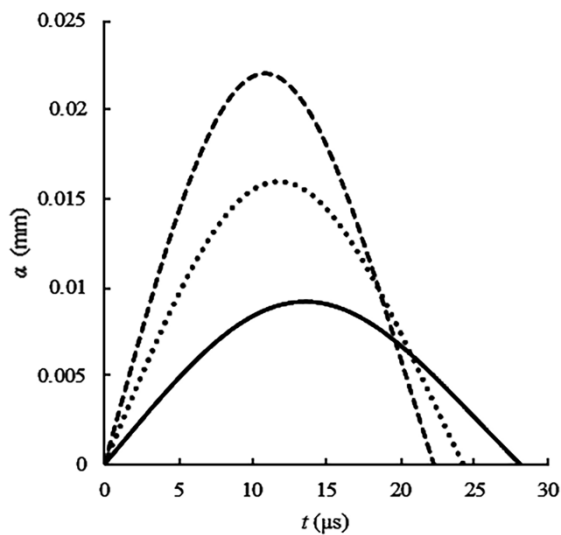
(c) ج

Fig. 3 Comparison of a- contact force, b- impactor displacement and c- impactor velocity histories between analytical model and ABAQUS simulation

شکل 3 مقایسه پیشینه الف- نیروی تماسی، ب- جابه‌جایی ضربه‌زننده و ج- سرعت ضربه‌زننده بین مدل تحلیلی و شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس



(الف) (a)



(ب) (b)

Fig. 7 The effect of impactor velocity on the a- contact force and b- indentation histories

شکل 7 تأثیر سرعت ضربه‌زننده بر پیشینه الف- نیروی تماسی، ب- لهیدگی

140.66% افزایش یافته است. با افزایش سرعت ضربه‌زننده مقدار پیشینه نیروی تماسی افزایش، زمان تماس کاهش و مقدار پیشینه لهیدگی تیر افزایش یافته است.

4-3- تأثیر شعاع ضربه‌زننده

تأثیر شعاع ضربه‌زننده بر پیشینه نیروی تماسی و لهیدگی تیر در شکل 8 ارائه شده است.

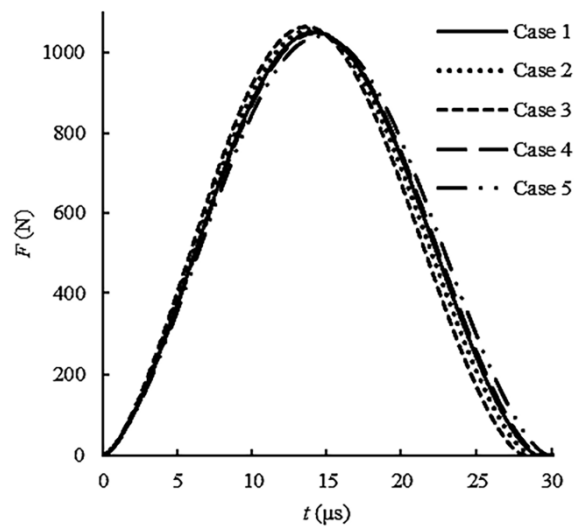
پیشینه نیروی تماسی برای شعاع ضربه‌زننده 8، 12.7 و 16 میلی‌متر به ترتیب برابر با 970، 1062 و 1111 نیوتن است؛ بنابراین پیشینه نیروی تماسی با افزایش شعاع ضربه‌زننده از 8 به 12.7 و 16 پیشینه به ترتیب 9.48% و 14.54% افزایش یافته است. پیشینه لهیدگی تیر برای شعاع ضربه‌زننده 8، 12.7 و 16 میلی‌متر به ترتیب برابر با 0.0091، 0.01 و 0.0087 میلی‌متر است. در نتیجه پیشینه لهیدگی تیر با افزایش شعاع

درجه چندجمله‌ای، همواره مقدار پیشینه نیروی تماسی کاهش و پیشینه لهیدگی افزایش یافته است.

