



تحلیل استاتیکی تیر کامپوزیتی ناهمسانگرد عرضی با تئوری زیگ-زاگ بهبود یافته تحت بار سینوسی

مهران قلمی چوبر¹، غلامحسین لیاقت^{2*}، مجتبی صدیقی³ و حامد احمدی⁴

1- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
 2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
 3- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران
 4- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران
 * صندوق پستی 14115-141@modares.ac.ir، ghlia530

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
 دریافت: 12 دی 1395
 پذیرش: 21 اسفند 1395
 ارائه در سایت: 09 اردیبهشت 1396
 کلید واژگان:
 تئوری زیگ-زاگ
 ناهمسانگردی عرضی
 پیوستگی تنش برشی عرضی

چکیده

در این مقاله، رفتار استاتیکی چندلایه‌های ناهمسانگرد عرضی با استفاده از تئوری زیگ-زاگ بهبود یافته بررسی می‌شود. تغییر میدان جابجایی درون صفحه به صورت سینوسی پیوسته‌ای تکه‌ای فرض می‌شود درحالی‌که جابجایی عرضی ثابت در نظر گرفته می‌شود. تابع سینوسی پیوسته تکه‌ای، شرط پیوستگی تنش برشی عرضی در میان‌رویه‌ها را ارضا می‌کند. برای استخراج معادلات حاکم و همچنین شرط مرزی‌های وابسته از اصل همپلتون استفاده می‌شود. پاسخی از نوع ناوبر برای شرط مرزی ساده ارائه می‌گردد. گرچه این تئوری تعداد متغیر میدانی برابر با تئوری اولر-برنولی دارد ولی تنش‌ها را با صحت بالایی پیش‌بینی می‌کند. صحت پاسخ‌ها با مقایسه نتایج مدل کنونی با نتایج گزارش شده در منابع تایید می‌گردد. نتایج عددی برای مطالعه اثر ناهمسانگردی عرضی بر میدان‌های جابجایی، کرنش و تنش در راستای ضخامت ارائه می‌شود. تابع سینوسی پیوسته تکه‌ای در مقایسه با تابع سهمی پیوسته تکه‌ای نتایج دقیق‌تری را منجر می‌شود. تئوری کنونی میدان تنش نسبتاً صحیح‌تری را نسبت به تئوری مرتبه بالای برشی ارائه می‌کند که آن نیز به نوبه خود از تئوری اولر-برنولی دقیق‌تر است. نتایج نشان می‌دهد که پیوستگی کرنش نرمال در راستای ضخامت (پیش‌بینی شده به وسیله تئوری مرتبه بالا) فاقد مبنای فیزیکی می‌باشد. همچنین، تئوری زیگ-زاگ بهبود یافته توانایی پیش‌بینی دقیق تنش در راستای ضخامت در چندلایه‌های ناهمسانگرد عرضی را دارد.

Static analysis of transversely anisotropic laminates using improved zig-zag theory subjected to sinusoidal load

Mehran Ghalami-Choober¹, Gholam-Hossein Liaghat^{1*}, Mojtaba Sadighi², Hamed Ahmadi¹

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
 2- Mechanical Engineering Faculty, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran
 * P.O.B. 141-14115, Tehran, Iran, ghlia530@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
 Received 01 January 2017
 Accepted 11 March 2017
 Available Online 29 April 2017

Keywords:
 Zig-zag theory
 transversely anisotropy
 transverse shear stress continuity

ABSTRACT

In this paper, static analysis of transversely anisotropic laminate is investigated using improved zig-zag theory. Variation of in-plane displacement is assumed to be sinusoidal while transverse displacement is assumed to remain constant through the thickness. This piece-wise continuous sinusoidal function satisfies transverse shear stresses continuity in interfaces. The Hamilton principle is utilized to derive governing equations and related boundary conditions. The Navier-type solution is presented for simply-supported boundary conditions. The theory has the same unknown variable field as Euler Bernoulli beam although it predicts stresses with high accuracy. The validity of solutions is confirmed by comparing present model results with that reported in the literature. Numerical results are given to study the influences the transverse anisotropy on displacement, strain and stress fields through the thickness. The piece-wise continuous sinusoidal function offers more accurate transverse stress distribution in comparison with the piece-wise polynomial function. The present theory provides a slightly more accurate stress field through the thickness compared to high order shear deformation theory, which in turn is more accurate than Euler-Bernoulli theory. The result shows the continuity of normal strain through thickness predicted by Euler-Bernoulli theory has no physical basis. Furthermore, the improved zig-zag theory is capable of capturing precise stress field through the thickness in transversely anisotropic laminate

1- مقدمه

شکل‌دهی این مواد و همچنین افزایش رقابت در بازارهای جهانی برای ساخت قطعات سبک، کامپوزیت‌ها یکی از مواد انتخابی اصلی برای ساخت قطعات سبک هستند [1]. علت گرایش به کامپوزیت‌ها این است که برتری‌های

در گذشته کامپوزیت‌ها بیشتر برای ساخت سازه‌های ثانویه (فرعی) مورد استفاده قرار می‌گرفتند. اما امروزه به دلیل افزایش آگاهی درباره نحوه

Please cite this article using:

