مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1396، دوره 17، شماره 11، ص‌ص 385-396

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته

علی طالع‌زاده‌لاری[1]، غلامحسین رحیمی[2*]

1- دانش آموخته دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی 14115-111، rahimi_gh@modares.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 20 مرداد 1396

پذیرش: 07 آبان 1396

ارائه در سایت: 06 آذر 1396

کلید واژگان:

کمانش

پوسته کامپوزیتی

گشودگی

تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول

روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته

چکیده

در مقاله حاضر کمانش محوری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی کامل و دارای گشودگی مستطیلی بر پایه تئوری برشی مرتبه اول بررسی شده است. معادلات در حالت کلی به صورتی نوشته شده که قابل تبدیل به هر یک از تئوری‌های دانل، لاو و یا ساندرز هستند. برای مطالعه پوسته دارای گشودگی فضای حل مسأله به گونه‌ای المان‌بندی شده که شرایط مرزی و بارگذاری در لبه‌های هر المان یکنواخت باشد. معادلات حاکم برای هر المان به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته در راستای طولی و محیطی گسسته شده و با مونتاژ این معادلات یک دستگاه معادلات جبری تشکیل شده است. گسسته‌سازی شرایط مرزی در لبه‌های پوسته و لبه‌های گشودگی و شرایط سازگاری در مرز مشترک المان‌ها نیز به کمک همین روش انجام شده است. در نهایت با استفاده از حل مقدار ویژه بار بحرانی پوسته محاسبه شده است. برای صحه‌گذاری روش ارائه شده، نتایج حاصل از آن با نتایج موجود در مقالات و نیز نتایج نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده است. پس از اطمینان از کارایی روش حاضر، از آن برای بررسی اثر پارامترهای مختلف در کمانش پوسته‌های کامل و دارای گشودگی استفاده شده است. این بررسی‌ها نشان می‌دهد که لایه‌چینی پوسته تأثیر بسزای بر بار کمانش پوسته‌های کامل و دارای گشودگی دارد. ضمن این‌که تأثیر افزایش اندازه گشودگی برای لایه‌چینی‌های مختلف یکسان نیست، اما برای یک لایه‌چینی یکسان، رفتار پوسته‌ها در برابر تغییر اندازه گشودگی مستقل از جنس است. علاوه‌بر این نتایج نشان داد که پوسته دارای گشودگی مربعی بار بحرانی بیشتری نسبت به پوسته با گشودگی مستطیلی هم‌مساحت دارد.

Buckling analysis of perforated composite cylindrical shell using Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)

Ali Talezadehlari[1], Gholam Hossein Rahimi[1*]

1- Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 14115-111 Tehran, Iran, Rahimi_gh@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 11 August 2017
Accepted 29 October 2017
Available Online 27 November 2017

Keywords:
Buckling
Composite Shell
Cutout
First-order Shear Deformation Theory (FSDT)
Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)

ABSTRACT

In this paper, axial buckling of a composite cylindrical shell with and without a rectangular cutout is studied based on the first-order shear deformation theory. The equations are derived in a general form and can be converted to Donnell`s, Love`s, and Sanders` theories. To investigate the perforated shell, a physical domain is decomposed into several elements with uniform boundary and loading conditions in each element edges. In each element, the governing equations are discretized in both longitudinal and circumferential directions by the use of generalized differential quadrature method (GDQM). By assembling these discretized relations, a system of algebraic equations is generated. The boundary conditions at the shell and cutout edges, and the compatibility conditions at the interface boundaries of adjacent elements are also discretized by GDQM. Finally, the buckling load is calculated by an eigenvalue solution. To validate the presented method, the results of GDQM are compared with the available ones in the literature and also with ABAQUS finite element model. Then a parametric analysis is performed to investigate the effects of different parameters on the buckling behavior of the shells with and without cutouts. This study illustrates that the shell layup has a great effect on the buckling load of a shell. In addition, the influence of increasing the cutout size is not identical for different layups. However, the buckling behavior is independent of the shell material. Moreover, it was concluded that the shell with a square cutout has higher critical load than the one with a rectangular opening.

1- مقدمه

سازه‌های کامپوزیتی به دلیل نسبت مقاومت به وزن بالا و مقاومت در برابر رطوبت و خوردگی و سایر خواص منحصر به فرد، در صنایع مختلف از جمله صنایع هوایی و فضایی کاربرد دارند. پوسته‌های استوانه‌ای یکی از انواع پرکاربرد این سازه‌هاست. این پوسته‌ها بنا بر کاربردشان ممکن است تحت انواع بارگذاری‌های محوری، خمشی، پیچشی و فشار داخلی و خارجی قرار گیرند. یکی از شایع‌ترین مودهای واماندگی این سازه‌ها کمانش تحت بار محوری است. به همین سبب مطالعه رفتار کمانشی آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:

A. Talezadehlari, Gh. H. Rahimi, Buckling analysis of perforated composite cylindrical shell using Generalized Differential Quadrature Method (GDQM) , *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 385-396, 2018 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

برخوردار است.

از طرف دیگر در بسیاری از موارد برای کاهش وزن پوسته‌ها، ایجاد دسترسی به قسمت‌های داخلی و یا به منظور اتصال بخش‌های دیگر به سازه، ایجاد گشودگی در این سازه‌ها اجتناب‌ناپذیر است. وجود این گشودگی‌ها بر مقاومت کمانشی پوسته‌ها تأثیرگذار است و در طراحی باید به وجود آن‌ها توجه کرد. گشودگی‌ها ممکن است برحسب نیاز به شکل‌های دایره، مستطیل و... باشند.

برخلاف پوسته‌های استوانه‌ای کامل (بدون گشودگی) که تحقیقات بسیاری در مورد آنها انجام شده است و تئوری‌های مختلفی برای آنالیز آن‌ها وجود دارد پوسته‌های دارای گشودگی به دلیل پیچیدگی‌هایی که دارند کمتر به صورت تحلیلی و حتی نیمه تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته‌اند و بیشتر تحقیقات صورت گرفته با استفاده از روش‌های عددی و یا تست‌های آزمایشگاهی انجام شده است.

حجم محاسبات و هزینه محاسباتی ناشی از آن یکی از مسائل دارای اهمیت در روش‌های عددی است. روش مربعات تفاضلی[1] یکی از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل است که مبانی نظری آن نخستین بار توسط بلمن و همکاران در اوایل دهه 1970 مطرح شد [2,1]. برت و همکاران در سال‌های 1988 برای اولین بار از این روش برای حل مسائل سازه‌ای بهره بردند [3]. مهم‌ترین برتری روش مربعات تفاضلی نسبت به سایر روش‌های عددی نظیر المان محدود، تفاضلات محدود و... حجم پایین محاسبات آن است. در حالی که در اکثر روش‌های عددی برای دست‌یابی به دقت‌های قابل قبول، نیاز به شبکه‌ای متراکم در میدان حل است؛ می‌توان به کمک روش مربعات تفاضلی با استفاده از تعداد بسیار کمتری گره به همان دقت از پاسخ دست یافت.

یکی از مشکلات اساسی روش مربعات تفاضلی این است که برخلاف روش المان محدود که می‌تواند برای هر نوع هندسه‌ای (اعم از منظم یا نامنظم) به کار گرفته شود، این روش صرفاً برای هندسه‌های منظم قابل استفاده است. به عبارت دیگر استفاده مستقیم از این روش برای آن برای مسائلی که در آن هندسه و یا بارگذاری دارای ناپیوستگی باشد امکان‌پذیر نیست. مطالعات نشان داد که استفاده از روش‌های نظیر نگاشت[2] حوزه فیزیکی[3] مسأله به حوزه محاسباتی[4] کارایی و سادگی این روش را از بین می‌برد و کارآمد نیست. برای رفع این محدودیت‌ها استریز و همکاران در سال 1994 با تلفیق روش مربعات تفاضلی و تجزیه حوزه[5] ورژن جدیدی از روش مربعات تفاضلی با نام «روش مربعات المانی»[6] را ارائه کردند [4]. ایشان این روش را برای تحلیل تیرهایی با بارگذاری‌های مختلف از جمله بارگذاری ناپیوسته به کار بردند و به نتایج دقیقی دست یافتند. در سال 1997 وانگ و گو این روش را بهبود داده و روشی با نام «روش مربعات تفاضلی المانی»[7] ارائه کردند [5]. این روش با موفقیت برای تحلیل‌های مختلف تیرها از جمله تحلیل تنش، ارتعاشات و کمانش به کارگرفته شد. این روش توانست نتایج دقیقی برای مسائل دارای بارگذاری و ضخامت ناپیوسته در تیرها فراهم آورد. لیو و لیو در سال 1998 این روش را برای مسائل دوبعدی بسط دادند و از آن برای تحلیل تنش ورق ایزوتروپ استفاده نمودند. ایشان در این تحلیل ناپیوستگی هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی را بررسی نمودند. بدین منظور ورق به گونه‌ای به المان‌های مختلف مستطیلی تقسیم شد که بارگذاری، شرایط مرزی در هر المان ثابت باشد، سپس معادلات تعادل در هر المان جداگانه نوشته شده و با اعمال شرایط پیوستگی بین المان‌ها با یکدیگر کوپل می‌شوند. بررسی ایشان نشان داد که این روش می‌تواند به خوبی انواع ناپیوستگی‌ها از جمله گشودگی مربعی را تحلیل کند [6]. در سال 1999 لیو مسأله مشابهی را برای ورق کامپوزیتی بررسی کرد و نشان داد که می‌توان از این روش برای ورق با انواع ناپیوستگی‌های هندسی، مادی، بارگذاری و شرایط مرزی استفاده کرد [7]. لیو و لیو در سال 1999 و 2001 مسأله ارتعاشات آزاد و کمانش تحت بار تک محوری ورق ایزوتروپ را بررسی نمودند. در این پژوهش ورق با ضخامت متغیر، شرایط مرزی ترکیبی و نیز ورق دارای ترک مطالعه شد [8-10]. در همه این مطالعات از تئوری برشی مرتبه اول برای تحلیل ورق استفاده شده است. استفاده از تئوری برشی مرتبه اول این مزیت را دارد که در هر گره سه درجه آزادی وجود دارد و به راحتی می‌توان شرایط مرزی را اعمال کرد.

از روش مربعات تفاضلی برای تحلیل‌های مختلف (استاتیکی، ارتعاشات، کمانش و...) پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپ و کامپوزیتی کامل (بدون گشودگی) استفاده شده است. در ادامه به برخی از پژوهش‌های انجام شده در زمینه کمانش پوسته‌ها و پنل‌ها اشاره شده است. در تمامی این مطالعات با توجه تقارن محوری پوسته گسسته‌سازی معادلات صرفاً در راستای طولی انجام شده است.

در سال 1998 میرفخرایی و ردکوپ کمانش خطی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپ را با استفاده از روش مربعات تفاضلی بررسی کردند. ایشان در این پژوهش بر پایه تئوری پوسته‌های نازک فلوگه انواع تکیه‌گاه‌های ساده- ساده، گیردار- گیردار و گیردار- آزاد را مورد مطالعه قرار داده‌اند [11].

