



ارائه فیلتر دوگانه بی رد/اچ بینهایت جهت تخمین حالت مسائل غیرخطی

محمد طهرانی^۱، نادر نریمان زاده^۲، مجتبی معصوم نژاد^{۳*}

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۲- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

۳- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، رشت

masoumnezhad@tvu.ac.ir، ۰۳۷۵۶*

چکیده

موفقیت‌های اولیه فیلتر کالمون در دهه ۶۰ میلادی در کارهای فضایی منجر به تلاش در به کارگیری آن در کاربردهای صنعتی معمول در دهه ۷۰ میلادی شد. این تلاش‌ها به سرعت مشخص کرد که یک دسته عدم تطابق بین فرضیات فیلتر کالمون و مسائل تخمین حالت در صنعت وجود دارد. برای مسائل صنعتی مدل دقیق سیستم و ماهیت آماری نویز فرایند به راحتی در دسترس نمی‌باشد. در این مقاله روشی نوین برای ترکیب دو فیلتر غیرخطی کالمون بی‌رد (UKF) و فیلتر اجنبهایت بی‌رد (UH_∞F) برای غلبه بر این عدم شناخت ارائه شده است که جواب میانی بین دو فیلتر را ارائه می‌دهد و در مسائل مختلف قابلیت اطمینان بیشتری نسبت به دو فیلتر دیگر دارد از مشخصه‌های عملکردی این فیلتر بی‌نیازی از خطی سازی مسائل غیرخطی و حصول اطمینان از پاسخ مناسب‌تر نسبت به دو فیلتر دیگر، با توجه به عدم شناخت ماهیت آماری نویز می‌باشد. بررسی‌ها نشان داد زمانی که در بخشی از تخمین فیلتر UKF و در بخشی دیگر فیلتر UH_∞F بهتر عمل می‌کند، فیلتر دوگانه با ارائه یک تخمین بهینه می‌تواند نتایج بهتری ارائه کند. همچنین تحلیل واریانس مشخص کرد که فیلتر از مقاومت بالای نسبت به ماهیت آماری نویز برخوردار است و به شکل مناسب می‌توان با تغییر متغیر آن جوابی مناسب یافت. صحبت سنجی نتایج به کمک دو مسئله غیرخطی شبیه سازی سقوط آزاد و آونگ معکوس در حوزه مهندسی مکانیک بررسی شده است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دربافت: ۰۳ بهمن ۱۳۹۵

پذیرش: ۱۷ اسفند ۱۳۹۵

ارائه در سایت: ۰۳ اردیبهشت ۱۳۹۶

کلید واژگان:

فیلتر دوگانه

فیلتر بی‌رد

فیلتر اجنبهایت

تخمین متغیرها

The hybrid unscented/H_∞Kalman filter in state estimation of nonlinear problems

Mohammad Tehrani¹, Nader Narimanzadeh¹, Mojtaba Masoumnezhad^{2*}

1- Department of Mechanical Engineering, Guilian University, Rasht, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Technical and Vocational University, Rasht, Iran

* P.O.B. 3756, Rasht, Iran, masoumnezhad@tvu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 22 January 2017

Accepted 07 March 2017

Available Online 23 April 2017

Keywords:

Hybrid filter

UKF

H_∞

State estimation

ABSTRACT

The early success in the 1960s of the Kalman filter in aerospace applications led to attempts to apply it to more common industrial applications in the 1970s. However, these attempts quickly made it clear that a serious mismatch existed between the underlying assumptions of Kalman filters and industrial state estimation problems. Accurate system models and statistical nature of the noise processes are not as readily available for industrial problems. In this paper, a novel method of combining both nonlinear unscented Kalman filter and H_∞ unscented Kalman filter is presented so that the results are a compromise between the addition of more reliability compared to that of two other filters. One characteristic of this filter is there is no need to linearize the nonlinear problems and more suitable results are obtained than the other two filters with non-Gaussian noise. Investigations show, when in a part of estimating the UKF is best and in the other part the UH_∞F, the hybrid filter can give better results. The variance analysis indicated that the filter is robust to statistical noises and a proper response can be found by changing its variable. Validation of results is performed by simulation of two nonlinear problems, free falling and inverted pendulum in mechanical engineering.

صنعتی معمول در دهه ۱۹۷۰ میلادی شد. این تلاش‌ها به سرعت مشخص کرد که یک دسته عدم تطابق بین فرضیات فیلتر کالمون و مسائل تخمین حالت در صنعت وجود دارد. در واقع برای مسائل صنعتی مدل دقیق سیستم و ماهیت آماری نویز فرایند به راحتی در دسترس نمی‌باشد. این امر منجر به ظهور فیلتر H_∞ شد، که هدف اصلی آن حداقل نمودن خطای تخمین در بدترین حالت ممکن برای

۱- مقدمه
طی نیم قرن گذشته، الگوریتم‌های احتمالاتی پیچیده‌ای برای تخمین مقادیر حقیقی کمیت‌های فیزیکی که اصطلاحاً متغیرهای حالت سیستم نامیده می‌شوند، توسعه پیدا کردند. موفقیت‌های اولیه فیلتر کالمون در دهه ۱۹۶۰ میلادی در کارهای فضایی منجر به تلاش در به کارگیری آن در کاربردهای

Please cite this article using:

M. Tehrani, N. Narimanzadeh, M. Masoumnezhad, The hybrid unscented/H_∞Kalman filter in state estimation of nonlinear problems, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 4, pp. 315-321, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

اج بینهایت بی رد ($UH_{\infty}F$) در ابتدا فیلتر UKF ارائه می شود [9] و سپس تغییرات لازم برای فیلتر UH_{∞} بیان می شود.