M. Ghalami-Choober, Gh. H. Liaghat, M. Sadighi, H. Ahmadi, Static analysis of transversely anisotropic laminates using improved zig-zag theory subjected to sinusoidal load, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 94 pp. 393-398, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

تعداد لایه‌ها است. این تئوری‌ها انواع مختلفی دارد که از نوع کلاسیک و برشی نوع اول (ارائه شده در کتاب‌های درسی) شروع شده و به تئوری پیچیده منتهی می‌شود که روز به روز در حال اصلاح شدن بوده و رفته رفته قابلیت‌های بیشتری می‌یابند. گرچه تئوری‌های بالا باعث بهبود قابل توجهی در پیش‌بینی پروفیل تنش برشی عرضی و همچنین صحت مدل‌سازی اثرات سراسری (ناموضعی) می‌شوند. ولی با این وجود، توانایی ضبط صریح اثرات زیگ-زاگ را ندارند. در این میان، تئوری‌های تک‌لایه‌ی هم‌ارز که سینماتیک زیگ-زاگی را در نظر می‌گیرند مصالحه خوبی بین عوامل مخالفی نظیر صحت مدل‌سازی موضعی و لایه‌ای و همچنین هزینه محاسباتی برقرار می‌کنند.

دی شووا در سال 1984 مدلی بر پایه میدان جابجایی را ارائه کرد. شکل میدان جابجایی متشکل از تغییر شکل مرتبه اول و همچنین جملات خطی-پیوسته (اثرات زیگ زاگ) بود [5]. دی شووا و ایکاردی در سال 2000 نقش اثرات غیرکلاسیک را بر خمش، ارتعاش و پایداری چندلایه‌های کامپوزیتی و ساندویچی بررسی کردند. نتایج حاصله نشان داد که در حضور اثرات غیرخطی و لایه چینی نامتقارن، پیش‌بینی تنش عرضی دچار اشکال می‌گردد [6]. این مدل لایه چینی نامتقارن و جملات غیرخطی را شامل می‌شد ولی کرنش نرمال عرضی آن صفر بود. در سال 2007 تسلا بر بیان این که مدل دی شووا دارای دو اشکال اساسی است مدل جدیدی را ارائه نمود [7]. تسلا و همکاران در سال 2010 نقش پارامترهای میدان جابجایی را بر رفتار تئوری‌های زیگ زاگ بررسی کردند [8]. این تئوری در سال‌های اخیر این مدل به ساختارهای ساندویچی اعمال گردیده است [9]. از جمله کارهای مهم در این دسته از تئوری‌ها فرمول‌بندی یکپارچه‌ی کاره را می‌باشد که دسته‌ی وسیعی از تئوری‌های ورق از تئوری‌های کلاسیک تا پیشرفته و لایه‌ای^۱ را در برمی‌گیرد. گروه و ویور در سال 2015 رفتار خمشی تیرهای کامپوزیتی چندلایه و ساندویچی را مورد مطالعه قرار دادند. از حساب وردش بر مبنای جابجایی و هم چنین مخلوط برای حصول نتایج استفاده کردند [10].

در این مقاله یکی از تئوری‌های زیگ-زاگ موجود تغییر داده شده و توزیع تنش برشی عرضی جدیدی به صورت سینوسی پیوسته‌ی تکه‌ای در نظر گرفته می‌شود. این توزیع علاوه بر صفر شدن تنش برشی در لبه‌های پایین و بالا، توزیع تنش پیوسته را در گذر از لایه‌های مختلف پشتیبانی می‌کند و تناسب بیشتری با حل دقیق الاستیسیته دارد. معادلات حاکم با اعمال روش کار مجازی بدست آمده و برای بررسی کارآمدی مدل حاضر، نتایج با حل دقیق الاستیسیته گزارش شده در منابع مقایسه می‌گردد. مطالعه موردی برای درک رفتار این نوع تئوری و هم‌چنین اهمیت ناهمسانگردی عرضی انجام می‌گیرد.

2- فرمول‌بندی تئوری زیگ-زاگ بهبود یافته

تئوری مطابق "شکل 2" را در نظر بگیرید که تحت بار وارده می‌باشد. برای یافتن معادلات حاکم بر رفتار استاتیکی این سازه توزیعی برای تنش برشی عرضی در نظر گرفته می‌شود. این توزیع تنش علاوه بر صفر شدن در لبه‌های بالا و پایین امکان الزام پیوستگی در راستای z را فراهم می‌کند. برای تنش برشی عرضی در راستای ضخامت چندلایه، توزیع زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\tau_{xz}^{(k)} = G \left\{ A^{(k)} + m^{(k)} \left(\cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) - 1 \right) \right\} \bar{v}_{xz}(x) \quad (1)$$

که در آن m به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$m^{(k)} = e^{(k)} \left(g^{(k)} + \frac{1}{g^{(k)}} - 1 \right) \quad (2)$$

⁴ Layerwise

مشخصی را نسبت به مواد مهندسی متداول (مانند فولاد و آلومینیوم) از خود نشان می‌دهند، که سفتی مخصوص و استحکام مخصوص بیشتر، مقاومت خوردگی بالا و مقاومت خستگی بهبود یافته از آن جمله هستند. [2].