ردکوپ و ماخول در سال 2000 کمانش پنل استوانه‌ای ایزوتروپ تحت بارگذاری شعاعی را به کمک همین روش تحلیل نمودند. در این بررسی شرایط مرزی مختلف برای پنل بررسی شد. مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با نتایج حاصل از حل تحلیلی و المان محدود کارایی روش مربعات تفاضلی را نشان داد [12].

جیانگ و همکاران در سال 2008 کمانش محوری پنل استوانه‌ای تقویت شده را با استفاده از روش مربعات تفاضلی المانی بررسی کردند. معادلات حاکمه براساس معادلات تعادل پنل و تقویت‌کننده‌ها و نیز شرایط سازگاری در محل اتصال پنل و تقویت‌کننده تشکیل شده است. در نهایت اثر پارامترهای مختلف بر بار کمانش مورد مطالعه قرار گرفته است [13].

بارانی و همکاران در سال 2012 ورژنی از روش مربعات تفاضلی که بر پایه بسط فوریه[8] بود را برای تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی لایه‌ای تقویت‌شده با رینگ‌های محیطی به کار گرفتند. برای در نظر گرفتن اثرات تقویت‌کننده‌ها از روش معادل‌سازی[9] استفاده شده است. آنالیز خطی و غیرخطی به وسیله کدنویسی در نرم‌افزار فورترن انجام شده و نتایج حاصل با نتایج نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده است. اثر ابعاد پوسته و تقویت‌کننده، خواص مواد و لایه‌چینی مطالعه شده است [14].

اکبری الشتی و احدی در سال 2014 با بهره‌گیری از روش مربعات تفاضلی کمانش پوسته استوانه‌ای ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی با ضخامت متغیر و تحت بار ترکیبی فشار داخلی و بار محوری را بررسی نمودند.

[1] Differential Quadrature (DQ)
[2] mapping
[3] physical domain
[4] computational domain
[5] domain decomposition
[6] Quadrature Element Method (QEM)
[7] Differential Quadrature Element Method (DQEM)
[8] Fourier-expansion based Differential Quadrature Method
[9] smear method

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

در این پژوهش تغییرات ضخامت پوسته به نحوی در نظر گرفته شد که تقارن محوری پوسته حفظ شود. تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت پوسته تابعی از کسر حجمی مواد و طبق قانون توانی در نظر گرفته شده، در حالی که ضریب پواسون ثابت فرض شده است. تکیه‌گاه‌ها به صورت ساده انتخاب شده‌اند. در نهایت اثر پارامترهایی نظیر کسر حجمی اجزا، نسبت ابعادی، نحوه تغییرات ضخامت و بارگذاری بر بار کمانش بررسی شده است [15].

فدایی و کلانتری در سال 1395 با تلفیق روش کیدانه و روش مربعات تفاضلی مدلی برای تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مشبک ارائه دادند. در این مطالعه استوانه با شبکه منظم مثلث متساوی‌الاضلاع تقویت شده و بدین ترتیب تقارن محوری آن حفظ شد. از این‌رو ایشان توانستند معادلات را به معادلات یک بعدی تقلیل دهند [16].

در سال 2016 احمدی و پورشهسواری کمانش حرارتی پنل استوانه‌ای مدرج تابعی را به کمک روش مربعات تفاضلی تحلیل نموده‌اند. در این بررسی شرایط حرارتی مختلفی مطالعه شد. خواص مکانیکی مواد در راستای ضخامت پنل متغیر و به صورت توانی در نظر گرفته شد. نتایج به‌دست‌آمده در مقایسه با نتایج حاصل از حل المان محدود اعتبارسنجی شده و اثر پارامترهای مختلف بر رفتار کمانشی پنل بررسی شده است [17].

معصومی و همکاران در سال 1396 مخزن استوانه‌ای فلز کامپوزیت تحت بار دینامیکی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این پژوهش معادلات براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده و به کمک روش مربعات تفاضلی حل شده است. دو نوع شرط مرزی آزاد و گیردار برای مخزن بررسی و نتایج آن‌ها با یکدیگر مقایسه شده است. برای صحه‌گذاری نتایج حل تئوری، مدل‌سازی و تحلیل عددی مدل مورد نظر در نرم‌افزار المان محدود آباکوس صورت گرفته و نتایج به‌دست‌آمده از این نرم‌افزار با نتایج به‌دست‌آمده از روش مربعات تفاضلی مورد مقایسه قرار گرفته است [18].

چنان‌چه بیان شد پژوهشگران مختلفی از انواع ورژن‌های روش مربعات تفاضلی برای حل مسائل گوناگون پوسته‌های استوانه‌ای استفاده کرده‌اند، اما همگی آن‌ها از تقارن محوری پوسته استفاده کرده و مسأله را به یک مسأله یک بعدی در راستای طول پوسته تقلیل داده‌اند. از طرف دیگر وجود ناپیوستگی هندسی (ترک، گشودگی، تغییر ضخامت و...) در پوسته و یا وجود شرایط مرزی مرکب در انتهای پوسته این تقارن محوری را از بین خواهد برد و نمی‌توان از این روش‌ها بهره برد. از این‌رو تاکنون از روش مربعات تفاضلی برای تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای دارای گشودگی استفاده نشده است. در این پژوهش پوسته در حالت کلی (بدون توجه به تقارن محوری آن) مورد بررسی قرار گرفته است. این امر معادلات و روند حل را به مراتب پیچیده‌تر می‌سازد، اما امکان بررسی پوسته استوانه‌ای دارای انواع ناپیوستگی‌ها از جمله گشودگی مستطیلی را فراهم می‌آورد.

2- معادلات حاکم

برای تحلیل پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی کامل یا پوسته دارای گشودگی ابتدا باید بسته به ناپیوستگی‌های هندسی، بارگذاری، شرایط مرزی و... موجود در مسأله پوسته را به N_E المان تقسیم نمود. این تقسیم‌بندی به گونه‌ای انجام می‌شود که خواص مواد و ضخامت در هر المان ثابت و نیز در هر لبه المان بارگذاری و شرایط مرزی پیوسته باشد. معادلات حاکم برای تحلیل کمانش در هر المان بر پایه تئوری برشی مرتبه اول مطابق رابطه (1) بیان می‌شود [19]. این معادلات هم برای پنل و هم برای پوسته استوانه‌ای قابل استفاده است و تنها تفاوت میان آن‌ها در شرایط مرزی آن‌هاست. دلیل اصلی استفاده از این تئوری سهولت اعمال شرایط مرزی در لبه‌های پوسته است [6-10]. ضمن این‌که با استفاده از این تئوری می‌توان پوسته‌های استوانه‌ای به نسبت ضخیم را نیز بررسی نمود.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}-\frac{C_2}{2R}\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=0 \tag{1-a}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{C_2}{2R}\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+C_1\frac{Q_y}{R}=0 \tag{1-b}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}-\frac{N_y}{R}+\hat{P}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{1-c}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0 \tag{1-d}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=0 \tag{1-e}$$

در روابط (1) محور x در جهت طولی پوسته و محور y در راستای محیطی در نظر گرفته شده است، همچنین در این رابطه N_x، N_y و N_{xy} بیانگر منتجه‌های نیرو، M_x، M_y و M_{xy} منتجه‌های گشتاور، Q_x و Q_y منتجه‌های نیروی برشی عرضی هستند. علاوه‌بر این R شعاع پوسته استوانه‌ای را نشان می‌دهد. ضمن این‌که $\hat{P}$ بار محوری بر واحد طول است که بر لبه پوسته اعمال می‌شود، همچنین C_1 و C_2 ثوابتی هستند که نوع تئوری به کار گرفته شده را نشان می‌دهد. $C_1=C_2=1$ نشان‌دهنده تئوری ساندرز است. به ازای $C_1=1$ و $C_2=0$ روابط فوق به تئوری لاو تبدیل خواهد شد و در نهایت قرار دادن $C_1=C_2=0$ بیانگر تئوری دانل خواهد بود.

از طرف دیگر منتجه‌های تنش، گشتاور و تنش برشی عرضی طبق رابطه (2) به کرنش‌ها و انحناهایی لایه میانی پوسته مرتبط هستند.

$$\begin{bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\\M_x\\M_y\\M_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}&B_{11}&B_{12}&B_{16}\\A_{12}&A_{22}&A_{26}&B_{12}&B_{22}&B_{26}\\A_{16}&A_{26}&A_{66}&B_{16}&B_{26}&B_{66}\\B_{11}&B_{12}&B_{16}&D_{11}&D_{12}&D_{16}\\B_{12}&B_{22}&B_{26}&D_{12}&D_{22}&D_{26}\\B_{16}&B_{26}&B_{66}&D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x^0\\\varepsilon_y^0\\\gamma_{xy}^0\\\kappa_x\\\kappa_y\\\kappa_{xy}\end{bmatrix} \tag{2-a}$$

$$\begin{bmatrix}Q_y\\Q_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_sA_{44}&K_sA_{45}\\K_sA_{44}&K_sA_{45}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{yz}^0\\\gamma_{xz}^0\end{bmatrix} \tag{2-b}$$

در این رابطه K_s ضریب تصحیح تنش برشی است. رایزنر ضریب تصحیح تنش برشی را برابر 5/6 در نظر گرفت [20]. میدلین مقدار $\pi^2/12$ را برای این پارامتر پیشنهاد داد [21]. در سال 1987 ویتریک براساس بررسی‌های بسیار دقیق بر حل معادلات الاستیسیته اظهار داشت که مقدار $5/(6-\nu)$ مقدار مناسب‌تری برای این پارامتر است [22]. مالیک و برت در سال 1998 بررسی جامعی بر اثرات ضریب تصحیح تنش برشی بر نتایج ارتعاشات آزاد ورق ضخیم انجام دادند و به این نتیجه رسیدند که ضریب تصحیح پیشنهاد شده توسط ویتریک از دقت بالاتری برخوردار است [23]. در مطالعه حاضر مقدار $5/(6-\nu)$ برای ضریب تصحیح تنش برشی در نظر گرفته شده است، همچنین ضرایب A_{ij}، B_{ij} و D_{ij} ضرایب ماتریس سفتی هستند که برحسب ابعاد پوسته، لایه‌چینی و خواص مکانیکی هر لایه طبق رابطه (3) محاسبه می‌شود.

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\bar{Q}_{ij}{}^{(k)}\left(z_{(k+1)}-z_{(k)}\right)\ ,\qquad i,j=1,2,3 \tag{3-a}$$

$$B_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\bar{Q}_{ij}{}^{(k)}\left({z_{(k+1)}}^2-{z_{(k)}}^2\right)\ ,i,j=1,2,3 \tag{3-b}$$

$$D_{ij}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\bar{Q}_{ij}{}^{(k)}\left({z_{(k+1)}}^3-{z_{(k)}}^3\right)\ ,i,j=1,2,3 \tag{3-c}$$

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\bar{Q}_{ij}{}^{(k)}\left(z_{(k+1)}-z_{(k)}\right)\ ,\qquad i,j=4,5 \tag{3-d}$$

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

که در این روابط $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ سفتی دوران یافته لایه k-ام است که براساس خواص مکانیکی این لایه و جهت قرارگیری آن تعریف می‌شود [24].

