



## تعیین میدان تنش در اطراف تونل‌های دایروی شکل همراه با لاینینگ بتنی با استفاده از توابع پتانسیل مختلط

علیرضا کارگر<sup>1</sup>، رضا رحمان‌نژاد<sup>2\*</sup>، محمدعلی حاج‌عباسی<sup>3</sup>

- 1- دانشجوی دکتری، مهندسی معدن، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان  
 2- استاده، مهندسی معدن، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان  
 3- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان  
 \* کرمان، صندوق پستی 7618868366، sreza99@uk.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

در این مقاله راه‌حلی الاستیک، با استفاده از توابع پتانسیل مختلط موسخلیشویلی و کولوسوف، برای محاسبه مؤلفه‌های تنش در اطراف تونل‌های دایره‌ای شکل همراه با لاینینگ بتنی با ضخامت ثابت ارائه شده است. فرض شد که بتن و سنگ دارای رفتار الاستیک خطی بوده و همسانگردند. توده سنگ تحت میدان تنش اولیه قرار دارد. اتصال میان بتن و سنگ بصورت بدون لغزش<sup>1</sup> فرض گردید بطوریکه دارای جابجایی یکسان در فصل مشترک می‌باشند. به علت پیچیدگی مسئله به خاطر وجود نگهداری بتنی از نگاشت همدیس برای حل مسئله استفاده گردید. با فرض کرنش صفحه‌ای جواب فرم بسته‌ای برای مؤلفه‌های تنش بدست آمد. جواب بدست آمده با راه‌حل کرش<sup>2</sup>، هنگامی که ضخامت نگهداری به صفر میل می‌کند، و نتایج نرم‌افزار اجزا محدود آباکوس<sup>3</sup> مقایسه شد که همگرایی خوبی از خود نشان دادند، تنها در سقف تونل، در مرز داخلی دیواره بتنی، اختلافاتی میان روش تحلیلی و نرم‌افزار آباکوس مشاهده شد. همچنین مشخص گردید که روش ارائه شده مقادیر تنش‌ها را بصورت بسیار دقیق‌تر نسبت به نرم‌افزار آباکوس در دیواره داخلی نگهداری محاسبه می‌کند. در نهایت آنالیز حساسیتی نسبت به ضخامت و سختی بتن انجام گرفت و پیشنهادهایی برای طراحی لاینینگ ارائه شد. از مزایای این روش می‌توان به سرعت و دقت بالای محاسبات نسبت به روش‌های عددی اشاره نمود.

مقاله پژوهشی کامل  
 دریافت: 21 تیر 1393  
 پذیرش: 18 شهریور 1393  
 ارائه در سایت: 18 آذر 1393  
 کلید واژگان:  
 الاستیسیته صفحه‌ای  
 تونل دایروی شکل  
 توابع پتانسیل مختلط

## Investigation of stress field around circular tunnels with concrete lining using complex potential functions

Ali Reza Kargar<sup>1</sup>, Reza Rahmancejad<sup>2\*</sup>, Mohamad Ali Hajabasi<sup>3</sup>

- 1- Department of Mining Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran  
 2- Department of Mining Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran  
 3- Department of Mechanical Engineering, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran  
 \* P.O.B. 7618868366 Kerman, Iran, sreza99@uk.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
 Received 12 July 2014  
 Accepted 9 September 2014  
 Available Online 09 December 2014

**Keywords:**  
 Plane theory of elasticity  
 Circular tunnels  
 Complex potential functions

### ABSTRACT

Using Muskhelishvili and Kolosov complex potential functions, an elastic solution is presented in this study in order to investigate stress components around circular tunnels reinforced by concrete lining with constant thickness. It was assumed that rock mass and concrete behave as isotropic linearly elastic materials. The rock mass undergoes an in situ stress field. It was also supposed that rock and concrete interface is in no-slip condition so that they have common displacement. Due to complexity of the problem for concrete reinforced layer, conformal mapping functions were utilized in order to find a solution. Supposing plane strain condition, the problem was solved, and a closed-form solution was obtained. The solution was compared to Kirsch solution, in which the lining thickness was reduced to zero, and also ABAQUS finite element software results, which showed a good agreement, except for ABAQUS software predictions around crown of tunnel lining periphery where some discrepancies were found; also it was demonstrated that this solution predicts stress components at inner lining periphery much more accurately than ABAQUS software. Finally, a sensitivity analysis based on rigidity and thickness of liner was conducted and some propositions were made on design of concrete liner. The advantage of this solution lays in the fact that it has quicker and more accurate calculation process compared to numerical methods.

- 1- No-slip condition  
 2- Kirsch solution  
 3- ABAQUS finite element software

Please cite this article using:

A. R. Kargar, R. Rahmancejad, M. A. Hajabasi, Investigation of stress field around circular tunnels with concrete lining using complex potential functions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 267-276, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

## 1- مقدمه

کارگر و همکاران (2014) راه‌حل نیمه تحلیلی را برای تونل‌های غیردایروی با پوششش بتنی ارائه دادند که از توابع پتانسیل مختلط و نگاشت‌های همدیس برای حل مسئله استفاده نمودند [15].

در این تحقیق سعی شده‌است با استفاده از روش توابع پتانسیل مختلط موسخلیشویلی راه‌حلی برای تعیین میدان تنش در اطراف تونل‌های دایروی با نگهداری بتنی ارائه شود. فرض شده است که بتن و سنگ دارای مدل رفتاری الاستیک خطی و همسانگرد هستند. سپس با استفاده از راه‌حل ارائه شده به بررسی تأثیر خصوصیات لاینینگ بر تنش مماسی ایجادشده در نگهداری و سنگ پرداخته می‌شود.

## 2- فرضیات کلی

برای حل مسئله، مطابق شکل 1، در ابتدا با استفاده از نگاشت  $Z = R_1 \xi$  تونل دایروی شکل و نگهداری بتنی را به روی دو دایره هم‌مرکز با شعاع خارجی یک و داخلی  $R_0$  تصویر می‌کنیم، به گونه‌ای که ناحیه‌های  $S_1$  و  $S_2$ ، به ترتیب با مدول الاستیسیته و ضریب پواسون  $E_1$ ،  $\nu_1$  و  $E_2$ ،  $\nu_2$  را به ناحیه‌های  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  تصویر کند.

بر اساس نظریه موسخلیشویلی و کولوسوف توابع پتانسیل مختلط  $\varphi_1$ ،  $\psi_1$  و  $\varphi_2$ ،  $\psi_2$ ، به ترتیب در میدان  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  موجودند که میدان تنش طبق رابطه (1) بر اساس آن‌ها بدست می‌آید [8].

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2 \left( \frac{\dot{\varphi}_j(\xi)}{w'(\xi)} + \overline{\frac{\dot{\varphi}_j(\xi)}{w'(\xi)}} \right)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \frac{2e^{2i\theta}}{w'(\xi)} \times \left\{ \frac{\varphi_j''(\xi)w'(\xi) - \varphi_j'(\xi)w''(\xi)}{(w'(\xi))^2} + \psi_j'(\xi) \right\} \quad j=1,2 \quad (1)$$

که در اینجا  $\sigma_\rho$ ،  $\sigma_\theta$  و  $\tau_{\rho\theta}$  به ترتیب تنش شعاعی، مماسی و برشی در ناحیه‌های  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$ ، و  $Z = w(\xi)$  تابع نگاشت همدیس است.

