



## تحلیل ارتعاشات غیرخطی و آیرودالاستیک صفحه منحنی شکل دوبعدی با اثر نیروی فشاری و آیرودینامیک مافوق صوت در حوزه زمانی

حمید موسی‌زاده<sup>1</sup>، بهزاد قدیری دهکردی<sup>2\*</sup>، مسعود راسخ<sup>3</sup>

1- دانشجوی دکترا، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تفرش، تفرش

\* تهران، صندوق پستی 143-14115، ghadirib@modares.ac.ir

### چکیده

یک صفحه هموزن دوبعدی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده فرض شده و اثر انحنای صفحه، به همراه اثر تغییر شکل غیرخطی صفحه، با استفاده از مدل پوسته استوانه‌ای و رابطه ون کارمن در معادله سازه‌ای مسئله اعمال شده است. تحلیل فرکانسی خطی و غیرخطی سازه، برای تعیین فرکانس‌های سازه در اثر افزایش انحنای صفحه، به همراه اثر نیروی فشاری داخل صفحه، برای اولین بار تحقیق شده است. فلاتر صفحه منحنی شکل، تحت اثر بارهای ترکیبی آیرودینامیک و نیروی فشاری داخل صفحه، برای اولین بار، بررسی شده است. تئوری پیستون مرتبه اول و مرتبه سوم برای مدل‌سازی بارهای آیرودینامیکی مافوق صوت استفاده شده است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده است. با استفاده از روش مدهای فرضی گالرکین معادلات غیرخطی با مشتقات جزئی به معادلات غیرخطی معمولی تبدیل و با روش عددی حل شده و رفتار نوسانی سیستم، تعیین شده است. تغییرات فرکانسی سازه‌ی خطی با افزایش انحنای صفحه، درحال افزایش است درحالی‌که برای حالت غیرخطی، رفتار پیچیده و متغیری مشخص شده است. اثر نیروی فشاری بر صفحه، رفتار پیچیده‌ای در تغییر فرکانس غیرخطی سازه، نشان داده است. استفاده از مدل آیرودینامیک پیستون مرتبه سه مرز ناپایداری را بحرانی‌تر کرده است. اثر نیروی فشاری داخلی صفحه باعث تبدیل رفتار سیکل محدود به آشوبناک شده است.

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 21 اردیبهشت 1393  
پذیرش: 31 تیر 1393  
ارائه در سایت: 06 آبان 1393  
کلیدواژگان:  
فلاتر صفحه  
نیروی داخل صفحه  
تئوری پیستون مرتبه اول و سوم  
صفحه دوبعدی  
حوزه زمان

## 2D Curved plate Non-linear vibration and Aeroelastic analysis with in-plane and Supersonic Aerodynamic load in Time domain

Hamid Moosazadeh<sup>1</sup>, Behzad Ghadiri Dehkordi<sup>2\*</sup>, Masoud Rasekh<sup>3</sup>

1- Department of Aerospace Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

2- Department of Aerospace Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

3- Department of Mechanical Engineering, Tafresh University, Tafresh, Iran

\* P.O.B. 14115-143 Tehran, Iran, ghadirib@modares.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 11 May 2014  
Accepted 22 July 2014  
Available Online 28 October 2014

**Keywords:**  
Panel flutter  
In-plane load  
1<sup>st</sup> order and 3<sup>rd</sup> order piston theory  
aerodynamic  
2D curve plate  
Time domain

### ABSTRACT

A homogenous 2D plate with simply support boundary conditions is assumed. The effect of plate curvature and nonlinear deformation effects with cylindrical shell model and von Karman's relation, has been introduced. Linear and Non-linear Frequency analysis with the effect of curvature and in-plane load has been investigated for the first time. Curved plate panel flutter, with the effect of supersonic aerodynamic and in-plane load has been studied for the first time. First and third order piston theory aerodynamic (PTA) is employed to model supersonic aerodynamic loading. Equations of motion have been derived by the use of Hamilton's principle and resultant nonlinear PDEs have been transformed into nonlinear ODEs via Galerkin's method. Forth and fifth order rang-kutta numerical method has been used to solve ODEs and define panel behavior. Results show that, structural linear frequencies increase with panel curvature, while, it is more complicated for non-linear frequencies due to the effects of in-plane loads. Furthermore, 3<sup>rd</sup> order PTA theory has more critical effect on the instability boundary in comparison with 1<sup>st</sup> order PTA. The effect of in-plane load in aeroelastic phenomena make limite cycle osilation to chaotic motion for curve plates.

### 1- مقدمه

جریان سیال بر روی سازه و واگرایی بر اثر نیروی فشاری بر روی صفحه ایجاد می‌شود. فلاتر صفحه در شکل پدیده‌ای ناپایستار، شدیداً غیرخطی و دارای رفتار بسیار متنوع، از حالت پایداری استاتیکی تا ناپایداری آشوبناک است. بار تراکمی در مرزهای صفحه، به‌دلیل پیش‌بار اتصال نامطلوب صفحه؛ یا گردابان

ارتعاشات سازه غیرخطی در اثر تقابل بین الاستیسیته، اینرسی و آیرودینامیک، در محدوده‌ی آیرودالاستیسیته قرار دارد. دینامیک صفحه با فلاتر دینامیکی و واگرایی استاتیکی، در کنار هم شناخته می‌شود. فلاتر در اثر

پرداخت [20]. ژوو (1994)، از روش المان محدود برای مدل‌سازی حوزه زمانی فلاتر غیرخطی صفحه مواد مرکب استفاده نمود [21].

لیبرسکو (1996 و 1997)، ارتعاشات صفحه تخت، با نقص هندسی، تحت اثر بار حرارتی و مکانیکی را بررسی نمود. همین‌طور، تقابل نیرو و فرکانس سیستم برای صفحه منحنی شکل، با اثر نقص را، بررسی نمود [22,23]. لیبرسکو (2004)، به بررسی فلاتر خطی و غیرخطی مافوق صوت صفحه در دمای بالا پرداخت [24]. عباس و همکاران (2011)، مطالعه پارامتریک فلاتر فوق صوتی/ماوراء صوتی و رفتار آیرودینامیک صفحه منحنی شکل را بررسی نمودند [25]. یانگ و همکاران (2012)، بررسی فلاتر صفحه ماوراء صوت در ترکیب دوراه آیرودینامیک و آیروترمال برای صفحه منحنی شکل انجام دادند. صفحه با تکیه‌گاه ساده و اثر غیرخطی هندسی، براساس مدل ون کارمن، مدل شد [26].

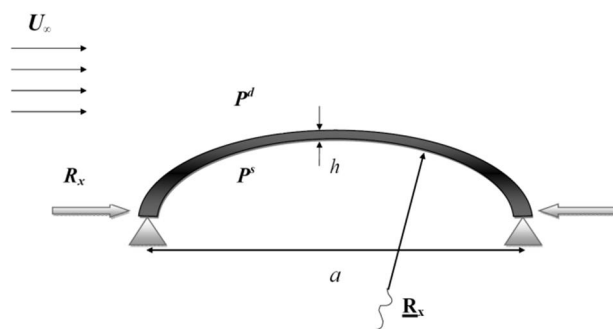
### 3-1- تحقیق حاضر

در این تحقیق، بررسی فرکانس ارتعاشی صفحه خمیده، به صورت خطی و غیرخطی، در حوزه‌ی زمان، تحت اثر نیروی داخل صفحه کششی و فشاری، برای اولین بار انجام شده است. همین‌طور، تحلیل فلاتر صفحه خمیده غیرخطی، با استفاده از تئوری پیستون مرتبه اول و سوم، تحت اثر نیروی داخل صفحه نیز برای اولین بار، انجام شده است. معادلات ساده شامل مدل صفحه دوبعدی با اثر هندسه غیرخطی ون کارمن با اثر نیروی داخل صفحه در نظر گرفته شده است. بعد از تشکیل معادلات غیرخطی حاکم، با استفاده از روش مودهای فرضی و روش گالرکین، معادلات حوزه زمان به روش رانگ-کوتای مرتبه 4 و 5 حل شده است. شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده فرض شده است. نتایج در سه بخش، شامل؛ تحلیل فرکانس خطی ساده با تغییر انحنای صفحه، تحلیل فرکانسی غیرخطی؛ با تغییر انحنای و اثر نیروی داخل صفحه، تحلیل آیرودینامیک غیرخطی و بررسی رفتار صفحه تحت اثر نیروهای مختلف، انجام شده است.

