



حل نیمه تحلیلی معادلات دینامیک و انتقال حرارت جریان نقطه سکون به روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتوپي

اسماعیل زمانی¹، حمیدرضا نظیف^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین

2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین

* قزوین، صندوق پستی 3414896818، nazif@eng.ikiu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 30 دی 1395

پذیرش: 26 بهمن 1395

ارائه در سایت: 21 اسفند 1395

کلید واژگان:

جریان نقطه سکون

سیال ویسکوز

حل تشابه‌ای، حل عددی

روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتوپي

چکیده

در این مطالعه، معادلات دینامیک (بقای جرم و ممنتوم) و انتقال حرارت جریان آرام و دو بعدی حول نقطه سکون در صفحه و با تقارن محوری با استفاده از روش آنالیز هموتوپي بهینه، روش ترکیبی گره مرزی- آنالیز هموتوپي حل و با روش عددی مقایسه شده‌اند. پارامتر همگرایی بهینه با استفاده از نقاط چیبیشف متناظر با بازه حل محاسبه شده است. علت استفاده از روش گره مرزی، به دست آوردن بهترین حدس اولیه که دقیقاً در شرایط جواب اولیه در روش هموتوپي صدق می‌کند، می‌باشد چرا که از خود حل عملگر حاصل می‌شود. جواب‌ها پس از 50 بار تکرار به دست آمده است. همچنین تعداد کل گره در دامنه و مرز برابر با 40 می‌باشد. از مقایسه بین نتایج به دست آمده از روش گره مرزی-آنالیز هموتوپي و محققین دیگر مشاهده می‌شود که همخوانی بسیار خوبی بین نتایج وجود دارد. هدف از این مطالعه، ترکیب روش گره مرزی با روش آنالیز هموتوپي می‌باشد. مزیت این روش، استفاده از محاسبات ماتریسی برای حل معادله است که سرعت اجرا و دقت قابل قبولی را ارائه می‌دهد. نمودار خط جریان، سرعت، تنش برشی و توزیع دما به ازای مقادیر عدد پرانندال خیلی کوچک برحسب پارامتر هم‌شکلی 17 برای هر دو جریان ترسیم شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش فاصله عمودی از صفحه، به علت کاهش اثرات دیوار، تنش برشی سیال کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد پرانندال و کاهش ضخامت لایه مرزی حرارتی و نزدیک شدن ضخامت‌ها به هم، منحنی توزیع دما نیز به‌طور محسوسی تغییر می‌کند.

A novel semi analytical solution for the dynamic and heat transfer analysis of Stagnation Point Flow using BK-HAM Method

Esmail Zamani, Hamid Reza Nazif*

Department of Mechanical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

* P.O.B. 3414896818, Qazvin, Iran, nazif@eng.ikiu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 19 January 2017
Accepted 14 February 2017
Available Online 11 March 2017

Keywords:
Viscous fluid
Stagnation Point Flow
Temperature distribution
Boundary Knot-Homotopy Analysis Method

ABSTRACT

In this study, dynamic and heat transfer equations of two-dimensional laminar plane and axisymmetric stagnation flow are solved by Optimal Homotopy Analysis Method, Boundary Knot-Homotopy analysis method and compared by numerical solution. The optimal convergence-control parameter value is calculated using Chebyshev points. These points correspond to the range of solutions to get the best answer for both flows. Boundary Knot Method gives the best initial guess that applies in terms of primary answer of homotopy analysis method. Results are reported by the 50th order approximation. Also, it is considered that the total numbers of knots on the domain and the boundary is 40. It is shown that results have good agreement with the numerical solution. The stream function, the velocity function, the shear stress function and the temperature distribution for small Prandtl values is shown for plane and axisymmetric stagnation flows using BK-HAM compared with the numerical solution. It can be found that, with increasing vertical distance, because of decreasing the effects of wall, the fluid shear stress will be reduced. Besides, the temperature distribution in the boundary layer changes linearly with distance from the wall. Also, increasing the Prandtl number and decreasing the thermal boundary layer thickness leads to increased temperature distribution.