علاوه‌بر این در رابطه (2) $\kappa_{xy},\kappa_y,\kappa_x,\gamma_{xz}^0,\gamma_{yz}^0,\gamma_{xy}^0,\varepsilon_y^0,\varepsilon_x^0$ کرنش‌ها و تغییر انحناهای لایه میانی هستند که طبق رابطه (4) به جابه‌جایی‌ها و دوران‌های لایه میانی مرتبط هستند [19].

$$\varepsilon_x^0=\frac{\partial u}{\partial x}\ ;\quad \varepsilon_y^0=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R} \tag{4-a}$$

$$\gamma_{xz}^0=\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi_x\ ;\quad \gamma_{yz}^0=\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi_y-C_1\frac{v}{R}\ ;$$

$$\gamma_{yz}^0=\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi_y-C_1\frac{v}{R} \tag{4-b}$$

$$\kappa_x=\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\ ;\quad \kappa_y=\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\ ;$$

$$\kappa_{xy}=\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}+\frac{C_2}{2R}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4-c}$$

در آن v,u و w به ترتیب جابه‌جایی در راستای محوری، محیطی و شعاعی لایه میانی استوانه و φ_x و φ_y چرخش‌ها حول محورهای y و x هستند. لازم به ذکر است که در این روابط نیز C_1 و C_2 ثوابتی هستند که با تغییر آن‌ها روابط بالا به یکی از تئوری‌های ساندرز، لاو و یا دانل تبدیل خواهد شد.

با جای‌گذاری روابط (4,2) در روابط (1)، معادلات حاکمه برحسب میدان جابه‌جایی و چرخش‌ها مطابق روابط (5) تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A_{11})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2A_{16}-B_{16}\frac{C_2}{R}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A_{66}-B_{66}\frac{C_2}{R}+D_{66}\left(\frac{C_2}{2R}\right)^2\right)\right\}u+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_{16}+B_{16}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(A_{12}+A_{66}-D_{66}\left(\frac{C_2}{2R}\right)^2\right)\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A_{26}-B_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right\}v+\\
&\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_{12}}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A_{26}}{R}-B_{26}\frac{C_2}{2R^2}\right)\right\}w+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_{11})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2B_{16}-D_{16}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B_{66}-D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)\right\}\varphi_x+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_{16})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(B_{12}+B_{66}-D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B_{26}-D_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right\}\varphi_y=0
\end{aligned} \tag{5-a}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_{16}+B_{16}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(A_{66}+A_{12}-D_{66}\left(\frac{C_2}{2R}\right)^2\right)\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A_{26}-B_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right\}u+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_{66}-B_{26}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2A_{26}+B_{66}\frac{C_2}{R}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(A_{22})-K_sA_{44}\left(\frac{C_1}{R}\right)^2\right\}v+\\
&\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_{26}}{R}+B_{26}\frac{C_2}{2R^2}+K_sA_{45}\frac{C_1}{R}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A_{22}}{R}+K_sA_{44}\frac{C_1}{R}\right)\right\}w+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{16}+D_{16}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(B_{66}+B_{12}+D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B_{26})+K_sA_{45}\frac{C_1}{R}\right\}\varphi_x+
\end{aligned} \tag{5-b}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{66}+D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2B_{26}+D_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B_{22})+K_sA_{44}\frac{C_1}{R}\right\}\varphi_y=0\\
&\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{A_{12}}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(B_{26}\frac{C_2}{2R^2}-\frac{A_{26}}{R}\right)\right\}u+\\
&\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(-K_sA_{45}\frac{C_1}{R}-\frac{A_{26}}{R}-B_{26}\frac{C_2}{2R^2}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(-K_sA_{44}\frac{C_1}{R}-\frac{A_{22}}{R}\right)\right\}\mathrm{v}+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(K_sA_{55}+\hat{P})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(2K_sA_{45})\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(K_sA_{44})-\frac{A_{22}}{R^2}\right\}w+\\
&\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_sA_{55}-\frac{B_{12}}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_sA_{45}-\frac{B_{26}}{R}\right)\right\}\varphi_x+\\
&\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_sA_{45}-\frac{B_{26}}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_sA_{44}-\frac{B_{22}}{R}\right)\right\}\varphi_y\\
&=0
\end{aligned} \tag{5-c}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_{11})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2B_{16}-D_{16}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B_{66}-D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)\right\}u+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{16}+D_{16}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(B_{12}+B_{66}+D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B_{26})+K_sA_{45}\frac{C_1}{R}\right\}v+\\
&\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_{12}}{R}-K_sA_{55}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B_{26}}{R}-K_sA_{45}\right)\right\}w+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_{11})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(2D_{16})\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_{66})-K_sA_{55}\right\}\varphi_x+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_{16})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(D_{12}+D_{66})\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_{26})-K_sA_{45}\right\}\varphi_y=0
\end{aligned} \tag{5-d}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_{16})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(B_{12}+B_{66}-D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(B_{26}-D_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right\}u+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{66}+D_{66}\frac{C_2}{2R}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2B_{26}+D_{26}\frac{C_2}{2R}\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B_{22})+K_sA_{44}\frac{C_1}{R}\right\}v+\\
&\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_{26}}{R}-K_sA_{45}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B_{22}}{R}-K_sA_{44}\right)\right\}w+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_{16})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(D_{12}+D_{66})\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_{26})-K_sA_{45}\right\}\varphi_x+\\
&\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_{66})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(2D_{26})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_{22})\right.\\
&\quad\left.-K_sA_{44}\right\}\varphi_y=0
\end{aligned} \tag{5-e}$$

برای حل این معادلات و تعیین بار بحرانی پوسته از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته[1] استفاده شده است. در ادامه مبانی نظری این روش توضیح داده شده و سپس نحوه اعمال شرایط مرزی و چگونگی تحلیل پوسته استوانه‌ای دارای ناپیوستگی بیان شده است.

[1] Generalized differential quadrature (GDQ)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

3- روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته

روش مربعات تفاضلی یکی از روش‌های قدرتمند در حل معادلات دیفرانسیل جزئی است که با وجود استفاده از تعداد گره کم از دقت بالایی برخوردار است. در این روش مشتق جزئی یک تابع نسبت به یک جهت مختصاتی به صورت مجموع وزنی مقادیر آن تابع در برخی نقاط مشخص به صورت رابطه (6) تقریب زده می‌شود.

$$f_x(x_i) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(1)} f(x_j) \ , \qquad i = 1, 2, \dots, N \tag{6}$$

در رابطه بالا $f_x(x_i, t)$ مشتق تابع f نسبت به جهت مختصاتی x در نقطه x_i است و $c_{ij}^{(1)}$ ضرایب وزنی برای تقریب مشتق اول هستند. نکته اساسی در این روش نحوه تعیین ضرایب وزنی مناسب است. این ضرایب باید به نحوی تعیین شوند که بتوانند هر مرتبه‌ای از مشتق را به خوبی تخمین بزنند. بلمن و همکاران در سال 1972 براساس دو تابع تست مختلف دو شیوه برای تعیین این ضرایب پیشنهاد کردند.

در روش نخست محل گره‌ها اختیاری بود و ضرایب وزنی با حل یک دستگاه معادلات جبری تعیین می‌شد. با افزایش تعداد گره‌ها حل این دستگاه معادلات با مشکل مواجه می‌شد. عمده پژوهشگرانی که در دهه 1970 و 1980 از روش مربعات تفاضلی استفاده کرده‌اند از همین شیوه برای تعیین ضرایب وزنی استفاده نموده‌اند که در این پژوهش‌ها تعداد گره‌ها کمتر از 13 در نظر گرفته شده است. به عنوان نمونه می‌توان به مراجع [25-28] اشاره نمود. در روش دوم با استفاده از توابع لژاندر این مشکل برطرف شد و عبارتی صریح برای ضرایب وزنی تقریب مشتق ارائه شد. در این روش لازم بود که گره‌ها در نقاط مشخصی در نظر گرفته شوند. در واقع در این روش مختصات گره‌ها ثابت هستند. همین عدم انعطاف در انتخاب گره‌ها محدودیت‌هایی برای این روش ایجاد کرده و سبب شد که پژوهشگران رغبت کمتری به استفاده از آن نشان دهند.

در سال 1989 کان و چانگ برای رفع این محدودیت با استفاده از چند جمله‌ای لاگرانژ رابطه صریح دیگری برای ضرایب وزنی ارائه کردند که همواره قابل استفاده بود و هیچ محدودیتی برای نحوه توزیع گره‌ها نداشت [30,29]. استفاده از این روش برای مشتقات مراتب بالاتر با دشوارهایی همراه بود.

شو و همکاران در سال‌های 1991 و 1992 به کمک تقریب چند جمله‌ای[1] و آنالیز خطی فضای برداری[2] روش مربعات تفاضلی را گسترش داده و روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته را ارائه کردند [31-33]. این روش تمامی روش‌های پیش از جمله روش ارائه شده توسط کان و چانگ را به صورت رابطه (7) شامل می‌شود.

$$c_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) M^{(1)}(x_j)} \ , & i \neq j \\ -\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} c_{ij}^{(1)} \ , & i = j \end{cases} \tag{7}$$

که در این رابطه (8) داریم.

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k\neq i}^{N} (x_i - x_k) \tag{8}$$

از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته می‌توان برای تقریب مشتق مراتب بالاتر نیز استفاده نمود. برای نمونه مشتق مرتبه دوم در جهت مختصاتی x به صورت رابطه (9) نوشته می‌شود.

$$f_{xx}(x_i) = \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(2)} f(x_j) \ , \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{9}$$

رابطه کلی برای ضرایب وزنی تقریب مشتقات مراتب بالاتر مطابق رابطه (10) تعیین می‌شود.

$$c_{ij}^{(m)} = \begin{cases} m\left(c_{ij}^{(1)} c_{ii}^{(m-1)} - \dfrac{c_{ii}^{(m-1)}}{x_i - x_j}\right) \ , & i \neq j \\ -\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} c_{ij}^{(m)} \ , & i = j \end{cases}$$
$$i, j = 1, 2, \dots, N; \quad m = 2, 3, \dots, N-1 \tag{10}$$

علاوه‌بر این می‌توان از این روش می‌توان برای توابع چند متغیره نیز به سادگی استفاده کرد. برای نمونه چنان‌چه بیان شد مشتق مرتبه اول و دوم تابع تک متغیره $f(x)$ در راستای محور x به ترتیب مطابق روابط (9,6) بیان می‌شود. مشتق تابع دو متغیره $f(x, y)$ در جهت x و y نیز به شیوه مشابهی به صورت روابط (11) تعریف می‌شود.