با این وجود این ماجرای روی دیگر سکه‌ای نیز دارد و آن دشواری‌های مرتبط با تحلیل و طراحی این سازه‌ها می‌باشد. از آن‌جا که طراحی آغازین سازه‌های کامپوزیتی نیازمند دانستن توزیع تنش است. و همچنین بررسی شکست نقاط بحرانی بدون دانستن مقدار دقیق تنش ممکن نیست (بیشتر معیار شروع شکست و آسیب برحسب تنش می‌باشند) استفاده از روش‌های متداول طراحی سازه‌های فلزی در اینجا راهگشا نیست [3]. حال اگر با انجام تحلیل تنش سازه و مشخص شدن نقاط تمرکز تنش، ناگزیر به افزایش سطح مقطع، به عنوان یکی از راه‌حل‌های طراحی، باشیم. این افزایش ضخامت باعث وخیم‌تر شدن اوضاع شده و اثرات غیرکلاسیکی مانند تنش‌های برشی^۱ عرضی (تراگذر) و تغییر شکل در راستای ضخامت اهمیت بیشتری پیدا می‌کنند. در نتیجه، تئوری‌های تیر اولر-برنولی-برنولی و ورق کیرشهوف در پیش‌بینی تغییر شکل موضعی و سراسری این چندلایه‌های کامپوزیتی نارسا خواهند بود.

تحلیل کامپوزیت‌های لایه‌ای به دلیل ناهمسانگردی عرضی (تفاوت مدول الاستیسیته لایه‌ها در جهت ضخامت) و از سوی دیگر لزوم پیوستگی میان لایه‌ای^۲ میدان‌های جابجایی، تنش عمودی [4] بسیار دشوار است. برای مثال تئوری‌های مهندسی تیر و ورق ذکر شده در بالا تنها برای تک‌لایه‌های همسانگرد توسعه داده شده‌اند و با آنکه امر مدل‌سازی در سازه‌های همسانگرد فلزی را با دقت کافی انجام می‌دهند ولی شرط پیوستگی تنش در میان رویه‌ها^۳ ارضا نمی‌کنند و این مسئله در چندلایه‌ها باعث خطا می‌گردد. برای یک کامپوزیت با ناهمسانگردی عرضی، اعمال شروط پیوستگی جابجایی و تنش در مرزها باعث ایجاد اختلاف شیب در میدان جابجایی می‌گردد به این تفاوت در شیب میدان‌های جابجایی U_x, U_y, U_z . پدیده زیگ-زاگ یا هفت‌وهستی می‌گویند (شکل 1).

به دلیل نیاز فزاینده بخش‌های صنعتی به روشی سریع برای مدل‌سازی سازه‌ای، تئوری‌های تک‌لایه هم‌ارز مورد توجه قرار گرفته‌اند. ویژگی بارز این تئوری‌ها در این است که تعداد متغیرهای مجهول در این تئوری‌ها مستقل از

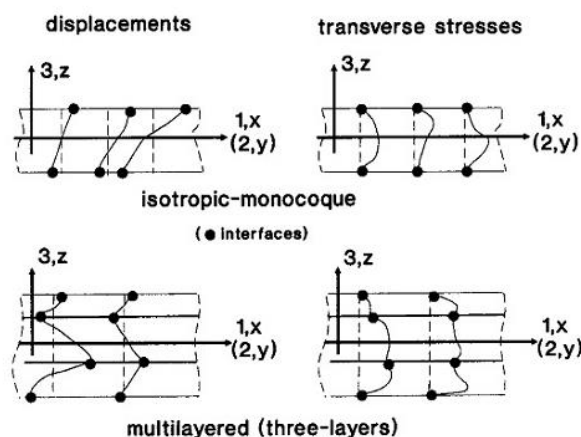


Fig. 1 Displacement and transverse stress field in a lamina and a multi-layered [4]

شکل 1 میدان جابجایی و تنش عرضی در تک لایه و چندلایه [4]

¹ Transverse shear stress

² Interlaminar Stress

³ Interfaces

برای استخراج معادله از اصل کار مجازی استفاده می‌شود. اصل کار مجازی بیان می‌دارد در جسمی که در حال تعادل است مجموع کارهای مجازی انجام شده توسط نیروهای تعادلی، وقتی به مقدار مجازی $\delta \bar{u}$ از حالت واقعی خارج می‌شود، صفر است. با توجه به "شکل 2" نشان داده شده کار مجازی انجام شده بوسیله جابجایی مجازی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\delta \Pi_{PVD} = \int_0^L \iint_S [\sigma_x^{H(k)} \delta \varepsilon_x^{G(k)}(\bar{u}) + \tau_{xz}^H \delta \gamma_{xz}^{G(k)}(\bar{u})] dS dx - \int_{x_A}^{x_B} q \delta w dx - \int_{S_1} [\hat{\sigma}_x \delta u_x + \hat{t}_{xz} \delta w] dS_1 \quad (12)$$

که $\hat{\sigma}_x$ و \hat{t}_{xz} تنش‌های مشخص در نقاط مرزی 0 و L بودند. بالانویس G نیز نشان می‌دهد که کرنش‌ها از طریق رابطه کرنش-جابجایی هندسی محاسبه شده‌اند.

