



## حل مسائل وابسته به زمان با استفاده از روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

فرشید مسیبی<sup>1\*</sup>، محمدجواد باهنر<sup>2</sup>، آزیتا اسعدی<sup>3</sup>

1- دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه اصفهان، اصفهان

2- کارشناس ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه یزد، یزد

3- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه یزد، یزد

\* اصفهان، کد پستی 81744-73441، mossaiby@eng.ui.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 28 خرداد 1396

پذیرش: 21 شهریور 1396

ارائه در سایت: 05 آبان 1396

کلید واژگان:

روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

روش‌های عددی

روش‌های بدون شبکه

مسائل خطی و غیرخطی

پیمایش زمان

### چکیده

در اکثر رشته‌های مهندسی نیاز به حل معادلات دیفرانسیل پارهای وجود دارد. محاسبه جواب دقیق برای این دسته از معادلات به جز در موارد خاص امکان‌پذیر نمی‌باشد، که این امر باعث افزایش اهمیت روش‌های عددی می‌شود. همگام با پیشرفت در علم و تکنولوژی، روش‌های جدیدی برای حل معادلات دیفرانسیل پارهای ارائه شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های بدون شبکه اشاره کرد. یکی از این روش‌ها که در سال‌های اخیر توسعه یافته است، روش بدون شبکه توابع پایه نمایی تعمیم یافته می‌باشد. در این روش تابع مجهول به صورت ترکیب خطی از توابع نمایی در نظر گرفته می‌شود. در مسائل خطی ضرایب به صورتی محاسبه می‌شوند که فرم همگن معادله در نقاط شبکه به صورت دقیق برآورده شود. برای حل مسائل غیرخطی، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی با استفاده از رویکرد نیوتن-کانتروویچ، خطی‌سازی و حل می‌شوند. در این مقاله این روش به مسائل وابسته به زمان توسعه داده شده است. به منظور بررسی کارایی روش مسائل خطی و غیرخطی وابسته به زمان در مکانیک جامدات با بهره‌گیری از این روش بررسی شده است. مقایسه نتایج حاصل از روش پیشنهادی با جواب‌های تحلیلی نشان از دقت مناسب (خطای کمتر از 1 درصد) روش ارائه شده دارد.

## Solving time-dependent problems using the generalized exponential basis functions method

Farshid Mossaiby<sup>1\*</sup>, Mohammad Javad Bahonar<sup>2</sup>, Azita Asadi<sup>2</sup>

1- Civil Engineering Department, University of Isfahan, Isfahan, Iran.

2- Civil Engineering Department, Yazd University, Yazd, Iran

\* Zip Code: 81744-73441 Isfahan, Iran, mossaiby@eng.ui.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 18 June 2017

Accepted 12 September 2017

Available Online 27 October 2017

#### Keywords:

generalized exponential basis function

numerical methods

meshless methods

linear and non-linear problems

time marching

### ABSTRACT

Partial differential equations are needed in most of the engineering fields. Analytical solutions to these equations cannot be derived except in some very special cases, making numerical methods more important. Alongside advances in science and technology, new methods have been proposed for solution of partial differential equations, such as meshless methods. Recently, the generalized exponential basis function (GEBF) meshless method has been introduced. In this method the unknown function is approximated as a linear combination of exponential basis functions. In linear problems, the unknown coefficients are calculated such that the homogenous form of main differential equation is satisfied in all points of the grid. In order to solve nonlinear equations, Newton-Kantorovich scheme is first used to linearize them. The linearized equations are then solved iteratively to obtain the result. In this paper, time dependent problems in solid mechanics have been investigated. In order to examine performance of the proposed method, linear and non-linear problems in solid mechanics are considered and the results are compared with analytical solutions. The results show good accuracy (less than 1 percentage error) of the presented method.

### 1- مقدمه

روش‌های عددی متعددی تاکنون ابداع شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های تفاضل محدود<sup>1</sup>، روش‌های اجزای محدود<sup>2</sup>، روش‌های المان مرزی<sup>3</sup>، روش‌های بدون شبکه<sup>4</sup> و غیره اشاره کرد. هریک از روش‌های فوق کاربردهای مخصوص خود را دارند و هنوز هم محققان در حال رشد و تکامل و ابداع روش‌های جدید هستند.

با پیشرفت روزافزون علوم از جمله علوم مهندسی، مسائل مهندسی روز به روز پیچیده‌تر می‌گردند. روش‌های عددی ابزاری بسیار توانمند در زمینه حل این مسائل هستند. رشد روزافزون رایانه‌ها و قدرت و سرعت محاسبات آن‌ها به کمک مهندسان آمده و به پیشرفت این علم کمک بسزایی می‌کند، به گونه‌ای که نرم افزارهای حل عددی از ابزارهای جدانشدنی حرفه مهندسی تبدیل شده است.

### 1-1 روش‌های عددی

<sup>1</sup> Finite difference method (FDM)

<sup>2</sup> Finite element method (FEM)

<sup>3</sup> Boundary element method (BEM)

<sup>4</sup> Meshfree method

### Please cite this article using:

F. Mossaiby, M. J. Bahonar, A. Asadi, Solving time-dependent problems using the generalized exponential basis functions method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 271-280, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

## 2-1- روش های بدون شبکه

یکی از مهمترین روش های حل عددی، روش اجزا محدود می باشد. با وجود پیشرفت روزافزون روش اجزا محدود هنوز هم زمینه هایی وجود دارند که این روش از عهده حل آن ها به خوبی بر نمی آید که به عنوان مثال می توان به انتشار موج با طول موج کوتاه و یا مسائل با دامنه نامحدود اشاره کرد [1]. با توجه به کاستی هایی که در روش اجزا محدود مشاهده شد، نیاز به یک روش جدید برای بر طرف کردن این کاستی ها احساس می شد. از این رو دسته ای از روش ها به نام روش های بدون شبکه ابداع شد. یکی از روش های بدون شبکه اولیه برای اولین بار گینگولد و مناقان<sup>1</sup> تحت عنوان هیدرودینامیک ذرات هموار<sup>2</sup> ارائه شد [2]. لیبرسکی و همکاران هیدرودینامیک هموار شده ذرات را در دینامیک جامدات استفاده کردند [3]. از جمله اشکالات این روش می توان به جواب غیردقیق در مرزها اشاره نمود که برای اولین بار توسط سیویگل [4] مورد بررسی قرار گرفت. طی سال ها و دهه ها روش های جدید و متنوعی ابداع شده، روز به روز به کارایی روش بدون شبکه افزوده شده است و امروزه شمار این روش ها متجاوز از بیست روش می باشد که هر یک دارای مزایا و معایب و کاربردهای مخصوص به هستند.

## 3-1- روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

با پیشرفت روش های بدون شبکه، روش های بدون شبکه جدید توسط محققان ابداع گردیده و توسعه یافته اند. یکی از روش های توسعه داده شده روش توابع پایه نمایی<sup>3</sup> می باشد که اولین بار توسط برومند و همکاران [5] ارائه شد. ایده اصلی این روش، حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با استفاده از توابع پایه نمایی می باشد. مسیبی و همکاران [6] نیز روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته<sup>4</sup> را ارائه دادند. این روش نسبت به روش توابع پایه نمایی از این مزیت برخوردار است که برای انواع خطی و غیرخطی معادلات دیفرانسیل قابل استفاده است و می توان از ضرایب غیرثابت نیز استفاده کرد. در این پژوهش برای حل مسائل وابسته به زمان در مکانیک جامدات، این روش در نرم افزار ممتیکا<sup>5</sup> توسعه داده شده است [7].

## 2- روش توابع پایه نمایی

## 1- معرفی

در ادامه به صورت خلاصه روش توابع پایه نمایی برای مسائل با مشتقات جزئی توضیح داده می شود. اگر یک مسأله دوبعدی یا سه بعدی با دامنه  $\Omega$  و با مرز  $\Gamma = \partial\Omega$  به صورت معادله (1) در نظر گرفته شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\Omega \mathbf{u} &= \mathbf{f}_\Omega \quad \Omega \text{ در} \\ \mathbf{L}_\Gamma \mathbf{u} &= \mathbf{f}_\Gamma \quad \Gamma \text{ روی} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\mathbf{u}$  بردار متغیرها و  $\mathbf{L}_\Omega$  و  $\mathbf{f}_\Omega$  به ترتیب عملگر دیفرانسیلی خطی و تابع سمت راست معادله روی دامنه  $\Omega$  است. همچنین  $\mathbf{L}_\Gamma$  و  $\mathbf{f}_\Gamma$  عملگر مرزی و تابع سمت راست معادله روی مرز  $\Gamma$  است. در مسائل با مرز ترکیبی دیریشله<sup>6</sup> و نویمان<sup>7</sup>، شرایط مرزی صورت رابطه (2) معرفی می گردد:

$$\mathbf{L}_\Gamma = \begin{cases} \mathbf{L}_D & \Gamma_D \text{ روی} \\ \mathbf{L}_N & \Gamma_N \text{ روی} \end{cases}, \mathbf{f}_\Gamma = \begin{cases} \mathbf{f}_D & \Gamma_D \text{ روی} \\ \mathbf{f}_N & \Gamma_N \text{ روی} \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $\mathbf{L}_D$  و  $\mathbf{L}_N$  به ترتیب نمایانگر عملگرهای دیریشله و نویمان هستند. همچنین  $\Gamma_D$  و  $\Gamma_N$  نماینده قسمت های دیریشله و نویمان مرز  $\Gamma$  بوده و  $\mathbf{f}_D$  و  $\mathbf{f}_N$  به ترتیب روی آن ها تعریف می گردد.

