

## بررسی تحلیلی اتلاف انرژی لغزش جزئی در اتصالات

کیوان اسدی<sup>۱</sup>، حمید احمدیان<sup>۲</sup>، حسن جلالی<sup>۳\*</sup>

- ۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
  - ۲- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران
  - ۳- استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی اراک، دانشگاه علم و صنعت ایران، اراک
- \* اراک، صندوق پستی ۱۱۷۷-۳۸۱۳۵، jalali@iust.ac.ir

**چکیده-** سطوح تماس به عنوان اصلی ترین عامل اتلاف انرژی در اتصالات سازه‌ای که دارای حرکت نسبی هستند شناخته می‌شوند. یکی از نکات مورد توجه در بحث دینامیک سازه ارائه یک مدل پیشگو برای اتصالات مکانیکی است به طوری که پاسخ دینامیکی، سفتی و استهلاک ناشی از سطح اصطکاکی با قابلیت اطمینان بالا توسط آن قابل محاسبه باشد. تحقیق حاضر به ارائه مدلی تحلیلی برای تعیین انرژی اتلافی ناشی از پدیده لغزش کوچک در مورد تیری با شرایط مرزی آزاد- اصطکاکی که تحت اثر نیروی تحریک جانبی قرار دارد می‌پردازد. برای انجام این مهم، معادلات حاکم بر ارتعاشات خمشی تیر مقید اصطکاکی استخراج شده و در سازه مورد مطالعه تعمیم داده می‌شوند. سپس الگوی روند حل برای مشخص نمودن نقطه گذار از فاز چسبندگی به لغزش و رسم منحنی‌های هیستریزیس به ازای نیروهای تک‌هارمونی شرح داده می‌شوند. در انتها نتایج حاصل از مدل تحلیلی با انجام مطالعه پارامتری مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلیدواژگان:** مدل پیوسته لغزش کوچک، تعیین چسبندگی- لغزش، ارتعاش خمشی، حلقه هیستریزیس

## Analytical investigation of micro-slip energy dissipation in joints

K. Asadi<sup>1</sup>, H. Ahmadian<sup>2</sup>, H. Jalali<sup>3\*</sup>

- 1- M.Sc. Student, School of Mech. Eng., Iran Univ. of Science & Tech., Tehran, Iran
  - 2- Prof., School of Mech. Eng., Iran Univ. of Science & Tech., Tehran, Iran
  - 3- Assistant Prof., Iran Univ of Science & Tech/Arak Branch, Arak, Iran
- \*P.O.B. 38135-1177, Arak, jalali@iust.ac.ir

**Abstract-** Contact interfaces are known as the main source of energy dissipation in the structural joints. Therefore it is important in structural dynamic analysis to use predictive joint models which are capable to simulate the structural response and energy dissipation with an acceptable accuracy. In this paper an analytical model is proposed for energy dissipation evaluation due to micro slip mechanism in a beam structure with frictional-free boundary condition. The bending response governing equations are derived under harmonic external excitation and are solved in order to detect transition from stick to slip at the contact interface. The resultant hysteresis loops are obtained and parametric study is done for a numerical case study.

**Keywords:** Continuous Micro-Slip Model, Stick-Slip, Flexural Vibration, Hysteresis Loop

## ۱- مقدمه

اتصالات مکانیکی که معمولاً برای انتقال نیرو بین دو جزء یک سیستم مکانیکی از طریق سطوح تماس اصطکاکی به کار می‌روند دینامیک سازه را تحت تاثیر قرار می‌دهند. آن‌ها باعث کاهش سفتی سازه و اتلاف انرژی می‌شوند به طوری که ۹۰ درصد میرایی کل سازه می‌تواند ناشی از این عامل باشد [۱]. رفتار دینامیکی سازه‌های دارای اتصال متأثر از خصوصیات ذاتی اتصال و از آن جمله رابطه نیرو-تغییر مکان در بارگذاری مماسی است. لغزش یکی از دو مکانیزم اصلی اتلاف انرژی در ارتعاشات سازه‌هاست که پاسخ سازه را غیرخطی کرده و در بارهای عمودی بالا انعطاف‌پذیری سازه را افزایش می‌دهد، ولی اهمیت آن در اتلاف انرژی سیستم ارتعاشی است که در دامنه‌های ارتعاشی متوسط روی می‌دهد. انرژی اتلافی لغزشی متأثر از نیروهای اصطکاکی است که در بارگذاری‌های پیچشی و برشی بین اجزا به وجود می‌آید و در حالت کلی تابع ضریب اصطکاک سطح و کشش در پیچ است.

مکانیزم اتلاف انرژی در اثر لغزش کوچک (اتلافات اصطکاکی) که در بین سطوح تماس اتصالات مکانیکی روی می‌دهد از دهه پنجاه میلادی مورد بررسی قرار گرفته است. گودمن [۲] در سال ۱۹۵۹ بررسی کلی در مورد استهلاک لغزشی سطوح تماس انجام داد. وی سه نوع مدل اتصالاتی را مورد بررسی قرار داد و نتیجه‌گیری کرد که انرژی اتلافی با توان سوم نیرو متناسب است. در هر سه حالت، سطح مشترک با اتصال کولمب توصیف شده بود. اونگار [۳] در دو مطالعه جامع در سال‌های ۱۹۶۴ و ۱۹۷۳ کار وی را تکمیل کرد. با توجه به یافته‌های وی، نرخ اتلاف به صورت غیرخطی با بزرگی نیرو رابطه دارد. مترل [۴] با بررسی اتصالات لب‌به‌لب تحت بار محوری، همان رابطه بین انرژی تلف‌شده و بار اعمالی را به دست آورد. این مطالعات نشان دادند اصطکاک خشک در اتصالات زمانی باعث استهلاک می‌شود که نیروهای اعمالی باعث به وجود آمدن تنش برشی در اتصال شوند. در واقع نیروهای اصطکاکی با مقاومت در مقابل حرکت مماسی نسبی باعث اتلاف انرژی می‌شوند. ایرلس [۵] در سال ۱۹۶۶ بیان کرد که بیشترین ظرفیت ضریب استهلاک در اتصال پرچی زمانی رخ می‌دهد که تمام نیروهای برشی از طریق اصطکاک انتقال یابند به طوری که پرچ هیچ نیروی برشی را تحمل نکند.

مدل‌های ذکر شده کاملاً با تئوری جانسون [۶] در مورد تماس و لغزش سطوح کروی قابل مقایسه‌اند که بر مبنای فرض وجود اصطکاک کولمب در کنش‌های متقابل در سطوح تماس بیان شده‌اند. طبق این یافته‌های تحلیلی، اتلاف انرژی با بزرگی نیروی اعمالی با توان ۳ رابطه دارد، ولی مدت‌ها بعد محققان آزمایشگاه ساندا<sup>۱</sup> با انجام مطالعات تجربی توانستند رابطه اتلاف و نیرو را به صورت توان سوم به دست آورند و متوجه شدند توان مقادیری در محدوده ۲/۵ تا ۲/۹ دارد. محققان دیگر نیز در نتایج تجربی خود، این توان را حدوداً ۲/۵ بر آورد کرده‌اند [۷-۹].