$$f_x(x_i, y_j) = \sum_{k_1=1}^{N} c_{i,k_1}^{(1)} f(x_{k_1}, x_j) \ , \ i = 1, 2, \dots, N \tag{11-a}$$

$$f_{xx}(x_i, y_j) = \sum_{k_1=1}^{N} c_{i,k_1}^{(2)} f(x_{k_1}, x_j) \ , \ i = 1, 2, \dots, N \tag{11-b}$$

$$f_y(x_i, y_j) = \sum_{k_2=1}^{M} \overline{c_{j,k_2}^{(1)}} f(x_i, x_{k_2}) \ , \ j = 1, 2, \dots, M \tag{11-c}$$

$$f_{yy}(x_i, y_j) = \sum_{k_2=1}^{M} \overline{c_{j,k_2}^{(2)}} f(x_i, x_{k_2}) \ , \ j = 1, 2, \dots, M \tag{11-d}$$

$$f_{xy}(x_i, y_j) = \sum_{k_1=1}^{N} \sum_{k_2=1}^{M} c_{i,k_1}^{(1)} \overline{c_{j,k_2}^{(1)}} f(x_{k_1}, x_{k_2}) \ ,$$
$$i = 1, 2, \dots, N, \ j = 1, 2, \dots, M \tag{11-e}$$

هر چند انتخاب مختصات گره‌ها در این روش هیچ محدودیتی ندارد و کاملاً اختیاری است، اما این موضوع به معنی عدم تأثیرگذاری نحوه توزیع گره‌ها بر پایداری نتایج و روند همگرایی آن‌ها نیست. شو در سال 2000 در کتابی که در زمینه نحوه عملکرد و کاربردهای روش مربعات تفاضلی نگاشته است توزیع‌های مختلف گره‌ها را بررسی و با یکدیگر مقایسه کرده است [34]. توزیع چبیشف- گووس- لوباتو[3] که به اختصار توزیع چبیشف نامیده می‌شود یکی از انواع توزیع‌های پرکاربرد است. بررسی‌های شو نشان داد که این توزیع گره نتایج پایدارتری نسبت به توزیع یکنواخت خواهد داشت؛ از این‌رو در این مطالعه از همین شیوه توزیع گره‌ها استفاده شده است. رابطه (12) نحوه توزیع چبیشف N گره در بازه [a,b] را نشان می‌دهد.

$$x_i = a + \frac{1}{2}(b - a)\left(1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)\right) \ ,$$
$$i = 1, 2, \dots, N \tag{12}$$

برای توزیع گره‌ها در راستای y نیز رابطه مشابهی وجود دارد. برای حل معادلات (6) لازم است که به کمک روابط (11) گسسته‌سازی معادلات در هر المان انجام شود. بدین منظور مطابق توزیع چبیشف، هر المان به $N \times M$ گره در راستای x و y تقسیم شده است. با استفاده از روابط (11) می‌توان دستگاه معادلات دیفرانسیلی را به دستگاه معادلات جبری تبدیل نمود. با نوشتن معادلات به فرم ماتریسی و مونتاژ معادلات المان‌های مختلف و جداسازی ترم‌هایی که در آن‌ها پارامتر $\hat{P}$ (بار بحرانی بر واحد طول) وجود دارد می‌توان آن‌ها را به فرم یک مسأله مقدار ویژه نوشت. پس از اعمال شرایط مرزی مناسب می‌توان با حل این مسأله بار بحرانی را تعیین نمود.

[1] polynomial approximation
[2] linear vector space analysis
[3] Chebyshev-Gauss-Lobatto

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

4- شرایط مرزی

همان‌گونه که بیان شد روابط بالا برای تحلیل کمانش پنل و نیز پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی قابل استفاده است و صرفاً با اعمال شرایط مرزی این دو مسأله از یکدیگر متمایز خواهند شد. همچنین اثر وجود گشودگی با اعمال شرایط مرزی آزاد در لبه‌های گشودگی دیده می‌شود. از این‌رو صحت اعمال این روابط از اهمیت بالایی برخوردار است. در پژوهش حاضر انواع مختلف شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد بررسی شده است.

ردی در کتاب خود چهار حالت مختلف را به عنوان شرایط مرزی گیردار معرفی کرده است [24]. پرکاربردترین و مرسوم‌ترین آن‌ها حالتی است که همه درجات آزادی بسته شده باشند که از آن به عنوان C4 یاد شده است. در پژوهش حاضر نیز همین حالت به عنوان تکیه‌گاه گیردار به کار گرفته شده و با نماد C نشان داده شده است که به صورت رابطه (13) بیان می‌شود.

$$\text{C:} \quad u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = 0 \tag{13}$$

در همین کتاب چهار حالت مختلف نیز برای تکیه‌گاه ساده بیان شده است که در شرایط مختلف ممکن است هر یک از آن‌ها به کار گرفته شود. دو حالت کاربردی‌تر مطابق رابطه (14) بیان می‌شود [24]. این روابط برای لبه $y = y_i$ است و روابط مشابهی نیز برای لبه $x = x_i$ وجود دارد.

$$\text{S3:} \quad w = \varphi_y = v = N_x = M_x = 0 \tag{14-a}$$

$$\text{S4:} \quad w = \varphi_y = u = v = M_x = 0 \tag{14-b}$$

برای اعمال شرایط مرزی لبه آزاد در لبه $y = y_i$ از رابطه (15) استفاده می‌شود [24].

$$\text{F:} \quad N_x = N_{xy} = M_x = M_{xy} = Q_x - \hat{P}\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{15}$$

همچنین چون در راستای y نیرویی نداریم، شرط مرزی آزاد در لبه $x = x_i$ به صورت رابطه (16) خواهد بود.

$$\text{F:} \quad N_y = N_{xy} = M_y = M_{xy} = Q_y = 0 \tag{16}$$

مشابه معادلات حاکمه برای اعمال شرایط مرزی یاد شده نیز لازم است تا گسسته‌سازی این معادلات به کمک روابط (11) انجام شود.

چنان‌چه پیش از این بیان شد بسته به نوع بارگذاری، شرایط مرزی و هندسه، پوسته مورد بررسی به المان‌های مختلفی تقسیم می‌شود. برای دست‌یابی به نتایج صحیح لازم است که شرایط سازگاری مناسب در مرز مشترک دو المان اعمال گردد. روند مشابهی در مطالعات لیو و لیو که بر ورق‌ها صورت گرفته بود، به کار گرفته شده است [6-10]. این شرایط را می‌توان به دو دسته معادله تقسیم کرد. هر یک از این دسته معادلات جایگزین معادلات تعادل در نقاط مرزی یکی از المان‌ها می‌شود.

1- سازگاری جابه‌جایی‌ها و چرخش‌ها: برای حفظ پیوستگی پوسته لازم است که مقادیر جابه‌جایی‌ها و چرخش‌های گره‌های مرزی در مرز مشترک دو المان یکسان باشند؛ بنابراین در مرز مشترک دو المان رابطه (17) را خواهیم داشت.

$$\{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\}^{(El\,1)} = \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\}^{(El\,2)} \tag{17}$$

2- سازگاری تنش‌ها و گشتاورها: برای برقراری تعادل لازم است که برخی از منتجه‌های تنش و گشتاور در مرز مشترک دو المان با یکدیگر برابر باشند. برای دو المانی که در جهت x به یکدیگر متصل شده‌اند (شکل 1-a) شرایط سازگاری تنش‌ها و گشتاورها مطابق رابطه (18) خواهد بود.

$$\{N_x, N_{xy}, M_x, M_{xy}, Q_x\}^{(El\,1)} = \{N_x, N_{xy}, M_x, M_{xy}, Q_x\}^{(El\,2)} \tag{18}$$

اگر دو المان در جهت y به یکدیگر متصل باشند (شکل 1-b) شرایط سازگاری تنش‌ها و گشتاورها به صورت رابطه (19) خواهد بود.

$$\{N_y, N_{xy}, M_y, M_{xy}, Q_y\}^{(El\,1)} = \{N_y, N_{xy}, M_y, M_{xy}, Q_y\}^{(El\,2)} \tag{19}$$

برای تحلیل پوسته‌های کامل (بدون ناپیوستگی) نیازی به تقسیم پوسته به چند المان نیست و می‌توان مسأله را با یک المان به سادگی تحلیل نمود. از آن‌جا که پوسته در واقع پنلی است که ابتدا و انتهای آن به یکدیگر متصل شده باشد، لازم است تا شرایط سازگاری برای گره‌های ابتدایی و انتهایی پوسته در راستای محیطی اعمال شود. همان‌گونه که در شکل 2 نشان داده شده است این شرایط در گره‌های $(i, 1)$ و (i, N) اعمال می‌شود.

برای تحلیل پوسته دارای گشودگی، پوسته مطابق شکل 3 به پنج المان تقسیم شده است. پس از نوشتن معادلات حاکم برای هر المان و مونتاژ آن‌ها به شیوه مناسب باید شرایط سازگاری میان المان‌های که به یکدیگر متصل شده‌اند را اعمال کرد. در نهایت با اعمال شرایط مرزی در دو انتهای پوسته و لبه‌های گشودگی معادلات تکمیل شده و می‌توان با استفاده از حل مقدار ویژه بار بحرانی پوسته را تعیین نمود. تمامی مراحل یاد شده در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده است.

5- اعتبارسنجی

صحت‌سنجی کد نوشته شده برای تحلیل کمانش پوسته استوانه‌ای بدون گشودگی در قالب چند مسأله مختلف بررسی شده است. در این بررسی‌ها ابعاد، خواص مواد، لایه‌چینی و شرایط مرزی مختلف مطالعه شده است. با

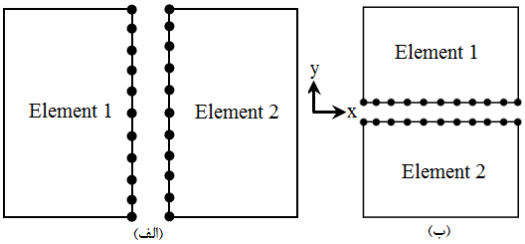

Fig. 1 Element connection a- x direction b- y direction

شکل 1 اتصال دو المان الف- در جهت x، ب- در جهت y

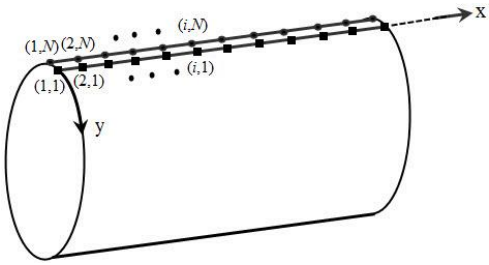

Fig. 2 Common nodes at both sides of one element of cylindrical shell

شکل 2 گره‌های مشترک در ابتدا و انتهای تک المان پوسته استوانه‌ای

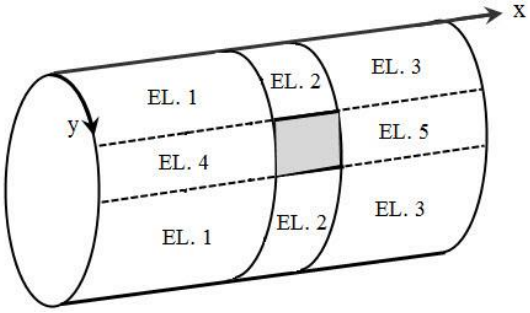

Fig. 3 Elements used for perforated cylindrical shell

شکل 3 المان‌بندی پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

انجام این بررسی می‌توان اظهار داشت که روش ارائه شده می‌تواند کمانش پوسته استوانه‌ای با هر ابعاد، خواص مواد و شرایط مرزی دلخواهی را تحلیل نماید، همچنین نتایج کد نوشته شده برای تحلیل کمانش پوسته دارای گشودگی مستطیلی نیز با نتایج ارائه شده در دو مرجع مقایسه شده است.