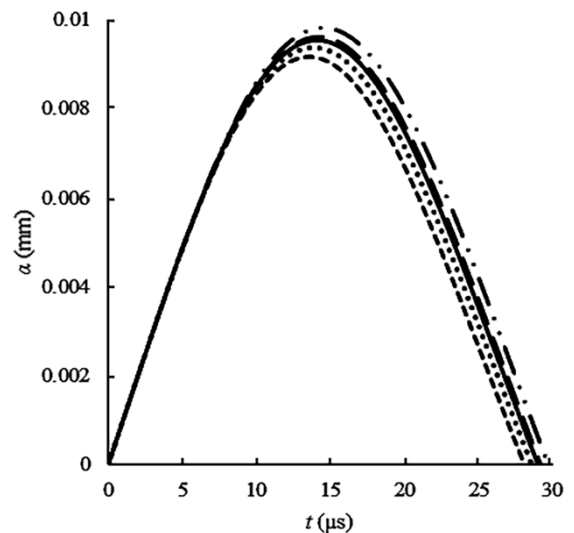
3-3- تأثیر سرعت ضربه‌زننده

تأثیر سرعت ضربه‌زننده بر پیشینه نیروی تماسی و لهیدگی تیر در شکل 7 ارائه شده است. پیشینه نیروی تماسی برای سرعت ضربه‌زننده 1-3 متر بر ثانیه به ترتیب برابر با 1062، 2435 و 3957 نیوتن است.

پیشینه نیروی تماسی با افزایش سرعت ضربه‌زننده از 1 به 2 و 3 متر بر ثانیه به ترتیب 129.28% و 272.6% افزایش یافته است. پیشینه لهیدگی تیر برای سرعت ضربه‌زننده 1، 2 و 3 متر بر ثانیه به ترتیب برابر با 0.0091، 0.0159 و 0.0219 میلی‌متر است. در نتیجه پیشینه لهیدگی تیر با افزایش سرعت ضربه‌زننده از 1 به 2 و 3 متر بر ثانیه به ترتیب 74.73% و



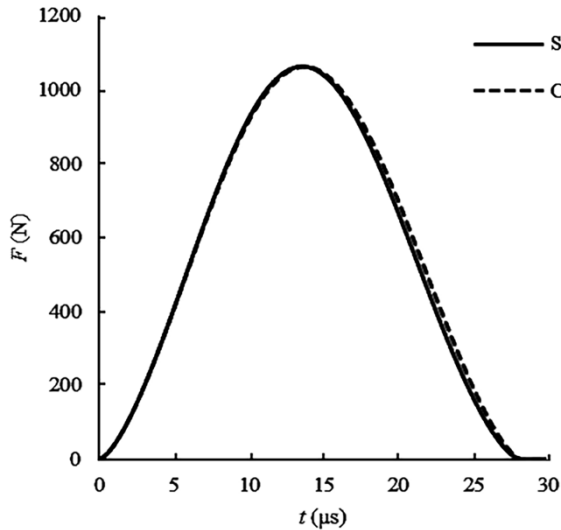
(الف) (a)



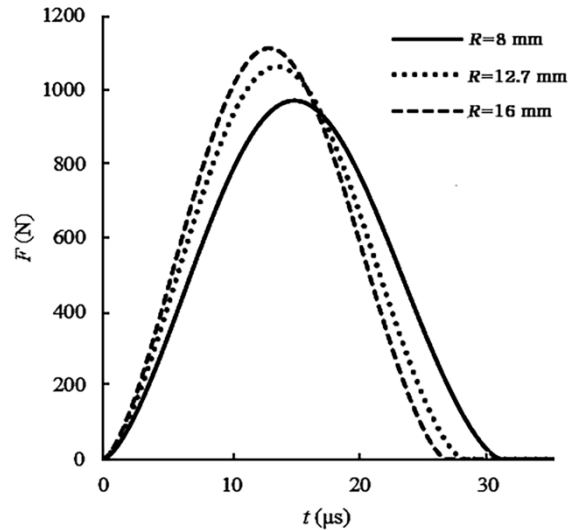
(ب) (b)

Fig. 6 The effect of different FGM functions of V_c on the a- contact force and b- indentation histories

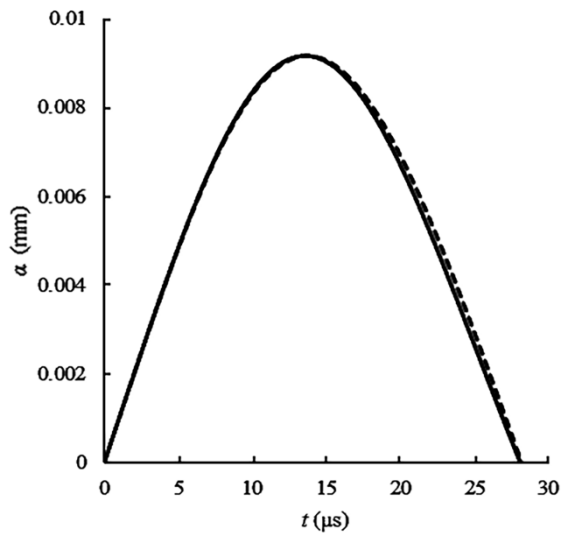
شکل 6 تأثیر توابع هدفمند مختلف V_c بر پیشینه الف- نیروی تماسی و ب- لهیدگی