جواب معادله به دو بخش همگن<sup>8</sup> و خصوصی<sup>9</sup> تجزیه می شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^p \quad (3)$$

که در آن  $\mathbf{u}^h$  و  $\mathbf{u}^p$  به صورت رابطه (4) تعریف می گردند:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\Omega \mathbf{u}^h &= \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_\Omega \mathbf{u}^p &= \mathbf{f}_\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

با توجه به خطی بودن  $\mathbf{L}_\Gamma$  نتیجه می شود:

$$\mathbf{L}_\Gamma \mathbf{u} = \mathbf{L}_\Gamma (\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^p) = \mathbf{L}_\Gamma \mathbf{u}^h + \mathbf{L}_\Gamma \mathbf{u}^p = \mathbf{f}_\Gamma \quad (5)$$

به منظور سهولت فرمول بندی،  $\mathbf{f}_\Omega = \mathbf{0}$  در نظر گرفته می شود که در نتیجه می توان  $\mathbf{u}^p = \mathbf{0}$  در نظر گرفت. برای حالت کلی فرمول بندی، خواننده می تواند به منبع [5] مراجعه نماید. قسمت همگن حل صورت رابطه (6) در نظر گرفته می شود:

$$\mathbf{u}^h \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{m^h} \psi_i^h c_i^h = \Psi^h \mathbf{c}^h \quad (6)$$

که در این عبارت  $m^h$  تعداد پایه ها،  $\Psi^h$  شامل توابع پایه نمایی و  $\mathbf{c}^h$  بردار ضرایب مربوط به آن می باشد. به عنوان نمونه برای مسائل دو بعدی از فرم  $\exp(\alpha_i x + \beta_i y)$  برای توابع پایه نمایی استفاده می شود که  $\alpha_i, \beta_i$  اعدادی مختلط می باشند. در مسائل توابع پایه نمایی،  $\Psi^h$  به گونه ای انتخاب می گردد که فرم همگن معادلات دیفرانسیل را برآورده کند. از جایگزینی معادله (6) در (4) محاسبه می شود:

$$\mathbf{L}_\Omega \hat{\mathbf{u}}^h = \mathbf{L}_\Omega \Psi^h \mathbf{c}^h = \mathbf{H} \Psi^h \mathbf{c}^h = \mathbf{0} \quad (7)$$

برای بدست آوردن یک جواب غیر بدیهی<sup>11</sup> باید دترمینان ماتریس  $\mathbf{H}$  برابر با صفر باشد:

$$\det \mathbf{H} = 0 \quad (8)$$

معادله (7) به عنوان معادله مشخصه معرفی می شود و نقش اساسی در روش توابع پایه نمایی ایفا می کند. با استفاده از معادله (7) می توان  $\alpha_i$  را بر حسب  $\beta_i$  و یا بالعکس بدست آورد. لازم به ذکر است که معادله قبل تنها در صورتی معتبر است که  $\mathbf{L}_\Omega$  یک عملگر خطی با ضرایب ثابت باشد.

## 3- روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

## 1- معرفی

در روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته سعی شده است کاستی های روش توابع پایه نمایی برطرف و دامنه حل مسائل آن گسترده تر گردد. به عنوان مثال حل مسائل با ضرایب متغیر و مسائل غیرخطی (پس از خطی سازی به کمک روش نیوتن-کانتروویچ<sup>12</sup> [8]) با این روش قابل حل است. در ادامه، ابتدا فرمول بندی این روش برای مسائل خطی توضیح داده شده و سپس با اعمال یک روش تکراری، روش حل مسائل غیرخطی بیان خواهد شد.

## 2-3- مسائل خطی

با در نظر گرفتن معادله (4) و تقریب زدن تابع  $\mathbf{u}$  براساس یک ترکیب خطی از توابع پایه، معادله (9) بدست می آید:

<sup>1</sup> Gingold and Monaghan

<sup>2</sup> Smoothed-particle hydrodynamics

<sup>3</sup> Exponential basis functions (EBF)

<sup>4</sup> Generalized exponential basis functions (GEBF)

<sup>5</sup> Wolfram Mathematica

<sup>6</sup> Partial differential equation (PDE)

<sup>7</sup> Dirichlet

<sup>8</sup> Neumann

<sup>9</sup> Homogeneous

<sup>10</sup> Particular

<sup>11</sup> Non-trivial

<sup>12</sup> Newton-Kantorovich

تنها با اعداد حقیقی انجام داد. برای مثال در مورد توابع پایه نمایی سه بعدی اسکالر:

$$\psi = \exp(ax + by + cz)$$

$$\alpha = a + ib, \quad \beta = c + id, \quad \gamma = e + if$$

$$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \quad (25)$$

قسمت حقیقی و موهومی به صورت معادله (26) خواهد بود:

$$\psi_1 = \Re(\psi) = \exp(ax + cy + ez)\cos(bx + dy + fz)$$

$$\psi_2 = \Im(\psi) = \exp(ax + cy + ez)\sin(bx + dy + fz) \quad (26)$$

با محاسبه  $\mathbf{d}$  (و در نتیجه  $\mathbf{c}^p$  و  $\mathbf{c}^h$ ) تابع مجهول  $\mathbf{u}$  در هر مکان دلخواهی از دامنه به دست می آید.

### 3-3- مسائل غیرخطی

به منظور حل مسائل غیرخطی به روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته، از روش نیوتن-کانتروویچ [8] استفاده می گردد. معادلات خطی شده با استفاده از همان روش خطی که در مرحله قبل به آن اشاره شد به صورت تکراری حل می شوند. در اینجا یک معادله غیرخطی به صورت کلی در نظر گرفته می شود:

$$\mathbf{N}_\Omega \mathbf{u} = \mathbf{f}_\Omega \quad \Omega \text{ در}$$

$$\mathbf{N}_\Gamma \mathbf{u} = \mathbf{f}_\Gamma \quad \Gamma \text{ روی} \quad (27)$$

که در آن  $\mathbf{N}_\Omega$  و  $\mathbf{N}_\Gamma$  به ترتیب نشان دهنده عملگر غیرخطی روی دامنه و مرز می باشد. برای اقناع معادلات قبل باید باقیمانده که به صورت معادله (28) تعریف می گردد، در دامنه و مرز برابر با صفر شود:

$$\mathbf{r}_\Omega = \mathbf{N}_\Omega \mathbf{u} - \mathbf{f}_\Omega$$

$$\mathbf{r}_\Gamma = \mathbf{N}_\Gamma \mathbf{u} - \mathbf{f}_\Gamma \quad (28)$$

با گرفتن تغییرات<sup>3</sup> از معادله (28) نتیجه می شود:

$$\delta \mathbf{r}_\Omega = \delta(\mathbf{N}_\Omega \mathbf{u} - \mathbf{f}_\Omega) = \delta(\mathbf{N}_\Omega \mathbf{u}) = \bar{\mathbf{L}}_\Omega \delta \mathbf{u}$$

$$\delta \mathbf{r}_\Gamma = \delta(\mathbf{N}_\Gamma \mathbf{u} - \mathbf{f}_\Gamma) = \delta(\mathbf{N}_\Gamma \mathbf{u}) = \bar{\mathbf{L}}_\Gamma \delta \mathbf{u} \quad (29)$$

که در آن  $\bar{\mathbf{L}}_\Gamma$  و  $\bar{\mathbf{L}}_\Omega$  مشتقات فرشه<sup>4</sup> نامیده می شوند و به ترتیب برابر با عملگر خطی شده در دامنه و مرز می باشند. مقدار باقیمانده و تابع مجهول  $\mathbf{u}$ ، این گونه تقریب زده می شود:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (30)$$

و

$$\mathbf{r}_\Omega^{(k+1)} = \mathbf{r}_\Omega^{(k)} + \delta \mathbf{r}_\Omega^{(k)}$$

$$\mathbf{r}_\Gamma^{(k+1)} = \mathbf{r}_\Gamma^{(k)} + \delta \mathbf{r}_\Gamma^{(k)} \quad (31)$$

با فرض اینکه در  $k + 1$  گام مقدار باقیمانده صفر باشد:

$$\delta \mathbf{r}_\Omega^{(k)} = -\mathbf{r}_\Omega^{(k)}$$

$$\delta \mathbf{r}_\Gamma^{(k)} = -\mathbf{r}_\Gamma^{(k)} \quad (32)$$

و بنابراین:

$$\bar{\mathbf{L}}_\Omega^{(k)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = -\mathbf{r}_\Omega^{(k)}$$

$$\bar{\mathbf{L}}_\Gamma^{(k)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = -\mathbf{r}_\Gamma^{(k)} \quad (33)$$

عملگرهای بالا بستگی به تابع مجهول در مرحله  $k$  ام دارد. معادلات بالا معادلات خطی می باشند و با استفاده از روش های ارائه شده در قسمت قبل می توان مقدار  $\delta \mathbf{u}$  را محاسبه و مقدار  $\mathbf{u}$  را در معادله اصلی بروزسانی کرد:

$$\delta \hat{\mathbf{u}} = \delta \hat{\mathbf{u}}^h + \delta \hat{\mathbf{u}}^p = \Psi \delta \mathbf{c} = \Psi(\delta \mathbf{c}^h + \delta \mathbf{c}^p) \quad (34)$$

### 4-3- پیاده سازی روش

محاسبه فضای پوچ ماتریس  $\mathbf{Q}$  و محاسبه ضرایب برای قسمت های همگن و خاص جواب از مهمترین قسمت های این روش می باشد. این قسمت بیشترین زمان را در بر می گیرد و بنابراین باید به دقت پیاده سازی شود. روش های محاسبات موازی<sup>5</sup> هم می تواند برای تولید ماتریس  $\mathbf{Q}$  مورد استفاده قرار گیرد [7].