ردی در انتهای فصل هشتم از کتاب خود کمانش پوسته استوانه‌ای ایزوتروپ و کامپوزیتی با تکیه‌گاه‌های مختلف را بررسی کرده است [24]. در این بررسی ضریب پواسون برای ماده ایزوتروپ 0.25 در نظر گرفته شده است. از آن‌جا که نتایج به صورت بی‌بعد شده اعلام شده است، مقدار مدول الاستیسیته اختیاری است. برای تولید نتایج مقدار 70 گیگاپاسکال برای آن انتخاب شده است. خواص کامپوزیت نیز به شکل نسبی به صورت $E_1/E_2 = 10$، $G_{12} = G_{13} = 0.6\,E_2$، $G_{23} = 0.5\,E_2$ و $\vartheta_{12} = 0.25$ بیان شده است. برای حل مسأله $E_2 = 10\ \mathrm{GPa}$ فرض شده است. نتایج براساس دو تئوری کلاسیک و تئوری برشی مرتبه اول ردی ارائه شده است. ضمن این‌که در تئوری برشی مرتبه اول، ضریب تصحیح برش 5/6 فرض شده است.

در این مرجع دو هندسه مختلف برای پوسته بررسی شده است. در مسأله نخست شعاع، طول و ضخامت پوسته به ترتیب 1، 2 و 0.025 متر در نظر گرفته شده است. نتایج برای سه نوع پوسته استوانه‌ای ایزوتروپ، کامپوزیتی با لایه‌چینی [0,90] و کامپوزیتی با لایه‌چینی [90,0,90] ارائه شده است. بار بحرانی به‌دست‌آمده برای پوسته ایزوتروپ و کامپوزیتی به ترتیب طبق روابط (21,20) بی‌بعد شده است.

$$K = \frac{\hat{P}L^2}{10Et^3} \tag{20}$$

$$K = \frac{\hat{P}L^2}{100E_2t^3} \tag{21}$$

در این روابط $\hat{P}$ بار بر واحد طولی است که به لبه پوسته اعمال می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده از کد نوشته شده با نتایج ارائه شده در این کتاب مقایسه شده و در جداول 1 و 2 گزارش شده است.

برای تولید نتایج بالا از 15 گره در راستای طولی و 40 گره در راستای محیطی استوانه استفاده شده است. این تعداد گره براساس آنالیز تعداد گره‌ها تعیین شده است. همچنین بررسی‌ها نشان داد که میزان حساسیت نتایج به تعداد گره‌های محیطی بیشتر از تعداد گره‌های طولی است. بررسی جدول‌های 1 و 2 دقت بالای نتایج روش مربعات تفاضلی با وجود حجم محاسباتی پایین آن را نشان می‌دهد.

دومین مسأله‌ای که از کتاب ردی برای اعتبارسنجی مورد استفاده قرار گرفته پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با لایه‌چینی‌های مختلف است. چهار آرایش [0,90]، [90,0]، [0,90,0,90] و [90,0,90,0] برای پوسته‌ای به شعاع و طول 1 متر و ضخامت 0.0125 متر در نظر گرفته شده است. دو نوع تکیه‌گاه مختلف مورد بررسی قرار گرفته و نتایج براساس تئوری برشی مرتبه اول ردی اعلام شده است. خواص کامپوزیت مشابه مسأله پیشین در نظر گرفته شده و بار بحرانی به‌دست‌آمده نیز مطابق رابطه (21) بی‌بعد شده است. برای این مسأله نیز با توجه به آنالیز همگرایی در راستای طولی و محیطی به ترتیب از 15 و 40 گره استفاده شده است که نشان‌دهنده حجم پایین محاسبات روش به کار گرفته شده در مقایسه با سایر روش‌های عددی است. نتایج به‌دست‌آمده از کد نوشته شده برای دو تکیه‌گاه مختلف در مقایسه با نتایج این مرجع در جدول 3 و 4 گزارش شده است.

در گام بعدی کمانش پوسته با لایه‌چینی غیرمتعامد بررسی شده است. در این حالت ترم‌های کوپلینگ داخل صفحه‌ای و خارج صفحه‌ای نیز ظاهر خواهند شد. بدین منظور از مقاله‌ای که رحیمی و همکارانش در سال 2013

جدول 1 بار بحرانی بی‌بعد شده برای تکیه‌گاه S3-S3

Table 1 Normalized buckling load for S3-S3

جنس پوسته	ایزوتروپ	لایه‌چینی [0,90]	لایه‌چینی [90,0,90]
مرجع [24] – CST	9.5548	1.8663	2.0505
مرجع [24] – FST	9.4428	1.8479	2.0372
روش حاضر - تئوری دانل	9.4488	1.8479	1.9946
روش حاضر - تئوری لاو	9.0085	1.8115	1.9739
روش حاضر - تئوری ساندرز	8.9645	1.8063	1.9708

جدول 2 بار بحرانی بی‌بعد شده برای تکیه‌گاه S4-S4

Table 2 Normalized buckling load for S4-S4

جنس پوسته	ایزوتروپ	لایه‌چینی [0,90]	لایه‌چینی [90,0,90]
مرجع [24]– CST	9.5492	1.9044	2.1095
مرجع [24]– FST	9.4440	1.8849	2.0959
روش حاضر- تئوری دانل	9.4504	1.8850	1.9953
روش حاضر- تئوری لاو	9.4322	1.8473	1.9747
روش حاضر- تئوری ساندرز	9.4101	1.8421	1.9708

جدول 3 بار بحرانی بی‌بعد شده برای تکیه‌گاه C-C

Table 3 Normalized buckling load for C-C

لایه‌چینی	[0,90]	[90,0]	[0,90,0,90]	[90,0,90,0]
مرجع [24]– FST	9.8950	9.8394	12.5659	12.5078
روش حاضر- تئوری دانل	9.8949	9.8393	12.5659	12.5078
روش حاضر- تئوری لاو	9.7908	9.8037	12.4587	12.4404
روش حاضر- تئوری ساندرز	9.7779	9.7975	12.4483	12.4325

جدول 4 بار بحرانی بی‌بعد شده برای تکیه‌گاه C-F

Table 4 Normalized buckling load for C-F

لایه‌چینی	[0,90]	[90,0]	[0,90,0,90]	[90,0,90,0]
مرجع [24]– FST	5.2273	5.2542	6.2835	6.2953
روش حاضر- تئوری دانل	5.2036	5.2291	6.2682	6.2797
روش حاضر- تئوری لاو	5.1500	5.2072	6.2095	6.2368
روش حاضر- تئوری ساندرز	5.1378	5.2008	6.1955	6.2286

منتشر نموده‌اند [35] استفاده شده است. در این مقاله قطر، شعاع و ضخامت پوسته به ترتیب 280، 140 و 0.5 میلی‌متر در نظر گرفته شده است. پوسته از چهار لایه با ضخامت یکسان و با لایه‌چینی $[\pm 30]_2$ تشکیل و شرایط مرزی تکیه‌گاه‌ها نیز به صورت ساده فرض شده است، همچنین خواص مکانیکی مطابق جدول 5 در نظر گرفته شده است. جدول 6 نتایج حاصل از روش مربعات تفاضلی را در مقایسه با نتایج حل المان محدود آباکوس و نیز نتایج مرجع [35] نشان می‌دهد.

بررسی نتایج مسائل بالا نشان می‌دهد که روش ارائه شده با دقت بسیار خوبی می‌تواند کمانش پوسته ایزوتروپ و کامپوزیتی را تحلیل نماید. در قسمت بعد صحت نتایج این روش برای کمانش پوسته استوانه‌ای دارای گشودگی مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور از مقاله‌ای که هان و همکاران در سال 2006 منتشر کرده‌اند [36] استفاده شده است. در این مقاله کمانش پوسته ایزوتروپ دارای گشودگی مربعی بررسی شده است. شعاع، طول و ضخامت پوسته به ترتیب 20، 400 و 0.0889 میلی‌متر در نظر گرفته شده است. سه اندازه مختلف 7.5، 10.6 و 15 میلی‌متری برای لبه گشودگی انتخاب شده است. پوسته از جنس آلومینیوم با مدول الاستیسیته 68.948 گیگاپاسکال و ضریب پواسون 0.33 در نظر گرفته شده است، همچنین تکیه‌گاه‌ها به صورت تکیه‌گاه ساده انتخاب شده است. بار بحرانی به‌دست‌آمده

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

نسبت به بار بحرانی پیش‌بینی شده توسط تئوری کلاسیک کمانش خطی پوسته‌ها که از رابطه (22) تعیین می‌شود بی‌بعد شده است.

$$\hat{N} = \frac{Et^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 16.6639\ \mathrm{N/mm} \tag{22}$$

جدول 7 نتایج به‌دست‌آمده از روش مربعات تفاضلی را در مقایسه با نتایج این مرجع نشان می‌دهد. برای تولید این نتایج از تئوری لاو استفاده شده است. نتایج دو تئوری دیگر نیز نزدیک به همین نتایج بود؛ از همین رو از بیان آن‌ها صرف‌نظر شده است.

در گام بعد برای بررسی کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی از نتایج مقاله تفرشی که در سال 2002 منتشر شده [37] استفاده شده است، همچنین در این مقاله به نتایج مرجع [38] نیز اشاره شده که برای صحه‌گذاری مورد استفاده قرار گرفته است. طول و قطر پوسته یکسان و برابر 406.4 میلی‌متر انتخاب شده است. پوسته از هشت لایه با ضخامت 0.127 میلی‌متر و با آرایش $[\pm 45,0,90]_S$ تشکیل شده که خواص مکانیکی آن‌ها در جدول 8 بیان شده است. تکیه‌گاه‌ها به صورت کاملاً گیردار در نظر گرفته شده است و فقط لبه بالایی اجازه حرکت محوری دارد. بار بحرانی به‌دست‌آمده برای پوسته دارای گشودگی نسبت به بار بحرانی پوسته بدون گشودگی بی‌بعد شده است. کد نوشته شده بار بحرانی بر واحد طول لبه برای پوسته بدون گشودگی را 1.6460×10^5 kN/m تخمین می‌زند که با مقدار به‌دست‌آمده از حل آباکوس (1.6032×10^5 kN/m) هم‌خوانی بسیار خوبی دارد. جدول 9 نتایج به‌دست‌آمده را در مقایسه با نتایج ارائه شده در مراجع [38,37] و نیز نتایج آباکوس نشان می‌دهد. مقایسه نتایج کارایی روش مربعات تفاضلی در تحلیل کمانش پوسته‌های کامپوزیتی دارای گشودگی را با وجود هزینه محاسباتی پایین آن نشان می‌دهد.

6- ارائه نتایج و بحث در نتایج

پس از اطمینان از قابلیت روش مربعات تفاضلی برای تحلیل کمانش پنل‌ها و پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی دارای گشودگی مستطیلی، در این بخش با استفاده از این روش تأثیر پارامترهای مختلف بر بار بحرانی پوسته‌های استوانه‌ای با و بدون گشودگی بررسی شده است.