معادلات غیرخطی زمان گستته یک سیستم دینامیکی را می توان به صورت معادلات (1) و (2) توصیف نمود.

$$x_{k+1} = f(x_k, t) + w_k \quad (1)$$

$$y_k = h(x_k, t) + v_k \quad (2)$$

به طوری که $x_k \in R$ بردار متغیرهای حالت سیستم و $y_k \in R$ بردار اندازه می باشند. f و g به ترتیبتابع دینامیک سیستم وتابع مشاهده می باشند. نویز فرایند w و نویز اندازه گیری v از نوع انرژی محدود می باشند. اگر فرض شود که تخمین حالت $\hat{x}_{k-1|k-1}$ و کواریانس همراه آن $P_{k-1|k-1}$ در زمان $k-1$ باشد فیلتر بی رد از معادلات (3) الی (16) استنتاج می شود:

در ابتداء، یک دسته نقاط سیگما بر پایه تخمین حالت در زمان $k-1$ تولید می شود:

$$\mathcal{X}_{k-1|k-1}^0 = \hat{x}_{k-1|k-1}, \omega^0 = \frac{\kappa}{n+\kappa} \quad (3)$$

$$\mathcal{X}_{k-1|k-1}^s = \hat{x}_{k-1|k-1} + \left(\sqrt{(n+k)P_{k-1|k-1}} \right)_s \quad (4)$$

$$\omega^s = \frac{\kappa}{2(n+\kappa)}, s = 1 \dots n \quad (5)$$

$$\mathcal{X}_{k-1|k-1}^s = \hat{x}_{k-1|k-1} - \left(\sqrt{(n+k)P_{k-1|k-1}} \right)_s \quad (6)$$

$$\omega^s = \frac{\kappa}{2(n+\kappa)}, s = n+1 \dots 2n \quad (7)$$

در حالی که $\kappa \in R$ ضریب مقیاس بوده و s امین ردیف یا ستون از ریشه دوم ماتریس $(n+k)P_{k-1|k-1}$ می باشد. وزن نرمال کامین نقطه سیگما می باشد. توجه شود که تجزیه چولسکی^۷ برای محاسبه ریشه دوم ماتریس مورد نیاز است.

میانگین و کواریانس پیش بینی شده به کمک ابزار انتقال بی رد^۸ قابل حصول است [9]:

$$\mathcal{X}_{k|k-1}^s = f(\mathcal{X}_{k-1|k-1}^s) \quad (8)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s \mathcal{X}_{k|k-1}^s \quad (9)$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s [\mathcal{X}_{k|k-1}^s - \hat{x}_{k|k-1}] [\mathcal{X}_{k|k-1}^s - \hat{x}_{k|k-1}]^T + Q \quad (10)$$

به همین شکل ماتریس کواریانس پیش بینی شده اندازه گیری و کواریانس متقاطع اندازه گیری- حالت به ترتیب به صورت عبارت های (11) و (12) حاصل می گردد:

$$P_{k|k-1}^{yy} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s [h(\mathcal{X}_{k|k-1}^s) - \hat{y}_{k|k-1}] [h(\mathcal{X}_{k|k-1}^s) - \hat{y}_{k|k-1}]^T \quad (11)$$

$$P_{k|k-1}^{xy} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s [\mathcal{X}_{k|k-1}^s - \hat{y}_{k|k-1}] [h(\mathcal{X}_{k|k-1}^s) - \hat{y}_{k|k-1}]^T \quad (12)$$

و نیز:

$$\hat{y}_{k|k-1} = \sum_{s=0}^{2n} \omega^s \hat{y}_{k|k-1} \quad (13)$$

⁷ Cholesky decomposition
⁸ Unscented Transform

یک سیستم دینامیکی زمان گستته می باشد [1].

در بسیاری از مسائل، برخی از سیگنال های نویز، فرضیه فیلتر H_2 (کالمن) را ارضا کرده، در حالی که برخی دیگر توسط انرژی سیگنال کران دار یعنی H_{∞} به خوبی مدل می شوند. این مشکل را می توان تا حدی با توجه به فیلتر مرکب H_2/H_{∞} حل کرد [2].

بعد از ظهور فیلتر اج بینهایت و به فاصله چند سال خارگانکار^۱ و همکارش در سال 1992 فیلتر مرکب کالمن/ اج بینهایت را برای سیستم های دینامیکی خطی معرفی نمودند [3]. وی در مقاله خود با بررسی نرم H_2 و H_{∞} و ارائه یک شرط بهینه که هر دو نرم را تواناً ارضاء کند، فیلتر مرکب را ارائه نموده است. فرایند انجام شده توسط وی در حوزه خطی قرار دارد و منجر به حل معادله ریکاتی می شود که با افزایش تعداد حالات و پیچیدگی، حل آن مشکل می شود.

سیمن یک روش ابتکاری به منظور بهره مندی از خواص هر دو فیلتر ارائه کرد که عبارت است از ترکیب خطی دو بهره پایدار^۲ فیلتر کالمن و H_{∞} [4]. وی همچنین بر پایه بهره پایدار فیلتر کالمن و اج بینهایت فیلتر ترکیبی ارائه کرده است که بهره آن بر اساس حل یک معادله ریکاتی ترکیبی از دو فیلتر می باشد. اما حل این معادله مشکل و پیچیده می باشد [5].

در سال 2014 لیانگ^۳ و همکارانش به بررسی و مقایسه یک فیلتر ترکیبی با دیگر فیلترها در کنترل بازوی رباتیک در عمل قلب پرداختند و نشان دادند که دو خاصیت مهم این نوع فیلترها یعنی کاهش خطأ و کاهش بدترین حالت، می تواند بسیار کارآمد باشد [6].

معصوم نژاد و همکاران حل مسئله تخمین نویز رنگی به کمک فیلتر دوگانه را در مقاله خود ارائه نمودند. بهینه سازی چند هدفه در تعیین حد نرم H_{∞} از ویژگی های این کار می باشد که منجر به طراحی غیر برخط فیلتر ترکیبی می گردد. همچنین فیلتر ارائه شده در زمینه خطی می باشد [7].

هیو در سال 2015 فیلتر دوگانه^۴ EKF^۵ و EH^۶ را به شکل ترکیب خطی خروجی دو فیلتر ارائه نموده و اثر ترکیبی بهره ها بر خلاف کارهای قبلی در نظر گرفته نشده است [8].