1- مقدمه

عمومی مشخصی ندارند و دارای راه‌حل‌های تحلیلی در شرایط خاص می‌باشند. با این حال، در برخی مسائل، تبدیل‌های تشابه‌ای می‌توانند منجر به کاهش معادلات ناویراستوکس با مشتقات پاره‌ای به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی شوند که روش حل آن‌ها بسیار آسان‌تر است

معادلات ناویراستوکس¹ معادلات حاکم اساسی در دینامیک سیالات می‌باشند. این مجموعه از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی راه‌حل

¹ Navier-Stokes

Please cite this article using:

E. Zamani, H. R. Nazif, A novel semi analytical solution for the dynamic and heat transfer analysis of Stagnation Point Flow using BK-HAM Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 270-280, 2017 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

E. Zamani, H. R. Nazif, A novel semi analytical solution for the dynamic and heat transfer analysis of Stagnation Point Flow using BK-HAM Method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 270-280, 2017 (in Persian)

[1] اولین بار کانساً [16] در دهه 1990 از توابع شعاعی پایه‌ای² برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی در فرم قوی آن استفاده کرد و بعد از آن استفاده از این توابع بسیار مورد توجه واقع شد و توجه بسیاری را به خود جلب کرد و نسخه‌های مختلفی از استفاده از این توابع در علوم مختلف برای حل عدی معادلات دیفرانسیل به وجود آمد، یکی از مشهورترین نسخه‌های این روش، روش گره مرزی³ است. موزیک [17] به استفاده از روش گره مرزی برای شبیه‌سازی جریان سیال تراکم‌ناپذیر ناپایدار پرداخته است. وانگ و همکاران [18] به بررسی تعداد شرط موثر برای روش گره مرزی پرداخته‌اند. این مطالعه اولین تلاش برای اعمال تعداد شرط موثر به منظور بررسی پایداری روش گره مرزی می‌باشد. چن [19] به به‌کارگیری روش گره مرزی برای مسائل لاپلاس و بی‌هارمونیک پرداخته است. این مطالعه نشان داد که این روش را می‌توان با موفقیت برای این مسائل به‌کار برد همچنین در این مقاله راه حل کلی و اساسی از معادلات برگر و وینکلر نیز ارائه شد. چن و همکاران [20] به استفاده از روش گره مرزی برای معادلات پواسون پرداخته‌اند و نشان دادند که این روش برای حل این معادلات به خوبی جواب می‌دهد.

روش آنالیز هموتوبی به‌عنوان روشی برای حل تحلیلی معادلات دیفرانسیلی غیرخطی بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. اما نکته‌ای که حائز اهمیت می‌باشد این است که در این روش برای شروع حل مسئله به حدس اولیه منطبق بر شرایط مرزی نیاز است و از آن‌جا که این حدس اولیه جواب پایه برای مراحل بعدی تکرار می‌باشد، خطای موجود در حدس اولیه در جواب نهایی تأثیرگذار می‌باشد. از این‌رو در این مطالعه برای اجتناب از حدس زدن جواب اولیه که در شرایط مرزی صدق کند، از توابع شعاعی و روش گره مرزی به منظور یافتن جواب اولیه استفاده شده است تا خطا در یافتن تابعی که در شرایط مرزی صدق می‌کند، به صفر برسد. در واقع هدف از این مطالعه، ترکیب روش گره مرزی با روش هموتوبی می‌باشد. مزیت این روش، استفاده از محاسبات ماتریسی برای حل معادله می‌باشد که سرعت اجرا و دقت قابل قبولی را ارائه می‌دهد. در این مطالعه، معادلات حاکم بر جریان سکون در دو حالت صفحه‌ای و با تقارن محوری به‌منظور تحلیل ارائه می‌گردند. سپس با استفاده از روش آنالیز هموتوبی و روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتوبی راه‌حلی تقریبی به‌منظور حل دینامیک و انتقال حرارت جریان سیال آرام تراکم‌ناپذیر حول نقطه سکون به دست می‌آید. این روش با روش عددی [21] و روش ارائه شده توسط شاه و همکاران [2] مقایسه شده است.