برخی محققان لغزش جزئی را با توجه به دیدگاه پیوسته که مدل‌های پیچیده‌تری بوده و دقت بهتری دارند مدلسازی کرده‌اند. یکی از رایج‌ترین روش‌های به کار رفته، اعمال تئوری هرتز و روش میندلین [۱۰] برای به دست آوردن نواحی چسبیده و لغزشی و همچنین انرژی اتلافی است که با فرض بارگذاری شبه‌استاتیکی و اصطکاک کولمب انجام پذیرفته است.

اودن [۱۱]، با توجه به مدل پیوسته سطح تماس، روابط توانی را برای تنش‌های عمودی و مماسی ارائه کرد. سپس، با استفاده از فرایند منظم‌سازی اصطکاک<sup>۲</sup>، ناپیوستگی در سرعت نسبی صفر را هموار کرد که باعث می‌شود تحت هیچ شرایطی فاز چسبندگی در سطح تماس رخ ندهد.

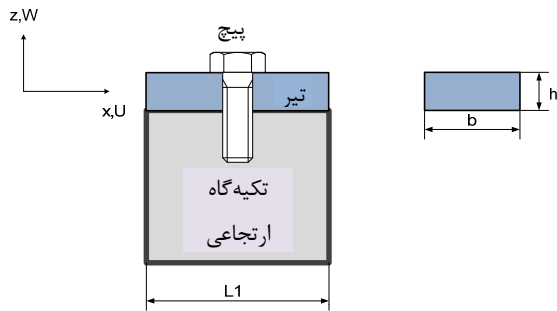
مدل دیگر مدل وابسته به حالت تماس و سرعت نسبی ریس [۱۲]<sup>۳</sup> است که در بررسی مسائل مربوط به پاسخ پایداری سیستم‌های خودتحریک و همچنین در توصیف پاسخ اجباری تماس تک‌نقطه استفاده شده است. مدل لغزش جزئی بعدی مدل منک [۱۳] است که در ابتدا برای محاسبات مربوط به استهلاک پره توربین ارائه شده بود. این مدل سطح مشترک را به صورت الاستیک در نظر گرفته و سه حالت لغزش الاستیک، لغزش جزئی و لغزش کامل را بررسی و فرمول‌بندی می‌کند. کزبا [۱۴]، برای ساده کردن مدل، لایه برشی را در مدل ارائه شده توسط منک حذف کرد و بار عمودی را درجه دو در نظر گرفت و پره متصل به زمین را در فضای فرکانسی تحلیل کرد و نتیجه‌گیری کرد که مدل لغزش بزرگ پاسخ سازه را بزرگ‌تر از مدل لغزش کوچک پیشگویی می‌کند. برگر [۱۵]

1. Sandia

2. Friction Regularization Procedure

3. Rice's Rate- and State- Dependent Friction Law

که در آن  $x$  و  $z$  مختصات کارتزین به ترتیب در جهت افقی و عمودی و  $U$  و  $W$  به ترتیب تغییر شکل در جهت‌های افقی و عمودی هستند.  $u$  و  $w$  نیز به ترتیب جابه‌جایی تار خنثی تیر و چرخش تیر در صفحه  $xz$  می‌باشند. منظور از علامت ' مشتق نسبت به متغیر  $x$  است.



شکل ۲ قسمت مستقر بر روی تکیه‌گاه اصطکاکی تیر

رابطه میدان کرنش با میدان جابه‌جایی برای حالت تنش صفحه‌ای به صورت رابطه (۲) است.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z} \\ \sigma_{xx} &= E \varepsilon_{xx} & \sigma_{xz} &= 2G \varepsilon_{xz} & \sigma_{zz} &= E \varepsilon_{zz} \end{aligned} \quad (2)$$

معادلات حاکم بر ارتعاش خمشی تیر دارای اتصال اصطکاکی از اصل همیلتون به شرح زیر به دست می‌آید. اصل همیلتون طبق رابطه (۳-الف) نوشته می‌شود. در این مرحله دلتای دیراک را با  $\delta$  و دلتای تغییرات را با  $\Delta$  نشان می‌دهیم تا اشتباه گرفته نشوند.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Delta T - \Delta P + \Delta W_{nc}) dt = 0 \quad (3\text{-الف})$$

که در آن  $T, P$  و  $W_{nc}$  به ترتیب انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار نیروی ناپایستارند.

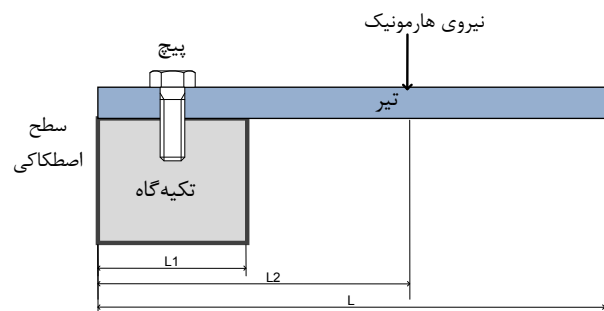
$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dV + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} m_0 (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) \delta(x - \frac{L_1}{2}) dx \quad (3\text{-ب})$$

انرژی جنبشی به صورت رابطه (۳-ب) تعریف می‌شود که در آن  $\rho$  چگالی تیر و  $m_0$  جرم پیچ است و علامت " " مفهوم مشتق نسبت به زمان را دارد.

$$P = \frac{1}{2} \int_V \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} k_0 u^2 \delta(x - \frac{L_1}{2}) dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_1} k_n w^2(x) dx \quad (3\text{-پ})$$

سازه را به صورت جسم الاستیک دوبعدی مدل کرده و با توجه به تنش عمودی و اصطکاک کولمب سطح تماس را توصیف کرده است. در این حالت پاسخ سطح تماس و جسم دارای اندرکنش بوده و فاز چسبندگی سطح به صورت آشکار در مدل ظاهر می‌شود. سیگراوگلو [۱۶] مدل پیوسته منک را با در نظر گرفتن اینرسی تیر و در دو بار عمودی محدب و مقعر و تحت تحریک محوری توسعه داده و با ارائه حل دقیق، منحنی‌های هیستریزیس را به دست آورده و با حل عددی تماس تک‌نقطه مقایسه کرده است.

هدف از این مقاله، تعمیم مدل ارائه شده توسط سیگراوگلو برای ارتعاش خمشی تیر آزاد-مقید اصطکاکی است که توسط نیروی هارمونیک جانبی تحریک می‌شود. در قسمت مقید اصطکاکی تیر مطابق شکل ۱ به یک تکیه‌گاه ارتجاعی پیچ شده است. در این پژوهش، علاوه بر حرکت محوری تیر، حرکت جانبی آن نیز در نظر گرفته شده و تلاش بر این است که از طریق تحلیلی، اتلاف لغزشی ناشی از اثرات اصطکاک کولمب در بارگذاری سیکلی با استفاده از قانون میسینگ [۱۷] به دست آید.