با توجه به بررسی های انجام شده دو فیلتر کالمن و H_{∞} اکثراً در حوزه خطی ارائه شده یا منجر به خطی سازی مسئله غیرخطی شده است. همچنین ارائه این فیلترها معمولاً به همراه حل یک معادله ریکاتی بوده است که با افزایش تعداد متغیرهای حالت، حل آن مشکل و پیچیده می شود [5]. در این مقاله برای اولین بار ترکیب دو فیلتر غیرخطی کالمن بی رد (UKF) و اج بینهایت بی رد ($UH_{\infty}F$) ارائه می شود. این فیلتر دوگانه در مواجه با مسئله غیرخطی نیاز به خطی سازی ندارد؛ بعلاوه اجرای آن منجر به حل معادله ریکاتی نمی شود. اساس کار ترکیب دو فیلتر بر اساس مقاله سیمن [4] و توسعه آن به ترکیب بهره دو فیلتر، تخمین پیشین^۷ حالت و تخمین پیشین اندازه^۸ در مرحله زمانی می باشد. باید توجه داشت که در مقالات، این نوع ترکیبات ارائه نشده اند یا به ترکیب بهره پایدار دو فیلتر بدون تغییر در هر مرحله زمانی اکتفا شده است [7,5,4].

2- فیلتر کالمن بی رد

با توجه به شباهت معادله های دو فیلتر کالمن بی رد (UKF) و فیلتر

¹ Khargonkar

² Steady state gain

³ Extended Kalman Filter

⁴ Extended H_{∞} Kalman Filter

⁵ The a priori state estimation

⁶ The a priori measurement estimation

کواریانس نویز به عنوان Q و R انتخاب می‌شوند. همچنین زمانی که $\gamma \rightarrow 0$ فیلتر اج بینهایت به سمت فیلتر بی رد کالمان میل پیدا می‌کند.

تنها تفاوت معادلات استخراج تخمین حالت فیلتر بی رد اج بینهایت با فیلتر بی رد کالمان در مورد تخمین کواریانس خطای یعنی معادله (15) می‌باشد. تخمین کواریانس فیلتر بی رد اج بینهایت عبارت است از:

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - [P_{k|k-1}^{xy} \quad P_{k|k-1}] R_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{xy} \\ P_{k|k-1}^T \end{bmatrix} \quad (23)$$

در معادله (23)، $R_{e,k}$ می‌شود:

$$R_{e,k} = \begin{bmatrix} R + P_{k|k-1}^{yy} & [P_{k|k-1}^{xy}]^T \\ P_{k|k-1}^{xy} & -\gamma^2 I + P_{k|k-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

در واقع با استفاده از معادله (23) به جای معادله (15)، معادلات فیلتر $UH_\infty F$ تبدیل می‌شود:

باید توجه شود که به منظور تضمین مثبت بودن $P_{k|k}$ و وجود فیلتر H_∞ مقدار γ باید بدقت تنظیم شود. لی در مقاله [10] خود روشی برای تنظیم مقدار γ به شکلی که در هر تکرار کمترین مقدار را کسب کند ارائه نموده است. وی عبارت (25) را برای این مقدار استخراج کرده است. در معادله (25)، α مقدار ثابت بزرگ‌تر از یک و عبارت eig به مفهوم مقدار ویژه می‌باشد.

$$\gamma_k^2 = \alpha \times \max \{ \text{eig}(P_{k|k-1}^{-1} + P_{k|k-1}^{-1} P_{k|k-1}^{xy} R^{-1} [P_{k|k-1}^{-1} \quad P_{k|k-1}^{xy}]^T)^{-1} \} \quad (25)$$

4- فیلتر دوگانه بی رد/اج بینهایت^۴

با توجه به تحقیقات انجام شده و بررسی‌های صورت گرفته، فیلترهای دوگانه غیرخطی تا کنون کمتر ارائه شده‌اند و بیشترین کارهای انجام شده به روی ترکیب فیلتر EKF و H_∞ بوده است. با توجه به ارائه فیلتر $UH_\infty F$ در سال 2010 [10]، ارائه فیلتر ترکیبی از دو فیلتر UKF و $UH_\infty F$ می‌تواند در تحلیل مسائل با درجه غیرخطی بالا و باوجود عدم شناسایی ساختار آماری نویز کارآمد باشد. ترکیب دو فیلتر کالمان بی رد و فیلتر کالمان بی رد اج بینهایت تحت عنوان فیلتر دوگانه بی رد کالمان اج بینهایت یا با اختصار $HU/H_\infty KF$ نام‌گذاری می‌گردد. در ادامه مدل ترکیبی دو فیلتر ارائه می‌شود.

معادله تخمین گر جدید به شکل معادله (26) معروفی می‌شود.

$$x_{k+1}^+ = x_k^{-\text{Hybrid}} + K_k^{\text{Hybrid}}(y_k - y_k^{-\text{Hybrid}}) \quad (26)$$

مقادیر دوگانه یا دارای بالانویس Hybrid در معادله (26) به شکل معادله‌های (27) تا (29) ارائه شده‌اند.

$$K_k^{\text{Hybrid}} = dK_k^{\text{UKF}} + (1-d)K_k^{H_\infty} \quad (27)$$

$$x_k^{-\text{Hybrid}} = dx_k^{-\text{UKF}} + (1-d)x_k^{-H_\infty} \quad (28)$$

$$y_k^{-\text{Hybrid}} = dy_k^{-\text{UKF}} + (1-d)y_k^{-H_\infty} \quad (29)$$

در این معادله‌ها بالانویس UKF- به معنای مقادیر تخمین پیشین حاصل از فیلتر بی رد و بالانویس H_∞ - به معنای مقادیر تخمین پیشین حاصل از فیلتر اج بینهایت می‌باشد. همچنین K با بالانویس UKF و H_∞ به ترتیب مقادیر بهره حاصل از دو فیلتر نامبرده می‌باشند و d یک ثابت عددی بوده که وزن هر فیلتر را مشخص می‌کند. این وزن مقداری در بازه $[0,1]$ دارد و زمانی که برابر 1 انتخاب شود پاسخ منطبق بر تخمین حاصل از فیلتر بی رد و هنگامی که برابر 0 در نظر گرفته شود پاسخی منطبق بر تخمین حاصل از

در نهایت تخمین فیلتر شده به همراه کواریانس خطای آن حاصل می‌شود:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1}^{xy} \left(R + P_{k|k-1}^{yy} \right)^{-1} (y_k - \hat{y}_{k|k-1}) \quad (14)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{k|k-1}^{yy} (K_k)^T \quad (15)$$

$$K_k = P_{k|k-1}^{xy} \left(P_{k|k-1}^{yy} + R \right)^{-1} \quad (16)$$

3- فیلتر اج بینهایت بی رد

این فیلتر اولین بار توسط لی ارائه [10] و بهطور هم زمان با نام فیلتر نقاط سیگما اج بینهایت^۱ توسط وانگ [11] به منظور تخمین و رصد مدل زیر در زمانی که نویز ماهیت غیرگوسی دارد خطای I کمتری از فیلتر UKF ارائه می‌دهد.