برای بررسی اثر پارامترهای مختلف یک مسأله پایه در نظر گرفته شده و با تغییر یک پارامتر و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها تأثیر آن پارامتر مطالعه شده است. بدین منظور طول، شعاع و ضخامت پوسته به ترتیب 200، 80 و 2 میلی‌متر انتخاب شده است. پوسته از هشت لایه با ضخامت یکسان و با آرایش $[\pm 45,0,90]_S$ تشکیل شده است، همچنین پوسته از جنس گرافیت اپکسی در نظر گرفته شده است که خواص آن در جدول 10 آورده شده است. دو لبه پوسته گیردار فرض و بار بحرانی براساس تئوری دانل محاسبه شده است.

جدول 5 خواص مکانیکی به کار رفته در مرجع [35]

Table 5 Mechanical propertiesused in Ref [35]

E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	ϑ_{12}
36	5.8	3.2	0.3

جدول 6 بار بحرانی پوسته استوانه‌ای با آرایش $[\pm 30]_2$

Table 6 Buckling laod of cylindrical shell with $[\pm 30]_2$ lay-up

بار بحرانی (kN)	مرجع [35]	حل آباکوس	روش تحلیلی حاضر
	10.768	10.915	10.980

جدول 7 بار بحرانی بی‌بعد شده برای تکیه‌گاه S3-S4

Table 7 Normalized buckling load for S3-S4

اندازه گشودگی (mm)	بدون گشودگی	7.5	10.6	15
مرجع [36]	0.968	0.234	0.215	0.195
روش حاضر- تئوری لاو	0.972	0.257	0.229	0.212

جدول 8 خواص مکانیکی به کار رفته در مرجع [37]

Table 8 Mechanical propertiesused in Ref [37]

E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	ϑ_{12}
148.07	11.08	6.40	0.295

جدول 9 بار بحرانی بی‌بعد برای ابعاد مختلف گشودگی

Table 9 Normalized buckling load for different cutout size

ابعاد گشودگی (mm□mm)	روش حاضر	آباکوس	مرجع [37]	مرجع [38]
12.7□12.7	0.80	0.88	0.80	0.83
25.4□25.4	0.62	0.57	0.58	0.56

جدول 10 خواص مکانیکی به کار رفته در مرجع [39]

Table 10 Mechanical propertiesused in Ref [39]

شماره	نام ماده	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	ϑ_{12}
M1	گرافیت اپکسی	206.8	5.17	2.585	.25
M2	کولار اپکسی	85.8	5.5	3.08	0.35
M3	بورون اپکسی	206.75	18.61	3.9081	0.21
M4	پلیمر تقویت‌شده با الیاف کربن	123.37	8.7	5.6898	0.31
M5	آلومینیوم	70	70	26.92	0.30

6-1- اثر اندازه گشودگی و خواص مواد

برای بررسی اثر اندازه گشودگی یک گشودگی مربعی ($c_x = c_y = c$) در وسط پوسته و اندازه ضلع گشودگی از 5 تا 50 میلی‌متر متغیر در نظر گرفته شده است. تأثیر افزایش اندازه گشودگی بر بار کمانش برای پنج جنس مختلف پوسته بررسی شده است. جدول 10 خواص مکانیکی این مواد را طبق مرجع [39] نشان می‌دهد. نتایج به‌دست‌آمده به صورت بار بحرانی بر واحد طول لبه پوسته گزارش شده است. شکل 4 تغییرات بار بحرانی به ازای ابعاد مختلف گشودگی را نشان می‌دهد. بررسی این نتایج نشان می‌دهد که مطابق انتظار وجود گشودگی سبب کاهش بار بحرانی پوسته می‌شود، همچنین برخلاف ورق‌ها که افزایش اندازه گشودگی از جایی به بعد موجب افزایش بار کمانش می‌شد [40]، در پوسته‌ها افزایش اندازه گشودگی مرتباً بار بحرانی را کاهش می‌دهد. البته این روند کاهشی با شیب ثابتی دنبال نمی‌شود. تغییرات بار بحرانی را می‌توان به سه قسمت تقسیم کرد. گشودگی‌های بسیار کوچک (در این مسأله $c \le 5$) تأثیر چندانی بر بار کمانش پوسته ندارد، اما با افزایش اندازه گشودگی بار بحرانی با افت ناگهانی شدیدی روبه‌رو می‌شود. در مسأله حاضر این افت شدید برای گشودگی‌هایی به ضلع 5 تا 20 میلی‌متر مشاهده می‌شود. وجود گشودگی‌ای به ضلع 20 میلی‌متر موجب کاهش حدود 40 درصدی بار بحرانی می‌شوند. برای گشودگی‌های بزرگ‌تر از 20 میلی‌متر با افزایش اندازه گشودگی، بار بحرانی با شیبی تقریباً ثابت کاهش می‌یابد. این روند برای پوسته‌هایی با جنس مختلف صادق بود و همگی این پوسته‌ها رفتار مشابهی دارند. برای مشاهده بهتر این موضوع هر یک از نمودارهای شکل 4 نسبت به بار بحرانی پوسته بدون گشودگی خود بی‌بعد شده و دوباره در شکل 5 ترسیم شده‌اند. این شکل به خوبی نشان می‌دهد که رفتار همه پوسته‌ها در برابر تغییر اندازه گشودگی برای لایه‌چینی یکسان تقریباً مشابه و مستقل از

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

جنس است.

6-2- اثر تئوری‌های مختلف

همان‌گونه که در جداول 1-4 مشاهده شد در محاسبه بار بحرانی پوسته بدون گشودگی تفاوت قابل ملاحظه‌ای میان نتایج سه تئوری دانل، لاو و ساندرز وجود ندارد، اما به طور کلی تئوری دانل بار بحرانی را بیشتر تخمین می‌زند و تئوری ساندرز محافظه‌کارانه‌تر است. این موضوع به دلیل فرضیات انجام شده در تئوری ساندرز و وجود ترم‌های بیشتر در روابط کرنش- جابه‌جایی این تئوری است. با در نظر گرفتن این ترم‌ها سفتی محاسبه شده برای سازه کمتر شده و طبیعتاً بار بحرانی کاهش خواهد یافت. مشابه این مطلب را می‌توان در مقایسه نتایج تئوری کلاسیک و تئوری برشی مرتبه اول مشاهده کرد. بررسی انجام شده برای پوسته‌هایی با ابعاد مختلف گشودگی و ضخامت‌های متفاوت نیز نتایج مشابهی درپی داشت.

6-3- اثر جهت گشودگی

در این قسمت جهت قرارگیری (طولی یا محیطی) گشودگی مستطیلی بررسی شده است. بدین منظور پنج حالت مختلف برای ابعاد گشودگی در نظر گرفته شد. در همه این موارد مساحت گشودگی‌ها برابر در نظر گرفته شده است. در دو مورد ضلع بزرگ گشودگی مستطیلی در راستای طولی فرض شده است ($c_x = 4c_y$ و $c_x = 2c_y$). در دو مورد ضلع بزرگ مستطیل در راستای محیطی قرار دارد ($c_x = 0.25c_y$ و $c_x = 0.5c_y$) و در آخرین مورد اضلاع گشودگی با یکدیگر برابر در نظر گرفته شده است ($c_x = c_y$).

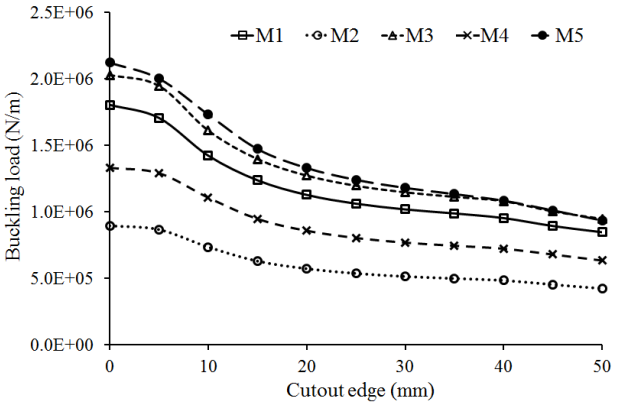

Fig. 4 Buckling load variation for different cutout size

شکل 4 تغییرات بار بحرانی برای ابعاد مختلف گشودگی مربعی مرکزی

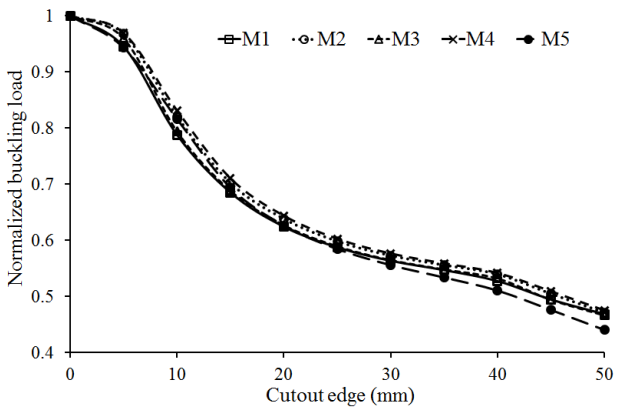

Fig. 5 Normalized buckling load variation for different cutout size

شکل 5 تغییرات بار بحرانی بی‌بعد شده برای ابعاد مختلف گشودگی مربعی مرکزی

شکل 6 تغییرات بار بحرانی را برای این پنج حالت نشان می‌دهد. با توجه به این نتایج می‌توان بیان داشت که پوسته دارای گشودگی مربعی همواره بار بحرانی بیشتری نسبت به پوسته دارای گشودگی مستطیلی با مساحت برابر دارد. این موضوع برای هر دو نوع گشودگی مستطیلی طولی و محیطی صادق است. علاوه‌بر این با توجه به نتایج به‌دست‌آمده نمی‌توان به صورت قاطع در مورد گشودگی طولی و محیطی اظهار نظر کرد. برای گشودگی‌های بزرگ پوسته دارای گشودگی محیطی وضعیت بهتری دارد، اما وجود گشودگی در راستای طولی پوسته برای گشودگی‌های کوچک منجر به تحمل بار بیشتری می‌شود. چنان‌چه بیان شد گشودگی مربعی وضعیت بهتری نسبت به انواع گشودگی مستطیلی دارد. ضمن این‌که در گشودگی‌های مستطیلی نیز هر چه میزان کشیدگی گشودگی به هر کدام از دو سمت طولی یا محیطی افزایش یابد، بار بحرانی کاهش بیشتری خواهد داشت.

6-4- اثر محل قرارگیری گشودگی

یک گشودگی مربعی به ضلع 20 میلی‌متر به منظور مطالعه اثرات محل قرارگیری گشودگی در نظر گرفته شده است. فاصله مرکز گشودگی از لبه پوسته بین 20 تا 100 میلی‌متر متغیر در نظر گرفته شده است. بار بحرانی محاسبه شده برای هر حالت نسبت به بار بحرانی پوسته بدون گشودگی بی‌بعد شده است. بررسی نتایج به‌دست‌آمده که در شکل 7 ارائه شده نشان می‌دهد که وجود گشودگی در نزدیکی لبه‌ها اثر کمتری در کاهش بار بحرانی دارد. هرچند باید یادآور شد که این تفاوت چندان زیاد نیست و برای مورد بررسی شده کمتر از 5% است. علاوه‌بر این اگر فاصله مرکز گشودگی تا لبه‌های پوسته به اندازه کافی زیاد باشد (حدود 20% طول پوسته)، محل گشودگی تأثیر چندانی بر بار بحرانی کمانش نخواهد داشت.