### 2- مدل‌سازی ریاضی

ابتدا مدل صفحه خمیده تحت اثر جریان آیرودینامیکی مافوق صوت و اثر بارهای خارجی آیرودینامیک و نیروی فشاری داخل صفحه، در شکل 1 نشان داده شده است.

$U_\infty$ ، سرعت جریان آزاد روی صفحه،  $R_x$ ، نیروی داخل صفحه،  $P^d$ ، فشار دینامیکی جریان بالای صفحه،  $P^s$ ، فشار استاتیکی پایین صفحه،  $h$ ، ضخامت صفحه و  $a$  پهنای صفحه است. معادلات حاکم با استفاده از اصل کار مجازی تعیین شده است. خمش ساده با رابطه‌ی (1) تعریف شده است [25,26].



شکل 1 مدل هندسه صفحه دوبعدی تحت اثر بارهای خارجی

حرارتی است. اثر انحنای یا تغییر شکل در مرزهای فلاتر و ناپایداری آیرودینامیک صفحه بسیار اهمیت دارد که با رویکردی جدید، با در نظر گرفتن بارهای مختلف بر روی صفحه، این تحلیل انجام شده است. برای صفحه دوبعدی منحنی شکل، دامنه نوسانات در هنگام فلاتر، در حدود ارتفاع انحنای صفحه است. اثر بار آیرودینامیکی به دلیل وجود انحنای در صفحه، بر مرزهای فلاتر صفحه تأثیر می‌گذارد. نتایج تجربی فلاتر صفحه منحنی شکل، در مقایسه با نتایج تئوری، همخوانی خوبی را از جهت کیفی نشان داده است.

### 1-1- تحلیل فلاتر غیرخطی صفحه

جردن (1956)، با استفاده از تئوری خطی ساده، حرکت صفحه ناپایدار را در فشار دینامیکی بحرانی نشان داد [1]. داوول (1965)، مطالعه تئوری و تجربی فلاتر صفحه در اعداد ماخ 1 تا 5 را انجام داد [2]. دوگونجی (1966)، یک فعالیت خوب و پایه‌ای بر روی فلاتر صفحه، در سرعت‌های مافوق صوت بالا، به صورت تئوری انجام داد. او صفحه ایزوتروپ و خطی و آیرودینامیک خطی استفاده نمود [3]. کوئو (1972)، تحلیل اغتشاشی و تعادل هارمونیک را برای سیستم غیرخطی فلاتر صفحه استفاده نمود [4]. دورسی (2002)، تحلیل سیستم الاستیک، با اثرات حرارت و آیرودینامیک، در طراحی حامل بازگشت‌پذیر به جو، انجام داد. او به بررسی قابلیت ایجاد تغییر شکل، تنش‌های ترمومکانیک و تغییر در خواص ساده، که منجر به رفتار ناپایدار آیرودینامیک صفحه می‌شود، پرداخت [5]. جوئو و منی (2006)، بررسی فلاتر صفحه با استفاده از مودهای آیرودینامیک، برای تحلیل غیرخطی؛ با اثر حرارت روی صفحه را، انجام دادند [6]. کولر (2010)، به بررسی ترکیب ساده-حرارت-سیال برای تحلیل آیرودینامیک در جریان مافوق صوت پرداخت [7]. پرز (2011)، از روش رتبه کاسته غیرخطی، برای تحلیل پاسخ ترموالستودینامیک صفحه ایزوتروپ و مواد (FG) استفاده نمود [8]. ویزبال (2012)، برهمکنش میان شوک افقی و صفحه انعطاف‌پذیر را بررسی نمود [9].

### 2-2- تحلیل فلاتر صفحه منحنی شکل

در زمینه فلاتر صفحه خمیده نیز فعالیت‌هایی انجام شده است. فانگ (1954)، پایداری استاتیکی صفحه خمیده دوبعدی را در جریان مافوق صوت برای پدیده فلاتر صفحه بررسی کرد [10]. یاتس و زیدل (1959)، با تحلیل خطی، فلاتر صفحه منحنی شکل را بررسی نمودند [11]. اندرسن (1962)، نتایج تجربی برای صفحه منحنی شکل، در جریان آیرودینامیک مافوق صوت را، تعیین نمود [12]. استیرمن و همکاران (1962)، آزمایشات فلاتر پوسته استوانه‌ای را انجام دادند [13]. بولوتین (1963)، معادلات صفحه منحنی شکل را بدون نتایج کمی، تعیین و ارائه نمود [14]. هوبالت (1965)، به بررسی چندین مسئله آیرودینامیک مربوط به ساده هواپیما در سرعت‌های بالا پرداخت [15]. اسچافر و همکاران (1965)، فلاتر صفحه تخت، تحت اثر حرارت گسترده غیرخطی را، بررسی نمود [16]. داوول (1969)، تحلیل خطی و غیرخطی به روش گالرکین برای بررسی فلاتر صفحه منحنی شکل با استفاده از اثر غیرخطی ون کارمن در معادلات و اثر بارگذاری آیرودینامیکی شبه پایا انجام داد [17]. وونترز و داوول (1970)، به مقایسه تئوری و تجربی فلاتر غیرخطی صفحه بارگذاری شده پرداختند [18]. یانگ (1976)، فلاتر صفحه کمناش یافته را با روش المان محدود بررسی کرد [19]. ژوو (1993)، به بررسی فلاتر صفحه غیرخطی با استفاده از روش المان محدود با گسترده‌ی دمایی مختلف بر روی صفحه در جریان مافوق صوت

$$P^d(x, t) = P_\infty \left( 1 + \gamma \frac{M}{\beta_1} \left( \eta_1 \frac{V_z}{c_\infty} \right) + \left[ \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} \right] \frac{M}{\beta_1} \left( \eta_1 \frac{V_z}{c_\infty} \right)^2 + \frac{\gamma(\gamma+1)M}{12} \frac{M}{\beta_1} \left( \eta_1 \frac{V_z}{c_\infty} \right)^3 \right) \quad (11)$$

دینامیکی روی صفحه رابطه  $V_z$ ، در اثر جریان سیال بالای صفحه براساس تغییر شکل عمودی صفحه تعریف شده است [25,17].

$$V_z = (\beta_2 W_{0,t} + U_\infty (W_{0,x} + \dot{W}_{0,x})) \quad (12)$$

$c_\infty$ ، سرعت صوت و رابطه  $c_\infty^2 = \frac{\gamma P_\infty}{\rho_\infty}$ ، برقرار است.  $P_\infty$ ،  $\rho_\infty$  و  $\gamma$ ، به ترتیب، فشار اتمسفر، چگالی هوا و ضریب ثابت گاز آیزنتروپیک  $\gamma = 1.4$ ، تعریف شده‌اند. اثر نقص یا انحنای اولیه در صفحه است. تئوری پیستون، یک روش معمول و مورد استفاده برای تحلیل آیرودینامیک سیستم در جریان‌های مافوق صوت و ماوراء صوت بشمار رفته است. برای عدد ماخ  $M$  و فشار دینامیکی  $q_\infty$  و ضریب  $\beta_1$  و  $\beta_2$  تعاریف رابطه (13) در نظر گرفته شده است.

$$M = \frac{U_\infty}{c_\infty}, q_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2}, \beta_1 = \sqrt{M^2 - 1}, \beta_2 = \frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \quad (13)$$

برای اعداد ماخ بزرگ  $\beta_1 = M$  و  $\beta_2 = 1$  فرض شده است.