شکل ۱ تیر با شرایط مرزی آزاد و تکیه‌گاه اصطکاکی

## ۲- مدل تحلیلی

### ۲-۱- استخراج معادلات حرکت

به منظور استخراج معادلات حرکت، قسمتی از تیر را که طبق شکل ۲ روی تکیه‌گاه قرار گرفته و با اصطکاک مقید شده است را در نظر می‌گیریم.

میدان جابه‌جایی برای تیر اولر به صورت ارائه شده طبق رابطه (۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} U(x, z) &= u(x) + z.w'(x) \\ W(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (1)$$

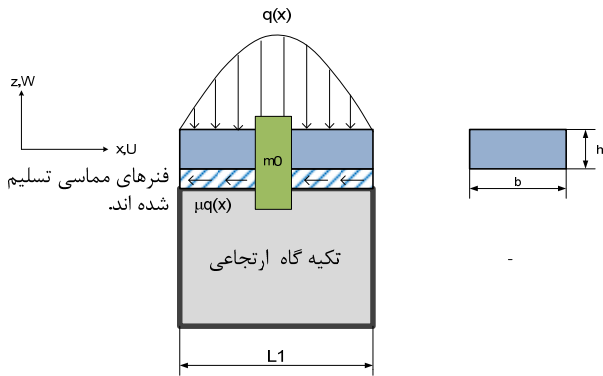
$$\left\{ \begin{aligned} &(\rho A + m_0 \delta(x - \frac{L_1}{2})) \ddot{w} + EI w''' - (\rho I + J_0 \delta(x - \frac{L_1}{2})) \ddot{w}' \\ &+ k_n w + k_t \frac{h^2}{4} w'' - k_t \frac{h}{2} u' = 0 \\ &(\rho A + m_0 \delta(x - \frac{L_1}{2})) \ddot{u} - EA u'' \\ &+ (k_0 \delta(x - \frac{L_1}{2}) + k_t) u - k_t \frac{h}{2} w' = 0 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

که در آن  $A, E, I, k_t, h, J_0$  به ترتیب مساحت مقطع، مدول الاستیسیته، ممان سطح، ضخامت، ضریب فنریته مماسی و ممان اینرسی پیچ حول محور افقی هستند. شایان ذکر است که کار نیروی  $f_h$  در حالت تماس چسبنده از آنجا که نیروی  $f_h$  نیروی فنر می‌باشد و تابع جابه‌جایی طولی تیر در سطح تماس است، معرف انرژی پتانسیل فنر خواهد بود.

### ب) حالت تماس لغزشی

در این حالت، نیروی برشی به حد ماکزیمم خود (نیروی اصطکاک) می‌رسد که متناسب با نیروی عمودی سطح تماس مطابق رابطه (۷) است. یعنی تمام فنرها تسلیم شده و نیروی تماس همان نیروی اصطکاک است (شکل ۳).

$$f_h = \mu q_{eff}(x) \quad (7)$$



شکل ۳ سازه در حالتی که سطح تماس در شرایط لغزش بزرگ است

$q_{eff}(x)$  همان نیروی عمودی موثر وارد بر سطح تماس است. معادله (۷) اندازه نیروی اصطکاک را نشان می‌دهد. پس از ساده‌سازی همانند حالت الف، معادلات حاکم بر تیر در حالت لغزشی نیز به فرم دو معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی و مستقل از هم به دست می‌آیند.

انرژی پتانسیل به صورت رابطه (۳-پ) تعریف می‌شود که در آن  $k_0$  سفتی پیچ در راستای افقی و  $k_n$  سفتی تکیه‌گاه در راستای عمودی است. در معادله (۳-پ) از انرژی پتانسیل راستای طولی پیچ در مقایسه با انرژی پتانسیل تکیه‌گاه الاستیک در راستای عمودی صرف‌نظر شده است.

$$W_{nc} = \int_0^{L_1} f_h U dx \quad (3-ت)$$

$f_h$  در رابطه (۳-ت) نیروی تماس است. با جاگذاری (۱) و (۲) در مجموعه روابط ۳-الف تا ۳-ت داریم.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V [\rho[(\dot{u} + z\dot{w}')\Delta(\dot{u} + z\dot{w}') + \dot{w}\Delta\dot{w}] - E(u' + zw'')\Delta(u' + zw'')] dV + \int_0^L f_h \Delta(u + zw') + \int_0^L m_0((\dot{u} + z\dot{w}')\Delta(\dot{u} + z\dot{w}') + \dot{w}\Delta\dot{w})\delta(x - \frac{L_1}{2}) + \int_0^L -k_0 u \Delta u \cdot \delta(x - \frac{L_1}{2}) - k_n w \Delta w dx] dt = 0 \quad (4)$$

برای ساده‌سازی رابطه (۴) لازم است  $f_h$  یا نیروی تماس مشخص شود. برای این منظور، دو حالت مجزا در نظر گرفته می‌شود.

### الف) حالت تماس چسبنده

در این حالت، نیروی برشی هنوز به حد بحرانی که همان نیروی اصطکاک است نرسیده است؛ به عبارت دیگر اگر لایه برشی را به صورت توزیعی از فنرهای مماسی<sup>۱</sup> در سطح تماس در نظر بگیریم، هیچ یک از فنرها هنوز به حد تسلیم نرسیده‌اند و جابه‌جایی آن‌ها در محدوده الاستیک است. در این حالت، تغییر شکل لایه برشی تحت اثر نیروی برشی متناسب با ضریب فنریته  $k_t$  تعریف می‌شود.

$$f_h = k_t U(x, -h/2) \quad (5)$$

با جاگذاری (۵) در (۴) و اعمال انتگرال‌گیری جزء-جزء روی زمان و فضا، معادلات حاکم تیر در حالت چسبنده به فرم دو معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی و کوپل با هم به دست می‌آید.

1. Bristles

اصلی که در شکل ۱ مشاهده می شود تعمیم می دهیم. در این حالت سازه در حالت خطی بوده و لایه برشی کاملاً در فاز چسبنده است. نکته اساسی در تعیین اینکه نقطه ای که در روی سطح مشترک قرار دارد در فاز چسبندگی است و یا در فاز لغزشی این است که نیروی برشی و نیروی مقاوم در نقطه مذکور محاسبه و مقایسه شوند. منظور از نیروی برشی همان نیروی تماس است که متاثر از نیروهای تحریک خارجی ایجاد می شود که اگر فاز تماس تماماً چسبندگی باشد نیروی تماس الاستیک نامیده می شود. منظور از نیروی مقاوم نیز همان نیروی اصطکاک است که از حاصل ضرب نیروی عمودی در ضریب اصطکاک به دست می آید. مادامی که در نقطه مورد نظر نیروی تماس الاستیک از حداکثر نیروی اصطکاک کوچک تر باشد، آن نقطه چسبنده است و به محض اینکه دو نیرو برابر شوند، نقطه دچار لغزش می شود.