توابع  $\varphi_1$  و  $\psi_1$  بصورت رابطه (2) در ناحیه  $\gamma_1$  تعریف می‌شوند.

$$\varphi_1(\xi) = \Gamma w(\xi) + \varphi_0(\xi), \quad \psi_1(\xi) = \Gamma' w(\xi) + \psi_0(\xi) \quad (2)$$

که طبق رابطه (3):

$$\varphi_0(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^{-j}, \quad \psi_0(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \xi^{-j} \quad (3)$$

$\varphi_0(\xi)$  و  $\psi_0(\xi)$  توابعی هولومورف هستند که در بینهایت مقدار صفر

را اختیار می‌کنند، ضرایب  $\Gamma$  و  $\Gamma'$  نیز بصورت رابطه (4) تعریف می‌شوند.

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2) = -\frac{1+K}{4}\gamma H$$

$$\Gamma' = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{1-K}{2}\gamma H \quad (4)$$

$\sigma_1$  و  $\sigma_2$  به ترتیب تنش‌های اصلی قائم و افقی، و  $K$  ضریب فشار جانبی است. توابع  $\varphi_2(\xi)$  و  $\psi_2(\xi)$  بصورت رابطه (5) در ناحیه  $\gamma_2$  تعریف می‌شوند.

تونل‌ها یکی از سازه‌های زیرزمینی است که سهم مهمی در حمل و نقل، انتقال آب، مخابرات و انتقال کابل‌های زیرزمینی دارا می‌باشند. یکی از مهم‌ترین فرم مقاطع که در حفاری تونل بکار می‌رود فرم مقطع دایره‌ای شکل است. این فرم مقطع به دلیل توزیع تنش مناسب در اطراف حفره دارای کاربرد فراوانی در سنگ‌های ضعیف و نواحی با تمرکز تنش بالا است. محققان زیادی سعی در تخمین تنش ایجادشده در اطراف حفریات زیرزمینی و تعیین نگهداری بهینه، با بکارگیری روش‌های تجربی، عددی و تحلیلی، داشته‌اند [6-1].

در روش‌های تجربی نگهداری بهینه با توجه به خصوصیات توده سنگ و مشخصات فضای زیرزمینی بر اساس مشاهدات تجربی تعیین می‌گردد. قابل توجه است که این روش قادر به تخمین نگهداری با دقت بالا نیست.

روش دیگری که در تعیین تنش در توده‌سنگ و نگهداری به کار می‌رود روش‌های عددی است. در این حالت میدان تنش و جابجایی در نگهداری و توده‌سنگ به کمک یکی از روش‌های رایج عددی (المان محدود، تفاضل محدود و سایر روش‌ها) تعیین می‌شود. از مزیت روش‌های عددی این است که قادر به مدل‌سازی مسائل پیچیده هستند، اما دارای معایبی می‌باشند که از جمله می‌توان به وابستگی شدید آن‌ها به ابعاد مدل، ابعاد المان‌ها، توابع درون‌یاب و گرادیان تنش در مدل اشاره کرد بنابراین نمی‌توان انتظار داشت که برای مثال با ابعاد المان مختلف جواب واحدی برای مسئله حاصل شود. در نتیجه میدان تنش و جابجایی که از این روش بدست می‌آید با خطا همراه است [7].

روش‌های تحلیلی از دقیق‌ترین روش‌ها برای تعیین میدان تنش و جابجایی در اطراف حفریات و نگهداری است. در این روش هرچه فرضیات اولیه به شرایط مسئله نزدیک‌تر باشد جواب بدست آمده همخوانی بیشتری با واقعیت دارد. یکی از روش‌های تحلیلی که در بدست آوردن میدان تنش و جابجایی در محیط الاستیک کاربرد دارد استفاده از توابع پتانسیل مختلط موسخلیشویلی<sup>1</sup> است [8].

اکسدادکنیل (2002) راه‌حل جدیدی را برای محاسبه تنش و جابجایی در اطراف تونل‌های غیردایروی بدون نگهداری بر اساس توابع پتانسیل مختلط موسخلیشویلی با فرض محیط با رفتاری الاستیک و شرایط کرنش صفحه‌ای ارائه داد. او روشی نیمه تحلیلی برای محاسبه تنش و جابجایی در اطراف تونل‌های دایروی دارای گوشه که دچار شکست شده‌اند را نیز ارائه کرد [9]. روش مشابهی نیز برای تونل‌های دایره‌ای شکل در نیم صفحه توسط وریویجت و استراک ارائه گردید [12,11].

اصلانی (2009) تابع پتانسیل جدیدی را برای تعیین میدان تنش و تغییرشکل در اطراف تونل دایره‌ای شکل بدون نگهداری ارائه کرد و به منظور اعتبارسنجی راه‌حل خود از توابع پتانسیل مختلط استفاده نمود [13].

بویت (2009) با استفاده از روش سختی نسبی<sup>2</sup> و توابع پتانسیل مختلط راه‌حلی را برای محاسبه عکس‌العمل نگهداری توده‌سنگ برای تونل‌های مستطیلی شکل عمیق در شرایط زهکشی شده و زهکشی نشده ارائه داد. او در مدل خود فرض کرد که تنش برجای اولیه تنها تنش برشی است [5].

باتیستا (2011) میدان تنش‌ها و جابجایی‌ها را در اطراف حفریات غیردایروی با استفاده از توابع مختلط موسخلیشویلی و نگاشت شوارتز-کریستوفل تعیین نمود [14].

1- Muskhelishvili  
2- Relative stiffness method

نظر گرفته شده است (یعنی بتن و سنگ در فصل مشترک دارای جابجایی یکسان هستند) توابع  $\varphi_1, \psi_1$  و  $\varphi_2, \psi_2$  می‌بایست شرط پیوستگی بردار جابجایی‌ها و تنش را در مرز  $\eta_1$  و شرط بردار تنش صفر را در مرز  $\eta_2$  ارضا کنند.

$$\frac{k_1}{G_1} \varphi_1(t) - \frac{1}{G_1} \left( \frac{w(t)}{w'(t)} \overline{\varphi_1'(t) + \psi_1(t)} \right) = \eta_1 \text{ روی} \quad (7)$$

$$\frac{k_2}{G_2} \varphi_2(t) - \frac{1}{G_2} \left( \frac{w(t)}{w'(t)} \overline{\varphi_2'(t) + \psi_2(t)} \right)$$

$$\varphi_1(t) + \frac{w(t)}{w'(t)} \overline{\varphi_1'(t) + \psi_1(t)} = \eta_1 \text{ روی} \quad (8)$$

$$\varphi_2(t) + \frac{w(t)}{w'(t)} \overline{\varphi_2'(t) + \psi_2(t)}$$

$$\varphi_2(t) + \frac{w(t)}{w'(t)} \overline{\varphi_2'(t) + \psi_2(t)} = 0 \quad \eta_2 \text{ روی} \quad (9)$$

که در اینجا  $G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$

$$k_i = \begin{cases} 3 - 4\nu_i & \text{ کرنش صفحه‌ای} \\ \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu_i} & \text{ تنش صفحه‌ای} \end{cases} \quad (i=1,2)$$

با ضرب هسته انتگرال کوشی  $\left(\frac{dt}{t-\xi}\right)$  در معادلات 6، 7 و 8 و انتگرال‌گیری در امتداد دایره واحد  $\eta_1$  برای نقاط  $\xi$  با اندازه بزرگتر و کوچکتر از یک به دستگاه شش معادله شش مجهول زیر می‌رسیم  
برای  $|\xi| > 1$

$$\frac{k_1}{G_1} \varphi_1(\xi) = \frac{k_2}{G_2} F_2(\xi) + \eta_1 \text{ روی} \quad (10)$$

$$\frac{1}{G_2} \left( -\xi F_1' \left( \frac{1}{\xi} \right) + c_1 \xi + 2c_2 - H_1 \left( \frac{1}{\xi} \right) \right)$$

$$\varphi_1(\xi) = F_2(\xi) + \xi F_1' \left( \frac{1}{\xi} \right) - c_1 \xi - 2c_2 + H_1 \left( \frac{1}{\xi} \right) \quad \eta_1 \text{ روی} \quad (11)$$