$$\varepsilon_x^{G(k)}(x, z) = u_{0,x}(x) - z w_{,xx}(x) + f^{(k)}(z) \bar{\gamma}_{xz,x}(x) \quad (13a)$$

$$f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z A^{(k)} + m^{(k)}(\sin(\frac{\pi z}{h}) - z) + c^{(k)}) \quad (13b)$$

و

$$\gamma_{xz}^{G(k)}(x, z) = g^{(k)} s^{(k)}(z) \bar{\gamma}_{xz}(x) \quad (14a)$$

$$s^{(k)}(z) = A^{(k)} + m^{(k)}(\cos(\frac{\pi z}{h}) - 1) \quad (14b)$$

بالانویس H نشان می‌دهد که تنش‌ها از طریق معادله هوک محاسبه شده‌اند. با کمینه کردن تابعی³ انرژی $\delta \Pi_{PVD}$ با استفاده از حساب تغییرات، دو معادله حاکم به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\delta w: M_{x,xx} + q = 0 \quad (15)$$

$$\delta \bar{\gamma}_{xz}: L_{x,x} - Q_x = 0 \quad (16)$$

و شرایط مرزی

$$\delta w: M_{x,x} - \hat{V}_x = 0 \quad (17)$$

$$\delta w_x: M_x - \hat{M}_x = 0 \quad (18)$$

$$\delta \bar{\gamma}_{xz}: L_x - \hat{L}_x = 0 \quad (19)$$

برایندهای تنش به صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x^{H(k)} dz = DW_{,xx} + D^y \bar{\gamma}_{xz,x} \quad (20)$$

$$L_x = \int_{-t/2}^{t/2} f^{(k)} \sigma_x^{H(k)} dz = D^y W_{,xx} + D^{\gamma y} \bar{\gamma}_{xz,x} \quad (21)$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} g^{(k)} s^{(k)}(z) \tau_{xz}^{H(k)} dz = J \gamma_{xz} \quad (22)$$

$$\hat{V}_x = \int_{-t/2}^{t/2} \hat{t}_{xz} dz \quad (23)$$

در بین برایندهای تعریف شده M همان ممان خمشی موجود تئوری کلاسیک می‌باشد ولی L ممابالایی می‌باشد که رفتار زیگ-زاگ را مدل می‌کند. سفتی‌های تیر نیز به صورت زیر، مشابه با تئوری مرتبه بالای برشی، محاسبه می‌گردند.

$$\begin{pmatrix} D \\ D_y \\ D_{\gamma y} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \bar{Q}^{(k)} \begin{pmatrix} z^2 \\ z f^{(k)} \\ f^{(k)2} \end{pmatrix} dz \quad (24)$$

$$J = \sum_{k=1}^N \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} G g^{(k)} (s^{(k)}(z))^2 dz \quad (25)$$

حل بسته‌ای به صورت زیر برای دو تابع $w, \bar{\gamma}_{xz}$ در حالت تکیه‌گاه ساده و همچنین بار سینوسی می‌توان در نظر گرفت.

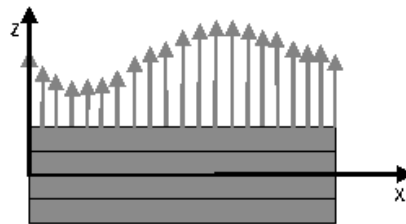


Fig.2 A laminate subjected to distributed load and boundary condition

شکل 2 چندلایه‌ای تحت بار گسترده و شرایط مرزی

که e, g نیز بر اساس رهیافت فتری بدین صورت ارائه شده است

$$e^{(k)} = \frac{Q^{(k)}}{E} \quad (3)$$

$$E = 1/h \sum_{k=1}^N t^{(k)} \bar{Q}^{(k)} \quad (4)$$

و

$$g^{(k)} = G/C_{xz}^{(k)} \quad (5)$$

$$G = \left[\frac{1}{h} \sum_{k=1}^N \frac{t^{(k)}}{G^{(k)}} \right]^{-1} \quad (6)$$

در فرمول بالا $\bar{Q}^{(k)}$ سفتی تبدیلی شده و G_{xz} مربوط به مدول برشی لایه‌ها می‌باشد. که $\bar{Q}^{(k)} = E_x^{(k)}$ برای حالت تنش صفحه‌ای و $\bar{Q}^{(k)} = E_x^{(k)} / (1 - \nu_{xy}^{(k)} \nu_{yx}^{(k)})$ برای حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد. شایان ذکر است معادله پیشنهاد شده در رابطه (1) اصلاح شده رابطه‌ی زیر می‌باشد که در مرجع [10] ارائه شده است.

$$\tau_{xz}^{(k)} = G \left\{ A^{(k)} - 4t^2 e^{(k)} \left(g^{(k)} + \frac{1}{g^{(k)}} - 1 \right) z^2 \right\} \bar{\gamma}_{xz}(x) \quad (7)$$

این رابطه بالا براساس تئوری مرتبه بالای ردی بوده و از توزیع سهمی برای نشان دادن تغییرات تنش برشی استفاده می‌کند.