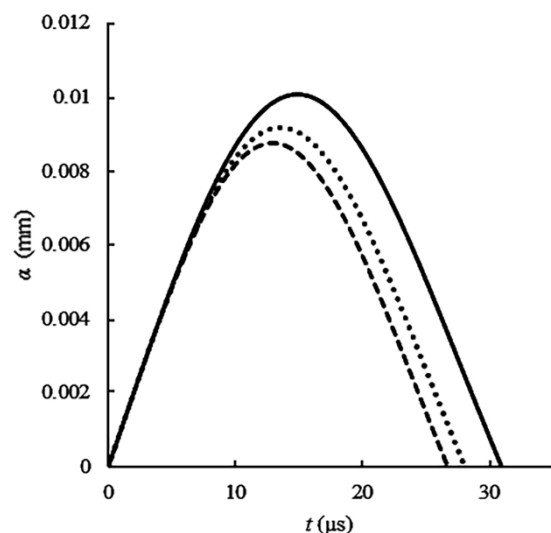
(الف) (a)



(الف) (a)



(ب) (b)



(ب) (b)

Fig. 9 The effect of SS and CC boundary condition in $x_{imp}=0$ on the a- contact force and b- indentation histories

Fig. 8 The effect of impactor radius on the a- contact force and b- indentation histories

شکل 9 تأثیر شرایط مرزی SS و CC در $x_{imp}=0$ بر پیشینه الف- نیروی تماسی و ب- لهیدگی

شکل 8 تأثیر شعاع ضربه زننده بر پیشینه الف- نیروی تماسی، ب- لهیدگی

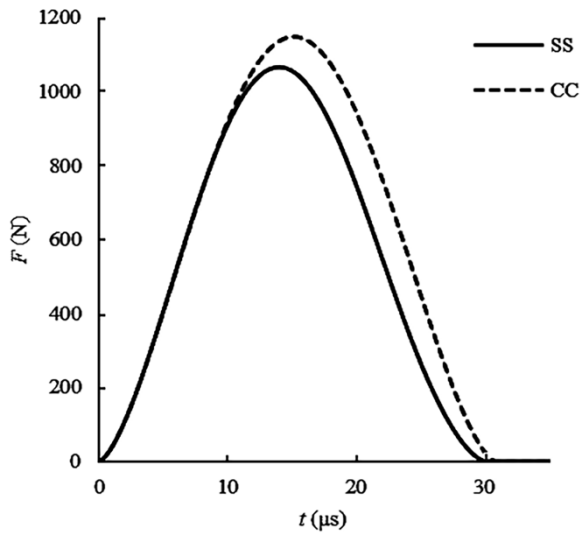
تأثیر قابل توجهی بر نیروی تماسی، زمان تماس و لهیدگی تیر نداشته است. در ادامه برای بررسی تأثیر نوع تکیه‌گاه‌های SS و CC، پیشینه نیروی تماسی و لهیدگی تیر در مکان برخورد به فاصله $4L/12$ از مرکز تیر ($x_{imp}=4L/12$) و فاصله $5L/12$ از مرکز تیر ($x_{imp}=5L/12$) به ترتیب در شکل‌های 10 و 11 ارائه شده است. در شکل 10 برای مکان برخورد $x_{imp}=4L/12$ پیشینه نیروی تماسی برای تکیه‌گاه‌های SS و CC به ترتیب برابر با 1021 و 1078 نیوتن است؛ بنابراین با تغییر نوع تکیه‌گاه‌ها از SS به CC پیشینه نیروی تماسی 5.58% افزایش یافته است. پیشینه مقدار لهیدگی برای مکان برخورد $x_{imp}=4L/12$ برای تکیه‌گاه‌های SS و CC به ترتیب برابر با 0.0089 و 0.0093 میلی‌متر است. در نتیجه با تغییر نوع تکیه‌گاه‌ها از SS به CC پیشینه مقدار لهیدگی 4.49% افزایش یافته است. همان طور که از شکل 10 نیز مشاهده می‌شود، برای مکان برخورد $x_{imp}=4L/12$ تیر با تکیه‌گاه‌های