## 2-2- معادلات غیرخطی آیرودینامیک صفحه

ابتدا متغیرهای بی بعد سیستم تعریف شده است.

$$W = \frac{w}{a}, \dot{W} = \frac{\dot{w}}{h}, \xi = \frac{x}{a}, \bar{t} = t\Omega_0, \Omega_0 = \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{D_0}{\rho_m h}}, \bar{\Omega} = \Omega_0 \frac{a}{c_\infty}, \bar{h} = \frac{h}{a}, \bar{h} = \frac{h}{R_x}, \bar{P}^s(x) = P^s(x) \frac{a^4}{D_0 h}, \bar{\rho} = \frac{\rho_m}{\rho_\infty}, H \approx \frac{a^2}{8R_x}, \mu = \frac{\rho_\infty a}{\rho_m h}, \beta = \sqrt{M^2 - 1}, \lambda = \frac{2qa^3}{D_0}, R_x = \frac{E_0 h a^2 \eta}{D_0 (1 - \nu^2)} = C_r \pi^2, K = \frac{\omega}{\Omega_0} \quad (14)$$

$\Omega_0$ ، فرکانس اول صفحه،  $\bar{\Omega}$ ، فرکانس بی بعد و  $K$ ، فرکانس‌های بی بعد صفحه برحسب فرکانس اول است.  $C_r$ ، ضریب نیروی داخل صفحه است.

اثر انحنای صفحه با رابطه (15) تعریف شده است [17].

$$\frac{\dot{W}}{H} = \left[ 1 - \frac{(x - a/2)^2}{(a/2)^2} \right] \quad (15)$$

بعد از بی بعد سازی به رابطه (16) تبدیل شده است.

$$\dot{W} = -\frac{\dot{h}}{2h^2} \xi (\xi - 1) \quad (16)$$

با جایگذاری رابطه (15) در (12) و رابطه (11) در (11) و رابطه (11) در (9)، همین‌طور، جایگذاری روابط (7-6) در (5) و جایگذاری رابطه (3) در (2)، در نهایت، با جایگذاری روابط (9)، (5) و (2) در رابطه (1) و با استفاده از روابط بی بعد، رابطه غیرخطی نهایی آیرودینامیک حاصل برای صفحه دوبعدی، به صورت رابطه (17) بیان شده است.

$$M_{x,xx} - N_x \left( w_{0,xx} - \frac{1}{R_x} \right) + \Delta P_a + \rho_m h w_{0,tt} = 0 \quad (1)$$

$W_0(x, t)$  جابجایی عمودی صفحه،  $N_x$  تنش محوری،  $M_x$  گشتاور خمشی،  $\Delta P_a$  فشار آیرودینامیکی و عبارت آخر رابطه بالا اینرسی انتقالی<sup>1</sup> صفحه است. که طبق روابط (2,3):

$$M_x \equiv D w_{0,xx} \quad (2)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3)$$

$D$  سفتی صفحه،  $E$  مدول الاستیک،  $\nu$  ضریب پواسون و  $w_{0,xx}$  تغییرات انحنای صفحه میانی است. کرنش صفحه براساس رابطه غیرخطی ون کارمن با رابطه (4) تعریف شده است [27].

$$\varepsilon_x = u_{0,x} + \frac{1}{2} (w_{0,x})^2 + \frac{w_0}{R_1} \quad (4)$$

تنش، در اثر وجود قید در مرزهای صفحه تولید شده است.  $N_x$  براساس بار کلی داخل صفحه در جهت  $x$  تعیین شده است [26]. طبق رابطه (5):

$$N_x = N_x^m + N_x^g \quad (5)$$

$N_x^m$ ، اثر بار مکانیکی کششی یا فشاری داخل صفحه،  $N_x^g$ ، اثر تغییر شکل‌های هندسی غیرخطی صفحه است. طبق روابط (6,7) داریم:

$$N_x^m = \frac{ah}{(1 - \nu^2)} \frac{1}{\int_0^a E(x)^{-1} dx} \eta \quad (6)$$

$$N_x^g = \frac{h}{(1 - \nu^2)} \frac{1}{\int_0^a E(x)^{-1} dx} \left( \frac{1}{2} \int_0^a (w_{0,x})^2 dx + \frac{1}{R_x} \int_0^a w_0 dx \right) \quad (7)$$

$\eta$  ضریب اثر نیروی کششی یا فشاری اعمالی در مرزهای صفحه بر واحد سطح است. شرایط مرزی صفحه برای حالت تکیه‌گاه ساده به صورت رابطه (8) تعریف شده است [28].

$$w_0(x, t) = 0, w_{0,xx}(x, t) = 0 \quad (8)$$

## 2-1- بارگذاری آیرودینامیکی

تقابل سازه و سیال براساس تئوری پیستون غیرخطی در نظر گرفته شده است.  $\Delta P_a$ ، فشار گسترده بر روی صفحه در اثر جریان آیرودینامیک بالای صفحه به صورت رابطه (9) تعریف شده است.

$$\Delta P_a = P^d(x, t) + P^s(x) \quad (9)$$

$P^d(x, t)$ ، اثر نیروی آیرودینامیکی ناپایا و  $P^s(x)$ ، نیروی استاتیکی اولیه در نظر گرفته شده است.

رابطه فشار آیزنتروپیک بر روی صفحه با استفاده از تئوری پیستون براساس سرعت عمودی جریان بر روی صفحه  $V_z$  (سرعت فروریزش<sup>2</sup>)، در یک بعد به صورت رابطه (10) نشان داده شده است [29].

$$P^d(x, t) = P_\infty \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_z}{c_\infty} \right)^{2/\gamma - 1} \quad (10)$$

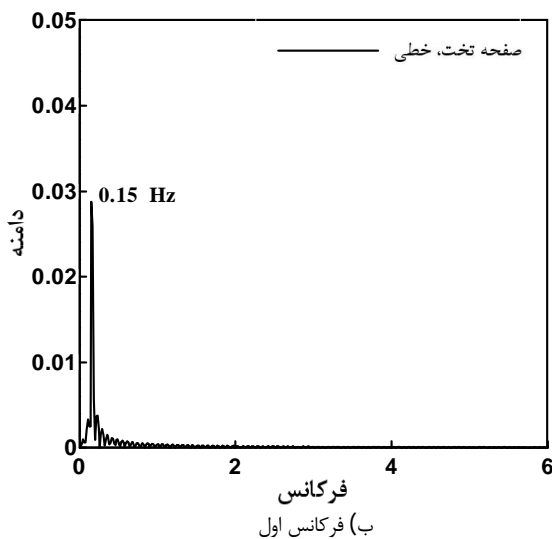
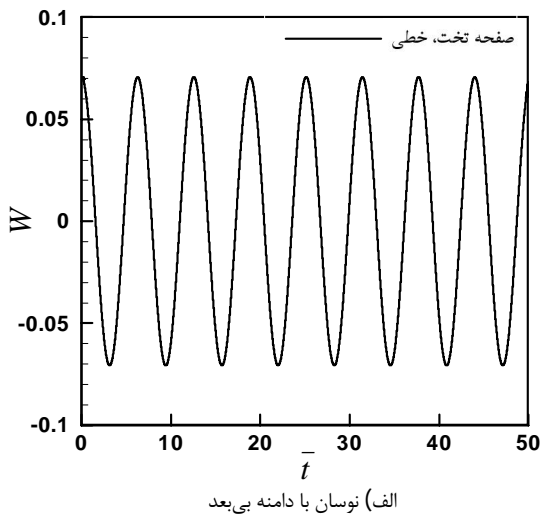
با بسط رابطه (10) تا مرتبه سه، مدل پیستون مرتبه سه بدست آمده است.

1-Transverse inertia  
2-Downwash velocity

شکل 2 الف، نوسانات صفحه تخت در طول زمان با دامنه بی بعد 0/07 تعیین شده و در شکل 2 ب، فرکانس مربوط به این نوسان ترسیم شده است. مقدار فرکانس اول صفحه تخت 0/15 هرترتز است.