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^p \approx \hat{\mathbf{u}}^h + \hat{\mathbf{u}}^p$$

$$= \sum_{i=1}^m \Psi_i c_i = \sum_{i=1}^m \Psi_i (c_i^p + c_i^h) \quad (9)$$

که در آن  $m$  برابر با تعداد توابع پایه می باشد. در فرم ماتریسی، معادله قبل را می توان به این شکل نوشت:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} = \Psi \mathbf{c} = \Psi(\mathbf{c}^h + \mathbf{c}^p) \quad (10)$$

قسمت خصوصی معادله با استفاده از روش شرح داده شده در مرجع [5] قابل حل است. در اینجا یک مجموعه از نقاط  $\mathbf{x}_{\Omega,j}$  که  $j = 1, \dots, n_\Omega$  روی دامنه  $\Omega$  انتخاب می گردد. سپس معادله (4) روی این مجموعه از نقاط اعمال می گردد:

$$\mathbf{L}_\Omega \hat{\mathbf{u}}^p|_{\mathbf{x}_{\Omega,j}} = \mathbf{L}_\Omega \Psi|_{\mathbf{x}_{\Omega,j}} \mathbf{c}^p = \mathbf{f}_\Omega|_{\mathbf{x}_{\Omega,j}} \quad (11)$$

معادله (11) در فرم ماتریسی به این شکل نمایش داده می شود:

$$\mathbf{Q} \mathbf{c}^p = \mathbf{h} \quad (12)$$

سطر  $j$  ام از ماتریس های  $\mathbf{Q}$  و  $\mathbf{h}$  به این صورت تعریف می شوند:

$$(\mathbf{Q})_j = \mathbf{L}_\Omega \Psi|_{\Omega,j}$$

$$(\mathbf{h})_j = \mathbf{f}_\Omega|_{\mathbf{x}_{\Omega,j}} \quad (13)$$

از معادله (12) ضرایب  $\mathbf{c}^p$  به این صورت محاسبه می گردد:

$$\mathbf{c}^p = \mathbf{Q}^+ \mathbf{h} \quad (14)$$

که در آن علامت + نشان دهنده معکوس تعمیم یافته مور-پنروز<sup>1</sup> می باشد [9].

مقدار  $\hat{\mathbf{u}}^p$  از معادله (14) به این صورت محاسبه می گردد:

$$\hat{\mathbf{u}}^p = \Psi \mathbf{c}^p = \Psi \mathbf{Q}^+ \mathbf{h} \quad (15)$$

با اعمال معادله (4) در  $\mathbf{x}_{\Omega,j}$ :

$$\mathbf{L}_\Omega \hat{\mathbf{u}}^h|_{\mathbf{x}_{\Omega,j}} = \mathbf{L}_\Omega \Psi|_{\mathbf{x}_{\Omega,j}} \mathbf{c}^h = \mathbf{0} \quad (16)$$

که در فرم ماتریسی عبارت است از:

$$\mathbf{Q} \mathbf{c}^h = \mathbf{0} \quad (17)$$

برای یک جواب غیر بدیهی،  $\mathbf{c}^h$  باید عضو فضای پوچ<sup>2</sup> ماتریس  $\mathbf{Q}$  باشد.

$$\mathbf{c}^h \in \text{null}(\mathbf{Q}) \quad (18)$$

اگر  $\mathbf{c}^h$  ها معادله قبلی را اقناع کند، می توان به آن را به صورت ترکیب خطی از توابع پایه در فضایی به نام  $\mathbf{t}_i$  نوشت:

$$\mathbf{c}^h = \sum_{i=1}^b \mathbf{t}_i d_i = \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (19)$$

که در آن  $d_i$  ضرایب نامشخص،  $b$  تعداد پایه های فضا و  $\mathbf{T}$  ماتریسی است که ستون های آن  $\mathbf{t}_i$  ها است. با اعمال معادله (19) در معادله (7):

$$\hat{\mathbf{u}}^h = \Psi \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (20)$$

به منظور اعمال شرایط مرزی یک مجموعه از نقاط روی مرز به صورت  $\mathbf{x}_{\Gamma,j}$  که  $j = 1, \dots, n_\Gamma$  از انتخاب می گردد. از معادله (5):

$$\mathbf{L}_\Gamma \hat{\mathbf{u}}^h|_{\mathbf{x}_{\Gamma,j}} = \mathbf{f}_\Gamma|_{\mathbf{x}_{\Gamma,j}} - \mathbf{L}_\Gamma \mathbf{u}^p|_{\mathbf{x}_{\Gamma,j}} \quad (21)$$

با ترکیب دو معادله (15) و (20) معادله قبل را می توان به این صورت نوشت:

$$\mathbf{L}_\Gamma \Psi|_{\mathbf{x}_{\Gamma,j}} \mathbf{T} \mathbf{d} = \mathbf{f}_\Gamma|_{\mathbf{x}_{\Gamma,j}} - \mathbf{L}_\Gamma \Psi|_{\mathbf{x}_{\Gamma,j}} \mathbf{c}^p \quad (22)$$

در نتیجه بردار  $\mathbf{d}$  برابر است با:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{P} \mathbf{T})^+ (\mathbf{g} - \mathbf{P} \mathbf{c}^p) \quad (23)$$

در معادله قبل  $\mathbf{z}$  امین سطر از  $\mathbf{P}$  و  $\mathbf{g}$  برابر است با:

$$(\mathbf{P})_j = \mathbf{L}_\Gamma \Psi|_{\mathbf{x}_{\Gamma,j}}$$

$$(\mathbf{g})_j = \mathbf{f}_\Gamma|_{\mathbf{x}_{\Gamma,j}} \quad (24)$$

لازم به ذکر است در فرمول بندی این روش هر نوع تابع پایه در  $\Psi$  قابل استفاده است که این امر خود مزیتی بزرگ محسوب می شود. در این تحقیق از توابع پایه نمایی استفاده شده است. با توجه به اینکه در این روش دیگر نیازی نیست تا فرم همگن معادله دیفرانسیل برآورده شود، می توان از قسمت های حقیقی و موهومی توابع پایه نمایی استفاده کرده و محاسبات را

<sup>3</sup> Variation

<sup>4</sup> Fréchet derivative

<sup>5</sup> Parallel computation

<sup>1</sup> Moore-Penrose

<sup>2</sup> Null space

گسسته‌سازی شود. برای گسسته‌سازی زمان یک گام زمانی کوچک انتخاب می‌شود:

$$\Delta t^n = t^{n+1} - t^n \quad (39)$$

که در آن  $n$  نشان دهنده مرحله و  $\Delta t^n$  نشان دهنده گام زمانی است.

مسائل پیمایش زمان می‌تواند به دو صورت ضمنی<sup>4</sup> و صریح<sup>5</sup> حل گردد. روش صریح روشی است که در آن از اطلاعات موجود برای حل مسأله استفاده می‌شود و روش ضمنی روشی است که از اطلاعات موجود و ناموجود برای حل مسأله استفاده می‌شود. روش‌های پیمایش زمان به صورت گام‌به‌گام هستند و در هر گام زمانی کل مسأله در بعد مکان حل می‌گردد. انتخاب اندازه گام زمانی شرایطی دارد که در ادامه در مورد آن بحث خواهد شد. روش‌های مختلفی برای حل پیمایش در زمان وجود دارد که با توجه به نوع مسأله روش استفاده شده می‌تواند متفاوت باشد. در ادامه بحث در ابتدا به توضیح روش تفاضل محدود پرداخته و سپس به چند مورد از مهم‌ترین روش‌های موجود اشاره می‌شود [10].