بر اساس مرجع [10] و مشابه با بخش قبل اگر معادلات زمان گستته یک سیستم دینامیکی به شکل معادلات (17) تا (19) بیان شود:

$$x_{k+1} = f(x_k, t) + w_k \quad (17)$$

$$y_k = h(x_k, t) + v_k \quad (18)$$

$$z_k = L_k x_k \quad (19)$$

به شکلی که z_k سیگنال تخمین زده شده و L_k یک ماتریس معلوم است، بهویژه اگر تنها تخمین حالت مد نظر باشد، $L_k = I$ است بهطوری که یک ماتریس واحد با ابعاد مناسب است.

اگر فرض شود که $\hat{z}_{k|k} = \mathcal{F}\{Y^k\}$ تخمینی از z_k با مقدار اندازه‌گیری شده $Y^k = \{y_j\}_{j=0}^k$ باشد آنگاه مقدارتابع خطای تخمین به صورت معادله (20) تعریف می‌گردد.

$$e_k = \hat{z}_{k|k} - z_k = \hat{z}_{k|k} - L_k x_k \quad (20)$$

اگر فرض شود که $T_k(\mathcal{F})$ عامل انتقالی است که اغتشاشات ناشناخته $\{e_j\}_{j=0}^k, \{w_j\}_{j=0}^k, \{v_j\}_{j=0}^k$ را به خطای تخمین نگاشت می‌کند آنگاه هدف فیلتر بهینه اج بینهایت انتخاب استراتژی \mathcal{F} است به شکلی که نرم اج بینهایت عامل $T_k(\mathcal{F})$ را کمینه کند. همچنین نرم اج بینهایت یک عامل انتقالی T ، به صورت معادله (21) تعریف می‌شود.

$$\|T\|_\infty = \sup_{u \in l_2, u \neq 0} \frac{\|Tu\|_2}{\|u\|_2} \quad (21)$$

با فرض اینکه u محدود می‌باشد. حل بسته^۲ فیلتر اج بینهایت تنها در نمونه‌های مشخصی وجود دارد، از این رو یک حل کمتر بهینه^۳ که حداقل بهره افزایی را از اغتشاش خطای تخمین محدود می‌کند مد نظر قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، هدف فیلتر کمتر بهینه H_∞ یافتن استراتژی‌های تخمین ارضا کند.

$$\|T_k(\mathcal{F})\|_\infty = \sup_{x_0, w, v \in l_2} \frac{\sum_{j=0}^k \|e_j\|_2^2}{\|x_0 - \hat{x}_0\|_{P_0^{-1}}^2 + \sum_{j=0}^k \|w_j\|_{Q^{-1}}^2 + \sum_{j=0}^k \|v_j\|_{R^{-1}}^2} \leq \gamma^2 \quad (22)$$

در معادله (22)، γ یک ثابت عددی می‌باشد و علامت \leq معنی مربع نرم l_2 از a به عبارت دیگر $a^T W a = \|a\|_W^2$ است.

$Q > 0$ و $R > 0$ ماتریس‌های وزنی بوده که انتخاب آن برای تنظیم کارایی به طرح واگذار می‌شود. در دستگاه‌های عملی، همان ماتریس

¹ Sigma Point H-infinity Filter

² Closed-form

³ Suboptimal

نظر گرفته می شود (به شکل مرسوم این مقدار برابر صفر در نظر گرفته می شود). مقدار زیاد نویز باعث ناپایداری معادله می شود. بنابراین فرض شود که $Q = \text{diag}[0.01 \ 0.01 \ 10^{-7}]$ کواریانس نویز گوسی انداره نویز گوسی فرایند و $R = 10,000$ کواریانس نویز گوسی انداره گیری باشد.

برای بررسی از نمودار میانگین مربعات خطای در هر بازه زمانی که در معادله (34) تعریف شده است استفاده می شود.

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{m \times n} ((X_i - \hat{X}_i)(X_i - \hat{X}_i)^T), \quad i = 1 \dots N \quad (34)$$

در معادله (34)، i مرحله پیشرفت زمانی، m تعداد اجرای فیلتر به ازای دسته نویزهای مختلف، n تعداد حالت، X_i بردار حالت و \hat{X}_i بردار تخمین حالت i امن مرحله زمانی می باشد.

در شکل 2 مقایسه خطای از ازای 200 دسته نویز مختلف آورده شده است. بعد از بررسی انجام شده در مورد فیلتر دوگانه وزن فیلتر بی رد $d = 0.5$ انتخاب می شود.

در جدول 1 مقادیر میانگین و واریانس خطای خطا میانگین و واریانس خطای سه فیلتر به ازای 200 دسته نویز مختلف گوسی آورده شده است. با توجه به شکل 1 و جدول 1 مشاهده می گردد به شکل کاملًا مشخص تخمین فیلتر UKF از دو فیلتر دیگر بهتر است. لیکن فیلتر دوگانه تخمینی نزدیک تر به این فیلتر ارائه نموده است و می تواند جایگزین مناسبی برای آن باشد.

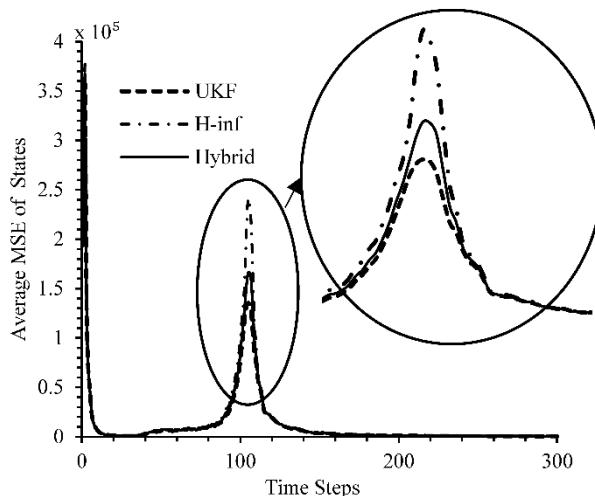


Fig.2 Comparison of states estimation error in falling problem for UKF, $UH_\infty F$ and Hybrid in $d = 0.5$ with Gaussian noise