جدول 1 ورودی‌های نمونه مسئله

مقدار	واحد	نام متغیر
2700	kg.m <sup>-3</sup>	چگالی سازه $\rho_m$
0/33		ضریب پواسون $\nu$
70×10 <sup>9</sup>	pa	مدول الاستیک دمای محیط $E_0$
82/86×10 <sup>9</sup>	pa	مدول الاستیک دمای صفر درجه $E_s (=1.183E_0)$
1	m	پهنای صفحه $a$
0/01	m	ضخامت صفحه $h$
340	m.s <sup>-1</sup>	سرعت صوت $C_\infty$
1/4		ثابت گازها $\gamma$
1/225	kg.m <sup>-3</sup>	چگالی هوا $\rho_\infty$



شکل 2 نوسان و فرکانس خطی صفحه تخت در طول زمان

$$W_{\xi\xi\xi\xi} - \frac{12}{h^2} \left( \eta + \frac{1}{2} \int_0^1 (W_\xi)^2 d\xi + \frac{\dot{h}}{h} \int_0^1 W d\xi \right) \times \left( W_{\xi\xi} - \frac{\dot{h}}{h} \right) + \pi^4 W_{\pi\pi} + \frac{M^2 \pi^4}{h \bar{\rho} \bar{\Omega}^2 \beta_1} \eta_1 \times \left( C_{a1} \left( \beta_2 \frac{\bar{\Omega}}{M} W_{\bar{r}} + W_\xi + \bar{h} \dot{W}_\xi \right) + C_{a3} \frac{1+\gamma}{4} \eta_1 M \times \left( \beta_2 \frac{\bar{\Omega}}{M} W_{\bar{r}} + W_\xi + \bar{h} \dot{W}_\xi \right)^2 + C_{a3} \frac{1+\gamma}{12} \eta_1^2 M^2 \times \left( \beta_2 \frac{\bar{\Omega}}{M} W_{\bar{r}} + W_\xi + \bar{h} \dot{W}_\xi \right)^3 \right) = \bar{P}^s \quad (17)$$

### 2-3- روش گالرکین

با استفاده از روش مودهای فرضی در مدل گالرکین، جابجایی عمودی صفحه را به صورت یک سری از مودهای سیستم سازه فرض نموده‌ایم. با توجه به شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده تابع شکل مودها به‌گونه‌ای تعریف شده تا شرایط مرزی را ارضاء کند. طبق روابط (19,18) داریم:

$$W = W_{\xi\xi} = 0, \xi = 0, 1 \quad (18)$$

$$W(\xi, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n a_i(\bar{t}) \phi_i(\xi) \quad (19)$$

$$\phi_i(\xi) = \sin(\lambda_i \xi), \lambda_i = i\pi$$

حل تقریبی حاصل برابر حل دقیق نیست و مقداری باقی‌مانده دارد. با ضرب باقی‌مانده یا خطا در تابع پایه مورد استفاده برای شکل مودهای سیستم،  $\phi_r(\xi) = \sin(r\pi\xi), r = 1, \dots, n$  و انتگرال‌گیری در طول صفحه و برابر صفر قرار دادن حاصل، یک دسته رابطه دیفرانسیلی معمولی با توجه به تعداد جملات بسط داده شده بدست آمده است.

### 2-4- حل عددی حوزه زمانی معادلات

معادلات غیرخطی معمولی حاصل در قسمت قبل، با استفاده از روش‌های عددی قابل حل است. مدل رانگ-کوتای مرتبه 4 و 5 با استفاده از نرم‌افزار میپل<sup>1</sup> مورد استفاده قرار گرفته است [30,31].

### 3- نتایج

نتایج در سه بخش ارائه شده است. بخش اول، تحلیل فرکانسی خطی سازه صفحه خمیده با تغییر انحنای صفحه، بخش دوم، تحلیل فرکانسی غیرخطی صفحه، با تغییر انحنای صفحه و اثر نیروی داخل صفحه، بخش سوم، تحلیل آیرولاستیک غیرخطی صفحه منحنی شکل و بررسی رفتار صفحه تحت اثر نیروهای مختلف، انجام شده است. تعداد مودهای بسط داده شده در روش گالرکین، چهار، شش و هشت مود انتخاب شده است و با یکدیگر مقایسه شده و درستی نتایج با افزایش تعداد مودهای فرضی، بررسی شده است. تحریک اولیه برای تحلیل ارتعاشات صفحه خطی و غیرخطی مربوط به دامنه جابجایی مود اول تیر، در طول آن، با ضریب 0/001 و 0/01 فرض شده است. تحلیل برای صفحه آلومینیومی، با شرایط جدول 1 انجام شده است.

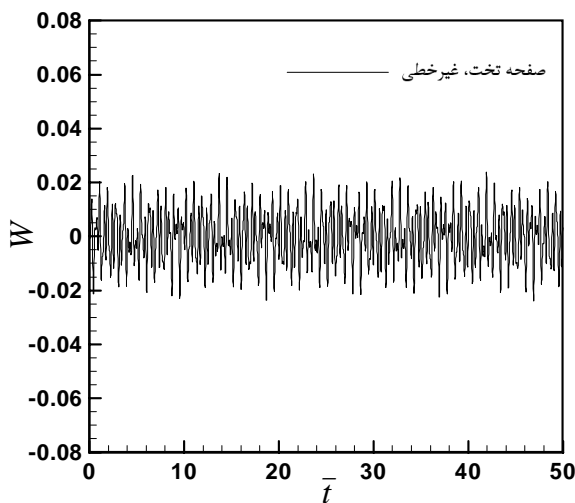
### 3-1- تحلیل فرکانسی خطی سازه‌ی صفحه منحنی شکل

با تغییر انحنای صفحه از حالت صفحه تخت، نوسانات بی‌بعد صفحه تخت و منحنی شکل و فرکانس مربوطه، برای سازه‌ی خطی، ترسیم شده است. در

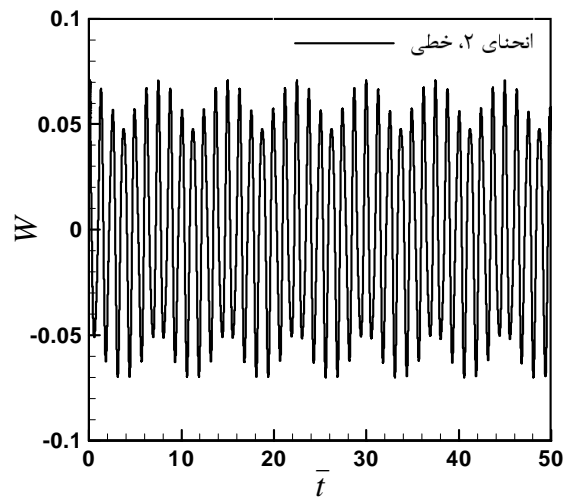
در شکل 3 الف، برای صفحه نمونه با خمیدگی  $2(H/h)$ ، با تحریک اولیه بیان شده با دامنه  $0/07$ ، نوسانات صفحه و در شکل 3 ب، فرکانس مربوطه که شامل مقادیر  $0/8$  و  $1/46$  هرتز است، نشان داده شده است. با افزایش انحنای صفحه، فرکانس سازه خطی افزایش یافته و دامنه نوسانات با تحریک اولیه ثابت باقی مانده است، همین‌طور رفتار نوسانی سیستم تغییر کرده است که تحلیل خوبی از رفتار سازه با افزایش انحنای صفحه بدست آمده است. با افزایش انحنای صفحه، نوسان صفحه به صورت متقارن، نسبت به حالت تعادل انجام شده است. بنابراین، در تحلیل خطی اثر تغییر انحنا در رفتار ارتعاشی غیر متقارن صفحه نقشی ندارد.