#### 4-1- تفاضل پیش‌رو<sup>6</sup>، پس‌رو<sup>7</sup> و مرکزی<sup>8</sup>

تفاضل محدود از نظر ریاضی به شکل  $f(x+b) - f(x+a)$  تعریف می‌گردد. چنانچه عبارت فوق بر  $b-a$  تقسیم گردد، خارج قسمت محدود<sup>9</sup> تشکیل می‌گردد. سه فرم اصلی پیش‌رو، پس‌رو و مرکزی برای تفاضل محدود موجود است. یک تفاضل پیش‌رو به صورت معادله (40) تعریف می‌شود:

$$D_{f,h}[f](x) = f(x+h) - f(x) \quad (40)$$

در تفاضل پس‌رو به جای استفاده از مقادیر  $x+h$  و  $x$  از مقادیر  $x-h$  و  $x$  استفاده می‌شود:

$$D_{b,h}[f](x) = f(x) - f(x-h) \quad (41)$$

و در نهایت تفاضل مرکزی که به این صورت تعریف می‌شود:

$$D_{c,h}[f](x) = f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\right) \quad (42)$$

#### 4-2- روش‌های صریح

استفاده از روش پیش‌رو در گسسته‌سازی زمان  $t_n$  و روش مرکزی مرتبه اول در گسسته‌سازی مکان  $x_j$  منجر به معادله (43) می‌شود:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (43)$$

که این روش صریح برای حل مسأله یک بعدی گرما می‌باشد.

در این روش می‌توان  $u_j^{n+1}$  را از مقادیر دیگر که مقدار آن‌ها موجود است محاسبه کرد:

$$u_j^{n+1} = (1-2r)u_j^n + ru_{j-1}^n + ru_{j+1}^n \quad (44)$$

که در رابطه (44)  $r = \Delta t / \Delta x^2$  است. پس به کمک این روش و دانستن مشخصات در مرحله  $n$  می‌توان مشخصات متناظر در زمان  $n+1$  را به دست آورد [11].

این روش از نظر عددی پایدار است و شرط همگرایی برای آن  $r \leq 1/2$  می‌باشد [12]. در شکل 1 نمایی از این روش مشاهده می‌شود.

#### 4-3- روش‌های ضمنی

چنانچه برای حل از روش پس‌رو برای گسسته‌سازی در زمان  $t_{n+1}$  و از روش

با توجه به آنچه در بخش قبل گفته شد، معکوس و فضای پوچ ماتریس  $Q$  در فرایند حل مورد نیاز است. بهترین روش برای محاسبه این دو استفاده از تجزیه مقادیر منفرد<sup>1</sup> می‌باشد:

$$Q = U\Sigma V^* \quad (35)$$

که در آن ماتریس‌های  $U$  و  $V$  منحصر به فرد بوده و  $\Sigma$  ماتریسی است قطری که شامل مقادیر تکین  $\sigma_k$  می‌باشد:

$$(\Sigma)_{kk} = \sigma_k \quad k \text{ بدون جمع روی } k \quad (36)$$

همچنین بالانویس \* ترانپوز<sup>2</sup> ماتریس می‌باشد. معکوس تعمیم یافته مور-پنروز به صورت معادله (37) تعریف می‌گردد:

$$Q^+ = V\Sigma^+U^* \quad (37)$$

که در آن ماتریس قطری  $\Sigma^+$  به صورت معادله (38) تعریف می‌گردد:

$$(\Sigma^+)_{kk} = \begin{cases} \sigma_k^{-1} & \sigma_k \neq 0 \\ 0 & \sigma_k = 0 \end{cases} \quad (38)$$

ستون‌هایی از  $V$  شامل مقادیر تکین که مقداری برابر با صفر دارند، در ساخت ماتریس  $Q^+$  اثری ندارند. بنابراین با محاسبه مقدار تجزیه مقادیر تکین ماتریس  $Q$  هم ماتریس معکوس و هم ماتریس فضای پوچ به دست می‌آید.

#### 3-5- مراحل گام به گام حل به روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

مراحل حل به روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته به صورت خلاصه برای یک مثال خطی عبارت است از:

(1) تولید ماتریس  $Q$  با استفاده از معادله (13)

(2) محاسبه تجزیه مقادیر تکین ماتریس  $Q$

(3) محاسبه  $c^p$  از معادله (14)

(4) محاسبه  $c^h$  از معادله (19) به کمک محاسبه  $d$  از معادله (23)

(5) محاسبه جواب نهایی  $u$

در موارد مسائل غیرخطی مراحل به صورت زیر خواهد بود:

(1) خطی کردن مسأله و شرایط مرزی با استفاده از معادله (29)

(2) در نظر گرفتن حدس اولیه برای  $c^h$  و  $c^p$ ؛ چنانچه مقادیر اولیه مناسبی در دست نیست، از  $0$  استفاده شود

(3) حل معادله (33) و بدست آوردن  $\delta c^h$  و  $\delta c^p$  با استفاده از روشی که برای مسائل خطی ارائه شد

(4) به‌روز رسانی مقادیر  $c$  (معادله (30) با استفاده از  $\delta c^h$  و  $\delta c^p$  محاسبه شده از مرحله قبل)

(5) چنانچه همگرایی حاصل نشد، از شماره 3 دوباره تکرار شود

#### 4- روش‌های پیمایش زمان<sup>3</sup>

گسسته‌سازی مسأله در زمان یکی از حساس‌ترین فرایندهای حل مسأله است. باید توجه داشت که دو دیدگاه حل برای مسأله‌های وابسته به زمان موجود است که یک دیدگاه سعی بر حذف زمان و تبدیل معادله دیفرانسیل مقدار اولیه-مقدار مرزی به مجموعه‌ای از معادلات مقدار مرزی می‌کند و دیدگاه بعدی حل مستقیم معادلات در زمان می‌باشد که در واقع یک دستگاه معادلات جبری جایگزین معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله می‌شود.

برای حل مسائل وابسته به زمان با استفاده از روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته، با توجه به اینکه این روش یک روش بدون شبکه می‌باشد از حل مستقیم زمانی استفاده می‌شود. بدین منظور برای حل مسائل نیاز به پیمایش در زمان مسأله می‌باشد. به عبارتی دیگر برای حل مسأله، زمان باید

<sup>1</sup> Singular Value Decomposition (SVD)

<sup>2</sup> Conjugate-transpose

<sup>3</sup> Time marching

<sup>4</sup> Implicit

<sup>5</sup> Explicit

<sup>6</sup> Forward

<sup>7</sup> Backward

<sup>8</sup> Central

<sup>9</sup> Difference quotient

جدول 1 چند نمونه معادله دیفرانسیل در مسائل مهندسی

Table 1 Different types of differential equation in engineering problems

معادله دیفرانسیل	رابطه
معادله انتقال حرارت کلاسیک	$\rho c_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial u}{\partial t} = 0$
معادله ارتعاش طولی در اعضای محوری	$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$
معادله ارتعاش جانبی در اعضای خمشی	$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$
ارتعاش جانبی تیرهای استوانه‌ای	$G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$
معادله ارتعاش جانبی با احتساب اثرات نیروی برشی و اینرسی دورانی	$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I \times (1 + \frac{E}{k'G}) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k'G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0$
معادله ارتعاش جانبی تیر متحرک با سرعت ثابت	$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\rho Av \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - (P - \rho Av^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$
اثر ممان اینرسی چرخشی بر ارتعاش جانبی	$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{I \gamma}{g} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}$

وابسته به زمان به طور کامل در [13] بیان شده است. در ادامه به بررسی چند مثال معادله دیفرانسیل پرداخته می‌شود.

### 5-1- مثال 1 - انتقال حرارت در میله محوری

معادله گرما یکی از انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که فرم کلی آن عبارت است از:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u \quad (48)$$

این معادله دمای  $u(x, y, z, t)$  را در جسمی از یک ماده همگن نشان می‌دهد.  $c^2$  ضریب نفوذ گرمایی و  $\nabla^2 u$  لاپلاسیان  $u$  است که در دستگاه دکارتی به صورت معادله (49) بیان می‌شود:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (49)$$

معادله انتقال حرارت در یک میله عبارت است از:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (50)$$

که در این معادله:

$$c^2 = \frac{k}{\rho c_p} \quad (51)$$

که در آن  $\rho$  چگالی، (بر حسب  $\text{kg/m}^3$ )،  $c_p$  ظرفیت گرمایی ویژه (بر حسب  $\text{J/(kg K)}$ ) و  $k$  رسانندگی گرمایی (بر حسب  $\text{W/(m K)}$ ) می‌باشد.

این مثال از مرجع [14] انتخاب شده است. هدف یافتن دمای  $u(x, t)$  در یک میله مسی به طول 80 cm می‌باشد، که سطح جانبی آن عایق کاری شده، دو انتهای میله در دمای  $0^\circ\text{C}$  ثابت نگه داشته شده است و دمای اولیه آن برابر با  $100 \sin(\pi x/80)^\circ\text{C}$  می‌باشد.

برای شروع معادله دیفرانسیل به صورت رابطه (52) در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (52)$$

سپس به صورت پس‌رو در زمان گسسته‌سازی انجام می‌گردد:

$$\frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial t} = \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\Delta t} = c^2 \frac{\partial^2 u^{(n+1)}}{\partial x^2} \quad (53)$$

$$-u^{(n+1)} + c^2 \Delta t \frac{\partial^2 u^{(n+1)}}{\partial x^2} = -u^{(n)} \quad (54)$$

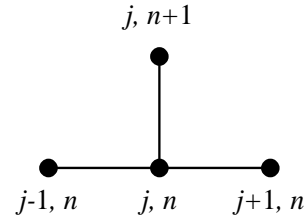


Fig. 1 The explicit method stencil.