شکل 2 مقایسه خطای تخمین حالت های مسئله سقوط آزاد سه فیلتر بی رد، اج بینهایت و دوگانه در $d = 0.5$ با وجود نویز گوسی

جدول 1 مقایسه مقادیر میانگین و واریانس خطای تخمین متغیرهای حالت حاصل از سه فیلتر $UH_\infty F$, UKF و Hybrid

Table 1 Comparison of mean and variance states estimation error values of three filters UKF, $UH_\infty F$ and Hybrid

واریانس خطای	میانگین خطای	روش تخمین
1.24E09	1.30E+04	Hybrid
1.05E09	1.20E+04	UKF
1.70E09	1.51E+04	$UH_\infty F$

فیلتر اج بینهایت ارائه می دهد. با جایگذاری معادله های (27) تا (29) در معادله (26) تخمین فیلتر دوگانه حاصل می شود. شکل 1 تصویر مناسبی از الگوریتم مورد نظر ارائه می دهد.

به عبارت دیگر با تعیین یک وزن مناسب توسط طراح و با توجه به مسئله مورد بررسی می توان از بخشی از خواص دو فیلتر UKF و H_∞ به شکل مشترک بهره برد. در ادامه نشان داده خواهد شد که با استفاده از مقدار وزن مناسب خطای فیلتر دوگانه می تواند کمتر از دو فیلتر دیگر نیز شود.

5- مسئله سقوط آزاد

فرض کنید که هدف تخمین متغیرهای حالت ارتفاع x_1 ، سرعت x_2 و ضریب بالستیک x_3 جسمی که به سمت زمین سقوط می کند، است. یک وسیله اندازه گیری که در ارتفاع a و در فاصله افقی M از جسم واقع شده فاصله خود را تا جسم اندازه می گیرد (معادله (33)). معادلات این سیستم عبارت اند از:

$$\dot{x}_1 = x_2 + w_1 \quad (30)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\rho_0 \exp(-x_1/D) x_2^2 x_3}{2} - g + w_2 \quad (31)$$

$$\dot{x}_3 = w_3 \quad (32)$$

$$y(t_k) = \sqrt{(M^2 + (x_1^2(t_k) - a^2)^2)} + v_k \quad (33)$$

به شکل مرسوم w_i نویز نامین معادله فرایند و v نویز اندازه گیری است. ρ_0 چگالی هوا در سطح دریا، D یک ثابت تعريف کننده رابطه بین چگالی هوا و ارتفاع بوده و g شتاب گرانش می باشد.

ثبت های استفاده شده عبارت اند از:

$$\begin{aligned} \text{lb. sec} & \quad g = 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} \quad D = 20,000 \text{ ft} \\ \rho_0 = 2 \frac{\text{lb. sec}}{\text{ft}^4} & \quad M = 100,000 \text{ ft} \quad a = 100,000 \text{ ft} \end{aligned}$$

شرط اولیه عبارت اند از:

$$x_0 = [300,000 \ 20,000 \ 0.001]^T \quad \hat{x}_0^+ = x_0$$

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 1,000,000 & 0 & 0 \\ 0 & 4,000,000 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

برای شبیه سازی سیستم و فیلترها از انتگرال مستطبی با ثابت زمانی 0.1 ثانیه استفاده شده است. این مسئله در دو بخش نویز گوسی و غیر گوسی ارائه می شود.

باید توجه داشت که به دلیل کم بودن ضریب بالستیک (0.001) و رعایت نسبت نویز به سیگنال مقدار کمی برای نویز حالت سوم در

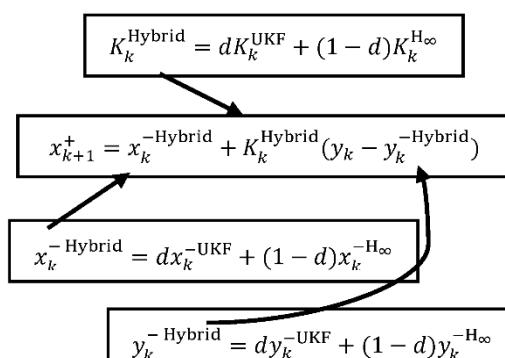


Fig.1 The algorithm of HU/ H_∞ KF

شکل 1 الگوریتم فیلتر $HU/H_\infty KF$

جدول 2 مقایسه مقادیر میانگین و واریانس خطای تخمین حالت‌های حاصل از سه فیلتر Hybrid و $UH_{\infty}F$ ، UKF

Table 2 Comparison of mean and variance states estimation error values of three filters UKF, $UH_{\infty}F$ and Hybrid

واریانس	میانگین	روش تخمین
2.21E+10	1.00E+05	Hybrid
6.09E+10	2.65E+05	UKF
1.38E+10	7.42E+04	$UH_{\infty}F$

بحث در مورد آن پرداخته می‌شود.
یک پاندول معکوس روی گاری می‌تواند به شکل معادله‌های (35) و (36) مدل شود [5]:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgL \sin \theta (M + m) - mL \cos \theta (u + mL\dot{\theta} \sin \theta - B\dot{x})}{(J + mL^2)(M + m) - m^2 L^2 \cos^2 \theta} \quad (35)$$

$$\ddot{x} = \frac{u - mL\dot{\theta} \cos \theta + m\dot{\theta}^2 \sin \theta - B\dot{x}}{M + m} \quad (36)$$

$$u = 40\theta \quad (37)$$

در معادله‌های (35)، (36) و (37)، B ضریب اصطکاک بین گاری و زمین، L طول آونگ، g شتاب گرانش زمین، J ممان اینرسی، x جابجایی گاری، m جرم آونگ، M جرم گاری، u نیروی خارجی اعمالی به گاری، θ زاویه پاندول از حالت قائم می‌باشد.