### 2-3- تحلیل فرکانسی غیرخطی سازه‌ی صفحه منحنی شکل

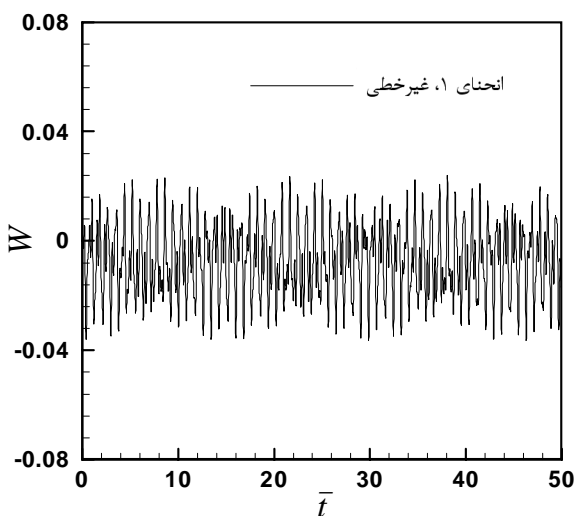
در این بخش تحلیل فرکانسی غیرخطی سازه صفحه منحنی شکل را تحت تحریک اولیه متفاوت، در حوزه‌ی زمان انجام داده و نتایج مورد بررسی قرار گرفته است. شکل 4 نوسان بی‌بعد صفحه تخت غیرخطی با مقدار اولیه تحریک  $0/01$  به صورت متقارن نسبت به حالت تعادل صفحه در محدوده‌ی



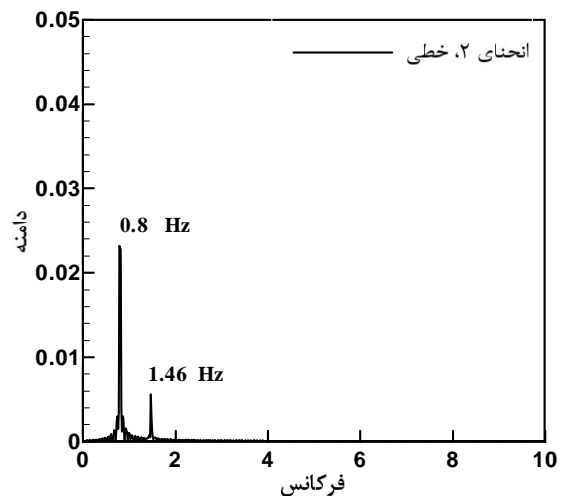
شکل 4 نوسان صفحه غیرخطی تخت با مقدار اولیه  $0/01$



الف) نوسان با دامنه بی‌بعد

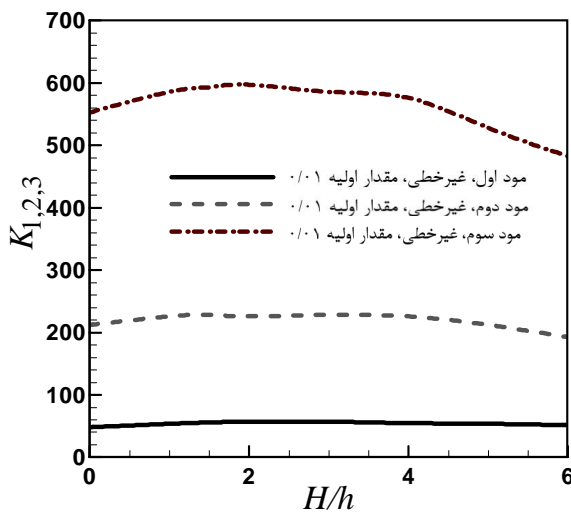


شکل 5 نوسان صفحه غیرخطی با انحنای 1 و مقدار اولیه  $0/01$



ب) فرکانس اول و دوم

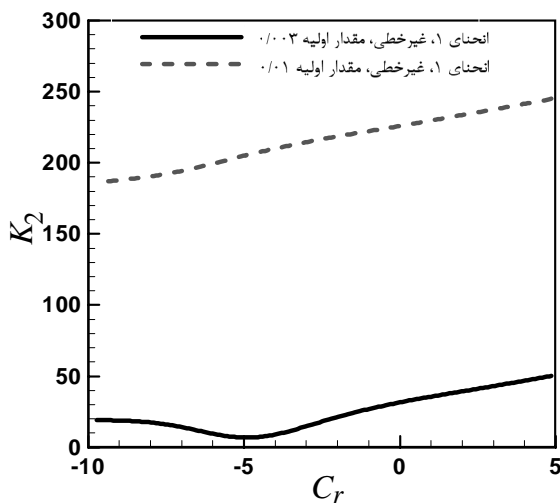
شکل 3 نوسان و فرکانس خطی صفحه در طول زمان با انحنای 2



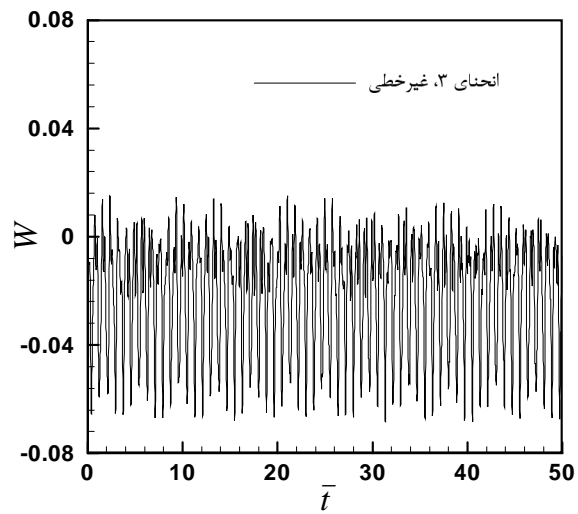
شکل 8 فرکانس مود اول تا سوم غیرخطی صفحه منحنی شکل

در مدل خطی تغییرات فرکانسی سازه در مدهای فرد بسیار زیاد نشان داده شده است و با حالت واقعی تفاوت پیدا کرده است. این موضوع از نقاط ضعف مدل‌سازی خطی برای تحلیل آیرودینامیک صفحه دوبعدی منحنی شکل است. در مدل غیرخطی تغییرات فرکانسی بسیار یکنواخت با تغییرات محدود براساس تغییر انحنا، نشان داده شده است.

اثر نیروی کششی و فشاری داخل صفحه در تغییر پاسخ فرکانسی صفحه خمیده غیرخطی با انحنا 1، برای مقادیر تحریک اولیه 0/01 و 0/003 در شکل 9 نشان داده شده است. برای تحریک 0/01 با افزایش بار فشاری، فرکانس مود دوم کاهش یکنواختی دارد، اما برای تحریک 0/003، با افزایش بار فشاری برای مقادیر  $C_r < -5$ ، فرکانس سیستم حالت افزایشی پیدا کرده است. بنابراین، مقدار تحریک اولیه و مقدار نیروی خارجی داخل صفحه، در پاسخ سیستم، بسیار مهم است و پاسخ به محدوده‌ی تحریک اعمال شده به سازه بسیار حساس است. می‌توان نتیجه گرفت، مقدار تحریک اعمال شده به سازه از طرف جریان سیال بالای سطح، در پاسخ سازه و رفتار آن موثر است. به ویژه هنگامی که با اثر نیروهای مکانیکی داخل صفحه ادغام شده باشد.



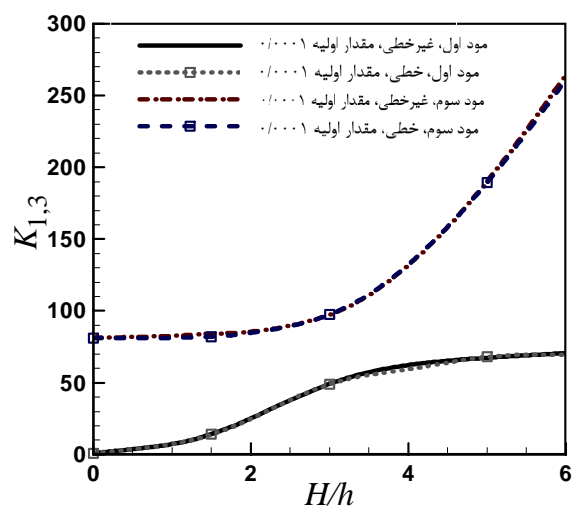
شکل 9 مقایسه مقدار اولیه در فرکانس مود دوم غیرخطی صفحه خمیده، برحسب نیروی فشاری داخل صفحه



شکل 6 نوسان صفحه غیرخطی با انحنا 3 و مقدار اولیه 0/01

برای مقایسه نتایج تحلیل فرکانسی خطی و غیرخطی سیستم، ابتدا تحلیل فرکانسی خطی انجام شده است. سپس، تحلیل غیرخطی برای مقادیر اولیه تحریک 0/01، 0/003 و 0/0001 انجام شده است. برای تحریک اولیه 0/0001، در شکل 7 نتایج فرکانس مود اول و سوم سازه‌ی خطی و غیرخطی صفحه خمیده مقایسه شده است. با افزایش انحنا صفحه هر دو فرکانس در حال افزایش هستند. با افزایش انحنا بیشتر از 3، فرکانس سوم (فرد) صفحه افزایش قابل توجهی نشان داده است. همین‌طور برای مقدار اولیه بسیار کوچک 0/0001، نتایج تحلیل خطی و غیرخطی کاملاً بریکدیگر انطباق دارند.