در رابطه‌ی توزیع تنش 1، $A^{(k)}$ ثابت‌های لایه‌ای برای برقرار پیوستگی تنش برشی عرضی در لایه‌های مختلف می‌باشد و از شرط زیر محاسبه می‌گردد

$$\tau_{xz}^{(k)} = \tau_{xz}^{(k+1)} \quad (8)$$

با جاگذاری رابطه تنش 1 در رابطه هوک، کرنش برشی عرضی بدست می‌آید سپس از رابطه‌ی هندسی کرنش‌ها، می‌توان مولفه‌های جابجایی را به صورت مقابل بدست آورد.

$$u_x^{(k)}(x, z) = u_0(x) - z w_{,x}(x) + g^{(k)} \left\{ z A^{(k)} + m^{(k)} \left(\sin(\frac{\pi z}{h}) - z \right) \right\} \bar{\gamma}_{xz} + c^{(k)} \bar{\gamma}_{xz} \quad (9)$$

$$u_z(x, z) = w(x) \quad (10)$$

در رابطه‌ی (9) ثابت $c^{(k)}$ برای اعمال شرایط پیوستگی میدان جابجایی وارد شده است و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$u_x^{(k)} = u_x^{(k+1)} \quad (11)$$

با محاسبه پیشینی این ضرایب، تنها دو متغیر w و $\bar{\gamma}_{xz}$ که مربوط به کل سازه می‌باشند و حالت سراسری¹ دارند، باقی می‌مانند که باید از معادله دیفرانسیل حاکم استخراج می‌شود. بنابراین تعداد معادله‌ها دو بوده و با افزایش تعداد لایه‌ها شاهد افزایش تعداد معادلات (برخلاف تئوری‌های لایه‌ای²) نخواهیم بود.

¹ Global

² Layerwise

³ Functional

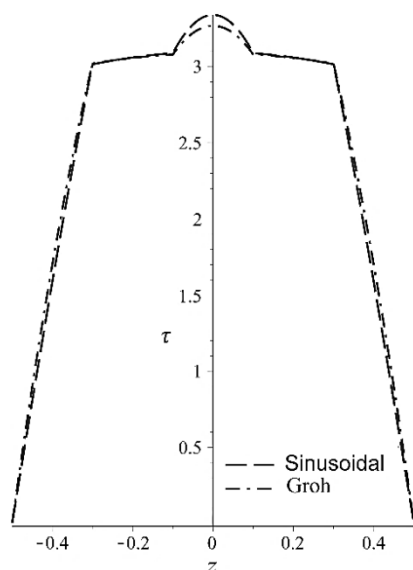


Fig. 3 Variation of transverse shear stress $\tau_{xz}^{(k)}$ field through the thickness for sinusoidal and parabolic function

شکل 3 تغییرات تنش برشی عرضی $\tau_{xz}^{(k)}$ در راستای ضخامت برای تابع سینوسی و سهمی

$$U = \frac{u_z(x, z)}{h} \quad (31)$$

و

$$\varepsilon_{-x} = \frac{Qt^2}{q_0 a^2} \quad (32)$$

و

$$\sigma_{-x} = \frac{t^2}{q_0 a^2} \quad (33)$$

"شکل 4" کرنش نرمال را در راستای ضخامت تیری با آرایش مورد بحث در بخش صحت سنجی نشان می‌دهد. همان‌گونه مشخص است میدان تئوری مرتبه بالا و اولر-برنولی یکنواخت هستند ولی میدان حاصل از تئوری زیگ-زاگ این‌گونه نیست و دارای شکستگی می‌باشد. این تغییر شیب پدیده زیگ-زاگ نام دارد که پیش‌تر به آن اشاره شد. علت این است که هیچ قیدی بر پیوستگی میدان کرنش نرمال جهت x و تنش نرمال جهت x در این راستا وجود ندارد. و حل دقیق الاستیسته تنها پیوسته بودن میدان جابجایی و تنش عرضی میان‌رویه‌ها را الزام می‌کنند [4].

"شکل 5" تنش نرمال جهت x در راستای ضخامت نشان می‌دهد. در اینجا نیز اختلاف نتایج این تئوری به وضوح مشخص است. هر چه به لبه‌های بالا و پایین نزدیک می‌شویم این اختلاف و خطا بیشتر می‌شود. "شکل 6" تنش برشی عرضی در راستای ضخامت نشان می‌دهد. تئوری اولر هیچ تنش برشی در نظر نمی‌گیرد تئوری مرتبه بالا میدانی ناپیوسته و نادرست را منجر می‌شود. ولی تئوری زیگ-زاگ میدانی پیوسته و منطبق بر حل دقیق الاستیسته را برای این لایه‌چینی پیش‌بینی می‌کند.

در ادامه به بررسی چندلایه‌ی فلز الیافی با آرایش [Al/90/0/0/90/Al] پرداخته می‌شود. خصوصیات مکانیکی لایه‌های کامپوزیتی و آلومینیومی در جدول 2,3 از مرجع [11] آورده شده است.