6-5- اثر طول پوسته

دو حالت کلی برای بررسی طول پوسته در نظر گرفته شده است: $L/R \geq 1$ و $L/R < 1$. در حالت نخست طول‌های 80، 100، 120، 160، 200، 240 و 320 میلی‌متر برای پوسته بررسی شده است. برای همه این موارد اندازه گشودگی نیز از 5 تا 50 میلی‌متر متغیر در نظر گرفته شد. با بررسی نتایج به‌دست‌آمده روشن شد که بار بحرانی برای این حالات بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و تفاوت قابل توجهی ندارند و از این‌رو از نمایش آن‌ها صرف‌نظر شده است. ضمن این‌که تأثیر گشودگی‌هایی با ابعاد مختلف نیز برای همه این پوسته‌ها تقریباً یکسان است. این مسأله نشان می‌دهد که برای $L/R \geq 1$ طول پوسته تأثیر چندانی بر بار کمانش آن ندارد. تئوری کلاسیک کمانش خطی پوسته‌ها

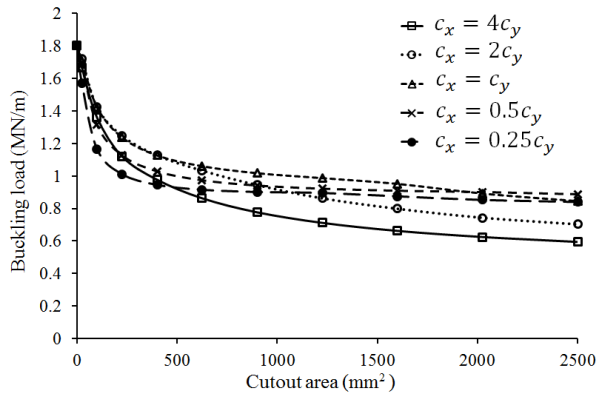

Fig. 6 Normalized buckling load variation for different cutout direction

شکل 6 تغییرات بار بحرانی برای جهات قرارگیری مختلف گشودگی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

که در رابطه (22) بیان شد نیز مستقل از طول پوسته است. این رابطه بار بحرانی پوسته آلومینیومی به شعاع 80 میلی‌متر و ضخامت 2 میلی‌متر را 2.117 MN/m تخمین می‌زند که با بار بحرانی به‌دست‌آمده از روش حاضر (2.096 MN/m) هم‌خوانی بسیار خوبی دارد.

مسأله برای $L/R < 1$ متفاوت خواهد بود و بار بحرانی شدیداً به طول پوسته بستگی خواهد داشت. شکل 8 بار بحرانی پوسته بدون گشودگی با طول‌های مختلف را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که برای طول‌های کمتر از 80 میلی‌متر ($L/R < 1$) با کاهش طول پوسته بار بحرانی افزایش چشمگیری دارد. با این وجود اثر گشودگی در این پوسته‌ها نیز مشابه پوسته‌های بلند است. در واقع روند تغییرات بار بحرانی بی‌بعد شده به ازای اندازه‌های مختلف گشودگی مستقل از طول پوسته است.

6-6- اثر ضخامت

مقدار آن برای بررسی اثر ضخامت پوسته از 0.5 تا 4 میلی‌متر متغیر در نظر گرفته شده است. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که با افزایش ضخامت پوسته مطابق انتظار بار بحرانی افزایش می‌یابد. این موضوع برای پوسته کامل و پوسته دارای گشودگی صادق است، همچنین برای هر ضخامت بار بحرانی پوسته دارای گشودگی نسبت به بار بحرانی پوسته بدون گشودگی با همان ضخامت بی‌بعد شده و در شکل 9 ترسیم شده است. این شکل نشان می‌دهد که روند کلی تغییرات پوسته‌هایی با ضخامت مختلف یکسان است؛ میزان اثرگذاری گشودگی بر کاهش بار بحرانی در پوسته‌های نازک‌تر بیش از پوسته‌های ضخیم است و با افزایش ضخامت پوسته از میزان اثرگذاری گشودگی بر کاهش بار بحرانی کاسته می‌شود.

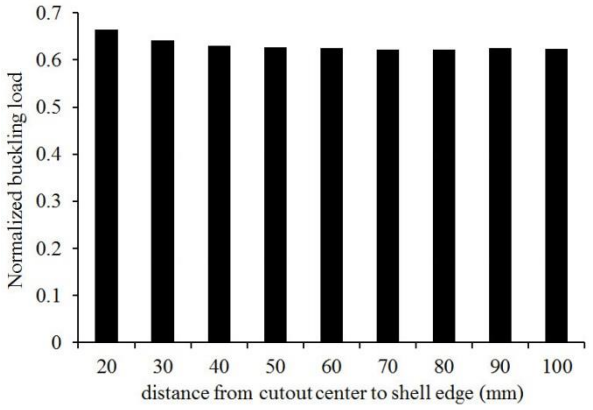

Fig. 7 Normalized buckling load variation for different cutout location

شکل 7 تغییرات بار بحرانی بی‌بعد شده برای محل مختلف گشودگی

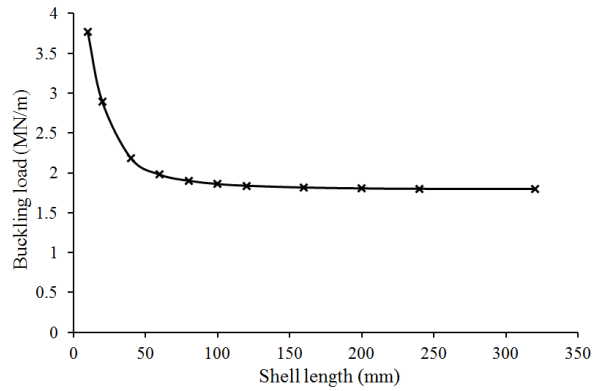

Fig. 8 Buckling load variation for different lengths of cylindrical shell

شکل 8 تغییرات بار بحرانی پوسته به ازای تغییرات طول‌های مختلف پوسته استوانه‌ای

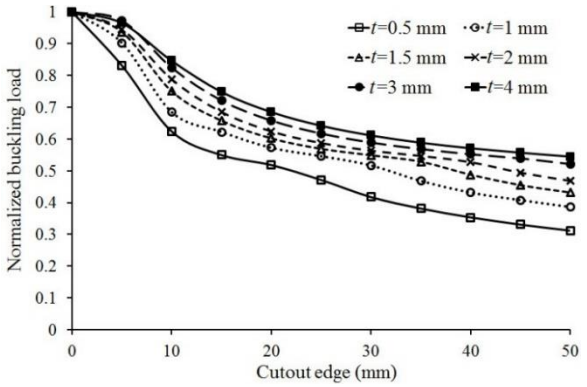

Fig. 9 Normalized buckling load variation for different shell thickness

شکل 9 تغییرات بار بحرانی بی‌بعد شده برای ضخامت‌های مختلف پوسته

6-7- اثر لایه‌چینی پوسته و تکیه‌گاه‌ها

در این قسمت اثر لایه‌چینی‌های مختلف بر بار کمانش پوسته با و بدون گشودگی بررسی شده است. بار بحرانی پوسته بدون گشودگی برای سه نوع تکیه‌گاه متفاوت و لایه‌چینی‌های مختلف در جدول 11 آورده شده است. این نتایج نشان می‌دهد که برای این مسأله و هندسه به خصوص تکیه‌گاه ساده S4-S4 و تکیه‌گاه گیردار C-C تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند. ضمن این‌که مطابق انتظار آزاد بودن یک سر پوسته بار بحرانی را در حدود 60% کاهش می‌دهد. علاوه‌بر این با توجه به نتایج می‌توان اظهار داشت که در میان آرایش‌های بررسی شده لایه‌چینی $[\pm45,0,90]_S$ بیشترین بار بحرانی را داراست. دلیل این موضوع را می‌توان قرارگیری لایه‌ها در چهار جهت مختلف دانست که موجب تقویت پوسته در تمامی جهات می‌شود. نکته جالب توجه دیگر این است که برای هر لایه‌چینی دلخواه (در این‌جا [±60] بررسی شده است)، با افزایش تعداد لایه‌ها بار بحرانی رفته‌رفته افزایش یافته و به یک مقدار مشخص همگرا می‌شود.

در ادامه چهار لایه‌چینی $[\pm45,0,90]_S$، $[\pm45]_S$، $[0,90]_S$ و $[\pm60]_S$ برای بررسی اثر لایه‌چینی‌های در پوسته دارای گشودگی انتخاب شده‌اند. شکل 10 تغییرات بار بحرانی برای این لایه‌چینی‌ها به ازای تغییرات اندازه گشودگی را نشان می‌دهد. چنان‌چه در این شکل ملاحظه می‌شود، بار بحرانی مربوط به لایه‌چینی $[\pm45,0,90]_S$ بسیار بیشتر از سایر لایه‌چینی‌هاست. البته میزان افت بار بحرانی در اثر وجود گشودگی نیز، برای این لایه‌چینی به مراتب بیشتر از آرایش‌های دیگر است. برای درک بهتر این موضوع، در شکل 11 بار بحرانی پوسته دارای گشودگی با لایه‌چینی‌های مختلف نسبت به بار بحرانی پوسته بدون گشودگی با همان لایه‌چینی بی‌بعد شده است. چنان‌چه از شکل پیداست لایه‌چینی $[0,90]_S$ کمترین افت در اثر وجود گشودگی را دارد.