در شکل 8 فرکانس غیرخطی مود اول، دوم و سوم صفحه برای مقدار اولیه 0/01 ترسیم شده است. با افزایش انحنا صفحه تا 3، فرکانس‌ها افزایش یافته، سپس کمی کاهش را، نشان داده‌اند. تغییرات فرکانس‌ها کم بوده و برای انحنا بیشتر از 3 سیر نزولی کسب کرده است. در مقایسه نتایج فرکانسی شکل 7 و 8، با افزایش تحریک اولیه نتایج فرکانسی از حالت خطی به غیرخطی تبدیل شده است.

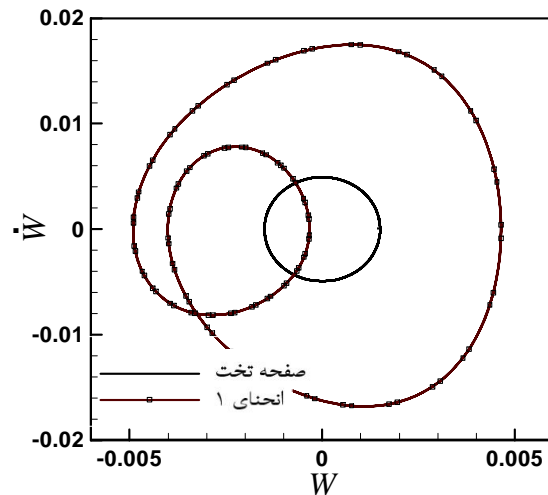


شکل 7 مقایسه فرکانس مود اول و سوم در تحلیل خطی و غیرخطی

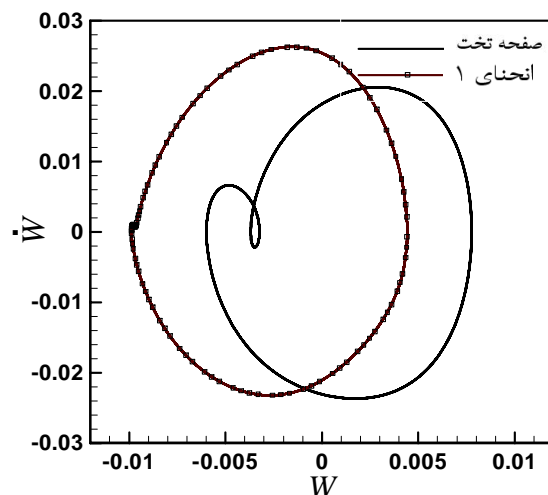
## 3-3- تحلیل آیروالاستیک غیرخطی صفحه منحنی شکل

در این بخش، تحلیل رفتار آیروالاستیک صفحه منحنی شکل، با تغییر انحنای صفحه و اثر نیروی داخل صفحه، بررسی شده است. در شکل 10 الف و ب، نوسان سیکل محدود صفحه تخت و منحنی شکل؛ با انحنای 1، به ترتیب با استفاده از تئوری آیرودینامیکی پیستون مرتبه اول و تئوری غیرخطی مرتبه سوم ترسیم شده است. برای هر دو حالت، رفتار صفحه، نوسان سیکل محدود است. اما شکل سیکل محدود و اندازه‌ی آن، با افزایش انحنای صفحه و افزایش مرتبه تئوری آیرودینامیک پیستون، تغییر کرده و افزایش یافته است. برای صفحه با انحنای 1، با افزایش مرتبه تئوری پیستون، نوسان صفحه از حالت متقارن به نامتقارن تبدیل شده و نوسان‌ها در جهت خمیدگی صفحه انتقال یافته است. با توجه به نتایج ارتعاشات غیرخطی صفحه در بخش 2-3، شکل 10 ب، تصویر مناسب‌تری از رفتار آیروالاستیک صفحه ارائه کرده است.

با افزایش بیشتر انحنای صفحه، رفتار آشوبناک صفحه منحنی شکل، با انحنای 2 در شکل 11 نشان داده است. با افزایش انحنای صفحه، دامنه نوسانات افزایش یافته و در محدوده‌ی  $-0/04 < W < 0/015$  قرار گرفته است.

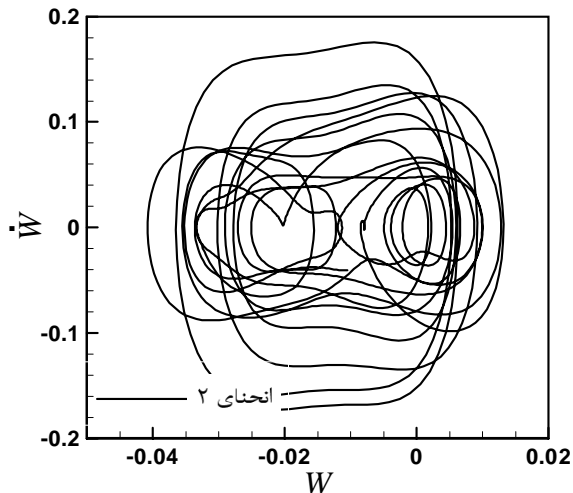


الف تئوری آیرودینامیکی پیستون مرتبه اول



ب تئوری آیرودینامیکی پیستون مرتبه سوم

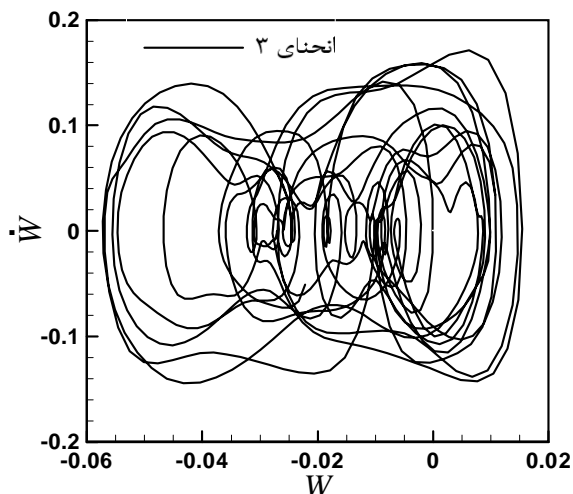
شکل 10 نوسان سیکل محدود صفحه تخت و خمیده با انحنای 1



شکل 11 رفتار آشوبناک صفحه خمیده با انحنای 2

شکل 12 رفتار آشوبناک صفحه منحنی شکل، برای انحنای 3 را، در محدوده‌ی  $-0/06 < W < 0/015$  نشان داده است. با افزایش انحنای صفحه از سیکل محدود به آشوبناک تبدیل شده و دامنه نوسان صفحه نیز افزایش یافته است.

با افزایش انحنای صفحه به 4 و 5 در شکل 13، رفتار صفحه به سیکل محدود تبدیل شده که در یک باند مشخص در نوسان است. در واقع رفتار سیکل محدود چند دوره‌ای در این شکل مشاهده شده است. با افزایش انحنای صفحه از حالت صفحه تخت تا انحنای 5، دامنه نوسانات در حال افزایش و مرکز تعادل استاتیکی نوسان صفحه در جهت انحنای صفحه افزایش یافته است. بنابراین، رفتار پسا فلاتر صفحه در جریان مافوق صوت برای صفحه استوانه‌ای خمیده، بسیار حساس به انحنای صفحه است. با افزایش انحنای صفحه از حالت تخت، رفتار صفحه بسیار متغیر نشان داده شده است. در شکل 14 الف و ب، به ترتیب نوسان سیکل محدود صفحه تخت و منحنی شکل؛ با انحنای 1 ترسیم شده است. اثر بار فشاری داخل صفحه  $(C_p)$ ، به مقدار  $-2/43$  فرض شده است. در شکل 14 الف، برای صفحه تخت اثر بار فشاری نسبت به حالت بدون بار، کاهش دامنه نوسان را به همراه داشته است. البته نوسان به صورت متقارن است. با افزایش انحنای 1، برخلاف حالت بدون اثر نیروی داخل صفحه در شکل 10، رفتار سیستم از سیکل محدود به آشوبناک تغییر یافته است. همین‌طور، دامنه نوسانات نیز افزایش