2- ایده اساسی روش آنالیز هموتوبی

روش آنالیز هموتوبی اولین بار توسط لیائو [3] در سال 2003 معرفی شد. این روش به حل نیمه تحلیلی معادلات دیفرانسیلی غیرخطی با استفاده از حدس اولیه با توجه به شرایط مرزی حاکم بر معادلات می‌پردازد. در ادامه به معرفی این روش می‌پردازیم.

معادله دیفرانسیل غیرخطی را در قالب زیر فرض می‌کنیم:

$$\mathcal{N}[G(t)] = 0 \quad (1)$$

که در آن \mathcal{N} یک اپراتور غیرخطی و $G(t)$ حل معادله می‌باشند. با تعریف تابع $\varphi(t, q)$ به صورت زیر:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \varphi(t, q) = G_0(t) \quad (2)$$

که $q \in [0, 1]$ و $G_0(t)$ تقریب اولیه‌ای می‌باشد که شرایط مرزی را ارضا می‌کند:

[1]. در دینامیک سیالات، جریان نقطه سکون به دلیل اهمیت در بسیاری از رشته‌های مهندسی، برای مثال خنک‌کننده دستگاه‌های الکترونیکی، در جابه‌جایی اجباری، خنک‌کننده راکتورهای هسته‌ای، پاشش رنگ روی سطوح در خودروسازی و بسیاری از فرآیندهای هیدرودینامیکی و انتقال حرارت مورد توجه قرار گرفته است. تجزیه و تحلیل چنین جریانی چه از نظر تئوری و چه در عمل بسیار مهم است [2].