ضربه‌زننده از 8 به 12.7 و 16 میلی‌متر به ترتیب 9% و 13% کاهش یافته است. همان طور که از این شکل مشخص است با افزایش شعاع ضربه‌زننده، مقدار پیشینه نیروی تماسی افزایش، زمان تماس کاهش و مقدار پیشینه لهیدگی تیر کاهش یافته است. بیان این نکته ضروری است که افزایش شعاع ضربه‌زننده سبب افزایش K_{imp} در معادله (8) می‌گردد و در ادامه افزایش سفتی تماس باعث افزایش نیروی تماسی بین ضربه زننده و تیر می‌شود.

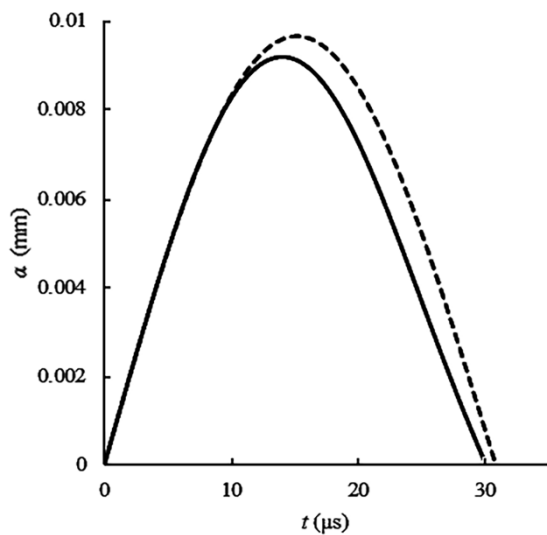
5-3- تأثیر شرایط مرزی

تأثیر شرایط مرزی تیر در دو انتها با تکیه‌گاه ساده SS و گیر دار CC در محل برخورد میانه تیر ($x_{imp}=0$) بر پیشینه نیروی تماسی و لهیدگی تیر در شکل 9 ارائه شده است.

همان طور که از این شکل مشخص است به دلیل این‌که برخورد در وسط تیر انجام شده و با تکیه‌گاه‌های تیر فاصله دارد، تغییر نوع تکیه‌گاه‌ها



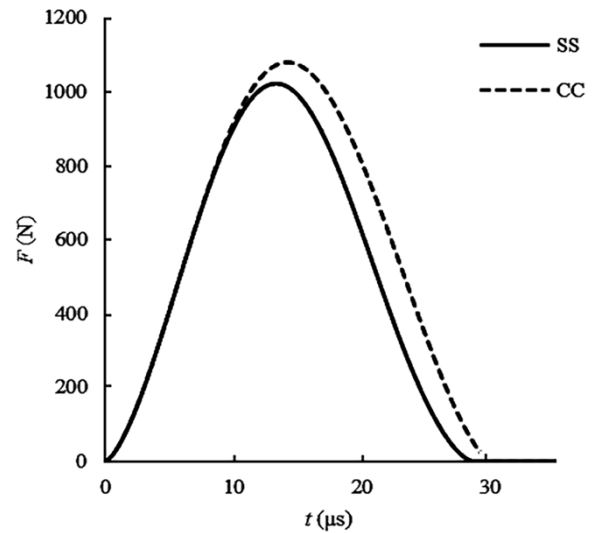
(الف) (a)



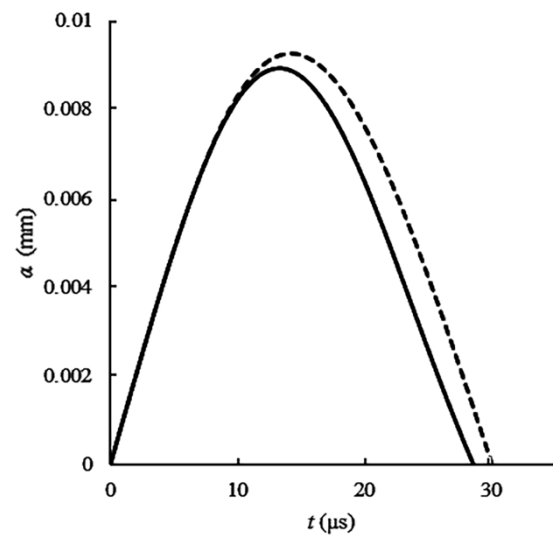
(ب) (b)