برای تعیین نقطه گذار از حالت چسبندگی به لغزش، ابتدا می بایست نیروی تماس الاستیکی برای حالتی که تیر کاملاً در فاز چسبندگی قرار دارد محاسبه شود. معادلات حاکم بر دینامیک سازه وقتی که در فاز چسبندگی قرار دارد عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 EIw'''' + (\rho I \omega^2 - k_t \frac{h^2}{4} + J_0 \omega^2 \delta(x - \frac{L_1}{2}))w'' + (k_n - \rho A \omega^2 - m_0 \omega^2 \delta(x - \frac{L_1}{2}))w + k_t \frac{h}{2} u' &= 0 \quad 0 \leq x \leq L_1 \\
 EAu' + (\rho A \omega^2 + m_0 \omega^2 \delta(x - \frac{L_1}{2}) - k_t + k_0 \delta(x - \frac{L_1}{2}))u + k_t \frac{h}{2} w' &= 0 \quad 0 \leq x \leq L_1 \\
 EIw'' + \rho I \omega^2 w' - \rho A \omega^2 w = f \cdot \delta(x - L_2) \quad &L_1 \leq x \leq L \\
 EAu' + \rho A \omega^2 u = 0 \quad &L_1 \leq x \leq L \quad (13)
 \end{aligned}$$

در حقیقت معادلات دینامیکی سازه به دو بخش تقسیم می شوند. بخش مقید تیر که روی تکیه گاه ارتجاعی قرار گرفته و بخش آزاد تیر که نیروی هارمونیک - با فرکانس تحریک  $\omega$  - بر روی آن واقع است. معادلات حاکم بر هر قسمت از تیر شامل دو معادله در راستای افقی و جانبی است که در قسمت مقید تیر این دو معادله با هم کوپل و در قسمت آزاد مستقل از هم اند. از آنجا که پاسخ سازه نیز هارمونیک فرض می شود، شرایط مرزی و سازگاری تیر را می توان به شکل معادلات (۱۴) نوشت. در معادلات (۱۴)،  $\theta = \omega t$  است.

$$\begin{cases}
 (\rho A + m_0 \delta(x - \frac{L_1}{2}))\ddot{w} + EIw'''' - (\rho I + J_0 \delta(x - \frac{L_1}{2}))\ddot{w}'' \\
 + k_n w + \text{sgn}(\dot{U}) \frac{\mu h}{2} q_{eff}' = 0 \\
 (\rho A + m_0 \delta(x - \frac{L_1}{2}))\ddot{u} - EAu'' + k_0 \delta(x - \frac{L_1}{2})u \\
 + \text{sgn}(\dot{U}) \mu q_{eff} = 0
 \end{cases} \quad (8)$$

که معادله اول در (۸) مشابه رابطه دامپس [۱۷] برای دینامیک تیر لایه ای در حالت لغزش کامل است. عبارت  $\text{sgn}(\dot{U})$  به منظور در نظر گرفتن علامت سرعت در حالت لغزش در معادله (۸) قرار داده شده است. نیروی عمودی موثر وارد بر سطح تماس نیرویی است که پس از تاثیر پیش بار پیچ، سفتی عمودی تکیه گاه و صلبیت خمشی تیر در سطح تماس احساس می شود.

### ۲-۲- محاسبه نیروی عمودی موثر استاتیکی

نیروی ناشی از پیش بار پیچ باعث ایجاد بار عمودی استاتیکی در سطح تماس می شود که به سفتی عمودی تکیه گاه و صلبیت خمشی نیز بستگی دارد. برای به دست آوردن پروفیل توزیع آن باید دو معادله دیفرانسیل (۹) حل شوند.

$$\begin{cases}
 EIw_s'''' + k_n w_s = F_{bolt}(x) \quad 0 \leq x \leq L_1 \\
 EIw_s'' = 0 \quad L_1 \leq x \leq L
 \end{cases} \quad (9)$$

$F_{bolt}(x)$  پروفیل نیروی پیش بار پیچ است. شرایط مرزی معادلات فوق عبارت اند از:

$$w''(0) = w''(L) = w'(L) = w(L) = 0 \quad (10)$$

شرایط سازگاری نیز به صورت زیرند.

$$\begin{aligned}
 w_s(L_1^-) &= w_s(L_1^+) & w_s'(L_1^-) &= w_s'(L_1^+) \\
 w_s''(L_1^-) &= w_s''(L_1^+) & w_s'''(L_1^-) &= w_s'''(L_1^+)
 \end{aligned} \quad (11)$$

پروفیل توزیع نیروی عمودی موثر استاتیکی  $q_{eff}(x)$  از حل معادلات دیفرانسیل ۹ به همراه شرایط مرزی و سازگاری و استفاده از رابطه ۱۲ حاصل می شود.

$$q_{eff}(x) = k_n w_s(x) \quad (12)$$

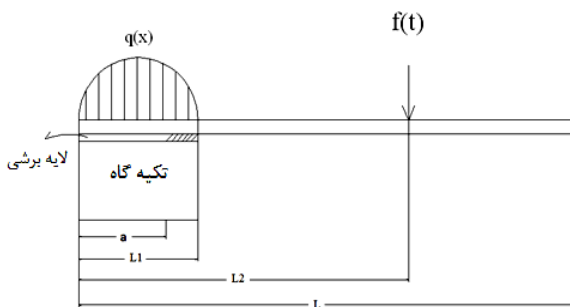
### ۳-۲- مدل دینامیکی سازه در حالت چسبنده

حال که معادلات حاکم بر قسمت مقید تیر در حالت چسبنده طبق روابط (۶) استخراج شده اند، مدل ارائه شده را برای سازه

نیروی تحریک از مقدار  $f_s$  تعداد نقاطی که دچار لغزش می شوند افزایش می یابد و در واقع یک جبهه لغزشی تشکیل شده و شروع به پیشروی می کند. با عنایت به اینکه نقطه شروع لغزش کاملاً وابسته به پاسخ سازه و نیروی عمودی سطح است، نمی توان یک قانون عمومی برای تعیین نقطه شروع لغزش حتی در سازه ساده مورد نظر بیان کرد؛ بدین معنی که  $x_s$  وابسته به فرکانس تحریک، محل بارگذاری دینامیکی، بار عمودی سطح و حتی ابعاد سازه است.