در سال 1992، روش هموتوبی که روشی برای تحلیل مسائل غیرخطی می‌باشد، توسط لیائو [3] پیشنهاد شد. با استفاده از روش آنالیز هموتوبی، یک مسئله غیرخطی به دنباله‌ای از زیر مسائل خطی تبدیل می‌شود که به راحتی مسئله را قابل حل می‌کند. روش آنالیز هموتوبی روشی بسیار مفید برای حل معادلات غیرخطی است. این روش برای مسائل غیرخطی متعددی در رشته‌های مهندسی و علوم پایه قابل استفاده می‌باشد. از زمانی که کتاب "مقدمه ای بر روش آنالیز هموتوبی" توسط لیائو در سال 2003 منتشر شده است، روش آنالیز هموتوبی در نظریه و کاربردهای آن توسعه داده شده است و مسائل پیچیده غیرخطی زیادی از طریق این روش حل شده است [4-8]. وانگ [1] به بررسی و گسترش حل تشابهی جریان نقطه سکون معادلات ناویر استوکس پرداخته است. او در مقاله خود جریان سکون با مرزهای متخلخل، جریان سکون در استوانه، جریان سکون بر روی سطح مایع و جریان سکون با لغزش جزئی را بررسی نموده است. شاه و همکاران [2] به حل تحلیلی جریان و انتقال حرارت نقطه سکون با استفاده از روش هموتوبی بهینه پرداخته‌اند. آن‌ها در مطالعه‌شان، میدان سرعت و توزیع انتقال حرارت را برای اعداد پکلت مختلف به دست آوردند. عباس‌بندی و همکاران [9] به کاربرد روش آنالیز نیوتن هموتوبی برای معادلات غیرخطی پرداختند. او در مقاله خود، یک الگوریتم عددی کارآمد برای حل معادلات جبری غیرخطی به روش نیوتن رافسون و روش آنالیز هموتوبی ارائه کرد. ژائو و همکاران [10] به ارائه روش آنالیز هموتوبی اصلاح شده برای حل معادلات لایه مرزی پرداختند. مزیت اصلی روش هموتوبی اصلاح شده، کاهش تعداد جملات سری جواب می‌باشد. لوک و همکاران [11] به مطالعه جریان یکنواخت از یک مایع ویسکوز و تراکم‌ناپذیر طی برخورد در برخی زوایا بر روی یک ورق کششی پرداخته‌اند. کیمیایی فر و همکاران [12] به ارائه حل تحلیلی غیرمتممندی برای جریان نقطه سکون میان یک ورق کششی پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از تبدیل‌های تشابهی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی برای میدان جریان را به معادلات دیفرانسیل معمولی کاهش و با استفاده از روش تجزیه و تحلیل هموتوبی حل تحلیلی برای جریان ارائه داده‌اند. جدیدی و همکاران [13] یک تقریب تحلیلی از جریان نقطه سکون و انتقال حرارت یک سیال میکروپولار¹ در یک متخلخل متوسط ارائه کرده‌اند. در این مقاله او با روش هموتوبی اختلالی به تجزیه و تحلیل دو بعدی جریان آرام نقطه سکون و انتقال حرارت سیال میکروپولار غیرنیوتنی تراکم‌ناپذیر در برخورد با یک صفحه تخت در محیط متخلخل پرداخته است. فریدونی مهر و رحیمی [14] به بررسی تحلیلی جریان سیال و انتقال حرارت و جرم در جریان سیال سه بعدی آرام پایا هیدرودینامیک مغناطیسی بر روی یک صفحه گسترش یافته با شرط مرزی همرفت سطحی به کمک روش آنالیز هموتوبی بهینه پرداختند. ندیم و همکاران [15] به حل تحلیلی جریان لایه مرزی نقطه سکون یک ورق کششی با استفاده از روش آنالیز هموتوبی پرداختند. نتایج این مطالعه با جواب‌های عددی حاصل از مطالعات دیگر نویسندگان مقایسه شد که نشانگر تطابق خوبی با حل عددی بود.

² kansa

³ RBF

⁴ The Boundary Knot Method

¹ Micropolar

این توابع برای حل عددی معادلات دیفرانسیل و درونیابی استفاده می‌شود. اولین بار کانسنا² [16] در دهه 1990 از این توابع برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی در فرم قوی آن استفاده کرد و بعد از آن استفاده از این توابع بسیار مورد توجه واقع شد و توجه بسیاری را به خود جلب کرد و نسخه‌های مختلفی از استفاده از این توابع در علوم مختلف برای حل عدی معادلات دیفرانسیل به وجود آمد. یکی از مشهورترین نسخه‌های این روش، روش گره مرزی می‌باشد.

3-1- روش گره مرزی

روش گره مرزی یک روش بدون شبکه بندی برای حل مسائل مقدار مرزی با شرایط پیچیده است. در حقیقت این روش ترکیبی از استفاده از توابع شعاعی، جواب اصلی غیرسینگولار و روش تقابل دوگانه³ است [19, 22].

فرمول بندی این روش به طور کلی به صورت زیر است:

$$\Re\{M\} = D(x), x \in \Omega \quad (14-الف)$$

$$M(x) = R(x), x \in S_M \quad (14-ب)$$

$$\frac{\partial M}{\partial n} = N(x), x \in S_T \quad (14-ج)$$

در این روابط \Re عملگر دیفرانسیلی، Ω دامنه، n واحد نرمال رو به بیرون، رابطه (14-ب) بیانگر شرایط مرزی دیریکله، رابطه (14-ج) بیانگر شرایط مرزی نیومن و $M(x)$ تابع اصلی است که قصد پیدا کردن آن را داریم و مقدار آن براساس توابع پایه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید که N تعداد نقاط داخلی و L تعداد نقاط مرزی است.

$$M(x) \cong M(x_i) = \sum_{i=1}^{N+L} \alpha_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (15)$$

دقت این روش به تعداد نقاط بستگی دارد معمولاً تعداد نقاط بیشتر باعث بروز خطای کمتر می‌شود. یک قاعده کلی همواره بیان می‌کند که برای مثبت معین ماندن ماتریس معادلات باید از نقاط بیشتر و پارامتر شکل کوچکتر و یا برعکس استفاده کرد [19].