شکل 12 رفتار آشوبناک صفحه خمیده با انحنای 3

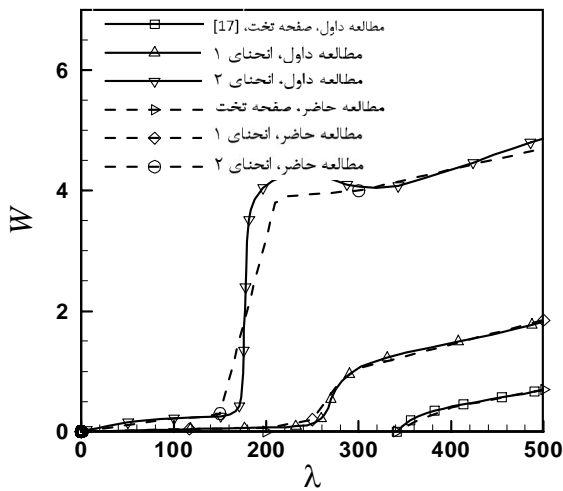
## 3-4- راستی آزمایی

تغییر دامنه جابجایی صفحه منحنی شکل برحسب تغییر فشار دینامیکی فلتر بی‌بعد سیستم  $\lambda$ ، برای انحنای مختلف، در شکل 15، ترسیم شده است. با افزایش فشار دینامیکی، دامنه جابجایی افزایش یافته است. جابجایی بی‌بعد  $W$ ، به صورت  $W = W/h$  تعریف شده است. نتایج حاصل از کد با نتایج داوول همخوانی بسیار خوبی دارد [17].

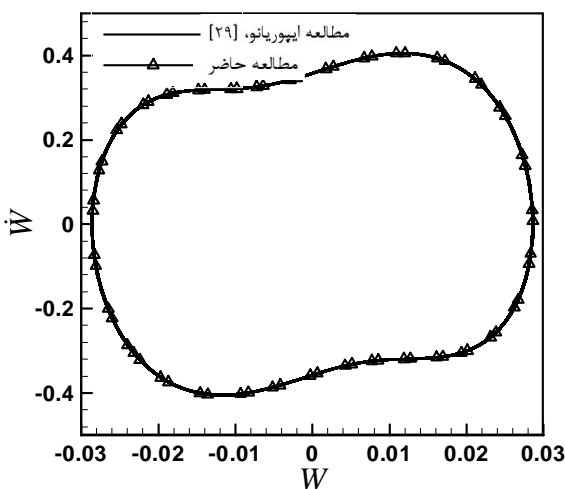
برای صفحه تخت غیرخطی با اثر نیروی داخل صفحه، تحقیق حاضر، با فعالیت ایپوریانو مقایسه شده است [29]. برای ضریب فشاری،  $-2/8$ ، نمودار سیکل محدود در شکل 16، نشان داده شده است. نتایج حاصل از کد، با فعالیت ایپوریانو کاملاً مطابق شده است.

## 4- نتیجه گیری نهایی

تحقیق انجام‌شده، شامل بررسی اثر بارهای محیطی بر روی شرایط پایداری صفحه تخت و منحنی شکل تحت اثر بارگذاری آیرودینامیکی مافوق صوت، با ترکیب نیروی فشاری داخل صفحه است که نتایج جالب توجهی حاصل

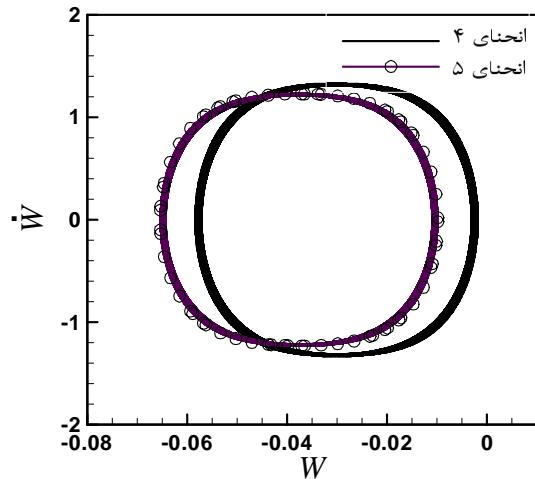


شکل 15 دامنه نوسان صفحه منحنی، برحسب تغییر فشار دینامیکی فلتر بی‌بعد



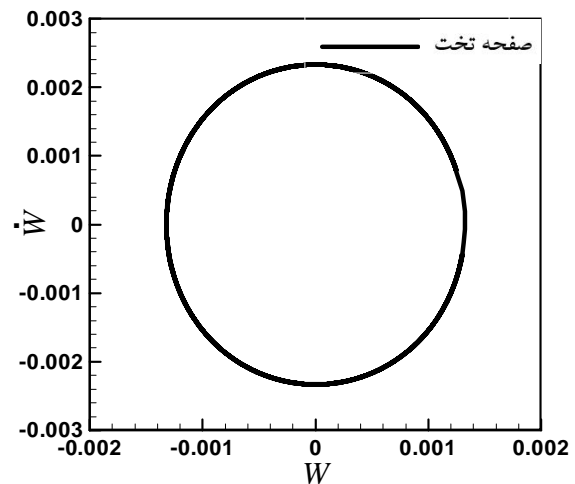
شکل 16 مقایسه نتایج سیکل محدود صفحه تخت غیرخطی، با اثر نیروی داخل

$$C_p = -2/8$$

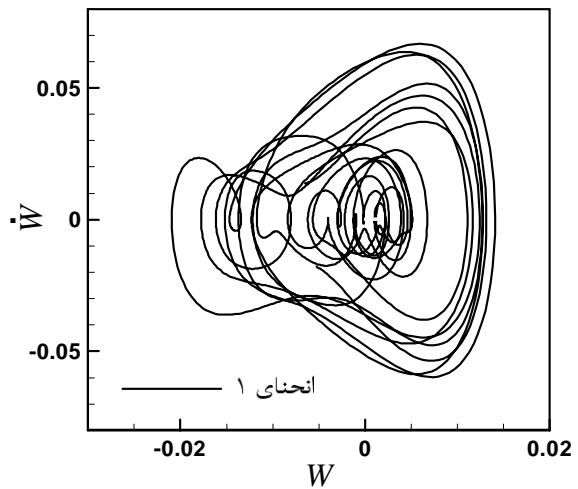


شکل 13 نوسان سیکل محدود صفحه با انحنای 4 و 5

یافته است. بنابراین، اثر نیروی داخل صفحه در تغییر رفتار و بحرانی‌تر شدن آن، تأثیر مستقیم دارد. همین‌طور، اثر نیرو برای صفحه تخت و منحنی باعث رفتار متفاوتی شده، زیرا در اولی کاهش دامنه نوسان و در دومی افزایش دامنه مشاهده شده است.