Fig. 11 The effect of SS and CC boundary condition in $x_{imp}=5L/12$ on the a- contact force and b- indentation histories

شکل 11 تأثیر شرایط مرزی SS و CC در $x_{imp}=5L/12$ بر پیشینه الف- نیروی تماسی و ب- لهیدگی



(الف) (a)



(ب) (b)

Fig. 10 The effect of SS and CC boundary condition in $x_{imp}=4L/12$ on the a- contact force and b- indentation histories

شکل 10 تأثیر شرایط مرزی SS و CC در $x_{imp}=4L/12$ بر پیشینه الف- نیروی تماسی و ب- لهیدگی

CC نسبت SS دارای اختلاف بیشتری شده است و همواره مقادیر آن‌ها برای تکیه‌گاه CC نسبت SS بیشتر بوده است. می‌توان به این نکته اشاره کرد که دلیل بیشتر بودن مقدار نیروی تماسی و لهیدگی تیر با تکیه‌گاه‌های CC نسبت SS، قیود بیشتر در تکیه‌گاه‌های CC نسبت به SS است که این نکته در نقاط برخورد نزدیک‌تر به تکیه‌گاه‌ها خود را بیشتر نشان می‌دهد.

4- نتیجه‌گیری

در این تحقیق به بررسی پاسخ ضربه سرعت پایین تیرهای هدفمند سرامیک-فلزی پرداخته شده است. در بخش اول با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، جابه‌جایی‌های تیر ارائه شده و در نهایت با به کار بردن ترکیب روش انرژی، ریتز و لاگرانژ، معادلات حرکت سیستم متشکل از ضربه‌زننده و تیر استخراج شده و روش رانج کاتای مرتبه چهار برای حل معادلات حرکت

گیردار نسبت به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده دارای نیروی تماسی و لهیدگی بیشتری است.

در شکل 11 برای $x_{imp}=5L/12$ پیشینه نیروی تماسی برای تکیه‌گاه‌های SS و CC به ترتیب برابر با 1065 و 1148 نیوتن است؛ بنابراین با تغییر نوع تکیه‌گاه‌ها از SS به CC پیشینه نیروی تماسی 7.79% افزایش یافته است. پیشینه مقدار لهیدگی برای مکان برخورد $x_{imp}=5L/12$ برای تکیه‌گاه‌های SS و CC به ترتیب برابر با 0.0092 و 0.0097 میلی‌متر است. با تغییر نوع تکیه‌گاه‌ها از SS به CC پیشینه مقدار لهیدگی 5.43% افزایش یافته است. در نتیجه برای مکان برخورد $x_{imp}=5L/12$ تیر با تکیه‌گاه‌های گیردار نسبت به تیر با تکیه‌گاه‌های ساده دارای نیروی تماسی و لهیدگی بیشتری است.

از شکل‌های 9-11 می‌توان نتیجه‌گیری کرد که با نزدیک شدن از مرکز تیر به محل تکیه‌گاه‌ها، مقدار نیروی تماسی و لهیدگی تیر با تکیه‌گاه‌های

2-5- پیوست ب

المان های ماتریس جرم به صورت (1-b) نوشته می شود.

$$\begin{aligned}
 M_{11}^{mn} &= I_1 \int_{-L/2}^{L/2} N_m^u N_n^u dx \\
 M_{12}^{mn} &= 0 \\
 M_{13}^{mn} &= I_2 \int_{-L/2}^{L/2} N_m^u N_n^\phi dx \\
 M_{12}^{mn} &= 0 \\
 M_{22}^{mn} &= I_1 \int_{-L/2}^{L/2} N_m^w N_n^w dx \\
 M_{23}^{mn} &= 0 \\
 M_{31}^{mn} &= I_2 \int_{-L/2}^{L/2} N_m^\phi N_n^u dx \\
 M_{32}^{mn} &= 0 \\
 M_{33}^{mn} &= I_3 \int_{-L/2}^{L/2} N_m^\phi N_n^\phi dx
 \end{aligned} \tag{1-b}$$

جایی که رابطه (2-b) را به صورت زیر داریم.

$$(I_1, I_2, I_3) = b \int_{-h/2}^{+h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz \tag{2-b}$$