4- معادلات حاکم

شماتیکی از جریان اطراف نقطه سکون در "شکل 1" نشان داده شده است. معادلات بقای جرم، حرکت و انرژی برای سیال ویسکوز نیوتنی، تراکم‌ناپذیر و آرام در جریان سکون در صفحه به صورت زیر می‌باشد [21]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (16)$$

معادله حرکت:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{S} - \frac{1}{\rho} \nabla \vec{P} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (17)$$

جدول 1 چند نمونه از توابع پایه‌ای

Table 1 A few examples of basic functions

$\phi(r)$	توابع بی‌نهایت هموار
$e^{-\frac{r^2}{c^2}}$	GA
$\sqrt{c^2 + r^2}$	MQ
$\frac{1}{c^2 + r^2}$	IM
$\frac{1}{\sqrt{c^2 + r^2}}$	IMQ

² kansa

³ Dual Reciprocity Method

$$\lim_{q \rightarrow 1} \varphi(t, q) = G(t) \quad (3)$$

سیس با استفاده از روش هموتوبی عمومی، معادله تغییر شکل مرتبه صفر معادله (1) به صورت زیر قابل نوشتن خواهد بود:

$$(1-q)\mathcal{L}[\varphi(t, q) - G_0(t)] = qhH(t)\mathcal{N}[\varphi(t, q)] \quad (4)$$

که در آن پارامتر h و تابع کمکی کاربردی $H(t)$ از اهمیت برخوردارند. باید بر این نکته تاکید کرد آزادی عمل بسیاری در انتخاب اولیه پارامتر h و تابع کمکی $H(t)$ وجود دارد. همچنین پارامتر اختلال، \mathcal{L} عملگر خطی کمکی، بدیهی است که با تغییر پارامتر q بین 0 و 1، جواب $\varphi(t, q)$ بین حدس اولیه $G_0(t)$ و جواب نهایی $G(t)$ تغییر می‌کند. بسط سری تیلور $\varphi(t, q)$ نسبت به پارامتر q به شکل زیر می‌باشد:

$$\varphi(t, q) = G_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(t) q^m \quad (5)$$

و:

$$G_0^{[m]}(t) = \frac{\partial^m \varphi(t, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (6)$$

که در آن $G_0^{[m]}$ به عنوان تغییر شکل مرتبه m شناخته می‌شود، لذا خواهیم داشت:

$$G_m(t) = \frac{G_0^{[m]}(t)}{m!} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(t, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (7)$$

با تعریف بردار:

$$\vec{G}_m = \{G_0, G_1, G_2, \dots, G_m\} \quad (8)$$

با مشتق‌گیری از معادله (4) نسبت به q و قراردادن $q = 0$ و تقسیم

آن‌ها بر $m!$ به معادله تغییر شکل مرتبه m به شکل زیر می‌رسیم:

$$\mathcal{L}[G_m(t) - \chi_m G_{m-1}(t)] = hH(t)R_m(\vec{G}_{m-1}) \quad (9)$$

که در آن:

$$R_m(\vec{G}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\varphi(t, q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (10)$$

و همچنین:

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases} \quad (11)$$

با اعمال عملگر معکوس \mathcal{L}^{-1} به هر دو طرف معادله (9) خواهیم داشت:

$$G_m(t) = \chi_m G_{m-1}(t) + h\mathcal{L}^{-1}H(t)R_m(\vec{G}_{m-1}) \quad (12)$$

بنابراین با حل معادله (12) می‌توان $G_m(t)$ را به ازای $m \geq 1$ به راحتی محاسبه کرد. در نهایت $G(t)$ جواب نهایی معادله، به شکل زیر محاسبه خواهد شد.

$$G(t) = G_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(t) \quad (13)$$

همگرایی روش فوق با جزئیات کامل توسط لیائو مورد بحث قرار گرفته است [3].