حال با توجه به مطالب ذکر شده و برای تکمیل مدل، فرض می کنیم نقطه شروع لغزش انتهای سمت راست تکیه گاه بوده و با افزایش دامنه تحریک جبهه لغزشی به طول  $L_1 - a$  در قسمت راست سطح تماس تشکیل شده باشد. در این صورت سطح تماس به دو منطقه چسبندگی در قسمت چپ و لغزشی در قسمت راست تیر تقسیم می شود. با تعمیم مطالب گفته شده در بخش الف و ب معادلات حاکم بر سازه شکل ۴ از معادلات دیفرانسیلی (۱۸) تبعیت می کنند.

$$\begin{aligned}
 Elw'' + (\rho I \omega^2 - k_t \frac{h^2}{4} + J_0 \omega^2 \delta(x - \frac{L_1}{2}))w' + (k_n - \rho A \omega^2 - m_0 \omega^2 \delta(x - \frac{L_1}{2}))w + k_t \frac{h}{2} u' &= 0 & 0 \leq x \leq a \\
 EAu' + (\rho A \omega^2 + m_0 \omega^2 \delta(x - \frac{L_1}{2}) - k_t + k_0 \delta(x - \frac{L_1}{2}))u + k_t \frac{h}{2} w' &= 0 & 0 \leq x \leq a \\
 Elw'' + \rho I \omega^2 w' + (k_n - \rho A \omega^2)w - \frac{\mu h}{2} k_n (w_s' + w') &= 0 & a \leq x \leq L_1 \\
 EAu' + \rho A \omega^2 - \mu k_n (w_s + w) &= 0 & a \leq x \leq L_1 \\
 Elw'' + \rho I \omega^2 w' - \rho A \omega^2 w = f_s \delta(x - L_2) & & L_1 \leq x \leq L \\
 EAu' + \rho A \omega^2 u &= 0 & L_1 \leq x \leq L \quad (18)
 \end{aligned}$$



شکل ۴ سازه در حالت تماس لغزش جزئی

$$\begin{aligned}
 w'(0, \theta) = w''(0, \theta) = w'(L, \theta) = w''(L, \theta) &= 0 \\
 u'(0, \theta) = u'(L, \theta) &= 0 \\
 w(L_1^-, \theta) = w(L_1^+, \theta) & \quad w'(L_1^-, \theta) = w'(L_1^+, \theta) \\
 w''(L_1^-, \theta) = w''(L_1^+, \theta) & \quad w'''(L_1^-, \theta) = w'''(L_1^+, \theta) \\
 u(L_1^-, \theta) = u(L_1^+, \theta) & \quad u'(L_1^-, \theta) = u'(L_1^+, \theta) \quad (14)
 \end{aligned}$$

با حل مجموعه معادلات دیفرانسیل (۱۳) به همراه شرایط مرزی و سازگاری (۱۴)، پاسخ های تیر در دو راستای افقی ( $u$ ) و عمودی ( $w$ ) به دست می آیند. نیروی تماسی مماسی در سطح مشترک در فاز چسبندگی از رابطه (۱۵) پیروی می کند.

$$F_t(x, \theta) = k_t (u(x, \theta) - \frac{h}{2} w'(x, \theta)) \quad (15)$$

تا زمانی که این نیرو کوچک تر از نیروی اصطکاکی باشد، حالت تماس چسبنده خواهد بود. شایان ذکر است نیروی عمودی سطح فقط تابع پاسخ استاتیکی تیر - که با حل معادلات (۹) و طبق رابطه (۱۲) به دست می آید - نبوده بلکه متاثر از پاسخ دینامیکی تیر نیز می باشد. پس می توان نتیجه گیری کرد که نیروی عمودی موثر سطح تماس مطابق رابطه (۱۶) از حاصل ضرب جمع آثار پاسخ استاتیکی ( $w_s$ ) و پاسخ دینامیکی تیر ( $w_d$ ) در فنریت عمودی به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 F_f(x) &= \mu q_{eff}(x) \\
 q_{eff}(x) &= k_n (w_s(x) + w_d(x, \theta)) \quad (16)
 \end{aligned}$$

با مساوی هم قراردادن نیروی تماس مماسی ( $F_t$ ) با نیروی اصطکاکی ( $F_f$ )، حداقل دامنه نیروی تحریکی که سبب شروع لغزش از یک نقطه خاص روی تیر می شود به دست می آید که وابسته به پاسخ تیر در هر دو جهت افقی و عمودی و نحوه توزیع بار عمودی موثر است (رابطه ۱۷). شایان ذکر است که نیروی تماس مماسی و نیروی اصطکاکی به ازای دامنه بیشینه تیر یعنی  $\sin(\theta) = 1$  محاسبه می شوند.

$$\left| k_t (u(x) - \frac{h}{2} w'(x)) \right| = \mu (k_n (w_s(x) + w_d(x))) \quad (17)$$

پس با حل (۱۷) نقطه شروع لغزش و حداقل نیروی مورد نیاز برای آغاز آن به دست می آید.

#### ۲-۴- مدل دینامیکی سازه در حالت لغزش جزئی

همان گونه که در بخش پیشین اشاره شد، با مقایسه و برابر قراردادن نیروهای تماسی و اصطکاکی می توان نقطه آغاز لغزش ( $x_s$ ) و نیروی لازم برای ایجاد آن را ( $f_s$ ) محاسبه کرد. با افزایش

در واقع سطح تماس چندناحیه‌ای شود. در این صورت باید مطابق اسلوب گفته شده در بخش ب معادلات و شرایط مرزی و سازگاری را گسترش داده و حل را ادامه دهیم.

### ۳- نتایج عددی

در بخش پیش رو نتایج حاصل از مدل پیشنهادی در بخش دوم برای سازه‌ای با مشخصات و ابعاد فرضی به همراه روش حل ارائه می‌شوند. در انتها مطالعه پارامتری بر روی نتایج مدل انجام گرفته و تاثیر تغییرات برخی پارامترهای مهم بر منحنی هیستریزس نشان داده می‌شود.

سازه مورد مطالعه در شکل ۱ را با ابعاد فرضی زیر در نظر می‌گیریم.

$$L=0.3m \quad L_1=0.05m \quad L_2=0.2m \quad E=200MPa$$

$$b=0.02m \quad \mu=0.2 \quad k_t = 10^8 N/m \quad k_n = 10^8 N/m$$

$$P=10kN \quad h=0.001m \quad m_0=0.02kg \quad k_0=10^4 N/m$$

$$J_0=10^{-7} kg.m^2 \quad \rho=7860kg/m^3$$

ابتدا می‌بایست مدل در حالت خطی حل شده و فرکانس‌های طبیعی آن به دست آیند. با حل مسئله مقدار ویژه در معادلات (۱۳) با شرایط مرزی و سازگاری (۱۴) مقادیر سه فرکانس طبیعی اول محاسبه می‌شوند. به دلیل پیچیدگی معادله مشخصه از حل عددی جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی استفاده شده است. برای تحقیق نتایج تحلیلی از نرم‌افزار اجزاء محدود انسیس استفاده شده است. نتایج حاصل از حل مودال سازه مورد مطالعه به همراه نتایج تحلیلی در جدول ۱ مشاهده می‌شود.