جدول 11 بار بحرانی پوسته برای لایه‌چینی‌های مختلف (MN/m)

Table 11 Buckling load of shell with different layup (MN/m)

S4-S4	C-F	C-C	لایه‌چینی
1.8003	0.6771	1.8055	[±45,0,90]S
1.5750	0.5425	1.5790	[±45,90]S
1.7650	0.5850	1.7690	[±45,90,90]S
1.0801	0.5244	1.0872	[±45,0]S
1.1663	0.5734	1.1810	[±45,0,0]S
0.5684	0.2608	0.5752	[±45]S
0.5665	0.3543	0.6555	[0,90]S
0.6405	0.2695	0.6420	[±60]S
0.5028	0.1992	0.5041	[±60]
0.6760	0.2842	0.6839	[±60]2
0.7123	0.3012	0.7241	[±60]5
0.7223	0.3058	0.7306	[±60]10

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

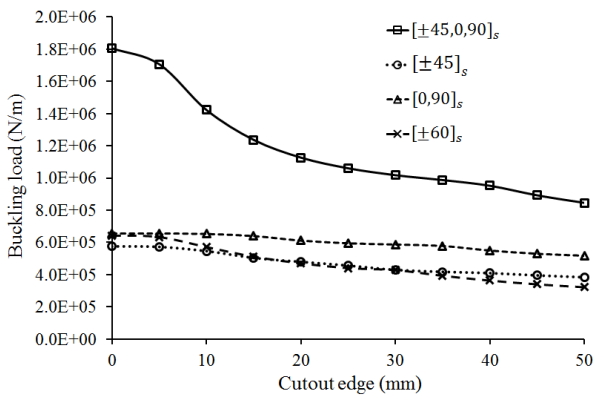

Fig. 10 Buckling load variation for different layups

شکل 10 تغییرات بار بحرانی برای لایه‌چینی‌های مختلف

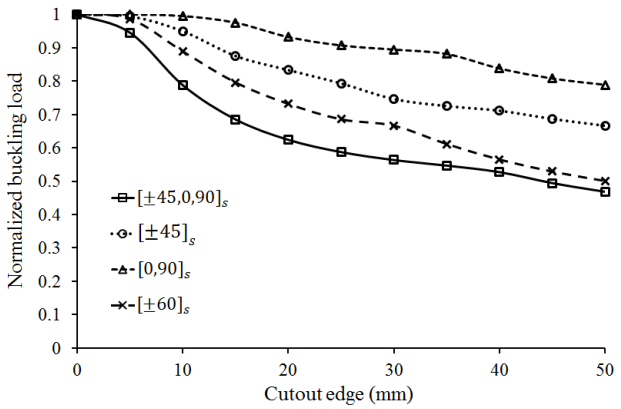

Fig. 11 Normalized buckling load variation for different layups

شکل 11 تغییرات بار بحرانی بی‌بعد شده برای لایه‌چینی‌های مختلف

7- نتیجه‌گیری

در این مقاله کمانش محوری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با و بدون گشودگی مطالعه شده است. معادلات حاکم بر پایه تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول نوشته شده است. معادلات به گونه‌ای بیان شده که می‌توان آن را با انتخاب مناسب پارامترهایی به تئوری دانل، لاو و یا ساندرز تبدیل نمود. سطح پوسته برای تحلیل پوسته دارای گشودگی با استفاده از روش تجزیه حوزه به المان‌های مناسبی تقسیم شده است. این المان‌بندی به نحوی صورت گرفته که شرایط مرزی و بارگذاری در لبه‌های هر المان یکنواخت باشد. معادلات حاکم در هر المان به کمک روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته در هر دو راستای طولی و محیطی گسسته شده و با مونتاژ این معادلات یک دستگاه معادلات جبری تشکیل شده است، همچنین گسسته‌سازی شرایط مرزی در لبه‌های پوسته و گشودگی و نیز شرایط سازگاری در مرز مشترک المان‌ها نیز به کمک همین روش انجام شده است. پس از اعمال این شرایط بار بحرانی پوسته با استفاده از حل مقدار ویژه تعیین شده است. تمامی مراحل در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده است.

نتایج حاصل از آن برای اعتبارسنجی روش ارائه شده با نتایج موجود در مقالات و نیز نتایج نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه شده است. این مقایسه کارایی این روش و دقت بالای نتایج آن در عین هزینه محاسباتی پایین آن را به خوبی نشان می‌دهد. در گام بعد اثر پارامترهای مختلف بر کمانش پوسته‌های کامپوزیتی با و بدون گشودگی با استفاده از این روش مطالعه شده است. این بررسی‌ها نشان می‌دهد که لایه‌چینی پوسته تأثیر بسزای بر بار کمانش پوسته‌های کامل و دارای گشودگی دارد. ضمن این‌که تأثیر افزایش اندازه گشودگی برای لایه‌چینی‌های مختلف یکسان نیست، اما برای یک لایه‌چینی یکسان، رفتار پوسته‌ها در برابر تغییر اندازه گشودگی مستقل از جنس است. علاوه‌بر این نتایج نشان داد که پوسته دارای گشودگی مربعی بار بحرانی بیشتری نسبت به پوسته با گشودگی مستطیلی هم‌مساحت دارد. بررسی‌ها ابعاد پوسته نشان داد که بار بحرانی پوسته‌های بلند ($L/R > 1$) مستقل از طول پوسته است. بار بحرانی با کاهش طول برای پوسته‌های کوتاه ($L/R < 1$) افزایش می‌یابد. این در حالی است که در پوسته‌های دارای گشودگی تفاوت فاحشی میان روند تغییرات بار بحرانی بی‌بعد شده پوسته‌های بلند و کوتاه وجود ندارد. با بررسی ضخامت‌های مختلف پوسته مشخص شد که پوسته‌های نازک‌تر بیشتر از پوسته‌های ضخیم تحت تأثیر وجود گشودگی قرار می‌گیرند.

8- مراجع

[1] R. Bellman, J. Casti, Differential quadrature and long-term integration, *Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, No. 2, pp. 235-238, 1971.

[2] R. Bellman, B. Kashef, J. Casti, Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Computational Physics*, Vol. 10, No. 1, pp. 40-52, 1972.

[3] C. W. Bert, S. K. Jang, A. G. Striz, Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components, *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 5, pp. 612-618, 1988.

[4] A. G. Striz, C. Weilong, C. W. Bert, Static analysis of structures by the quadrature element method (QEM), *Solids and Structures*, Vol. 31, No. 20, pp. 2807-2818, 1994.

[5] X. Wang, H. Gu, Static analysis of frame structures by the differential quadrature element method, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, No. 4, pp. 759-772, 1997.

[6] F. Liu, K. Liew, Static analysis of Reissner-Mindlin plates by differential quadrature element method, *Applied Mechanics*, Vol. 65, pp. 705-710, 1998.

[7] F. L. Liu, Differential quadrature element method for static analysis of shear deformable cross-ply laminates, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, No. 8, pp. 1203-1219, 1999.

[8] F. L. Liu, K. Liew, Vibration analysis of discontinuous Mindlin plates by differential quadrature element method, *Vibration and Acoustics*, Vol. 121, No. 2, pp. 204-208, 1999.

[9] F.-L. Liu, K. Liew, Analysis of vibrating thick rectangular plates with mixed boundary constraints using differential quadrature element method, *Sound and Vibration*, Vol. 225, No. 5, pp. 915-934, 1999.

[10] F. L. Liu, Differential quadrature element method for buckling analysis of rectangular Mindlin plates having discontinuities, *Solids and Structures*, Vol. 38, No. 14, pp. 2305-2321, 2001.

[11] P. Mirfakhraei, D. Redekop, Buckling of circular cylindrical shells by the differential quadrature method, *Pressure Vessels and Piping*, Vol. 75, No. 4, pp. 347-353, 1998.

[12] D. Redekop, E. Makhoul, Use of the differential quadrature method for the buckling analysis of cylindrical shell panels, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 10, No. 5, pp. 451-462, 2000.

[13] L. Jiang, Y. Wang, X. Wang, Buckling analysis of stiffened circular cylindrical panels using differential quadrature element method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, No. 4, pp. 390-398, 2008.

[14] S. Barani, D. Poorveis, S. Moradi, Buckling analysis of ring-stiffened laminated composite cylindrical shells by fourier-expansion based differential quadrature method, *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 225, pp. 207-212, 2012.

[15] R. Akbari Alashti, S. Ahmadi, Buckling analysis of functionally graded thick cylindrical shells with variable thickness using DQM, *Arabian Journal for Science & Engineering (Springer Science & Business Media BV)*, Vol. 39, No. 11, pp. 8121–8133, 2014.

[16] M. Fadaee, S. Kalantari, A new mathematical procedure for linear buckling of grid stiffened cylindrical shells using differential quadrature method, *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 12, No. 2, pp. 65-78, 2015. (In Persian فارسی)

[17] S. A. Ahmadi, H. Pourshahsavari, Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded cylindrical panels using differential quadrature method (DQM), *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 54, No. 1, pp. 135-147, 2016.

[18] A. A. Masoumi, G. H. Rahimi, G. H. Liaghat, The use of the differential quadrature method in the analysis of composite metal cylindrical vessel under dynamical load, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 319-330, 2017. (In Persian فارسی)

[19] S. Sahu, P. Datta, Dynamic stability of laminated composite curved panels with cutouts, *Engineering Mechanics*, Vol. 129, No. 11, pp. 1245-1253, 2003.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]

[20] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Applied Mechanics*, Vol. 12, pp. 69-77, 1945.
[21] R. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 31, 1951.
[22] W. Wittrick, Analytical, three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory, *Solids and Structures*, Vol. 23, No. 4, pp. 441-464, 1987.
[23] M. Malik, C. W. Bert, Three-dimensional elasticity solutions for free vibrations of rectangular plates by the differential quadrature method, *Solids and Structures*, Vol. 35, No. 3-4, pp. 299-318, 1998.
[24] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edittion, pp. 101, 479-483, CRC press, 2003.
[25] F. Civan, C. Sliepcevich, Application of differential quadrature to transport processes, *Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 93, No. 1, pp. 206-221, 1983.
[26] F. Civan, C. Sliepcevich, Solution of the Poisson equation by differential quadrature, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, No. 5, pp. 711-724, 1983.
[27] F. Civan, C. Sliepcevich, Differential quadrature for multi-dimensional problems, *Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 101, No. 2, pp. 423-443, 1984.
[28] S. K. Jang, C. W. Bert, A. G. Striz, Application of differential quadrature to static analysis of structural components, *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 3, pp. 561-577, 1989.
[29] J. Quan, C. Chang, New insights in solving distributed system equations by the quadrature method—I. Analysis, *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 13, No. 7, pp. 779-788, 1989.
[30] J. Quan, C. Chang, New insights in solving distributed system equations by the quadrature method—II. Numerical experiments, *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 13, No. 9, pp. 1017-1024, 1989.
[31] C. Shu, *Generalized Differential-Integral Quadrature and Application to the Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Parallel Computation*, PhD Thesis, University of Glasgow, Glasgow, 1991.
[32] C. Shu, B. E. Richards, Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, No. 7, pp. 791-798, 1992.
[33] C. Shu, B. Richard, Parallel simulation of incompressible viscous flows by generalized differential quadrature, *Computing Systems in Engineering*, Vol. 3, No. 1-4, pp. 271-281, 1992.
[34] C. Shu, *Differential Quadrature and its Application in Engineering*: First Edittion, pp. 110-118, Springer Science & Business Media, 2000.
[35] G. H. Rahimi, M. Zandi, S. F. Rasouli, Analysis of the effect of stiffener profile on buckling strength in composite isogrid stiffened shell under axial loading, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 24, No. 1, pp. 198-203, 2013.
[36] H. Han, J. Cheng, F. Taheri, N. Pegg, Numerical and experimental investigations of the response of aluminum cylinders with a cutout subject to axial compression, *Thin-Walled Structures*, Vol. 44, No. 2, pp. 254-270, 2006.
[37] A. Tafreshi, Buckling and post-buckling analysis of composite cylindrical shells with cutouts subjected to internal pressure and axial compression loads, *Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, No. 5, pp. 351-359, 2002.
[38] M. W. Hilburger, A. M. Waas, J. H. Starnes, Response of composite shells with cutouts to internal pressure and compression loads, *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 2, pp. 232-237, 1999.
[39] A. Tafreshi, C. G. Bailey, Instability of imperfect composite cylindrical shells under combined loading, *Composite Structures*, Vol. 80, No. 1, pp. 49-64, 2007.
[40] H. Ovesy, J. Fazilati, Buckling and free vibration finite strip analysis of composite plates with cutout based on two different modeling approaches, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 3, pp. 1250-1258, 2012.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.33.3]