مقادیر متغیرهای استفاده شده عبارت‌اند از:

$$m = 0.2 \text{ kg} \quad B = 0.1 \text{ N/(m/s)}$$

$$M = 1 \text{ kg} \quad L = 1 \text{ m}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

بردار متغیرهای حالت سیستم دینامیکی موقعیت، سرعت گاری، زاویه و سرعت زاویه‌ای آونگ وارون یعنی $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T = X$ و بردار مشاهده شامل موقعیت و زاویه آونگ وارون یعنی $[x, \theta]^T = Y$ می‌باشد. کواریانس نویز فرایند $\{Q = diag\{0, 0.0004, 0, 0.0004\}$ می‌باشد. معادلات با دوره زمانی 0.01 ثانیه گستته $R = diag\{0.1, 0.1\}$ می‌باشند. معادلات با دوره زمانی 0.01 ثانیه گستته $S = diag\{0.075, 0.075\}$ به نویزهای گوسی فرایند اضافه می‌شود. شرایط اولیه به شکل مقادیر متغیرهای استفاده شده و ممان اینرسی J گوی آونگ $0.1, 0, 0.7, 0$ فرض می‌شود [5].

اگر فرض شود که نویز وارد شده به مسئله کاملاً گوسی باشد و اثربخشی از نویز یکنواخت وجود نداشته باشد، نمودار خطای سه فیلتر مورد نظر در این مقاله با توجه به وزن فیلتر بی‌رد $d = 0.6$ مانند شکل 4 می‌شود. در این شکل فیلتر UKF بی‌شک بهترین پاسخ را ارائه نموده است، با این وجود فیلتر $HU_{\infty}KF$ پاسخی درخور و نزدیکتر به آن ارائه نموده است. همچنین فیلتر $UH_{\infty}F$ مانند یک پوش بالادستی عمل کرده و اجازه خطای بیشتری در تخمین خود ارائه نموده است. همچنین با توجه به شکل 4 می‌توان انتظار داشت که مقدار بهینه وزن فیلتر دوگانه $d = 1$ شود، زیرا در تمام مدت خطای فیلتر بی‌رد کمتر از دو فیلتر دیگر می‌باشد.

در جدول 3 میانگین و خطای سه فیلتر در حضور نویز گوسی آورده شده است. با دقت در مقادیر جدول 3 مشاهده می‌گردد مانند مثال قبل یعنی جرم در حال سقوط آزاد، فیلتر UKF از مقادیر میانگین و واریانس کمتری نسبت به دو فیلتر دیگر مورد بررسی در این مقاله برخوردار است. همچنین فیلتر دوگانه پیشنهادی بعد از آن در مرتبه دوم قرار گرفته است. میانگین خطای فیلتر دوگانه حدود 2 برابر فیلتر کالمن بی‌رد است در حالی که خطای فیلتر

در ادامه علاوه بر نویز گوسی، نویز غیرگوسی یکنواخت با شرایط (30) الی (32) اضافه می‌گردد، در این صورت خطای سه فیلتر به ازای 200 دسته نویز مختلف غیرگوسی مشابه با شکل 3 حاصل می‌شود.

در جدول 2 مقادیر میانگین و واریانس خطای سه فیلتر به ازای نویز غیرگوسی آورده شده است. با توجه به شکل 3 و جدول 2 تخمین فیلتر $UH_{\infty}F$ از دو فیلتر دیگر بهتر است. همچنین مانند نویز گوسی فیلتر دوگانه تخمینی نزدیکتر به این فیلتر ارائه نموده است. نکته مهم دیگر مقادیر واریانس می‌باشد. واریانس فیلتر UKF تقریباً 4 برابر فیلتر $UH_{\infty}F$ و 2.75 برابر فیلتر $HU_{\infty}KF$ می‌باشد. این مسئله به کارگیری فیلتر UKF را با در شرایط وجود نویز غیرگوسی دچار تردید می‌کند. این مسئله در 100 مرحله زمانی پایانی شکل 3 نیز واضح است.

شاید در ابتدا با توجه به شکل‌های 2 و 3 مزیتی در فیلتر دوگانه نسبت به دو فیلتر دیگر مشاهده نشود. اما اگر فرض شود که هیچ شناختی نسبت به نویز سیستم وجود نداشته باشد، و درجه اختلاط گوسی و غیرگوسی آن مشخص نباشد، آنگاه از میان سه فیلتر فوق، فیلتری مطمئن‌تر است که در هر دو صورت خطای قابل قبولی ارائه دهد.

شکل‌های 2 و 3 به همراه جدول‌های 1 و 2 نشان می‌دهند که در هر دو مورد نویز گوسی و غیرگوسی، فیلتر دوگانه مطمئناً جوابی بین دو فیلتر و نزدیک به فیلتر با خطای کمتر ارائه می‌دهد. در واقع این یک مزیت و برتری به شمار می‌رود. همچنین این فیلتر دارای یک متغیر تنظیم ساده (وزن فیلتر d) می‌باشد که به طراح امکان نزدیکی به شرایط مطلوب را می‌دهد.

6- مسئله آونگ وارون

یکی از مسائل مهم در کاربرد فیلتر دوگانه برای مواردی که نیاز به تخمین متغیرهای حالت با دقت بالا می‌باشد، تعیین ضریب وزنی فیلتر تطبیقی پیشنهادی در این مقاله یعنی متغیر d می‌باشد. برای دستیابی به یک مقدار مصالحه بهینه می‌توان از یکی از روش‌های بهینه‌سازی به صورت برخط استفاده بهره برد و سپس مقدار متغیر طراحی بهینه را به صورت برخط استفاده نمود. در این مقاله از الگوریتم بهینه سازی ژنتیک جهت نیل به این هدف استفاده شده است. در ابتدا شرایط مسئله مورد بحث بیان شده و در ادامه به

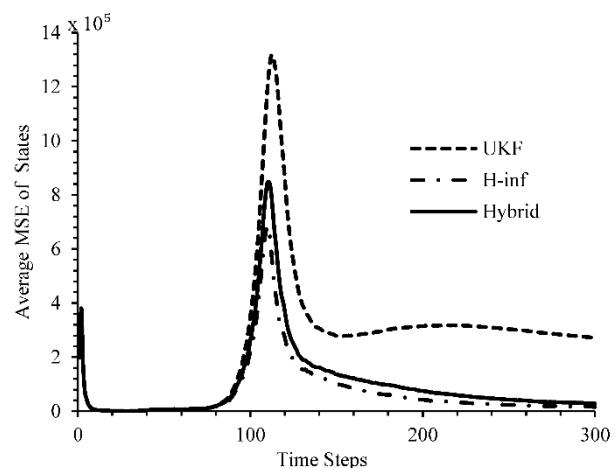


Fig.3 Comparison of states estimation error in falling problem for UKF, H_{∞} and Hybrid in $d = 0.5$ with non-Gaussian noise

شکل 3 مقایسه خطای تخمین حالت‌های مسئله سقوط آزاد سه فیلتر بی‌رد، باوجود نویز غیرگوسی ارجیهایت و دوگانه در $d = 0.5$ می‌باشد.