الف صفحه تخت



ب صفحه با انحنای 1

شکل 14 نوسان سیکل محدود و آشوبناک صفحه تخت و منحنی شکل؛ با اثر بار

$$C_p = -2/43$$



- [4] Ch. Kuo, L. Morino, J. Dugundji, Perturbation and harmonic balance methods for non-linear panel flutter problem, *AIAA Journal*, Vol. 10, pp. 1479-1484, 1972.
- [5] J.C. Dorsey, Metallic thermal protection system technology development: concepts, requirements and assessment overview, *AIAA 40th Aerospace Science Meeting*, AIAA 2002-0502, Reno, January 2002M.
- [6] X. Guo, C. Mei, Application of aeroelastic modes on nonlinear supersonic panel flutter at elevated temperatures, *Comput. Struct.*, Vol. 84, pp. 1619-1628, 2006.
- [7] A.J. Culler, J.J. McNamara, Studies on fluid-thermal-structural coupling for aero-thermo-elasticity in hypersonic flow, *AIAA Journal*, Vol. 48, pp. 1721-1738, 2010.
- [8] R. Perez, X.Q. Wang, M.P. Mignolet, Nonlinear reduced-order models for thermoelastodynamic response of isotropic and functionally graded panels, *AIAA Journal*, Vol. 49, pp. 630-641, 2011.
- [9] M.R. Visbal, On the interaction of an oblique shock with a flexible panel, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 30, pp. 219-225, 2012.
- [10] Y.C. Fung, The static stability of a two dimensional curved panel in a supersonic flow with an application to panel flutter, *J. Aeronaut. Sci.*, Vol. 21, pp. 556-565, 1954.
- [11] J.E. Yates, E.F.E. Zeijdel, *flutter of curved panels*. Air Force Office of Scientific Research TR 59-163, Midwest research institute, 1959.
- [12] W.J. Anderson, *Experiments on the flutter of flat and slightly curved panels at Mach number 2.81*, Air Force office of scientific research TN 2996, California Institute of Technology, Pasadena, 1962.
- [13] R.O. Stearman, M.H. Lock, Y.C. Fung, ames tests on the flutter of cylindrical shells, *aeroelasticity and structural dynamics*, California institute of technology, Pasadena, SM 62-37, 1962.
- [14] V.V. Bolotin, On the density of the distribution of natural frequencies of thin elastic shells, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 27, pp. 538-543, 1963.
- [15] J.C. Houbolt, A Study of Several Aerothermoelastic Problems of Aircraft Structures in High-speed Flight, *Mitteilungen aus dem Institute fur Flugzeugstatik und Leichtbau*, Verlag Leeman, Vol. 5, 1965.J.C.
- [16] H.G. Schaeffer, W.I.Jr. Heard, Flutter of a flat panel subjected to a non-linear temperature distribution, *AIAA Journal*, Vol. 8, pp. 1918-1923, 1965.
- [17] E.H. Dowell, Nonlinear flutter of curved plate, part 1, *AIAA Journal*, Vol. 7, pp. 424-431, 1969.
- [18] C.S. Ventres, E.H. Dowell, Comparison of theory and experiment for non-linear flutter of loaded plates, *AIAA Journal*, Vol. 8, pp. 2022-2030, 1970.
- [19] T.Y. Yang, A.D. Han, Flutter of thermally buckled finite element panels, *AIAA Journal*, Vol. 4, pp. 975-977, 1976.
- [20] D.Y. Xue, C. Mei, Finite element non-linear panel with arbitrary temperatures in supersonic flow, *AIAA Journal*, Vol. 31, pp. 154-162, 1993.
- [21] R.C. Zhou, D.Y. Xue, C. Mei, Finite element time domain modal formulation for non-linear flutter of composite panels, *AIAA Journal*, Vol. 32, pp. 2044-2052, 1994.
- [22] L. Librescu, W. Lin, M.P. Nemeth, J.H. Starnes, Vibration of geometrically imperfect panels subjected to thermal and mechanical loads, *J. Spacecr. Rockets*, Vol. 33, pp. 285-291, 1996.
- [23] L. Librescu and W. Lin, Vibration of thermomechanically loaded flat and curved panels taking into account geometric imperfections and tangential edge restraints, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 34, pp. 2161-2181, 1997.
- [24] L. Librescu, P. Marzocca, W.A. Silva, Linear/non-linear supersonic panel flutter in a high-temperature field, *J. Aircraft*, Vol. 41, pp. 918-924, 2004.
- [25] L.K. Abbas, X. Rui, P. Marzocca, M. Abdalla, R.D. Breuker, A parametric study on supersonic/hypersonic flutter behavior of aero-thermo-elastic geometrically imperfect curved skin panel, *Acta Mech*, Vol. 222, pp. 41-57, 2011.
- [26] C. Yang, Z. Wan, Aerothermal-aeroelastic two-way coupling method for hypersonic curved panel flutter, *Science China Technological Sciences*, Vol. 55, pp. 831-840, 2012.
- [27] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd ed. USA: CRC Press, 2003.
- [28] B.A. Miller, J.J. McNamara, S.M. Spottswood, A.J. Culler, The impact of flow induced loads on snap-through behavior of acoustically excited, thermally buckled panels, *Journal of sound and vibration*, Vol. 330, pp. 5736-5752, 2011.
- [29] B.I. Epureanu, L. S. Tang, M. P. Paidoussis, Coherent structures and their influence on the dynamics of aeroelastic panels, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 39, No. 6, pp. 977-991, 2004.
- [30] B. Ghadiri Dehkordi, M. Razi, S. Hamidi, Sweep wing Dynamic instability analysis in time domain, *Mechanics Journal of Tarbiat modares*, No. 37, pp. 93-106, 2009. (In Persian).
- [31] M.A. Kouchakzadeh, M. Rasekh, H. Haddadpour, Panel flutter analysis of general laminated composite plates, *J. Composite Structures*, 92, 2906-2915, 2010.

شده است. صفحه دوبعدی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. تحلیل فرکانسی خطی و غیرخطی صفحه با شرایط اولیه متفاوت و اثر نیروی فشاری داخل صفحه انجام شده است. همین‌طور، بررسی شرایط ناپایداری پسا فلاتر صفحه تخت و منحنی شکل با استفاده از مدل تئوری پیستون مرتبه اول و سوم، صورت پذیرفته و به طور کلی نتایج زیر حاصل شده است.

-با افزایش انحنای صفحه، فرکانس‌های سازه خطی افزایش یافته است.

-با افزایش انحنای صفحه، فرکانس‌های غیرخطی مود اول تا سوم برای نسبت انحنای کمتر از 3 افزایش داشته و سپس مقدار کمی کاهش نشان داده است. به طور کل تغییرات فرکانسی صفحه در تحلیل غیرخطی بسیار کمتر از حالت خطی است.

-برای صفحه با انحنای 1، با مقدار اولیه 0/01 و 0/003، با افزایش نیروی تراکمی صفحه در بازه  $5 < C_r < 10$ ، فرکانس‌ها رفتار کمی متفاوت نشان داده‌اند. برای مقدار اولیه تحریک 0/003 با افزایش بار فشاری، افزایش فرکانس مشاهده شده است.

-با افزایش انحنای صفحه از صفر تا 5، ابتدا نوسانات سیکل محدود است، سپس برای انحنای 2 تا 3 رفتار سیستم آشوبناک شده و با افزایش انحنای یک باند مشخص از حرکت سیکل محدود مشاهده شده است. بنابراین حساسیت رفتار نوسانی صفحه وابستگی زیادی به انحنای صفحه دارد.

-با افزایش انحنای صفحه، عدد ماخ فلاتر صفحه غیرخطی، کاهش یافته است. با استفاده از تئوری پیستون مرتبه سه نسبت به مرتبه یک، عدد ماخ فلاتر کاهش یافته است. همین‌طور، با افزایش انحنای صفحه، محدودی‌های جابجایی و ارتعاش صفحه، از مقادیر مثبت به منفی تبدیل شده است.

## 5- فهرست علائم

$a$	پهنای صفحه (m)
$c_\infty, U_\infty$	سرعت صوت، سرعت جریان آزاد ( $ms^{-1}$ )
$D$	سفتی صفحه
$h, \bar{h}, \hat{h}$	ضخامت صفحه، ضخامت بی‌بعد و نسبت ضخامت به شعاع انحنای صفحه
$M$	عدد ماخ
$N_x, M_x$	نیروی داخل صفحه و گشتاور نیروی صفحه
$P^d, P^s$	فشار دینامیکی و استاتیکی بالا و پایین صفحه
$q_\infty, \rho_\infty$	فشار دینامیکی و چگالی جریان
$R_x$	شعاع انحنای صفحه منحنی
$R_x, C_r$	نیروی فشاری داخل صفحه و ضریب نیروی فشاری
$w_0, \hat{w}_0$	جابجایی عمودی و تغییر شکل اولیه صفحه
$\Omega_0, \bar{\Omega}, K$	فرکانس اول، فرکانس بی‌بعد اول و فرکانس بی‌بعد برحسب فرکانس اول
$\Delta P_a$	فشار آیرودینامیکی اعمالی به صفحه

## 6- مراجع

- [1] P.F. Jordan, The physical nature of panel flutter, *Aeronaut. Digest*, Vol. 72, pp. 34-38, 1965.
- [2] E.H. Dowell, H.M. Voss, Experimental and Theoretical Panel Flutter Studies in the Mach Number Range 1.0 to 5.0, *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 12, pp. 2292-2304, Dec 1965.
- [3] J. Dugundji, Theoretical considerations of panel flutter at high supersonic Mach numbers, *AIAA Journal*, Vol. 4, pp. 1257-1266, 1966.