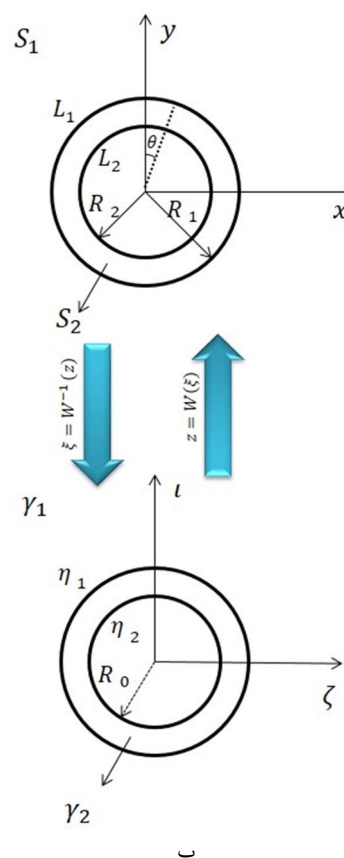
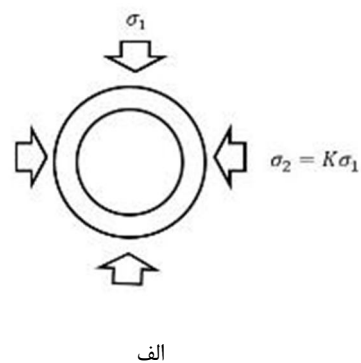
$$F_2(R_0 \xi) + R_0 \xi F_1' \left( \frac{R_0}{\xi} \right) - c_1 R_0 \xi - 2R_0^2 c_2 + H_1 \left( \frac{R_0}{\xi} \right) = 0 \quad \eta_2 \text{ روی} \quad (12)$$

$$\left| \xi \right| < 1 \text{ برای}$$

$$-\frac{1}{G_1} \left( \xi \overline{\varphi_1' \left( \frac{1}{\xi} \right) + \psi_1 \left( \frac{1}{\xi} \right)} \right) = \eta_1 \text{ روی} \quad (13)$$

$$\frac{k_2}{G_2} F_1(\xi) - \frac{1}{G_2} \left( \xi F_2' \left( \frac{1}{\xi} \right) + H_2 \left( \frac{1}{\xi} \right) \right)$$

$$\xi \overline{\varphi_1' \left( \frac{1}{\xi} \right) + \psi_1 \left( \frac{1}{\xi} \right)} = \eta_1 \text{ روی}$$



شکل 1 الف) تونل دایروی شکل همراه با پوشش بتنی تحت شرایط تنش اولیه ب) نگاشت تونل و نگهداری به دو دایره هم‌مرکز با شعاع  $R_0$  و واحد

$$\varphi_2(\xi) = F_1(\xi) + F_2(\xi) \quad \psi_2(\xi) = G_1(\xi) + G_2(\xi) \quad (5)$$

که در اینجا

$$F_1(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \xi^i \quad F_2(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i' \xi^{-i} \quad H_1(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \xi^i \quad H_2(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i' \xi^{-i} \quad (6)$$

### 3- روش حل

از آنجا که فصل مشترک بتن سنگ در دیواره تونل بصورت بدون لغزش در

تنش‌ها در امتداد دایره واحد  $\eta_1$  از سمت ناحیه  $\gamma_2$  بصورت رابطه (20) بدست می‌آید

$$\sigma_\theta = \frac{4}{R_1} \operatorname{Re} \left\{ c_1 + 3c_3\xi^2 - sa_1\xi^{-2} + \frac{1-K}{2} \frac{1}{1+x_2} \gamma H \xi^{-2} \right\} - \sigma_\rho \quad (20)$$

در اینجا  $\sigma_\rho$  با استفاده از رابطه 19 برای  $|\xi|=1$  بدست می‌آید. در امتداد دایره  $\eta_2$  نیز به همین صورت، با استفاده از رابطه 20 و قرار دادن  $\sigma_\rho = 0$ ، بدست می‌آید.

#### 4- روش کار و بحث

در این بخش در ابتدا مدل ریاضی ارائه شده با رابطه کرش، و سپس با نتایج نرم‌افزار اجزا محدود آباکوس مقایسه شده، و در انتها با استفاده از آن آنالیز حساسیتی بر روی خصوصیات لاینینگ صورت گرفته و تأثیر عواملی همچون ضخامت و سختی بتن بر تنش مماسی ایجادشده در نگهداری و سنگ بررسی می‌شود. بدین منظور، مفاهیم ضخامت نسبی، سختی نسبی و فاکتور تمرکز تنش بصورت زیر معرفی می‌شود:

$$\frac{G_2}{G_1} = \text{سختی نسبی} \quad \frac{t}{R_1} = \text{ضخامت نسبی}$$

$$\frac{\sigma}{\gamma H} = \text{فاکتور تمرکز تنش}$$

که  $t$  در اینجا ضخامت بتن است.

1-4- مقایسه روش تحلیلی ارائه شده با روش کرش و نتایج نرم‌افزار آباکوس به منظور مقایسه نتایج روش تحلیلی ارائه شده با روش کرش و نتایج نرم‌افزار آباکوس از داده‌های جدول 1 برای مشخصات توده‌سنگ و بتن استفاده گردید. تونل با شعاع خارجی و داخلی  $(R_2, R_1)$  به ترتیب 4/5 و 4 متر در عمق 120 متری حفر شده است.

برای مقایسه راه‌حل ارائه شده با روش کرش، ضخامت نسبی بتون کاهش داده شد تا مدل مسئله به حفره بدون نگهداری، که راه‌حل آن توسط کرش ارائه شده است، میل کند. با بررسی نتایج در اشکال 2، 3 و 4 مشاهده گردید که با کاهش ضخامت نسبی فاکتور تمرکز تنش مماسی، شعاعی و برشی در فصل مشترک بتن-سنگ، در سنگ، به مقادیر تعیین‌شده توسط راه‌حل کرش میل می‌کند، که این نشانگر درستی راه‌حل است.