6- مراجع

- [1] T. Herakovich, Mechanics of composites: A historical review, *Mechanics Research Communications*, Vol. 41, No. 1, pp. 1-20, 201.
- [2] Y. Miyamoto, W. Kaysser, B. Rabin, A. Kawasaki, R. G. Ford, *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, pp. 15-21, New York: Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] P. O. Sjoblom, J. T. Hartness, T. M. Cordell, On low-velocity impact testing of composite materials, *Composite Materials*, Vol. 22, No. 1, pp. 30-52, 1988.
- [4] K. Shivakumar, W. Elber, W. Illg, Prediction of low-velocity impact damage in thin circular laminates, *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 3, pp. 442-449, 1985.
- [5] O. T. Topac, B. Gozluclu, E. Gurses, D. Coker, Experimental and computational study of the damage process in CFRP composite beams under low-velocity impact, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, Vol. 92, No. 1, pp. 167-182, 2016.
- [6] S. Abrate, *Impact on Composite Structures*, pp. 17-42, New York: Cambridge University Press, 1998.
- [7] R. Gunes, M. Aydin, Elastic response of functionally graded circular plates under a drop-weight, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 10, pp. 2445-2456, 2010.
- [8] R. Gunes, M. Aydin, M. K. Apalak, J. Reddy, The elasto-plastic impact analysis of functionally graded circular plates under low-velocities, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 860-869, 2011.
- [9] E. Etemadi, A. A. Khatibi, M. Takaffoli, 3D finite element simulation of sandwich panels with a functionally graded core subjected to low velocity impact, *Composite Structures*, Vol. 89, No. 1, pp. 28-34, 2009.
- [10] R. A. Larson, A. N. Palazotto, H. E. Gardenier, Impact Response of titanium and titanium boride monolithic and functionally graded composite plates, *AIAA Journal*, Vol. 47, No. 3, pp. 676-691, 2009.
- [11] S. Khalili, K. Malekzadeh, A. V. Gorgabad, Low velocity transverse impact response of functionally graded plates with temperature dependent properties, *Composite Structures*, Vol. 96, No. 1, pp. 64-74, 2013.
- [12] H. L. Dai, Z. Y. Guo, L. Yang, Nonlinear dynamic response of functionally graded materials circular plates subject to low-velocity impact, *Journal of Composite Materials*, Vol. 47, No. 22, pp. 2797-2807, 2012.
- [13] F. Ashenai Ghasemi, K. malekzadeh Fard, R. Paknejad, Response of cantilever fiber metal laminate (FML) plates using an analytical-numerical method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 3, pp. 57-67, 2013. (in persian)
- [14] R. Paknejad, F. Ashenai Ghasemi, K. Malekzadeh Fard, Response of fully-clamped composite laminated plate subjected to low-velocity impact by using Galerkin method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 45-50, 2014. (in persian)
- [15] K. Malekzadeh Fard, S. Shokrollahi, E. Eissazadeh, A. Pourmoayed, Dynamic analysis of the sandwich curved beams with flexible core in the steady state thermal condition and subjected to radial low-velocity impact, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 12, pp. 114-124, 2016. (in persian)
- [16] S. Dariushi, M. Sadighi, A nonlinear high order theory for analysis of sandwich beam with flexible core under low velocity impact, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 381-388, 2015. (in persian)

استفاده گردیده است. از تئوری تماس هرگز برای تماس بین ضربه زننده و تیر و از قانون اختلاط برای ترکیب کردن خواص مکانیکی سرامیک و فلز استفاده شده است. در بخش دوم به منظور صحت سنجی مدل تحلیلی، شبیه سازی ضربه سرعت پایین بر تیرهای هدفمند شده سرامیک- فلز در نرم افزار آباکوس انجام شده است. به منظور هدفمند کردن تیر در راستای ضخامت در نرم افزار آباکوس تیر به 30 لایه تقسیم بندی شده است.