"شکل 7" کرنش نرمال را برای چندلایه فلز الیاف در راستای ضخامت تیر نشان می‌دهد. همان‌گونه مشخص است پاسخ تئوری مرتبه بالا و زیگ-زاگ بر منطبق شده است ولی پیش‌بینی مدل اولر-برنولی دارای خطا است.

$$w = W \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (26)$$

$$\bar{\gamma}_{xz} = \Gamma \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (27)$$

با جایگذاری پاسخ‌های بالا در معادله حاکم و ساده‌سازی جواب معادلات به صورت زیر بدست می‌آید

$$W = \frac{a^3 D^{\gamma\gamma} a \pi^2 - J a^3}{\pi^6 (D^{\gamma^2} - D D^{\gamma\gamma} - D J \frac{a^2}{\pi^2})} q_0 \quad (28)$$

در ادامه پژوهش حاضر برای بدست آوردن معیاری برای تشخیص اهمیت تئوری زیگ-زاگ از آن را تئوری اولر مقایسه می‌کنیم. با فرض $w_c = a^4 q_0 / \pi^4 D$ و بازآرایی رابطه‌ی (28) می‌توان به فرمول زیر رسید

$$\frac{w}{w_c} = \frac{1 + \frac{J a^2}{D^{\gamma\gamma} \pi^2}}{1 + \frac{J a^2}{D^{\gamma\gamma} \pi^2} - \frac{D^{\gamma^2}}{D D^{\gamma\gamma}}} \quad (29)$$

بررسی فرمول بالا نشان می‌دهد که دو عامل $D^{\gamma^2} / D D^{\gamma\gamma}$ و $J a^2 / D^{\gamma\gamma} \pi^2$ در انحراف پاسخ سازه از پاسخ تیر کلاسیک حائز اهمیت است و با اگر این کمیت برای یک لایه‌چینی نزدیک صفر باشد با تقریب نسبتاً خوبی می‌توان از تئوری اولر-برنولی استفاده نمود در غیر این صورت خیر.

$$\frac{D^{\gamma^2}}{D D^{\gamma\gamma}} \ll 1 \quad \text{و} \quad \frac{J a^2}{D^{\gamma\gamma} \pi^2} \ll 1 \quad (30)$$

این روابط می‌توانند به طور دقیق‌تری نسبت به معیار رایج، که بر مبنای نسبت طول به ضخامت می‌باشند، عمل کنند.

3- صحت سنجی

برای بررسی صحت فرمول‌بندی بالا تیری دارای مشخصات زیر به ازای فرمول‌های تنش برشی رابطه‌ی (1) و (7) با هم مقایسه می‌شوند. ضخامت تیر 1 و لایه‌چینی 0/90/0/90/0 است. خصوصیات مکانیکی هر لایه نیز در جدول 1 آورده شده است. "شکل 3" توزیع تنش برشی در راستای ضخامت را که توسط فرمول‌بندی بالا محاسبه شده نشان می‌دهد. شکل حاکی از آن است که نه تنها شرط پیوستگی تنش به خوبی اعمال شده بلکه نتایج بدست تطابق خوبی نیز با مرجع مورد اشاره دارد. بنا بر مرجع [10] مقدار دقیق تنش برشی بیشینه از حل دقیق الاستیسته 3228.3 می‌باشد بدین ترتیب خطا برای مدل حاضر (تابع سینوسی تکه‌ای پیوسته) و (تابع سهمی تکه‌ای پیوسته) [10] به ترتیب برابر با 53.0 و 621.1 درصد است. در نتیجه استفاده از تابع شکل سینوسی تکیه‌ای پیوسته‌ای باعث کاهش خطا می‌گردد.

4- نتایج و بحث

در این بخش به بررسی توزیع میدان‌های کرنش نرمال و تنش نرمال و همچنین تنش عرضی در راستای ضخامت حاصل از تئوری زیگ-زاگ پرداخته می‌شود. همچنین مقایسه نتایج با تئوری مرتبه بالا و همچنین اولر برنولی برای چندلایه‌ی کامپوزیتی با آرایش معرفی شده جدول 1 انجام می‌شود. پارامترهای بی‌بعد زیر برای رسم مناسب نمودارها فرض می‌گردند.

جدول 1 خصوصیات مکانیکی کامپوزیت مورد استفاده A [10]

مقدار مکانیکی (MPa)	خصوصیت مکانیکی	مقدار (MPa)	خصوصیت مکانیکی
5×10^5	G_{12}	25×10^6	E_1
5×10^5	G_{13}	1×10^6	E_2
2×10^5	G_{23}	1×10^6	E_3
0.25	ν_{23}	0.25	ν_{12}
		0.25	ν_{13}

جدول 2 خصوصیات مکانیکی کامپوزیت مورد استفاده B [11]

مقدار (MPa)	خصوصیت مکانیکی
52×10^6	E_1
17×10^6	E_2
17×10^6	E_3
0.25	ν_{12}
0.25	ν_{13}
0.25	ν_{23}
7×10^6	G_{12}
7×10^6	G_{13}
7×10^6	G_{23}

جدول 3 خصوصیات مکانیکی آلومینیوم مورد استفاده [11]

مقدار (MPa)	خصوصیت مکانیکی
72.2×10^6	E
0.3	ν

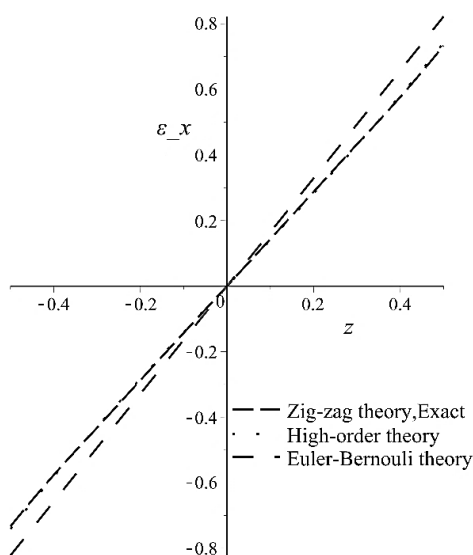


Fig. 7 Variation of normal strain field $\epsilon_x^{G(k)}$ through the thickness
شکل 7 تغییر میدان کرنش نرمال $\epsilon_x^{G(k)}$ در راستای ضخامت