جدول 1 مشخصات توده‌سنگ و بتن

بازالت	نوع سنگ
60	$E_1$ (GPa)
0/15	$\nu_1$
25	$E_2$ (GPa)
0/2	$\nu_2$
0/025	$\left(\frac{\text{MN}}{\text{m}^3}\right)$ وزن مخصوص سنگ
0/5	ضریب فشار جانبی ( $K$ )

$$F_1(\xi) + \xi F_2'(\frac{1}{\xi}) + H_2(\frac{1}{\xi}) \quad (14)$$

$$F_1(R_0\xi) + R_0\xi F_2'(\frac{R_0}{\xi}) + H_2(\frac{R_0}{\xi}) = 0 \quad \text{روی } \eta_2 \quad (15)$$

با استفاده از راه‌حل سریها و نوشتن معادلات بر حسب دو تابع  $\varphi_0(\xi)$  و  $F_1(\xi)$  به دستگاه رابطه (16) می‌رسیم

$$\begin{bmatrix} Co_{11} & 0 & 0 \\ 0 & Co_{22} & Co_{23} \\ 0 & Co_{32} & Co_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

ضرایب ماتریس بصورت رابطه (17) است:

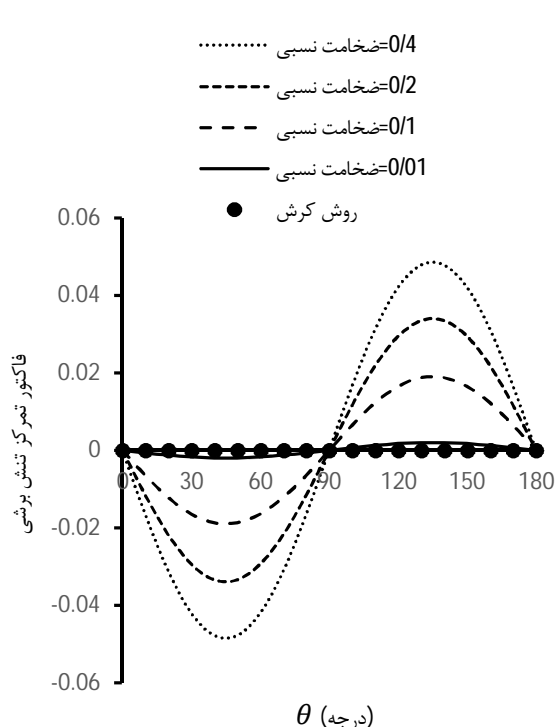
$$\begin{aligned} Co_{11} &= 2R_0 + \left(\frac{k}{l} - 1\right) R_0^{-1}, \quad Co_{22} = R_0^3 + \frac{k}{l} R_0^{-3} \\ Co_{23} &= -s \left(R_0 - \frac{1}{R_0}\right) R_0^{-2}, \quad Co_{32} = 3R_0^2 \left(R_0 - \frac{1}{R_0}\right) \\ Co_{33} &= sR_0^{-1} + fR_0, \quad q_1 = -\frac{k-lx_2}{l(1+x_2)} \frac{1+K}{2} R_0^{-1} R_1 \gamma H \\ q_2 &= \frac{1}{1+x_2} R_0^{-3} R_1 \left(1-R_0^2\right) \frac{1-K}{2} \gamma H \\ q_3 &= \frac{1}{1+x_2} \frac{1-K}{2} \left(R_0^{-1} + x_2 R_0\right) \end{aligned} \quad (17)$$

که در اینجا ضرایب  $f, s, l, k$  بصورت رابطه (18) می‌باشند

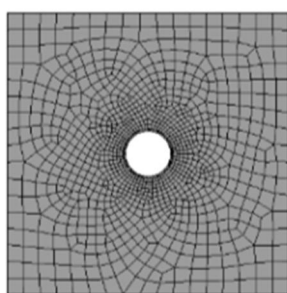
$$\begin{aligned} l &= \frac{1-G_2}{1+X_2}, \quad k = 1-l \\ s &= \frac{x_2 - x_1 \frac{G_2}{G_1}}{1+x_2}, \quad f = 1-s \end{aligned} \quad (18)$$

پس از حل دستگاه و تعیین  $c_1, c_3$  و  $a_1$  (بقیه ضرایب صفر می‌باشند) با استفاده از رابطه 2 تنش‌ها را تعیین می‌کنیم. برای  $|\xi| \geq 1$  تنش‌ها بصورت رابطه (19) محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \operatorname{Re} \left\{ -2 \frac{a_1}{R_1} \xi^{-2} + \frac{\xi^2}{R_1 \rho^2} \left[ 2a_1 \xi^{-2} - \frac{1}{l} (c_1 \xi^{-2} + 3c_3 \xi^{-4}) - 3a_1 \xi^{-4} - \frac{1+K}{2} \frac{\gamma H}{l(1+x_2)} \xi^{-2} \right] \right\} \\ \sigma_\rho &= \operatorname{Re} \left\{ -2 \frac{a_1}{R_1} \xi^{-2} - \frac{\xi^2}{R_1 \rho^2} \left[ 2a_1 \xi^{-2} - \frac{1}{l} (c_1 \xi^{-2} + 3c_3 \xi^{-4}) - 3a_1 \xi^{-4} - \frac{1+K}{2} \frac{\gamma H}{l(1+x_2)} \xi^{-2} \right] \right\} \\ \tau_{\rho\theta} &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi^2}{R_1 \rho^2} \left[ 2a_1 \xi^{-2} - \frac{1}{l} (c_1 \xi^{-2} + 3c_3 \xi^{-4}) - 3a_1 \xi^{-4} - \frac{1+K}{2} \frac{\gamma H}{l(1+x_2)} \xi^{-2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (19)$$



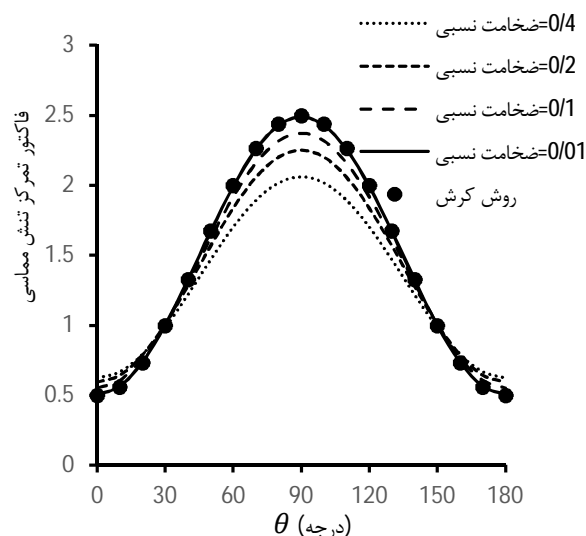
شکل 4 تغییرات فاکتور تمرکز تنش برشی در طول فصل مشترک بتن-سنگ در سنگ برای ضخامت‌های نسبی متفاوت با استفاده از راه‌حل ارائه شده، و راه‌حل کرش



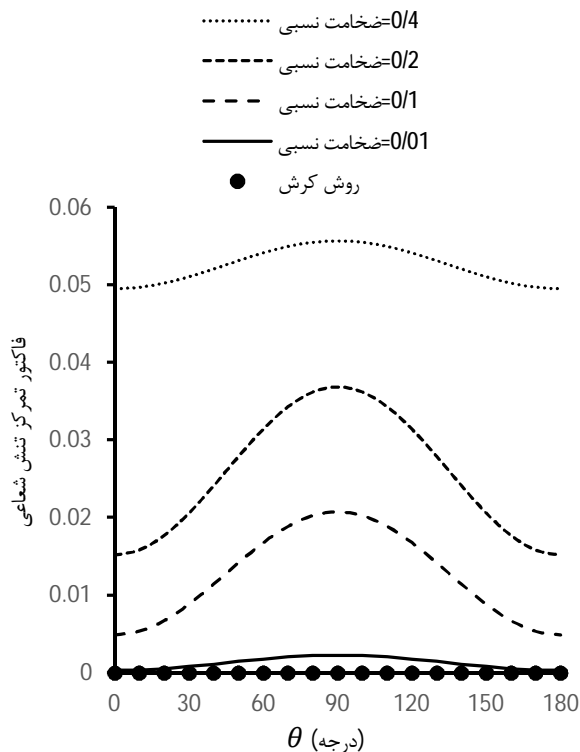
شکل 5 مدلسازی با نرم‌افزار المان محدود آباکوس

داشت. شکل 6 تطابق خوبی را میان تنش مماسی ( $\sigma_\theta$ ) محاسبه‌شده با استفاده از روش تحلیلی و نرم‌افزار آباکوس در دیواره تونل نشان می‌دهد. شکل‌های 7 و 8 نیز همگرایی خوبی را میان تنش مماسی در فصل مشترک بتن سنگ حاصل از روش تحلیلی و نرم‌افزار آباکوس نشان می‌دهند. همان‌گونه که در شکل 9 مشاهده می‌شود بیشترین اختلاف نسبی میان جواب راه حل تحلیلی و نرم‌افزار آباکوس در سقف تونل، در امتداد دیواره داخلی بتن، مشاهده می‌گردد.