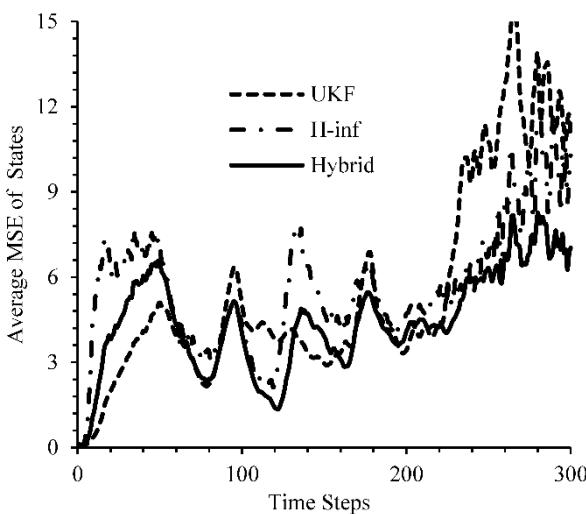


Fig. 5 Comparison of states estimation error in inverse pendulum problem for UKF, $UH_{\infty}F$ and Hybrid filters in $d = 0.7271$ with non-Gaussian noise

شکل 5 مقایسه خطای تخمین حالت‌های مسئله آونگ وارون سه فیلتر بی‌رد، اج-بینهایت و دوگانه در $d = 0.7271$ با وجود نویز غیرگوسی می‌شود.

در جدول 4 نیز مقادیر میانگین و واریانس سه فیلتر آورده شده است. همان‌طور که از شکل 5 انتظار می‌رفت، مقدار میانگین و خطای فیلتر دوگانه از دو فیلتر دیگر بهتر شده است. نکته بسیار مهمی که در جدول 4 مشاهده می‌گردد این موضوع است که واریانس تقریباً 4 برابر فیلتر UKF نسبت به فیلتر $HU/H_{\infty}KF$ و 2.7 برابری آن نسبت به فیلتر $UH_{\infty}F$ می‌باشد. این اختلاف قابل ملاحظه، عدم کارایی فیلتر UKF در شرایطی که نویز سیستم غیر-گوس، می‌باشد را نشان می‌دهد.

با توجه به موارد ذکر شده می‌توان بیان نمود، در شرایط وجود نویز گوسی فیلتر UKF دارای بهترین تخمین و در حضور نویز غیرگوسی فیلتر UH_{RF} بهترین تخمین را ارائه می‌دهد. شرایط بهینه‌سازی ضریب وزنی فیلتر (d) در شرایط وجود نویز گوسی به سمت ۱ و در شرایط وجود نویز غیرگوسی به سمت ۰ میل می‌کند. در واقع عدم استفاده از بهینه‌سازی مشکلی در به کار گیری فیلتر در مواردی که نیاز به تخمین متغیرهای حالت با دقت بالا نمی‌باشد ایجاد نمی‌کند و انتخاب دلخواه وزن d جوابی بین دو فیلتر کالمونی و برد و بیرد اجنبینهای ارائه می‌کند که با تنظیم آن علاوه بر نزدیک شدن به مقادیر بهینه به صورت برخط می‌توان از مقاومت آن در برابر نویز ناشناخته نیز پیشبره برد. از طرف دیگر بهینه بودن ضریب وزنی همانطور که در مثال آونگ وارون نشان داده شد، می‌تواند منجر به عملکرد بهتر فیلتر پیشنهادی گردد لذا پیشنهاد می‌گردد در مواردی که نیاز به تخمین متغیرهای حالت با دقت بالا می‌باشد از فیلتر پیشنهادی با ضریب وزنی بهینه که به صورت غیر برخط حاصل شده، بهره گرفته شود.

جدول 4 مقایسه مقادیر میانگین و واریانس خطای تخمین حالت‌های حاصل از سه فناوری Hybrid، UH و UKF

روش تخمین	میانگین	واریانس
Hybrid	4.4710	3.0284
UKF	5.5752	12.9465
UH _∞ F	5.5080	4.7453

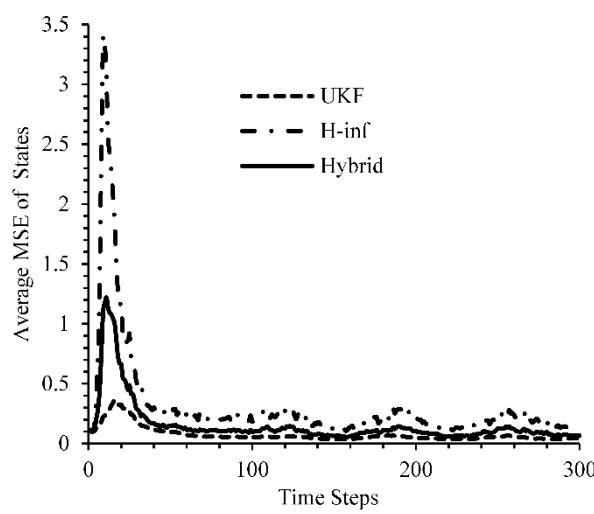


Fig. 4 Comparison of states estimation error in inverse pendulum problem for UKF, $UH_{\infty}F$ and Hybrid in $d = 0.6$ with Gaussian noise

جدول 3 مقایسه مقادیر میانگین و واریانس خطای تخمین حالت‌های حاصل از سه فیلتر $UH_{\infty}F$, UKF و Hybrid

Table 3 Comparison of mean and variance states estimation error values of three filters UKF, $UH_{\infty}F$ and Hybrid

روش تخمین	میانگین	واریانس
Hybrid	0.1539	0.0368
UKF	0.0746	0.004
$UH_{\infty}F$	0.3162	0.2068

بی رد اچ بینهایت 3.2 برابر فیلتر کالمن بی رد می باشد.