مقایسه بین نتایج مدل تحلیلی و نرم افزار آباکوس نشان داده است که اختلاف بیشینه نیروی تماسی مدل تحلیلی حاضر و شبیه سازی نرم افزار آباکوس 2.21% است. اختلاف بین بیشینه جابه جایی بین ضربه زننده در مدل تحلیلی ارائه شده و شبیه سازی در نرم افزار آباکوس حدود 3.85% است. در بررسی پارامتریک مشاهده شده که حداکثر نیروی تماسی متعلق به تابع هدفمند چندجمله ای مرتبه اول و کمترین نیروی تماسی متعلق به چندجمله ای مرتبه سوم بوده است. حداکثر لهیدگی مربوط به تابع هدفمند چندجمله ای مرتبه سوم و کمترین لهیدگی مربوط به چندجمله ای مرتبه اول بوده است. در توابع هدفمند نمایی با افزایش توان از مقادیر منفی به سمت صفر، همواره مقدار حداکثر نیروی تماسی افزایش و بیشینه لهیدگی کاهش یافته است. در توابع هدفمند چندجمله ای با افزایش درجه چندجمله ای، همواره مقدار حداکثر نیروی تماسی کاهش و بیشینه لهیدگی افزایش یافته است. با افزایش سرعت ضربه زننده، مقدار حداکثر نیروی تماسی افزایش، زمان تماس کاهش و مقدار حداکثر لهیدگی تیر افزایش یافته است. با افزایش شعاع ضربه زننده، مقدار بیشینه نیروی تماسی افزایش، زمان تماس کاهش و مقدار حداکثر لهیدگی تیر کاهش یافته است. همچنین با نزدیک شدن از مرکز تیر به محل تکیه گاه ها، مقدار نیروی تماسی و لهیدگی تیر با تکیه گاه های CC نسبت SS دارای اختلاف بیشتری شده و همواره مقادیر آن ها برای تکیه گاه CC نسبت SS بیشتر بوده است.

5- پیوست ها

1-5 پیوست الف

المان های ماتریس سفتی به صورت روابط (1-a) نوشته می شود.

$$\begin{aligned}
 K_{11}^{mn} &= A_{11} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dN_m^u}{dx} \frac{dN_n^u}{dx} dx \\
 K_{12}^{mn} &= 0 \\
 K_{13}^{mn} &= B_{11} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dN_m^u}{dx} \frac{dN_n^\phi}{dx} dx \\
 K_{21}^{mn} &= 0 \\
 K_{22}^{mn} &= A_{55} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dN_m^w}{dx} \frac{dN_n^w}{dx} dx \\
 K_{23}^{mn} &= A_{55} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dN_m^w}{dx} N_n^\phi dx \\
 K_{31}^{mn} &= B_{11} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dN_m^\phi}{dx} \frac{dN_n^u}{dx} dx \\
 K_{32}^{mn} &= A_{55} \int_{-L/2}^{L/2} N_n^\phi \frac{dN_m^w}{dx} dx \\
 K_{33}^{mn} &= D_{11} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dN_m^\phi}{dx} \frac{dN_n^\phi}{dx} dx \\
 &\quad + A_{55} \int_{-L/2}^{L/2} N_m^\phi N_n^\phi dx
 \end{aligned} \tag{1-a}$$

جایی که رابطه (2-a) را به صورت زیر داریم.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = b \int_{-h/2}^{+h/2} \bar{Q}_{ij}^k (1, z, z^2) dz \tag{2-a}$$

- 316-327, 2014.
- [20] Z. X. Wang, J. Xu, P. Qiao, Nonlinear low-velocity impact analysis of temperature-dependent nanotube-reinforced composite plates, *Composite Structures*, Vol. 108, No. 1, pp. 423-434, 2014.
- [21] F. Lin, Y. Xiang, Vibration of carbon nanotube reinforced composite beams based on the first and third order beam theories, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, No. 15, pp. 3741-3754, 2014.
- [22] S. Abrate, *Impact on Composite Structures*, pp. 12-21, New York: Cambridge University Press, 2005.
- [23] A. F. D'Souza, V. K. Garg, *Advanced Dynamics: Modeling and Analysis*, pp. 19-44, New Jersey: Prentice Hall, 1984.
- [17] G. Payghaneh, K. M. Fard, F. R. Saghavaz, M. Asgari, Analysis of laminated composite sandwich plates with magnetorheological fluid core under low velocity impact, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 113-123, 2016. (in persian فارسی)
- [18] M. Shariyat, F. Farzan, Nonlinear eccentric low-velocity impact analysis of a highly prestressed FGM rectangular plate, using a refined contact law, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 83, No. 4, pp. 623-641, 2013.
- [19] R. Ansari, M. F. Shojaei, V. Mohammadi, R. Gholami, F. Sadeghi, Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams, *Composite Structures*, Vol. 113, No. 1, pp.