3- توابع شعاعی پایه ای (RBF)

تابع $\phi: R^d \rightarrow R$ را یک تابع شعاعی می‌نامیم اگر برای هر دو بردار $x, y \in R^d$ که $\|x\| = \|y\|$ داشته باشیم: $\phi(x) = \phi(y)$ که منظور از $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی است. چند نمونه از توابع پایه‌ای که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند، در جدول 1 آورده شده‌اند.

در توابع شعاعی c پارامتر شکل¹ است. توابع شعاعی پایه ای بی‌نهایت بار مشتق پذیر هستند و پایه مناسبی را برای درونیابی توابع فراهم می‌آورند. از

¹ shape parameter

معادله انرژی:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \dot{Q}_{\text{Source}} \quad (18)$$

که در آن \vec{V} بردار سرعت، P بیانگر فشار، \vec{G} نیروهای حجمی، ϑ ویسکوزیته سینماتیک، ρ چگالی، T کمیت دما، c_p گرمای مخصوص، k ضریب هدایت گرمایی و \dot{Q}_{Source} تابع تولید یا اتلاف انرژی در سیال می‌باشد.

1-4- جریان سکون در صفحه¹

در این جریان، معادلات فوق برای سیال هوا در حالت دو بعدی به شکل زیر تقلیل می‌یابد [21]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

این معادله با تعریف تابع جریان ψ به این شکل قابل بیان می‌باشد.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (20)$$

با فرض عدم وجود نیروهای حجمی، معادله (17) که معادله حرکت سیال می‌باشد، در حالت دائم در مختصات کارتزین دو بعدی در راستای x و y قابل بازنویسی است:

$$\left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (21-الف)$$

$$\left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \vartheta \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (21-ب)$$

با صرف نظر کردن از اتلاف و تولید انرژی، معادله انرژی نیز در حالت دائم

به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\rho c_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (22)$$

با توجه به فرض عدم لغزش سیال بر روی دیوار و همچنین نفوذناپذیری دیوار صلب، مولفه‌های سرعت در دو جهت به شکل $(u = v = 0)$ تعیین می‌گردد. در روی دیوار دما معین و برابر با دمای سطح می‌باشد و در فاصله دو از دیوار، دمای سیال دمای بی نهایت فرض می‌گردد. با استفاده از تعریف پارامتر تشابه η و تعریف خطوط جریان ψ معادلات دیفرانسیل بقای جرم، حرکت و بقای انرژی که به شکل مشتقات جزئی است به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند [21].

$$\eta = y \sqrt{\frac{B}{\vartheta}} \quad (23-الف)$$

$$\psi = x f(\eta) \sqrt{B \vartheta} \quad (23-ب)$$

$$u = B x f'(\eta), v = -f(\eta) \sqrt{B \vartheta} \quad (23-ج)$$

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_{\infty} - T_w} \quad (23-د)$$

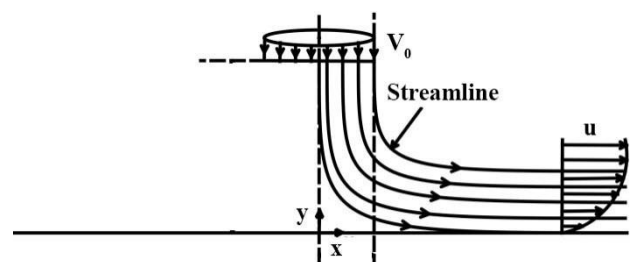


Fig. 1 Schematic of impinging jet flow

شکل 1 شماتیک جریان جت برخوردی

که در روابط فوق B ضریبی ثابت، ϑ ویسکوزیته سینماتیک و η متغیر تشابهی می‌باشد. با توجه به تعریف مولفه‌های سرعت برحسب تابع جریان که خود تابع یک متغیر تشابهی منفرد است و همچنین با تعریف مولفه بی بعد دما، با جایگذاری آن‌ها در معادلات حرکت و انرژی به همراه شرایط مرزی آن‌ها به دو معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی تشابهی به صورت زیر دست می‌یابیم [21]:

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) - f'^2(\eta) + 1 = 0 \quad (24-الف)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, f'(\infty) = 1 \quad (24-ب)$$

و:

$$\theta''(\eta) + \text{Pr} f(\eta)\theta'(\eta) = 0 \quad (25-الف)$$

$$\theta(0) = 0, \theta(\infty) = 1 \quad (25-ب)$$

در رابطه فوق عدد پرانتل برابر با رابطه (26) می‌باشد:

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} \quad (26)$$

2-4- جریان سکون با تقارن محوری

در جریان در صفحه، نقطه سکون در واقع یک خط است و هیچ تغییری در جهت z نداریم. در جریان سکون با تقارن محوری، نقطه سکون در واقع یک نقطه است. در جریان سکون با تقارن محوری، x را مختصات شعاع استوانه‌ای و y را مختصات محوری تفسیر می‌کنیم. در این صورت معادله بقای جرم (16) به شکل زیر قابل نوشتن خواهد بود:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial(xu)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

این معادله با تعریف تابع جریان ψ به این شکل قابل بیان می‌باشد:

$$u = -\frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (28-الف)$$

$$v = \frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (28-ب)$$

با فرض عدم وجود نیروهای حجمی، معادله حرکت سیال می‌باشد، در

مختصات کارتزین دو بعدی در راستای x و y قابل بازنویسی است:

$$\left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{u}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (29-الف)$$

$$\left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \vartheta \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (29-ب)$$

با صرف نظر کردن از اتلاف و تولید انرژی، معادله انرژی نیز در حالت دائم

به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\rho c_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (30)$$

با تعریف توابع بدون بعد زیر:

$$\eta = y \sqrt{\frac{B}{\vartheta}} \quad (31-الف)$$

$$\psi = -x^2 f(\eta) \sqrt{B \vartheta} \quad (31-ب)$$

$$u = B x f'(\eta), v = -2f(\eta) \sqrt{B \vartheta} \quad (31-ج)$$

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_{\infty} - T_w} \quad (31-د)$$

با جایگذاری آن‌ها در معادلات حرکت و انرژی به همراه شرایط مرزی

آن‌ها به دو معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی تشابهی به صورت زیر دست

می‌یابیم [21]:

$$f'''(\eta) + 2f(\eta)f''(\eta) - f'^2(\eta) + 1 = 0 \quad (32-الف)$$

¹ Plane Stagnation Flow

$$R_m(\vec{f}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\varphi(\eta, q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (44)$$

بنابراین شرایط مرزی برای $m \geq 1$ برابر خواهد بود با:

$$f_m(0) = f'_m(0) = f'_m(\infty) = 0 \quad (45)$$

فرض می‌کنیم تابع اولیه حدس زده شده با توجه به شرایط مرزی معادله دیفرانسیل اصلی به شکل زیر می‌باشند:

$$f_0(\eta) = \eta - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-3\eta} \quad (46)$$

تابع خطی در نظر گرفته شده برابر است با:

$$\mathcal{L}[\varphi(\eta, q)] = \frac{\partial^3 \varphi(\eta, q)}{\partial \eta^3} + \lambda \frac{\partial^2 \varphi(\eta, q)}{\partial \eta^2} \quad (47)$$