شکل 10 تنش نرمال ( $\sigma_r$ ) و برشی ( $\tau_{r\theta}$ ) را در سطح داخلی دیواره تونل نشان می‌دهد. همان‌گونه که دیده می‌شود تنش نرمال و برشی بدست آمده از روش تحلیلی مقدار صفر را اختیار کرده‌اند که با واقعیت همخوانی کامل دارد زیرا سطح داخلی تونل تحت تأثیر هیچ تنشی قرار ندارد اما نتایج بدست آمده از نرم‌افزار آباکوس انحراف از مقدار صفر را نشان می‌دهند که خود گویای کارایی بیشتر روش تحلیلی است.



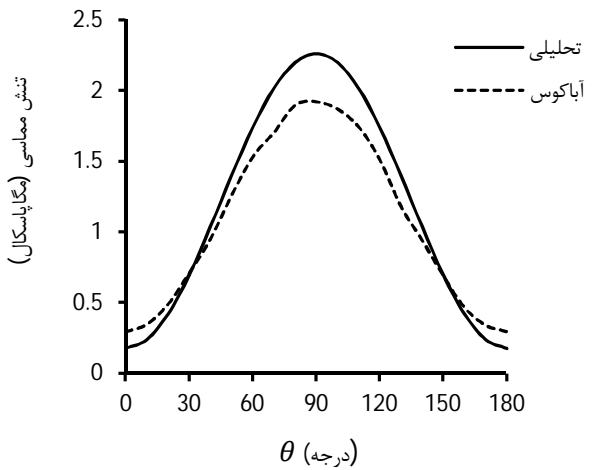
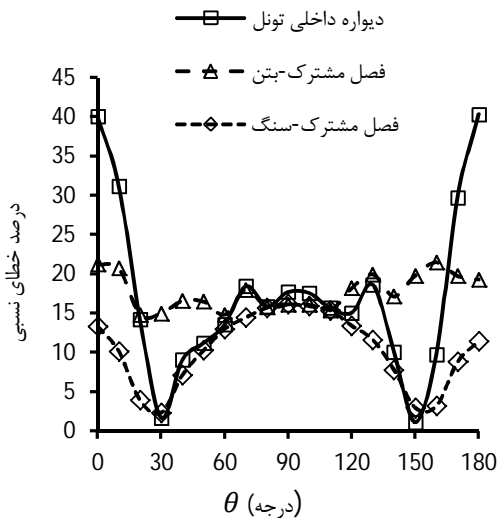
شکل 2 تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در طول فصل مشترک بتن-سنگ در سنگ برای ضخامت‌های نسبی متفاوت با استفاده از راه‌حل ارائه شده، و راه‌حل کرش



شکل 3 تغییرات فاکتور تمرکز تنش شعاعی در طول فصل مشترک بتن-سنگ در سنگ برای ضخامت‌های نسبی متفاوت با استفاده از راه‌حل ارائه شده، و راه‌حل کرش

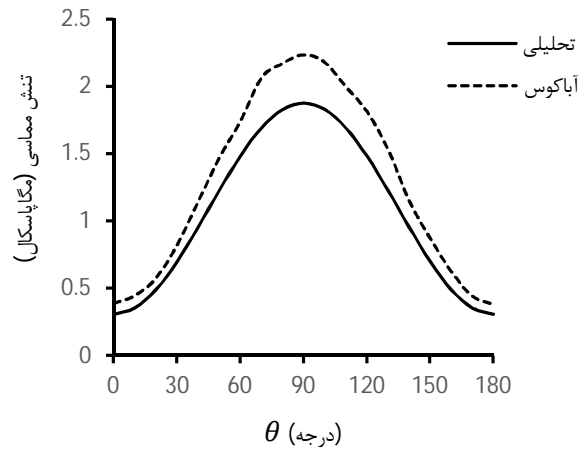
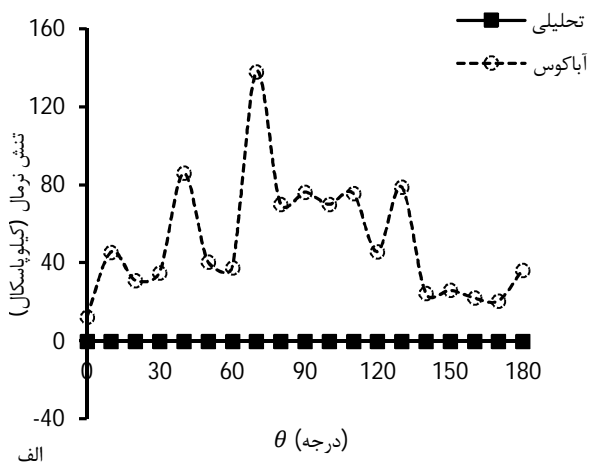
به منظور مدلسازی با نرم‌افزار آباکوس مدلی بصورت شکل 5 با ابعاد  $50 \times 50$  ساخته شد که میدان تنش اولیه (تنش برجای زمین) بصورت شرایط اولیه به مدل اعمال گردید و مرزهای مدل در جهت  $X$ ،  $Y$  فیکس شدند. فصل مشترک بتن سنگ بصورت بدون لغزش، با استفاده از دستور Tie، مدل گردید. المان‌های مورد استفاده برای تحلیل المان‌های مستطیلی شکل خطی (مرتب اول) با کرنش صفحه‌ای بودند. همخوانی خوبی میان نتایج روش تحلیلی و نرم‌افزار آباکوس وجود

به تغییرات سختی و ضخامت بتن، در راستاهای 0 و 90 درجه، بررسی می‌گردد.

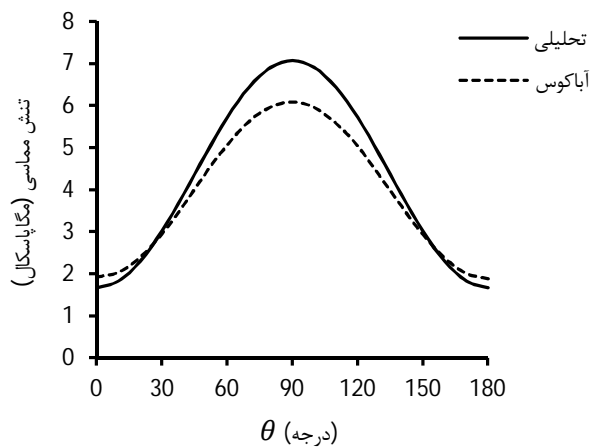
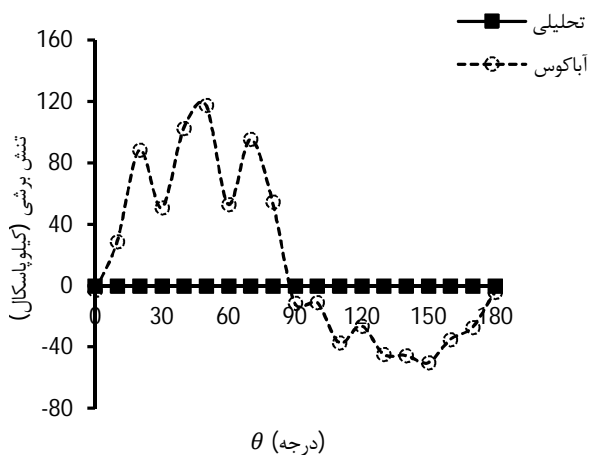