شکل 1 نمای روش صریح

مرکزی مرتبه دو برای گسسته‌سازی مکان  $x_j$  استفاده شود، معادله (45) حاصل می‌گردد:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (45)$$

که این یک روش ضمنی برای حل مسأله یک بعدی گرما می‌باشد. در این روش می‌توان  $u_j^{n+1}$  را از حل دستگاه معادلات خطی محاسبه کرد:

$$(1 + 2r)u_j^{n+1} - ru_{j-1}^{n+1} - ru_{j+1}^{n+1} = u_j^n \quad (46)$$

این روش همیشه از نظر عددی پایدار و همگرا است، اما نسبت به روش‌های صریح از نظر عددی به محاسبات بیشتری نیاز دارد زیرا در هر گام زمانی باید نسبت به حل دستگاه معادله اقدام نمود [11]. خطاها نسبت به زمان خطی و نسبت به مکان درجه دوم می‌باشد.

$$\Delta u = O(\Delta t) + O(\Delta x^2) \quad (47)$$

در شکل 2 نمایی از این روش ضمنی مشاهده می‌شود.

### 5- حل مسائل وابسته به زمان با روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته

در این بخش به حل چند مثال پرداخته می‌شود. در هر مثال بعد از معرفی نوع و اطلاعات مثال، فرایند گسسته‌سازی و انتخاب نقاط و تشکیل طرف راست و چپ معادله به اختصار توضیح داده شده است. در مورد مسائل غیرخطی حل شده، ابتدا شکل تغییراتی معادلات بدست آمده و سپس در فرایند حل اعمال شده‌اند. لازم به ذکر است که کد توسعه داده شده قادر به حل هر دو نوع مسائل خطی و غیرخطی است. کدها به وسیله نرم‌افزار متماتیکا نسخه 11 توسعه داده شده است.

مسائل حل شده شامل انواع معادله‌های دیفرانسیل وابسته به زمان مانند معادله گرما، معادله انتشار موج یک بعدی و دوبعدی می‌باشد. در این بخش سعی شده مثال‌هایی انتخاب شود که دارای جواب تحلیلی باشند تا بتوان جواب بدست آمده را با جواب اصلی مقایسه کرد. در سایر موارد جواب بدست آمده با نتایج منابع دیگر مقایسه شده است.

چند نمونه از معادلات دیفرانسیل پرکاربرد در مکانیک جامدات در جدول 1 ارائه شده است.

نحوه بدست آوردن معادلات دیفرانسیل اشاره شده در جدول 1 و بسیاری دیگر از موارد مانند ارتعاش پل در عبور بار متمرکز، ارتعاش تیر روی پی گسترده، ارتعاش صفحات و پوسته‌ها و بسیاری از موارد معادلات دیفرانسیل

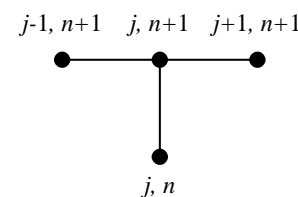


Fig. 2 The implicit method stencil

شکل 2 نمای روش ضمنی

شده است. در شکل 4 خطای حل مسأله به ازای اولین گام زمانی ( $t = 1s$ ) و آخرین گام زمانی ( $t = 400s$ ) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود مقدار خطا در بیشترین مقدار خود کمتر از 0.1 درصد است. در شکل 5 حل تحلیلی و حل روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته برای نقطه ای با مختصات  $x = 40$  cm نمایش داده شده است. این شکل نشان می دهد روش پیشنهادی با دقت بسیار خوبی قادر به حل این مسأله بوده است.

**5-2- مثال 2 - ارتعاش طولی در اعضای محوری تیر منشوری**

معادله دیفرانسیل ارتعاش طولی در اعضای محوری با مقطع منشوری به صورت معادله (58) است [13]:

$$-\frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (58)$$

که در آن  $u$  جابجایی طولی،  $E$  مدول الاستیسیته،  $A$  سطح مقطع و  $\gamma$  وزن واحد تیر می باشد. عبارت معادله (58) را می توان به صورت معادله (59) نشان داد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{Eg}{\gamma} \quad (59)$$

معادله موج، معادله ای خطی مرتبه دوم و از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می باشد. برای حل معادله موج نیاز به تابع  $f(x)$  برای جابجایی اولیه،  $g(x)$  برای سرعت اولیه و شرایط مرزی می باشد. در این مثال موجی با جابجایی اولیه  $f(x) = 0.01\sin(3x)$  و سرعت اولیه  $g(x) = 0$  و شرایط مرزی دو انتها صفر در بازه  $[0, \pi]$  در نظر گرفته می شود. همچنین مقدار داده های فیزیکی برابر است با  $E = 10^5 Pa = 10N/cm^2$  و  $p = 10g/cm^3$ . برای حل استفاده از روش پس رو در زمان به دلیل ماهیت فیزیکی موج صحیح نبوده و می توان از روش مرکزی استفاده کرد [15]:

$$\frac{\partial^2 u^{(n+1)}}{\partial x^2} = \frac{u^{(n+1)} - 2u^{(n)} + u^{(n-1)}}{\Delta t^2}$$

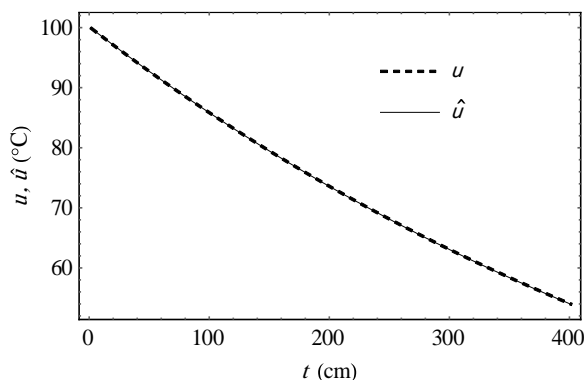
$$\frac{\partial^2 u^{(n+1)}}{\partial x^2} \Delta t^2 - u^{(n+1)} = -2u^{(n)} + u^{(n-1)} \quad (60)$$

مشاهده می شود که با داشتن  $u$  در زمان حال و در زمان قبل، مقدار  $u$  در زمان بعدی با حل دستگاه معادله دیفرانسیل به روش توابع پایه نمایی به دست می آید. برای در نظر گرفتن سرعت اولیه با توجه به تعریف سرعت:

$$u^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} = \frac{u^{(0)} - u^{(n-1)}}{\Delta t} \quad (61)$$

سپس با محاسبه رابطه معادله (62) به دست می آید:

$$u^{(n-1)} = -\Delta t u^{(0)} + u^{(0)} \quad (62)$$



**Fig. 5** Analytical solution and GEBF solution for point  $x = 40$  cm  
 شکل 5 حل تحلیلی و حل روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته برای نقطه  $x = 40$  cm

در معادله (54) طرف راست معلوم و طرف چپ مجهول می باشد. در هر مرحله با داشتن مقدار تابع دما در زمان  $t$  با حل دستگاه معادله، مقدار تابع در زمان  $n + 1$  به ازای تمام نقاط محاسبه می گردد. با توجه به طول 80 cm میله، دامنه مسأله از به صورت  $[0, 80]$  در راستای  $x$  در نظر گرفته شده است که با فواصل 0.5 cm گسسته سازی شده است و مقدار تابع در مرزها برابر با صفر در نظر گرفته شده است. تابع  $\psi$  برابر با تقریب زیر در نظر گرفته شده است:

$$\psi(\alpha) = \exp(\alpha x/80) \quad (55)$$

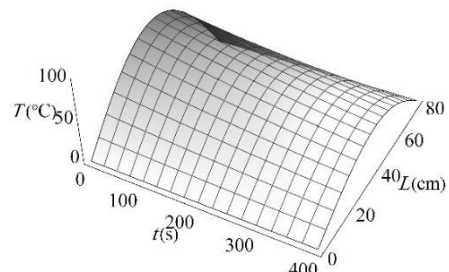
که در آن مقادیر  $\alpha$  در بازه  $[-5, 5]$  با فواصل 0.1 انتخاب شده است. در اینجا مقدار داده های فیزیکی برای مس عبارتند از چگالی  $8.92 g/cm^3$ ، گرمای ویژه  $0.093 cal/(g \cdot ^\circ C)$  و رسانندگی گرمایی  $0.95 cal/(cm \cdot s \cdot ^\circ C)$  که در این صورت:

$$c^2 = 1.158 cm^2/s \quad (56)$$

در شکل 3 نمای کلی حل مثال اول نشان داده شده است. جواب تحلیلی معادله (56) عبارت است از:

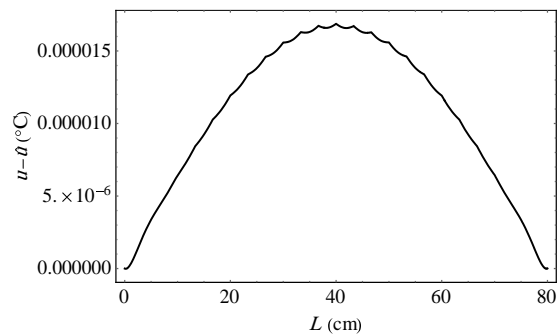
$$u(x, t) = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{80}\right) \exp(-0.001785t) \quad (57)$$

مسأله با روش توابع پایه نمایی حل شده و با جواب تحلیلی معادله مقایسه

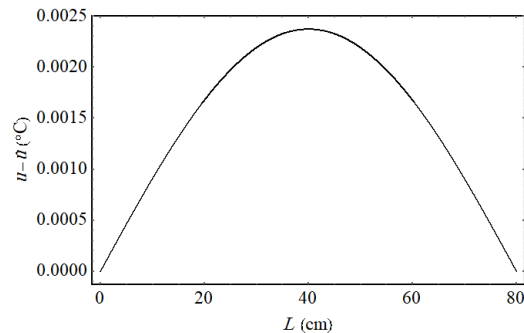


**Fig. 3** Solution overview of Example 1

شکل 3 نمای کلی حل مثال اول



(الف)



(ب)

**Fig. 4** Difference between analytical solution and GEBF solution in first and last time steps for Example 1

شکل 4 اختلاف حل تحلیلی با حل روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته در اولین و آخرین گام زمانی برای مثال اول

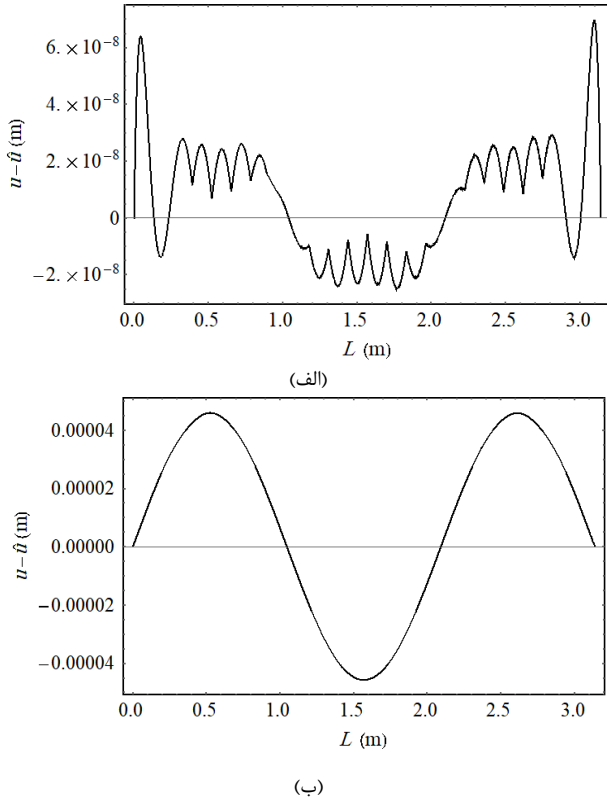


Fig. 8 Difference between analytical solution and GEBF solution in first and last time steps for Example 2

شکل 8 اختلاف حل تحلیلی با حل توابع پایه نمایی تعمیم یافته در اولین و آخرین گام زمانی برای مثال دوم

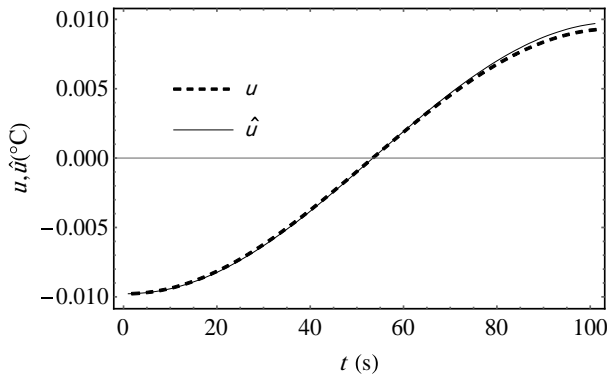


Fig. 9 Analytical solution and GEBF solution for point  $x = 1.5$  m

شکل 9 حل تحلیلی و حل روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته برای نقطه  $x = 1.5$  m

معادله خطی سازی شده برای قسمت مجهول عبارت است از:

$$-u^{(n+1)} + 2\Delta t^2 u_{xx}^{(n+1)} \delta u_{xx}^{(n+1)} + u_{yy}^{(n+1)} \quad (66)$$

شرایط اولیه به صورت  $x^2 y$ ، شرایط مرزی به ازای تمام نقاط روی مرز به صورت  $x^2 y$  و سرعت اولیه برابر با صفر در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که مقادیر  $x$  و  $y$  در بازه  $[0, 1]$  انتخاب شده و با فاصله 0.1 گسسته سازی می شود و  $\alpha$  و  $\beta$  در عبارت  $\psi(\alpha, \beta) = \exp(\alpha x + \beta y)$  از بازه  $[-2, 2]$  با فواصل 0.1 انتخاب شده است. جواب تحلیلی معادله  $u(x, y, t) = x^2 y + t^2$  گام زمانی در این مثال  $\Delta t = 0.05$ s انتخاب شده است. در شکل های 10 و 11 به ترتیب شکل کلی و خطای حل برای اولین گام زمانی ( $t = 0.05$  s) و آخرین گام زمانی ( $t = 1$  s) نمایش داده شده است.

بنابراین با دانستن سرعت اولیه و مکان اولیه مقدار  $u^{(n-1)}$  در اولین گام زمانی محاسبه می گردد. در بقیه گام های زمانی، زمان در مرحله قبل موجود می باشد. در این مثال معادله سرعت اولیه برابر با صفر می باشد و همچنین مقادیر مرزی برابر با صفر است. مقادیر  $\alpha$  در بازه  $[-1, 1]$  با فواصل 0.1 انتخاب شده است و گسسته سازی در مکان در بازه  $[0, \pi]$  با فواصل  $\pi/100$  انجام شده است. مشخصات و شرایط مرزی مثال دوم در شکل 6 نشان داده شده است. در این مثال  $f(x) = 0.01 \sin(3x)$  می باشد و  $g(x)$  برابر با صفر در نظر گرفته شده است.

در شکل 7 حل مثال به روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته نمایش داده شده است.

در شکل 8 خطای روش به ازای اولین گام زمانی ( $t = 0.05$ s) و آخرین گام زمانی ( $t = 1$  s) نشان داده شده است.

در شکل 9 نمودار حل تحلیلی و حل با روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته برای نقطه ای با مختصات  $x = 1.5$  m نمایش داده شده است. حداکثر خطای روش پیشنهادی در طول روند حل کمتر از 0.5% می باشد.

### 3-5- مثال 3 - ارتعاش غیرخطی اسکالر

در این مثال یک ارتعاش غیرخطی اسکالر بررسی می گردد. معادله موج در این حالت عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + 2 - x^4 - 2y \quad (63)$$

در این معادله  $c$  ثابت ماده است. با توجه به اینکه مشتق جزئی نسبت به  $x$  به توان دو رسیده است، این معادله غیرخطی می باشد. با گسسته سازی زمانی، طرف راست و چپ معادله محاسبه می شود:

$$-2u^{(n)} + u^{(n-1)} = -u^{(n+1)} + c^2 \Delta t^2 \left( \left( \frac{\partial^2 u^{(n+1)}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 u^{(n+1)}}{\partial y^2} \right) \quad (64)$$

$$-2u^{(n)} + u^{(n-1)} = -u^{(n+1)} + c^2 \Delta t^2 \left( (u_{xx}^{(n+1)})^2 + u_{yy}^{(n+1)} \right) \quad (65)$$

مانند قسمت قبل، با داشتن مقدار  $u$  در زمان حال و زمان قبل، مقدار  $u$  در زمان بعد محاسبه می شود.