جدول ۱ مقادیر فرکانس‌های طبیعی اول به دست آمده از مدل

تحلیلی و اجزاء محدود			
$\omega_3$ (rad/s)	$\omega_2$ (rad/s)	$\omega_1$ (rad/s)	
۱۳۱۲/۸۰	۴۷۱/۴۰	۷۵/۲۰	تئوری
۱۳۱۲/۸۳	۴۷۱/۴۲	۷۵/۲۲	FEM

مقایسه نتایج حاصل از تئوری و مدل اجزاء محدود مطابقت بسیار خوب این دو مدل را در حالت خطی نشان می‌دهد. فرض بر این است که نیروی پیچ بر تیر به صورت شکل ۵ اعمال می‌شود که در آن  $P=10KN$  بوده و طول نیروی اعمالی به اندازه قطر گل پیچ است. بدین ترتیب ضابطه نیروی

در این حالت در واقع سازه مورد مطالعه به سه قسمت چسبنده، لغزشی و آزاد با دینامیک متفاوت تقسیم شده است که باید با شرایط سازگاری به هم مرتبط شوند. برای ساده شدن معادلات علامت سرعت مثبت در نظر گرفته شده است، ولی در هنگام حل باید تغییر یافتن علامت سرعت و در نتیجه معادلات حاکم در نظر گرفته شود. شرایط مرزی و سازگاری سازه عبارت‌اند از:

$$w^+(0, \theta) = w^-(0, \theta) = w^+(L, \theta) = w^-(L, \theta) = 0$$

$$u^+(0, \theta) = u^-(L, \theta) = 0$$

$$w(a^-, \theta) = w(a^+, \theta) \quad w'(a^-, \theta) = w'(L_1^+, \theta)$$

$$w^+(a^-, \theta) = w^+(a^+, \theta) \quad w''(a^-, \theta) = w''(a^+, \theta)$$

$$w(L_1^-, \theta) = w(L_1^+, \theta) \quad w'(L_1^-, \theta) = w'(L_1^+, \theta)$$

$$w^+(L_1^-, \theta) = w^+(L_1^+, \theta) \quad w''(L_1^-, \theta) = w''(L_1^+, \theta)$$

$$u(a^-, \theta) = u(a^+, \theta) \quad u'(a^-, \theta) = u'(a^+, \theta)$$

$$u(L_1^-, \theta) = u(L_1^+, \theta) \quad u'(L_1^-, \theta) = u'(L_1^+, \theta) \quad (19)$$

در دو معادله سوم و چهارم از معادلات (۱۸) مشاهده می‌شود که عبارات استاتیکی  $w_s$  نیز علاوه بر عبارت دینامیکی  $w_d$  وجود دارند. در نتیجه پاسخ کلی باید شامل پاسخ استاتیکی و دینامیکی باشد.

$$\begin{cases} w(x, t) = w_s(x) + w_d(x) \cdot \sin(\theta) \\ u(x, t) = u_s(x) + u_d(x) \cdot \sin(\theta) \end{cases} \quad (20)$$

در مجموعه معادلات (۱۸) پارامتر  $a$  نامشخص است. برای تعیین آن نیروهای الاستیک تماسی و اصطکاکی در نقطه  $a$  باید مساوی هم قرار داده شوند (معادله ۲۱). برای حل،  $\sin(\theta) = 1$  در نظر گرفته می‌شود تا پارامتر  $a$  محاسبه شده مقدار ماکزیمم را داشته باشد.

$$\left| k_t \left( u(a) - \frac{h}{2} w'(a) \right) \right| = \mu k_n w(a) \quad (21)$$

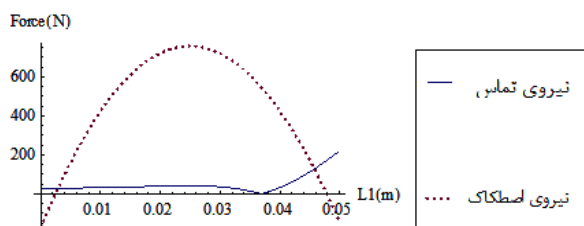
با استفاده از (۱۸) و (۲۱)، به ازای دامنه‌های تحریک متفاوت  $a$  های متفاوت و در نتیجه پاسخ‌های متفاوت وجود خواهد داشت. با رسم دامنه‌های تحریک بر حسب خیز تیر در نقطه تحریک بارگذاری اولیه<sup>۱</sup> برای اتصال آشکار می‌شود. منحنی هیستریزس مطابق قانون میسینگ قابل رسم است.

نکته دیگر حائز اهمیت این است که ممکن است با افزایش نیرو جبهه‌های لغزش جدیدی در سطح تماس به وجود آیند و

#### 1. Backbone Curve

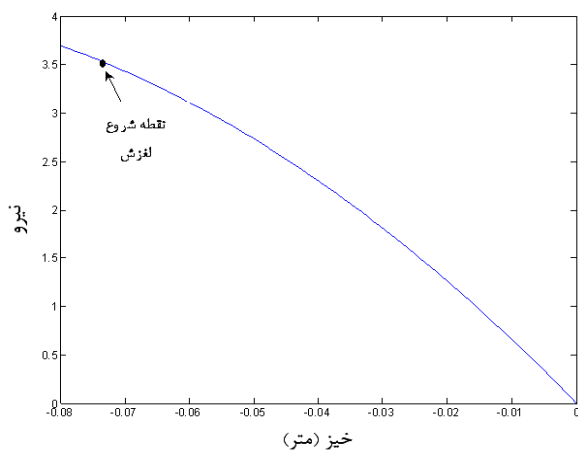
تحریک، لغزش از این دو نقطه شروع می‌شود. در این مقاله فرض شده است که پس از اعمال نیروی خارجی در محل اتصال همواره تماس در راستای عمودی برقرار باشد؛ به عبارت دیگر تیر از روی تکیه گاه جدا نمی‌شود.

فرض بر این است که سازه در سرعت زاویه‌ای  $100 \text{ rad/s}$  تحت نیروی تحریک با دامنه اختیاری و کوچک  $0.1 \text{ N}$  قرار گیرد. حل مجموعه معادلات (۱۳) و (۱۵) نیروهای تماسی و اصطکاکی را مطابق شکل ۷ نشان می‌دهد.



شکل ۷ نیروهای تماسی و اصطکاکی در سطح تماس به ازای یک دامنه تحریک مشخص

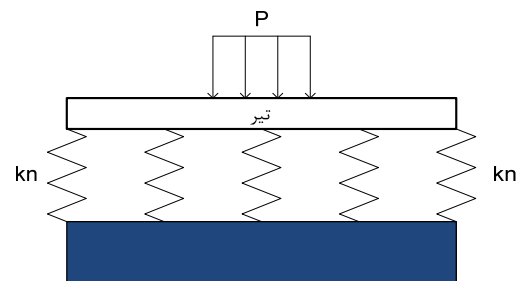
با دقت در شکل ۷ مشخص می‌شود که با افزایش دامنه تحریک، دو جبهه لغزش از سمت راست و چپ تکیه‌گاه تشکیل شده و شروع به پیشروی می‌کنند تا زمانی که این دو جبهه به هم پیوسته و لغزش بزرگ را به وجود آورند. نیروی مورد نیاز برای ایجاد لغزش بزرگ  $3/55$  نیوتن محاسبه می‌شود و روند افزایش نیرو بر حسب جابه‌جایی پس از وقوع لغزش بزرگ به صورت خطی است که به دلیل مدلسازی پیچ با فنر مماسی متمرکز می‌باشد. در این صورت منحنی بارگذاری اولیه به‌دست می‌آید که مطابق شکل ۸ است.