"شکل 8" تنش نرمال جهت x در راستای ضخامت برای چندلایه فلز الیاف نشان می‌دهد. در اینجا نیز تئوری کلاسیک تیر دارای خطا است در حالی که نتایج تئوری‌های زیگ‌زاگ و مرتبه‌ی بالا رو هم افتاده اند. "شکل 9" تنش برشی عرضی برای چندلایه فلز الیاف نشان می‌دهد. تئوری اولر هیچ تنش برای مقایسه ارائه نمی‌دهد. ولی تئوری مرتبه بالا میدانی پیوسته ولی دارای کمی خطا را منجر می‌شود. لازم به ذکر است پیوستگی تنش برشی در تئوری مرتبه بالا در این حالت، به دلیل تساوی مدول‌های برشی G_{23} و G_{13} می‌باشد.

5- نتیجه‌گیری

در این مقاله رفتار استاتیکی چندلایه‌های ناهمسانگرد عرضی با استفاده از تئوری زیگ‌زاگ بهبود یافته بررسی شد. میدان جابجایی درون‌صفحه‌ای به صورت سینوسی پیوسته‌ای تکه‌ای فرض شد و با استفاده از اصل کار مجازی معادلات حاکم و همچنین شرط مرزی‌های وابسته استخراج گردید. تئوری حاضر با وجود داشتن متغیرهای محدود و مستقل تعداد لایه‌های چندلایه قابلیت اعمال پیوستگی تنش را دارد. از مهم‌ترین نتایج به‌دست آمده در این

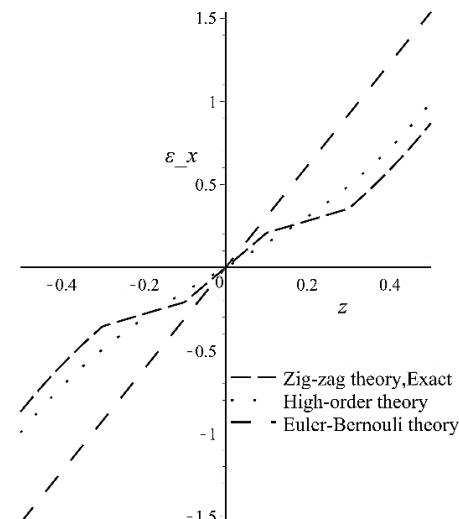


Fig. 4 Variation of normal strain $\epsilon_x^{G(k)}$ field through the thickness
شکل 4 تغییر میدان کرنش $\epsilon_x^{G(k)}$ نرمال در راستای ضخامت

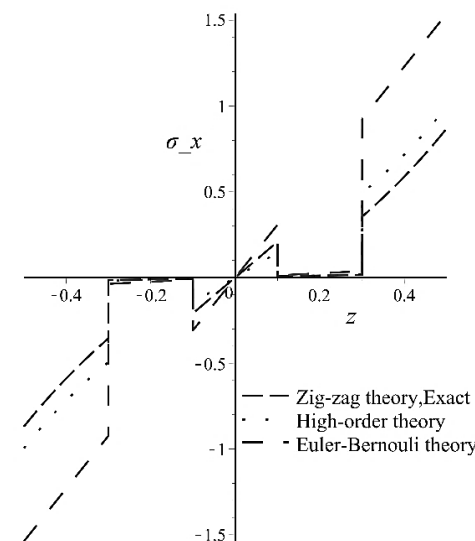


Fig. 5 Variation of normal stress field $\sigma_x^{H(k)}$ through the thickness
شکل 5 تغییر میدان تنش نرمال $\sigma_x^{H(k)}$ در راستای ضخامت

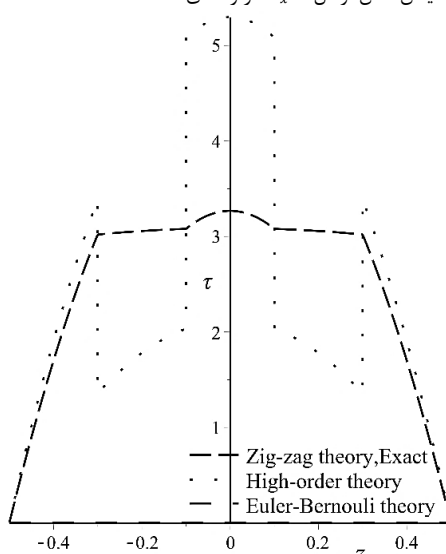


Fig. 6 Variation of transverse shear stress $\tau_{xz}^{(k)}$ field through the thickness
شکل 6 تغییرات تنش برشی عرضی $\tau_{xz}^{(k)}$ در راستای ضخامت

- میدان کرنش پیش‌بینی شده در تئوری ناپیوسته است که منطبق بر حل دقیق الاستیسیته و برخلاف تئوری اولر-برنولی می‌باشد
- تابع سینوسی پیوسته تکه‌ای در مقایسه با تابع سهمی پیوسته تکه‌ای منجر به نتایج دقیق‌تری می‌گردد.
- نحوه‌ی عملکرد تئوری حاضر با تئوری‌های زیگ-زاگ، مرتبه بالا و همچنین اولر برنولی برای چند لایه‌چینی بررسی شد.
- نتایج نشان می‌دهد که داشتن مدول الاستیک و برشی متفاوت در راستای ضخامت باعث ناپیوستگی در کرنش عمودی و برشی جهت z می‌گردد. در این حالت تئوری‌های مرتبه بالا و اولر برنولی به مشکل دقت مواجه می‌شوند.