شکل 6 تغییرات تنش مماسی در دیواره داخلی لاینینگ

شکل 9 درصد خطای نسبی راه‌حل تحلیلی نسبت به جواب نرم افزار آباکوس



شکل 7 تنش مماسی در فصل مشترک بتن-سنگ در بتن



شکل 8 تنش مماسی در فصل مشترک بتن-سنگ در سنگ

2-4- آنالیز حساسیت نسبت به خواص بتن

در این مرحله تغییرات فاکتور تمرکز تنش در دیواره بتنی و توده سنگ نسبت

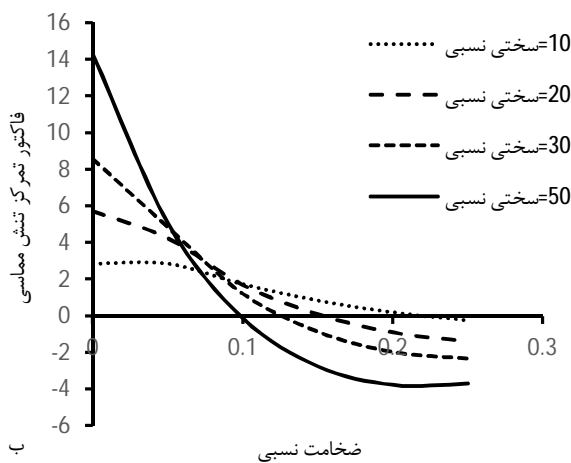
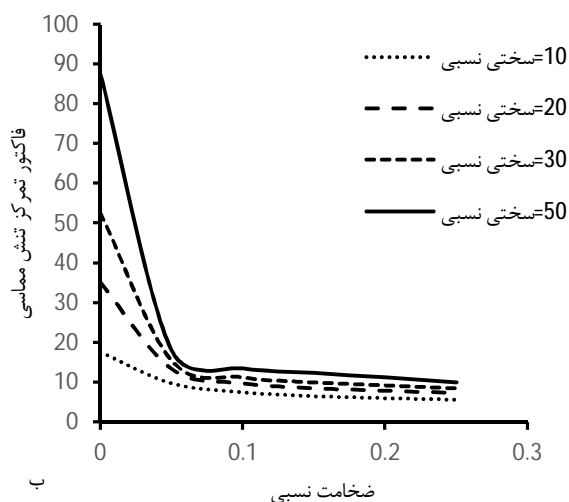
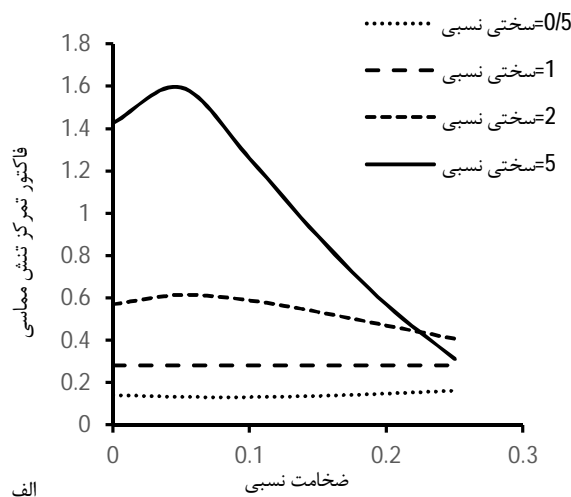
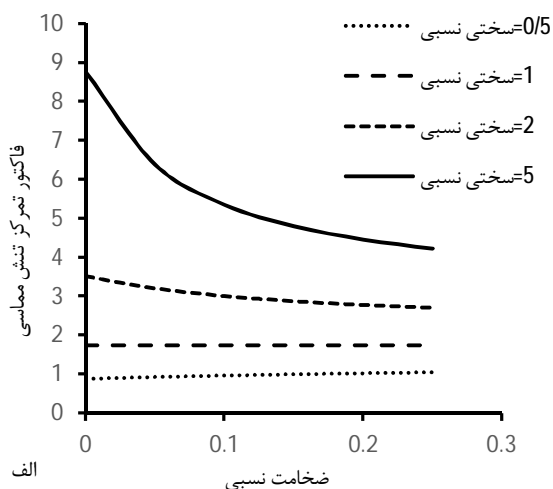
شکل 10 تغییرات الف) تنش نرمال و ب) تنش برشی در سطح داخلی بتن (مرز  $L_2$ )

نسبی کمتر از یک است، همچون سقف، ناچیز است، اما در حالت کلی با افزایش سختی میزان تنش مماسی در دیواره افزایش می‌یابد. با افزایش سختی نسبی به مقادیر بیشتر از 11 مشاهده می‌شود که تغییرات تنش مماسی برای ضخامت نسبی کمتر از 0/05 بسیار شدید می‌شود.

4-4- تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در فصل مشترک بتن-سنگ اشکال 13 و 14 تمرکز تنش مماسی را در فصل مشترک بتن سنگ (بر روی مرز  $L_1$ )، در دیواره بتنی، در راستاهای 0 و 90 درجه نشان می‌دهند. در شکل 13 مشاهده می‌شود که با افزایش سختی نسبی تنش مماسی در سقف افزایش می‌یابد بصورتیکه برای مقادیر سختی نسبی 2 تا 20 مقدار تنش مماسی در ضخامت نسبی تقریباً 0/05 ماکزیمم می‌شود. شکل 14 نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت نسبی تنش مماسی در دیواره، در فصل مشترک بتن-سنگ، کاهش و با افزایش سختی نسبی می‌یابد. این روند بگونه‌ای است که برای سختی نسبی بزرگتر از 10 تغییرات تنش مماسی برای ضخامت

لازم بذکر است که تحلیل‌ها با فرض ضریب پواسون 0/3 برای دو محیط و مقدار ضریب فشار جانبی برابر  $\frac{\nu}{1-\nu}$  انجام می‌شود.

3-4- تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در دیواره بتنی تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در راستاهای 0 و 90 درجه، در مرز داخلی دیواره بتنی، در اشکال 11 و 12 نشان داده شده‌اند. در شکل 11 مشاهده می‌شود که تغییرات تنش مماسی نسبت به ضخامت بتن در سقف برای هنگامی که سختی نسبی کمتر از یک است ناچیز است، اما با افزایش سختی نسبی به مقادیر بیش از یک، تنش مماسی در مقدار ضخامت نسبی مشخصی (تقریباً 0/05) به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد؛ این روند تا سختی نسبی 10 ادامه دارد. سپس با افزایش سختی نسبی تنش مماسی فشاری در سقف جای خود را به تنش کششی می‌دهد. شکل 12 نشان می‌دهد که تغییرات تنش مماسی نسبت به ضخامت بتن در دیواره ( $\theta=90^0$ ) برای حالتیکه سختی



شکل 12 تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در راستای  $\theta=90^0$  در مرز داخلی بتن

شکل 11 تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در راستای  $\theta=0^0$  در مرز داخلی بتن

تعیین میدان تنش در اطراف تونل‌های دایروی همراه با پوشش بتنی است. راه‌حل ارائه شده دارای این مزیت است که جواب بسته‌ای ارائه می‌کند که به سادگی می‌توان از آن در مسائل آنالیز برگشتی و یا به عنوان مبنا برای ارائه فرمول‌های تجربی استفاده کرد. مقادیر تنش‌های پیش‌بینی شده از راه‌حل مذکور همبستگی خوبی را با جواب راه‌حل کرش، هنگامیکه ضخامت نسبی نگهداری به صفر میل کند، و نرم‌افزار اجزا محدود آباکوس نشان داد.