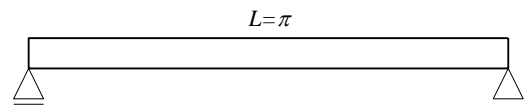


Fig. 6 Properties of Example 2

شکل 6 مشخصات مثال دوم

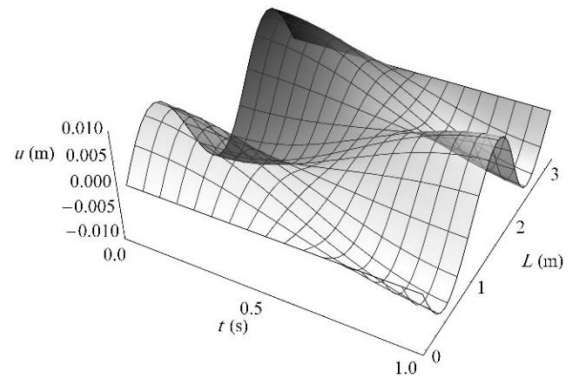
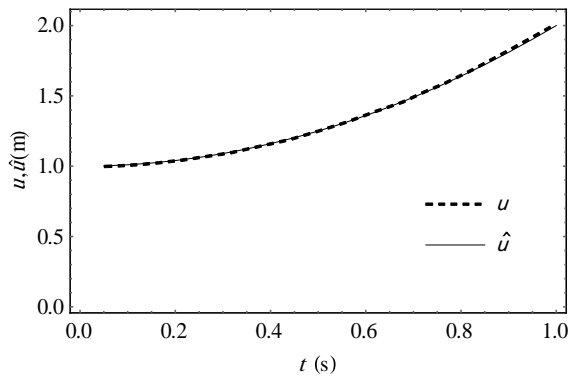


Fig. 7 Solution overview of Example 2

شکل 7 نمای کلی حل مثال دوم



**Fig. 12** Analytical solution and GEBF solution for point [1,1]m  
 شکل 12 حل تحلیلی و حل روش توابع پایه تعمیم یافته برای نقطه [1,1]m

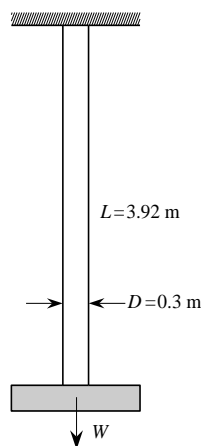
با یک درجه آزادی تقریب زد. در این سیستم میله می تواند با یک فنر جایگزین شود. برای محاسبه ارتعاش طولی تیر در راستای عمودی، همان طور که پیش تر گفته شد، مقدار جابه جایی  $u$  از معادله موج  $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2$  بدست می آید که در آن [13]:

$$c^2 = \frac{kLg}{\omega} \quad (67)$$

که در این معادله  $k$  سختی،  $L$  طول و  $\omega$  وزن واحد فنر است. میزان جابه جایی در انتهای بالایی تیر برابر با صفر بوده و در انتهای پایینی، نیروی کششی تیر باید با نیروی اینرسی حاصل از جرم متصل شده برابر باشد. به بیان دیگر  $AE(\partial u / \partial x)_{x=L} = -w/g(\partial^2 u / \partial t^2)_{x=L}$  مقدار جابه جایی اولیه برابر با  $0.01 \sin(x)$  و سرعت اولیه برابر با صفر می باشد. نمای کلی از مسأله در شکل 10 نشان داده شده است. در اینجا دامنه مسأله به 100 قسمت تقسیم شده و گام زمانی  $\Delta t = 0.01s$  در نظر گرفته شده است. مشخصات مصالح عبارت است از  $\gamma = 2500 \text{ kg/m}^3$ ،  $E = 10^5 \text{ Pa}$ ،  $W = 70 \text{ Ton f}$ ،  $k = 636 \text{ N/m}$ . قطر تیر  $D = 0.3m$  در نظر گرفته شده است. شکل 13 مشخصات مثال چهارم نشان داده شده است.

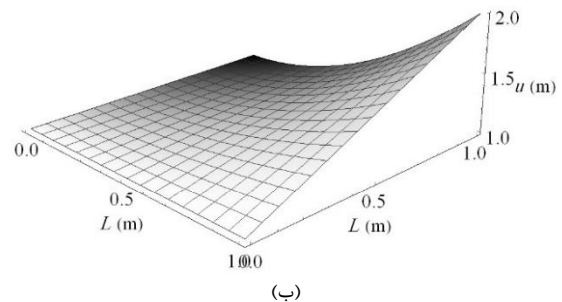
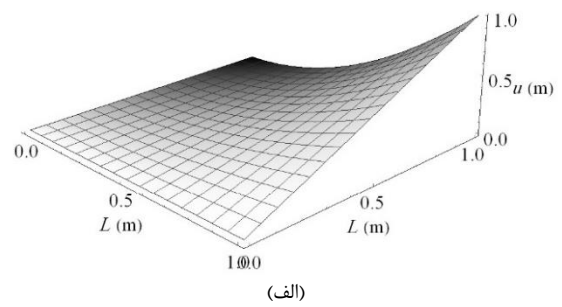
با توجه به توضیحات بیان شده پس از حل مسأله، شکل کلی جواب و خطای روش به دست می آید که در شکل های 14 و 15 برای اولین ( $t = 0.01s$ ) و آخرین گام زمانی ( $t = 2.5s$ ) نشان داده شده است. حل تحلیلی این مسأله عبارت است از:

$$u(x, t) = 0.01 \sin(x) (\cos(t) + \sin(t)) \quad (68)$$

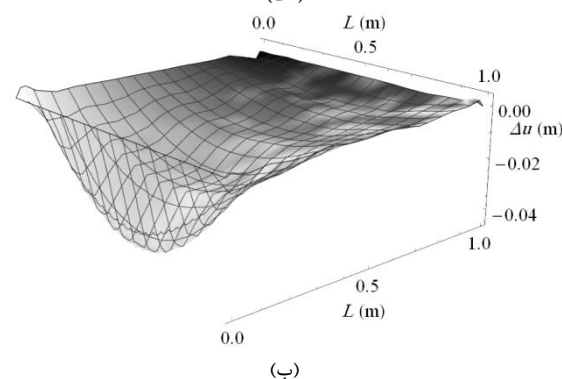
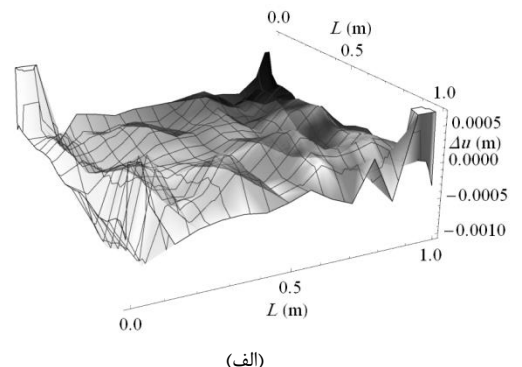


**Fig. 13** Properties of Example 4

شکل 13 مشخصات مثال چهارم



**Fig. 10** Solution overview of Example 3 in first and last time steps  
 شکل 10 نمای کلی حل مثال 3 در اولین و آخرین گام زمانی



**Fig. 11** Difference between analytical solution and GEBF solution in first and last time steps for Example 3

شکل 11 اختلاف حل تحلیلی با حل توابع پایه تعمیم یافته در اولین و آخرین گام زمانی برای مثال سوم

در شکل 12 نمودار حل تحلیلی و حل روش توابع پایه تعمیم یافته برای نقطه ای با مختصات  $[x, y] = [1, 1] \text{ m}$  نمایش داده شده است که نشان از دقت بسیار بالای روش پیشنهادی دارد.

#### 4-4- مثال 4 - ارتعاش طبیعی میله با بار در انتها

یک میله منشوری همراه یک جرم در انتهای آن در نظر گرفته شود، چنانچه بتوان از جرم میله در مقابل جرم انتهای آن صرف نظر کرد، می توان سیستم را



5-5- مثال 5 - موج الاستیک در تیر کنسول

در مثال آخر انتشار موج الاستیک در یک تیر کنسولی تحت اثر بارگذاری ضربه‌ای برشی در انتهای تیر بررسی شده است. جابه‌جایی و سرعت اولیه در این مثال صفر منظور شده است. در لبه بالایی تیر نیروی برشی برابر با  $f(t)$  به آن وارد می‌شود. شرایط مرزی در سایر لبه‌های و معادلات مسأله در شکل 17 نشان داده شده است. در این مثال دامنه با فواصل 0.1 انتخاب و گام زمانی برابر با 0.005 s انتخاب شده است. مسأله در حالت کرنش مسطح حل شده است. مقادیر داده‌های فیزیکی مسأله عبارت است از  $E = 10^5 \text{ Pa}$  و  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$  و همچنین روی سطح بالایی در  $\gamma = 4$  نیروی  $F(t)$  اعمال می‌گردد.

معادله نیروی اعمالی برابر است با:

$$F(t) = \begin{cases} 100t & 0 \leq t \leq 0.01 \\ -100(t - 0.02) & 0.01 \leq t \leq 0.02 \end{cases} \quad (69)$$

هر درایه از بردار  $\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \end{Bmatrix}$  تابعی از  $x$  و  $y$  و  $t$  می‌باشد. معادله دیفرانسیل حاکم بر این مسأله عبارت است از:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{b} \quad (70)$$

که در آن  $\mathbf{D}$  ماتریس ضرایب الاستیسیته،  $\mathbf{S}$  عملگر دیفرانسیلی کرنش و  $\mathbf{b}$  بردار نیروهای بدنه است. در حالت کرنش مسطح باشد، ماتریس  $\mathbf{D}$  برابر است با:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (71)$$

که در اینجا  $E$  مدول الاستیسیته و  $\nu$  ضریب پواسون می‌باشد. عملگر  $\mathbf{S}$  نیز برای حالت دو بعدی به صورت معادله (72) تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (72)$$

با مقدار دهی پارامترها در معادله (70):

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial t^2} \end{array} \right\} \\ & = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{15} \left( 3 \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + 5 \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \right) \\ \frac{2}{15} \left( 8 \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial y^2} + 5 \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x^2} \right) \end{array} \right\} \quad (73) \end{aligned}$$