در ادامه علاوه بر نویز گوسی یک نویز غیر گوسی به مسئله وارد می شود و متغیر d بر اساس الگوریتم بهینه سازی ژنتیک با تابع هزینه میانگین کمترین خطای تخمین نشان داده شده در معادله (38) تعیین می شود. از 10 دسته نویز مختلف و زمان گسترش سازی 300 در این معادله استفاده می شود:

$$Cost = \frac{1}{10 \cdot 4 \cdot 300} \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{300} \left((X_i - \hat{X}_i)(X_i - \hat{X}_i)^T \right) \quad (38)$$

پارامترهای الگوریتم ژنتیک به کار رفته عبارت اند از:

تعداد جمعیت برابر 30، تعداد نسل برابر 200 نسل، ضریب عملگر پیوند و جهش به ترتیب 0.8 و 0.05 انتخاب شده‌اند. همچنین عملیات نخبه گرایی بر اساس انتخاب مسابقه‌ای می‌باشد. بازه جستجوی متغیر $d \in [0, 1]$ همچنین ضریب باند انرژی فیلتر $\alpha = 3$ در نظر گرفته شده است. نتیجه بهینه‌سازی برابر $d = 0.7271$ حاصل شد. این بهینه‌سازی بر اساس 10 دسته نوب مختلف می‌باشد.

در شکل 5 از 200 دسته نویز مختلف استفاده شده است و با توجه به اینکه بهینه‌سازی بر اساس تنها 10 دسته نویز انجام شده بود، بهنوعی بهینه‌سازی انجام شده مستقل از نویز بوده و با تغییر آن ماهیت خود را حفظ کرده است.

یک تفاوت ماهیتی در شکل ۵، بر خلاف شکل های ۲، ۳ و ۴ این است که هیچ کدام از دو فیلتر $UH_{\infty}F$ و UKF بر دیگری برتری کامل ندارد. بر این اساس فیلتر دوگانه در بخش ابتدایی، تخمینی بین دو فیلتر ارائه می دهد و با افزایش زمان شبیه سازی تخمین فیلتر دوگانه از دو فیلتر دیگر بهتر نیز

- transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, *Automatic Control*, Vol. 26, No. 2, pp. 301-320, 1981.
- [2] H. Rotstein, M. Sznajer, M. Idan, H₂/H_∞ filtering theory and an aerospace application, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, No. 4, pp. 347-366, 1996.
- [3] P. P. Khargonekar, M. A. Rotea, E. Baeyens, Mixed H₂/H_∞ Filtering, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 6, No. 4, pp. 313-330, 1996.
- [4] D. Simon, H. El-Sherief, Hybrid Kalman/minimax filtering in phase-locked loops, *Control Engineering Practice*, Vol. 4, No. 5, pp. 615-623, 1996.
- [5] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*, pp. 373-389, New Jersey: Wiley & Sons, 2006.
- [6] F. Liang, X. Wu, S. Cui, L. Zhao, The mixed Kalman and H infinity filter based robust model following control algorithm for CABG beating heart surgery, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 543, pp. 1360-1364, 2014.
- [7] M. Masoumnezhad, M. Nahaleh-kah, A. Jamali, N. Nariman-zadeh, Optimal state estimation of a dynamical system corrupted with colored noises using Mixed Kalman/H-infinity filter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 67-74, 2014. (in Persian) [\[فارسی\]](#)
- [8] N. Hu, C. Wu, T. Jia, P. Ji., Hybrid filter localization algorithm based on the selection mechanism, *Proceeding of The 27th Control and Decision Conference (CCDC)*, China, Qingdao, May 23-25, 2015.
- [9] M. Masoumnezhad, A. Jamali, N. Nariman-zadeh, Parameter estimation of the GMDH-type neural network using UKF filter, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 15, pp. 59-66, 2015. (in Persian) [\[فارسی\]](#)
- [10] W. Li, Y. Jia, H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform, *Signal Processing*, Vol. 90, No. 1, pp. 3301-3307, 2010.
- [11] J. h. Wang, C. I. Song, X. t. Yao, J. b. Chen, Sigma point H-infinity filter for initial alignment in marine strapdown inertial navigation system, *Proceeding of The 2nd International Conference on Signal Processing Systems (ICSPS)*, China, Dalian, July 5-7, 2010.
- [12] M. Masoumnezhad, A. Jamali, N. Nariman-zadeh, Optimal design of symmetrical/asymmetrical sigma-point Kalman filter using genetic algorithms, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Vol.37, No.3, pp. 425-432, 2014.

7- جمع بندی

در این مقاله یک رهیافت جدید مبتنی بر ترکیب دو فیلتر غیرخطی و UKF برای تخمین مسائل غیرخطی ارائه شده است. فیلتر مذکور نیاز به خطی سازی نداشته و با استفاده از ترکیب پارامترهای تخمین پیشین حالت، تخمین پیشین اندازه و بهره دو فیلتر، تخمین خود را انجام می‌دهد. همچنین فیلتر دوگانه ارائه شده نیازی به حل معادله ریکاتی ندارد. فیلتر دوگانه بی رد کالمن/اجینهایت یا به اختصار HU/H_∞KF در تخمین دو مسئله غیرخطی سقوط آزاد و آونگ وارون به کار برده شده است. بر این اساس در هر دو مسئله نشان داده شد که فیلتر دوگانه با فرض عدم شناخت نوع نویز گوسی یا غیرگوسی پاسخ مطمئن‌تری ارائه می‌دهد و در شرایطی که در بخشی از تخمین خطای یکی از فیلترهای بی رد یا اجینهایت از دیگری کمتر نیز نائل می‌توان با تعیین وزن مناسب فیلتر دوگانه به تخمینی با خطای کمتر نیز نائل شده است. این مورد در مسئله پاندول معکوس با وجود نویز غیرگوسی نشان داده شده است. در این مسئله وزن مناسب به کمک الگوریتم بهینه‌سازی تعیین شد. در نهایت با یک تحلیل واریانس مشخص شد که قابلیت اطمینان فیلتر دوگانه با وجود نویزهای غیرگوسی و گوسی در محدوده مناسبی قرار داشته و می‌تواند از دو فیلتر دیگر نیز کمتر شود.

8- مراجع

- [1] G. Zames, Feedback and optimal sensitivity: Model reference