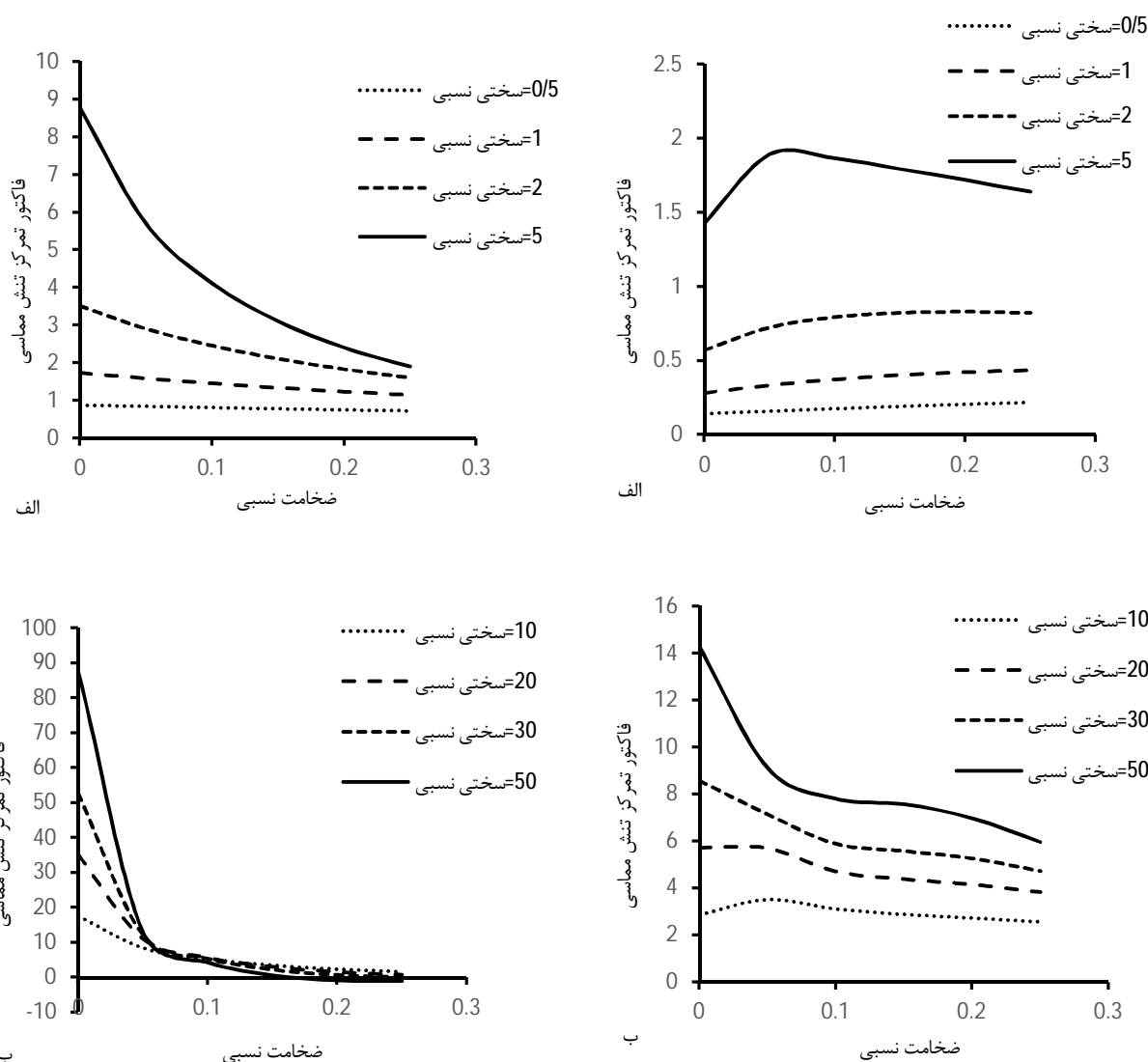
در آنالیز حساسیتی که نسبت به ضخامت و سختی نسبی بتن صورت گرفت مشخص گردید که با افزایش ضخامت نسبی و سختی بتن میزان تنش مماسی فشاری در دیواره داخلی، کاهش یافته و جای خود را به تنش کششی می‌دهد. از طرفی دیگر در سختی‌های نسبی بالا (بزرگتر از 10) میزان فاکتور تمرکز تنش برای ضخامت نسبی کمتر از 0/05 بالا است، بنابراین در طراحی می‌بایست از ضخامت‌های نسبی بیش از 0/05 در این شرایط استفاده نمود. با افزایش ضخامت و سختی نسبی مقدار فاکتور تمرکز تنش مماسی در دیواره سنگی در فصل مشترک بتن سنگ کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان گفت که بهترین محدوده برای ضخامت نسبی در طراحی لاینینگ بتنی بازه بیش از

نسبی کمتر از 0/05 بسیار زیاد می‌شود، به عبارتی در چنین شرایطی میزان سختی نگهداری از اهمیت بسیار زیادی برخوردار می‌گردد؛ از طرفی دیگر مقدار تنش مماسی ایجاد شده در بتن مطابق اشکال 13 و 14 برای سختی نسبی کمتر از یک تغییرات کمتری را نسبت به ضخامت بتن از خود نشان می‌دهد.

اشکال 15 و 16 تمرکز تنش مماسی را در فصل مشترک بتن سنگ، در سنگ، نشان می‌دهند. در شکل 15 مشاهده می‌شود که با افزایش سختی نسبی تا مقدار تقریباً 10 تنش مماسی در سقف افزایش می‌یابد اما پس از آن مقدار تنش مماسی بصورت محسوس کاهش می‌یابد و در ضخامت‌های بالای بتن اختلاف میان نمودارها ناچیز می‌شود. در راستای 90 درجه افزایش سختی نگهداری باعث کاهش تنش مماسی در دیواره می‌شود اما برای مقادیر سختی نسبی بیش از 20 این اختلاف ناچیز می‌شود.