شکل ۸ منحنی بارگذاری اولیه

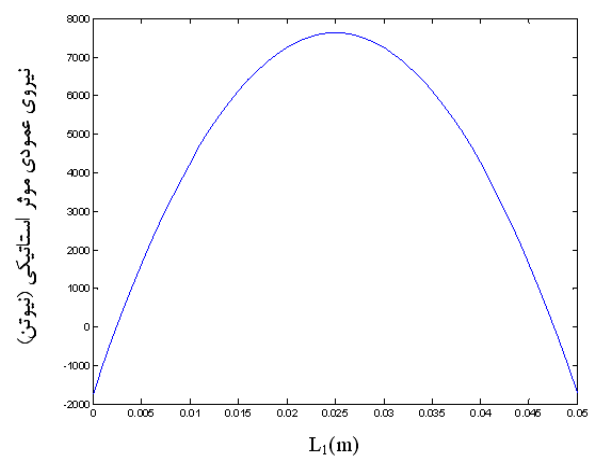
پیچ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود که در آن  $H(x)$  تابع پله‌ای واحد است.

$$F_{bolt} = P.(H(x - 0.16) - H(x - 0.34)) \quad (21)$$



شکل ۵ نیروی اعمالی از طرف پیچ بر بخش مستقر بر روی نشیمن‌گاه اصطکاکی

در این صورت با استفاده از معادلات ۹ تا ۱۲ و حل آن‌ها نیروی عمودی موثر استاتیکی به‌دست می‌آید. پروفیل این نیرو در شکل ۶ ملاحظه می‌شود.

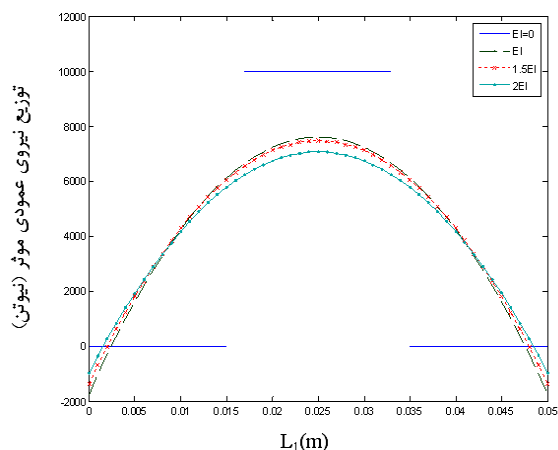


شکل ۶ نیروی عمودی موثر استاتیکی

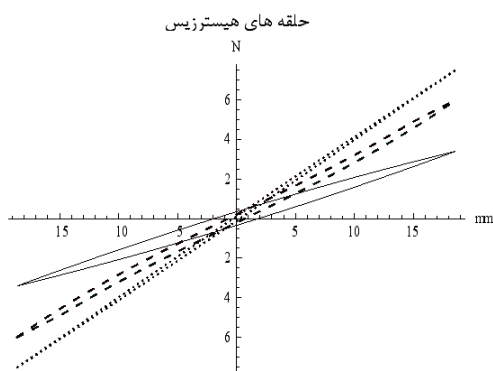
همان‌گونه که مشاهده می‌شود در نزدیکی دو انتهای تکیه‌گاه نیروی عمودی سطح منفی می‌شود که این بدان معنی است که در آن دو ناحیه تیر از روی تکیه‌گاه بلند شده و در واقع نیروی عمودی صفر است. برای این منظور، در اولین قدم، نیروهای تماس الاستیک و نیروهای اصطکاکی باید مقایسه شوند و اولین تلاقی این دو منحنی نقطه شروع لغزش را معرفی می‌کند.

با توجه به اینکه نیروی عمودی سطح در  $x = 2.2 \text{ mm}$  و  $x = 47.8 \text{ mm}$  صفر است، با اعمال کوچک‌ترین نیروی





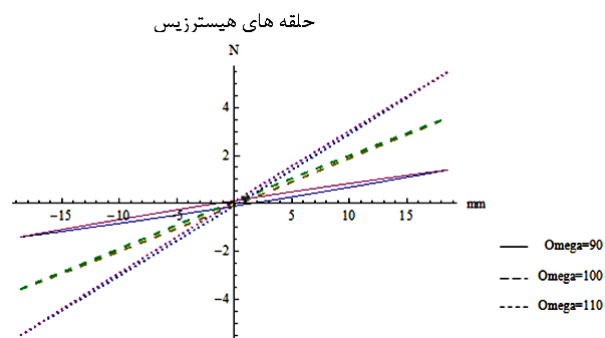
شکل ۱۰ نیروی عمودی موثر استاتیکی در EI های متفاوت



شکل ۱۱ منحنی های هیستریزس در EI های متفاوت

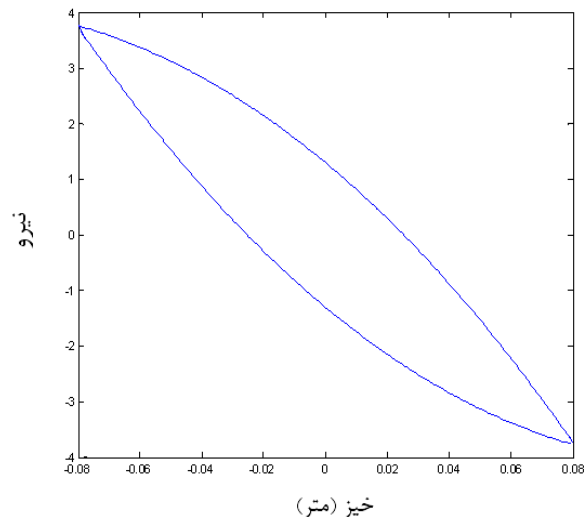
### ب) فرکانس

با افزایش فرکانس و دور شدن از فرکانس طبیعی اول، خیز دینامیکی کمتر شده و در نتیجه نیروی بزرگتری برای شروع لغزش نیاز است. مقایسه منحنی های هیستریزس در سه فرکانس مختلف به صورت نمودار ۱۲ است.



شکل ۱۲ منحنی های هیستریزس در فرکانس های متفاوت

با اعمال قانون میسینگ حلقه هیستریزس دینامیکی مورد نظر طبق شکل ۹ در سیکل بارگذاری رسم می شود.



شکل ۹ حلقه هیستریزس

رفتار سازه در فاز غیرخطی به دلیل کاهش سفتی سازه ناشی از پدیده استهلاک لغزشی است که اتلاف از طریق برآورد مساحت داخل حلقه هیستریزس قابل محاسبه است. در ادامه تاثیر تغییرات برخی پارامترهای مهم مدل بر حلقه های هیستریزس، در حالتی که حالت تماس لغزش جزئی و حداکثر جابه جایی نقطه تحریک تیر ۱۹ میلی متر در نظر گرفته می شود، بررسی می شود.