6- مراجع

[1] M. M. Shokrieh, M. JamaOmid, The Impact Resistance of Fiber-Reinforced Polymer Composites: A Review, *Iranian Journal of Polymer Science and Technology*, Vol. 24, No. 4, pp. 255-77, 2012. (in Persian)

[2] W. J. Cantwell, J. Morton, The impact resistance of composite materials a review, *Composites*, Vol. 22, No. 5, pp. 347-362, 1991.

[3] B. A. Kennedy. *Surface Mining*. Second Edition, pp. 50-76 Littleton, Colorado: Society for Mining Metallurgy & Exploration (SME), 1990.

[4] Martin H. Sadd, *Elasticity: theory, applications, and numerics*. Second edition, pp. 66-70, Oxford: Academic Press, 2009.

[5] M Disciua. A refinement of the transverse shear deformation theory for multilayered plates, *Aerotecnica Missili e Spazio*, Vol. 63, No. 1, pp. 84-92, 1984

[6] M. D. Sciuval, U. Icardi, On Modeling of Global and Local Response of Sandwich Plates with Laminated Faces, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 2, No. 4, pp. 350-378, 2000

[7] A. Tessler, M. DiSciuva, M. Gherlone, Refinement of Timoshenko Beam Theory for Composite and Sandwich Beams Using Zigzag Kinematics, *Technical Report*, pp. 1-45, 2007

[8] A. Tessler, M. Di Sciuva, M. Gherlone, A consistent refinement of first-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 5, No. 2, pp. 341-367, 2010

[9] E. Carrera, A. Ciuffreda, Bending of composites and sandwich plates subjected to localized lateral loadings: a comparison of various theories, *Composite Structures*, Vol. 68, No. 2, pp. 185-202, 2005

[10] R. M. J. Groh, P. M. Weaver, On displacement-based and mixed-variational equivalent single layer theories for modelling highly heterogeneous laminated beams, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 59, No. 1 pp. 147-170, 2015

[11] MSH Fatt, C. Lin, D. M. Revilock, D. A. Hopkins. Ballistic impact of GLARE™ fiber-metal laminates. *Composite structures* Vol. 61 No. 1, pp. 73-88, 2003.

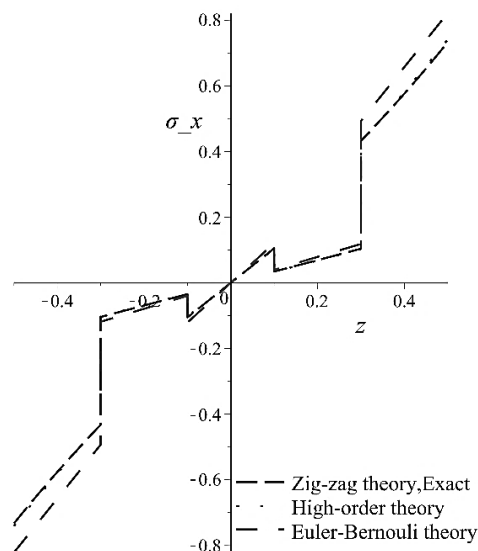


Fig. 8 Variation of normal stress field $\sigma_x^{H(k)}$ through the thickness

شکل 8 تغییر میدان تنش نرمال $\sigma_x^{H(k)}$ در راستای ضخامت

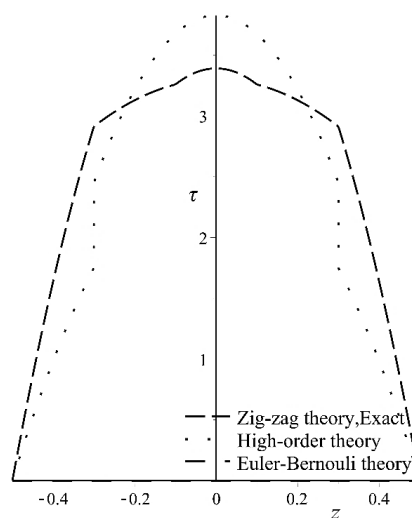


Fig. 9 Variation of transverse shear stress field $\tau_{xz}^{(k)}$ through the thickness

شکل 9 تغییر میدان تنش برشی عرضی $\tau_{xz}^{(k)}$ در راستای ضخامت

پژوهش می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

- تئوری حاضر میدان جابجایی و تنش پیوسته‌ای را در گذر لایه‌های مختلف در راستای z پیش‌بینی می‌کند که برای بعضی از چندلایه‌ها منطبق بر حل دقیق الاستیسیته می‌باشد.