### 5- نتیجه گیری

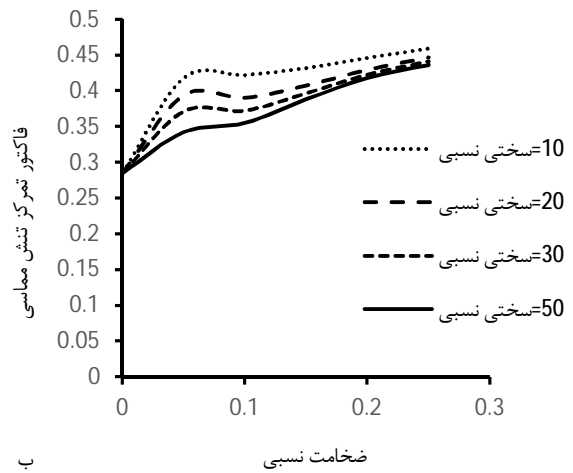
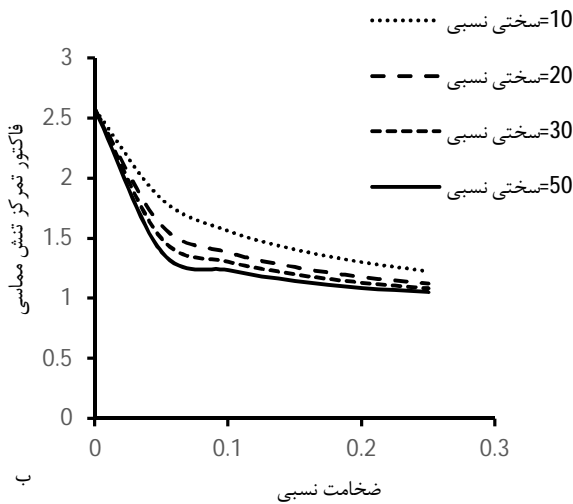
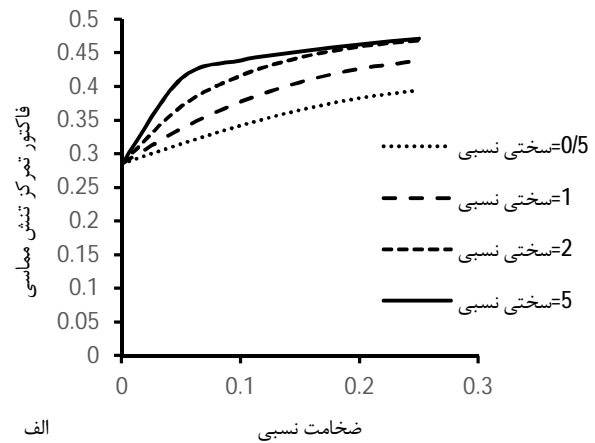
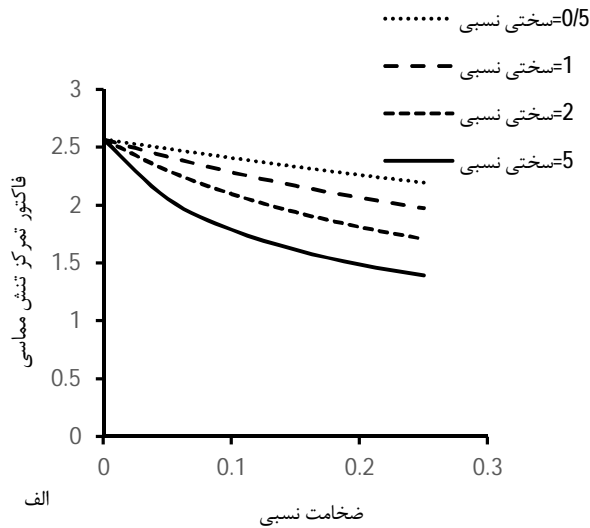
در این مقاله روشی بر پایه توابع پتانسیل مختلط ارائه شده است که قادر به



شکل 14 تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در راستای  $\theta = 90^\circ$  در فصل مشترک بتن سنگ در داخل بتن

شکل 13 تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در راستای  $\theta = 0^\circ$  در فصل مشترک بتن سنگ در داخل بتن





شکل 16 تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در راستای  $\theta = 90^0$  در فصل مشترک بتن سنگ در داخل سنگ

شکل 15 تغییرات فاکتور تمرکز تنش مماسی در راستای  $\theta = 0^0$  در فصل مشترک بتن سنگ در داخل سنگ

- 0/05 و کمتر از حد ایجاد تنش کششی در لاینینگ، با توجه به شکل 8، است. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که از بکارگیری ضخامت نسبی زیاد برای مقادیر بزرگ سختی نسبی به علت مقاومت کششی کمتر بتن نسبت به مقاومت فشاری می‌بایست اجتناب نمود.
- 6- مراجع
- [1] G. Savin, Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press, Oxford, 1961.
  - [2] J. Penzien, C. L. Wu, Stresses in linings of bored tunnels, *Earthquake engineering & structural dynamics*, Vol. 27, No. 3, pp. 283-300, 1998.
  - [3] H. H. Einstein, C. W. Schwartz, Simplified analysis for tunnel supports, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 105, No. ASCE 14541, pp. 499-518, 1979.
  - [4] R. B. Peck, A. Hendron, B. Mohraz, State of the art of soft-ground tunneling, in *Proceeding of*.
  - [5] A. Bobet, Drained and undrained response of deep tunnels subjected to far-field shear loading, *Tunnelling and Underground Space Technology*, Vol. 25, No. 1, pp. 21-31, 2010.
  - [6] A. Bobet, Effect of pore water pressure on tunnel support during static and seismic loading, *Tunnelling and Underground Space Technology*, Vol. 18, No. 4, pp. 377-393, 2003.
  - [7] J. N. Reddy, *An introduction to the finite element method*: McGraw-Hill New York, 2006.
  - [8] N. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*: Nordhoff International Publishing, 1977.
  - [9] G. Exadaktylos, M. Stavropoulou, A closed-form elastic solution for stresses and displacements around tunnels, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 39, No. 7, pp. 905-916, 2002.
  - [10] G. E. Exadaktylos, P. A. Liolios, M. C. Stavropoulou, A semi-analytical elastic stress-displacement solution for notched circular openings in rocks, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 5, pp. 1165-1187, 2003.
  - [11] A. Verruijt, A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 21, No. 2, pp. 77-89, 1997.
  - [12] O. Strack, A. Verruijt, A complex variable solution for a deforming buoyant tunnel in a heavy elastic half-plane, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 26, No. 12, pp. 1235-1252, 2002.
  - [13] F. Aslani, Determination of stress and deformation fields around circular tunnels using a new stress function, and making a comparison between the proposed solution, finite element and complex variable methods, in *8th international conference of civil engineering*, University of Shiraz, Shiraz, Iran, (2009) In Persian.
  - [14] M. Batista, On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to a uniform load at infinity, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 53, No. 4, pp. 254-261, 2011.

- 0/05 و کمتر از حد ایجاد تنش کششی در لاینینگ، با توجه به شکل 8، است. در مجموع می‌توان نتیجه گرفت که از بکارگیری ضخامت نسبی زیاد برای مقادیر بزرگ سختی نسبی به علت مقاومت کششی کمتر بتن نسبت به مقاومت فشاری می‌بایست اجتناب نمود.

## 6- مراجع

- [1] G. Savin, Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press, Oxford, 1961.
- [2] J. Penzien, C. L. Wu, Stresses in linings of bored tunnels, *Earthquake engineering & structural dynamics*, Vol. 27, No. 3, pp. 283-300, 1998.
- [3] H. H. Einstein, C. W. Schwartz, Simplified analysis for tunnel supports, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 105, No. ASCE 14541, pp. 499-518, 1979.
- [4] R. B. Peck, A. Hendron, B. Mohraz, State of the art of soft-ground tunneling, in *Proceeding of*.
- [5] A. Bobet, Drained and undrained response of deep tunnels subjected to far-field shear loading, *Tunnelling and Underground Space Technology*, Vol. 25, No. 1, pp. 21-31, 2010.
- [6] A. Bobet, Effect of pore water pressure on tunnel support during static and seismic loading, *Tunnelling and Underground Space Technology*, Vol. 18, No. 4, pp. 377-393, 2003.

- 2014 .
- [16] G. Kirsch, *Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre*: Springer, 1898 .
- [15] A. Kargar, R. Rahmamejad, M. Hajabasi, A semi-analytical elastic solution for stress field of lined non-circular tunnels at great depth using complex variable method, *International Journal of Solids and Structures*,