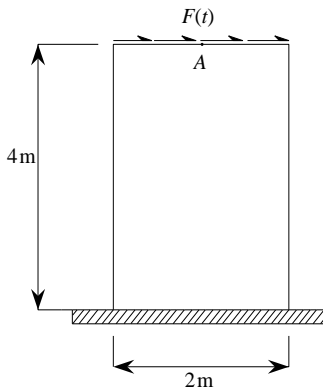


Fig. 17 Figure and properties of Example 5

شکل 17 شکل و مشخصات مثال پنجم

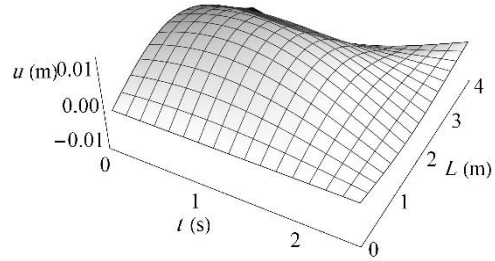
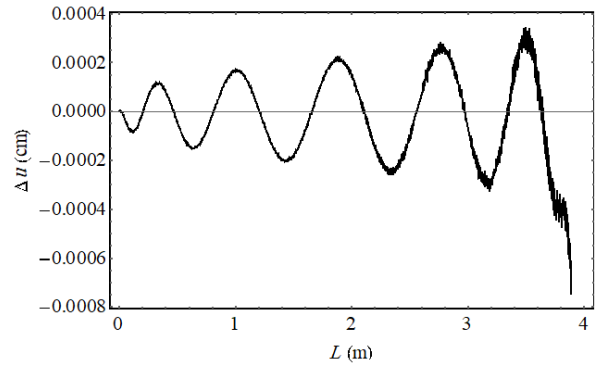
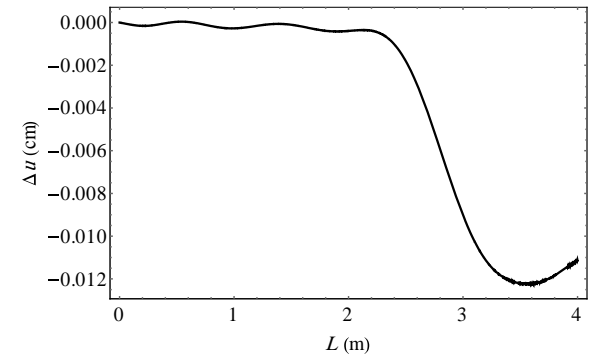


Fig. 15 Solution overview of Example 4

شکل 14 نمای کلی حل مثال چهارم



(الف)



(ب)

Fig. 15 Difference between analytical solution and GEBF solution in first and last time steps for Example 4

شکل 15 اختلاف حل تحلیلی با حل توابع پایه نمایی تعمیم یافته در اولین و آخرین گام زمانی برای مثال چهارم

در شکل 16 نمودار حل تحلیلی و حل با روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته برای نقطه ای با مختصات  $x = 1.5 \text{ m}$  نمایش داده شده است. این شکل نیز حاکی از دقت بسیار مطلوب روش پیشنهادی است.

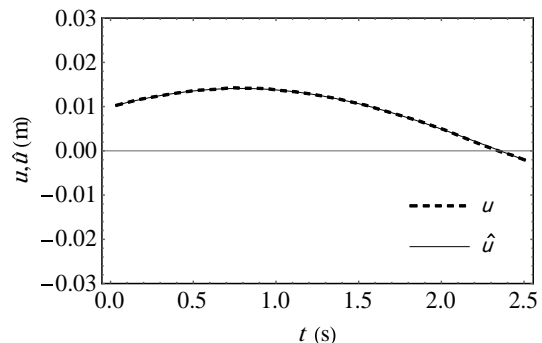


Fig. 16 Analytical solution and GEBF solution for point  $x = 1.5 \text{ m}$

شکل 16 حل تحلیلی و حل روش توابع پایه نمایی تعمیم یافته برای نقطه 1.5 m

فرایند گسسته‌سازی مکان و پیمایش زمانی و تعیین طرف راست و چپ (معلوم و مجهول) و همچنین خطی‌سازی در مثال‌های غیرخطی بیان شد. بررسی نتایج نشان می‌دهد جواب‌های به دست آمده از دقت خوبی برخوردار هستند.

### 7- مراجع

- [1] O. C. Zienkiewicz, Achievements and some unsolved problems of the finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, No. 1-3, pp. 9-28, 2000.
- [2] R. A. Gingold, J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, No. 3, pp. 375-389, 1977.
- [3] L. D. Libersky, A. G. Petschek, T. C. Carney, J. R. Hipp, F. A. Allahdadi, High strain lagrangian hydrodynamics: a three dimensional SPH code for dynamic material response, *Journal of Computational Physics*, Vol. 81, No. 1, pp. 67-75, 1993.
- [4] J. Swegle, D. Hicks, S. Attaway, Smoothed particle hydrodynamics stability analysis, *Journal of Computational Physics*, Vol. 116, No. 1, pp. 123-134, 1995.
- [5] B. Boroomand, S. Soghrati, B. Movaheedian, Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 81, No. 8, pp. 971-1018, 2010.
- [6] F. Mossaiby, M. Ghaderian, R. Rossi, Implementation of a generalized exponential basis functions method for linear and non-linear problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 105, No. 3, pp. 221-240, 2016.
- [7] F. Mossaiby, Optimal implementation of exponential basis function method on different software platforms and performance comparison, *Moades Civil Engineering Journal*, Vol. 17, No. 1, pp. 217-233, 2017. (in Persian)
- [8] I. Argyros, *Convergence and Applications of Newton-type Iterations*, pp. 41-125, New York: Springer-Verlag, 2008.
- [9] R. Penrose, A generalized inverse for matrices, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 51, No. 3, pp. 406-413, 1955.
- [10] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, *The mathematics of financial derivatives: A student introduction*, 1<sup>st</sup> edition, pp. 135-165, Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [11] B. Timothy, *Explicit and Implicit Methods in Solving Differential Equations*, Honors Scholar Theses, University of Connecticut, United States, 2010.
- [12] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, 2nd Edition, Oxford: Oxford University Press, 1975.
- [13] W. Weaver, S. Timoshenko, D. H. Young, *Vibration Problems in Engineering*, pp. 307-379, New York: Wiley, 1990.
- [14] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, pp. 98-105, New Jersey: Wiley, 1972.
- [15] M. H. Holmes, *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations*, pp. 155-175, New York: Springer-Verlag, 2007.
- [16] R. G. J. Dominguez, *Boundary Element in Dynamics*, pp. 444-452, Southampton: WIT Press, 1993.
- [17] S. H. Hashemi, B. Boroomand, B. Movaheedian, Exponential basis functions in space and time: A meshless method for 2D time dependent problems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 241, pp. 526-545, 2013.

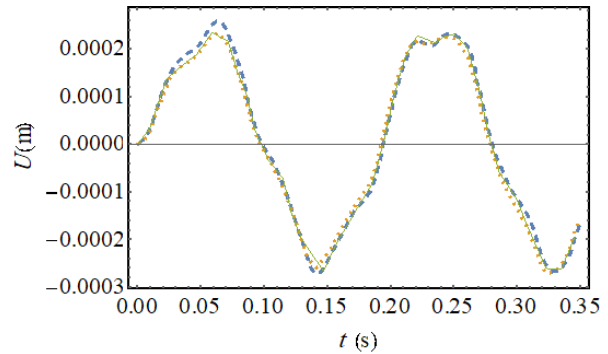


Fig. 18 Variation of the horizontal displacement of point A of Example 5

شکل 18 تغییرات جابه‌جایی افقی نقطه A برای مثال پنجم

مشابه قبل زمان به صورت مرکزی گسسته‌سازی می‌شود و طرفین معلوم و مجهول ساخته می‌شوند. بنابراین طرف مجهول عبارت است از:

$$f_{\Omega}(x, y) = -2 \frac{\mathbf{u}^{(n)}(x, y, t)}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{u}^{(n+1)}(x, y, t)}{\Delta t^2} - \mathbf{b} \quad (74)$$

و طرف معلوم پس از ساده‌سازی عبارت است از:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{15} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}(x, y, t)}{\partial x^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{v}^{(n)}(x, y, t)}{\partial x^2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}(x, y, t)}{\partial y^2} \\ \frac{16}{15} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^{(n)}(x, y, t)}{\partial y^2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{10}{15} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}(x, y, t)}{\partial x \partial y} \\ \frac{10}{15} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^{(n)}(x, y, t)}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}(x, y, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{v}^{(n)}(x, y, t)}{\partial t^2} \end{array} \right\} \quad (75)$$

حل تحلیلی برای مسئله در دسترس نیست و جواب با روش اجزا محدود [16] و توابع پایه نمایی [17] مقایسه شده است. در شکل 18 جابه‌جایی افقی نقطه A در مرکز لبه تیر نشان داده شده است.

### 6- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش توابع پایه نمایی تعمیم‌یافته به مسائل حوزه زمان گسترش داده شد. سپس پنج مثال از معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی وابسته با این روش مورد بررسی قرار گرفت. برای هر مثال به طور کامل و جداگانه