### الف) صلبیت خمشی (EI)

همان گونه که در شکل ۱۰ مشاهده می شود، با افزایش EI طبق معادله (۹) شیب تغییرات منحنی "توزیع نیروی عمودی موثر" کمتر می شود بدین ترتیب که حداقل نیروی لازم برای شروع پدیده لغزش افزایش و نیروی لازم برای وقوع لغزش بزرگ کاهش می یابد.

نمودار ۱۱ منحنی های هیستریزس در EI های متفاوت را نشان می دهد. مشاهده می شود، به دلیل اینکه خیز و شیب تیر در حالت صلبیت خمشی کمتر، بزرگتر است، کاهش سفتی سازه در جابه جایی های برابر شدیدتر بوده و انرژی اتلافی بیشتر است. اثر تغییرات نیروی عمودی موثر استاتیکی در EI های مختلف در مقابل تغییرات خیز و شیب ناچیز است.

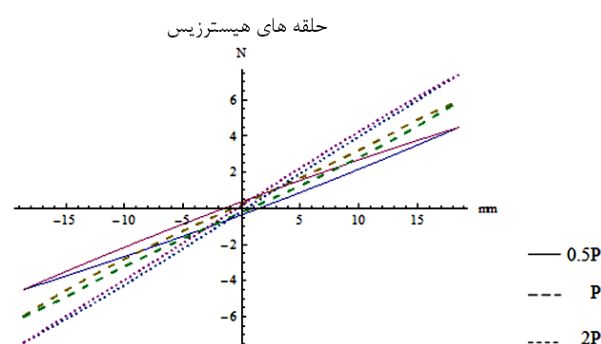
## ۵- منابع

- [1] Beards C. F., *Structural Vibration: Analysis and Damping*, London, Butterworth-Heinemann, 1996.
- [2] Goodman L. E., Klumpp J. H., "Analysis of Slip Damping with Reference to Turbine-Blade Vibration", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 23, 1956, pp. 421-429.
- [3] Ungar E. E., "Energy Dissipation at Structural Joints; Mechanisms and Magnitudes", Bolt Technical Documentary Report No. FDL-TDR-64-98, Air Force Flight Dynamics Lab, 1964.
- [4] Metherell A., Diller S., "Instantaneous Energy Dissipation Rate in a Lap Joint-Uniform Clamping Pressure", *J. Appl. Mech.*, Vol. 35, pp. 123-8, 1968.
- [5] Earles S. W. E., "Theoretical Estimation of the Frictional Energy Dissipation in a Simple Lap Joint", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 8, 1966, pp. 207-214.
- [6] Johnson K. L., "Energy Dissipation at Spherical Surfaces in Contact Transmitting Oscillating Forces", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 3, No. 4, pp. 362-368.
- [7] Ibrahim R., Pettit C., "Uncertainties and Dynamic Problems of Bolted Joints and other Fasteners", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 279, 2005, pp. 857-936.
- [8] Gregory D., Smallwood D., Coleman R., "Experimental Studies to Investigate Damping in Frictional Shear Joints", *Proceedings of 70th Shock and Vibration Symposium*, 1999.
- [9] Smallwood D. O., Gregory D. L., Coleman R.G., *Damping Investigations of a Simplified Frictional Shear Joint*, Livermore, CA (US), 2000.
- [10] Mindlin R. D., "Compliance of Elastic Bodies in Contact", *J. Appl. Mech.*, Vol. 16, 1949, pp. 259-268.
- [11] Oden J. T., Martins J. A. C., "Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 52, 1985, pp. 527-634.
- [12] Rice J. R., Ruina A. L., "Stability of Steady Frictional Slipping", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, 1983, pp. 343-349.
- [13] Menq C. H., Bielak J., Griffin J. H., "The Influence of Microslip on Vibratory Response-Part I: a New Microslip Model", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 107, 1986, pp. 279-293.
- [14] Csaba G., "Forced Response Analysis in Time and Frequency Domains of a Tuned Bladed Disk with Friction Dampers", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 214, 1998, pp. 395-412.
- [15] Berger E. J., Begley M. R., Mahajani M., "Structural Dynamic Effects on Interface Response-Formulation and Simulation under

مشاهده می‌شود در فرکانس نزدیک‌تر به فرکانس طبیعی مساحت محصور در حلقه هیستریزیس اندکی بزرگ‌تر است که با آنچه سیگراوگلو [۱۶] بیان کرده است مطابقت دارد.

## ج) پیش‌بار

با افزایش پیش‌بار پیچ، نیروی عمودی بیشتر شده و نیروی مورد نیاز برای شروع لغزش و رخداد پدیده لغزش بزرگ افزایش می‌یابد. مقایسه منحنی‌های هیستریزیس در سه پیش‌بار  $P=5\text{KN}$ ،  $P=10\text{KN}$  و  $P=20\text{KN}$  به صورت نمودار ۱۳ است.



شکل ۱۳ منحنی‌های هیستریزیس در پیش‌بارهای متفاوت

مشاهده می‌شود در پیش‌بار کمتر، به دلیل نیروی مقاوم کمتر، پدیده کاهش سختی سازه و در نتیجه اتلاف انرژی بزرگ‌تر نمود بهتری دارد.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدلی تحلیلی برای محاسبه انرژی اتلافی پدیده لغزش در تماس سطح به سطح در حالتی که سازه حرکت جانبی دارد ارائه شد. مدل ارائه شده شامل استخراج معادلات ارتعاش خمشی حاکم بر دینامیک تیر مقید اصطکاکی و بیان الگوریتم حل معادلات در حالتی که رفتار سازه خطی و همچنین غیرخطی است می‌شود. در انتها نحوه حل مدل ارائه شده در یک مثال عددی بیان شده و نتایج حاصل از بررسی پارامتری مدل مذکور مورد بحث قرار گرفته است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل ارائه شده به خوبی قابلیت شبیه‌سازی رفتار سطوح تماس اصطکاکی را داراست. به عبارت دیگر حلقه‌های هیستریزیس که معرف انرژی اتلافی سطح تماس‌اند توسط مدل ارائه شده قابل بازسازی‌اند.

- [18] Damisa O., Olunloyo V. O. S., Osheku C. A., Oyediran A. A., "Dynamic Analysis of Slip Damping in Clamped Layered Beams with Non-Uniform Pressure Distribution at the Interface", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, 2008, pp. 349-374.
- [16] Cigeroglu E., Lu W., Menq C. H., "One Dimensional Dynamic Microslip Friction Model", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 292, 2006, pp. 881-898.
- [17] Herrera I., "Dynamic Models for Masing Type Materials and Structure", *Bol. Soc. Mex. Ing. Sismica*, Vol. 3, No. 1, 1965, pp. 1-8.