تابع غیرخطی در نظر گرفته شده برابر است با:

$$\mathcal{N}[\varphi(\eta, q)] = \frac{\partial^3 \varphi(\eta, q)}{\partial \eta^3} + \beta \varphi(\eta, q) \frac{\partial^2 \varphi(\eta, q)}{\partial \eta^2} + (1 - [\frac{\partial \varphi(\eta, q)}{\partial \eta}]^2) \quad (48)$$

از رابطه (44) و با توجه به معادلات دیفرانسیل غیرخطی اصلی داریم:

$$R_m(\vec{f}_{m-1}) = f'''_{m-1}(\eta) + \beta \sum_{n=1}^{m-1} f_n(\eta) f''_{m-1-n}(\eta) - \sum_{n=1}^{m-1} f'_n(\eta) f'_{m-1-n}(\eta) + (1 - \chi_m) \quad (49)$$

برای ساده‌سازی $H(\eta) = 1$ در نظر گرفته شد. با به دست آمدن تابع

$f(\eta)$ ، معادله گرما (34-ب) تبدیل به معادله دیفرانسیلی خطی شده و به

راحتی قابل حل می‌باشد که نتایج آن در ادامه مورد تحلیل قرار گرفته است.

5-1- تعیین بازه و پارامتر همگرایی بهینه روش آنالیز هموتوبی

همان‌طور که گفته شد، روش آنالیز هموتوبی آزادی عمل زیادی در انتخاب حل مسائل غیرخطی توسط توابع پایه گوناگون ارائه می‌دهد. این عمل تاثیر زیادی در ناحیه همگرایی دارد، زیرا ناحیه همگرایی و نرخ سری‌ها به‌طور عمده توسط توابع پایه برای تشریح حل تعیین می‌شوند. بنابراین یک مسئله غیرخطی را با انتخاب توابع پایه مناسب می‌توان بهتر تقریب زده و از همگرایی آن مطمئن شد. از طرفی همان‌طور که توسط لیاثو [3] ذکر شده است، همگرایی و نرخ تقریب در روش آنالیز هموتوبی به شدت وابسته به پارامتر کمکی h می‌باشد. پارامتر کمکی h اجازه تنظیم و کنترل ناحیه همگرایی و نرخ سری‌های حل را می‌دهد.

در این‌جا به منظور تعیین بازه همگرایی و پارامتر همگرایی بهینه از روش ارائه شده توسط عباس‌بندی و جلیلی [23] استفاده می‌کنیم. تا به این‌جا فرض بر این است که مقدار تقریب تا مرتبه دلخواه ($m = 15$) که وابسته به دو متغیر η و h می‌باشد، برای هر دو جریان سکون با تقارن محوری و در صفحه به‌دست آمده است. تقریب به‌دست آمده را داخل عملگر غیرخطی (48) قرار می‌دهیم. سپس بازه حل را به تعداد نقاط کافی تقسیم‌بندی نموده و در هر نقطه عملگر غیرخطی جدید را محاسبه می‌کنیم. با این کار به تعداد نقاط، تابع وابسته به پارامتر همگرایی h خواهیم داشت. در این‌جا تحت نگاهت زیر از نقاط متناظر چبیشف در محدوده حل استفاده می‌کنیم. برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ داریم:

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right) \quad (50)$$

$$\eta_{n-i+2} = \left(\frac{\eta_\infty - \eta_0}{2}\right) t_i + \left(\frac{\eta_\infty + \eta_0}{2}\right) \quad (51)$$

در واقع توابع جدید به شکل زیر خواهند بود:

$$\mathcal{N} = F(f_m(\eta, h)|\eta_i, f'_m(\eta, h)|\eta_i, f''_m(\eta, h)|\eta_i, f'''_m(\eta, h)|\eta_i) \quad (52)$$

بعد از جایگذاری و به‌دست آوردن توابع، تمامی آن‌ها را یک به یک به

توان 2 رسانده و جمع می‌کنیم و از مجموع به‌دست آمده جذر می‌گیریم. به

$$f(0) = f'(0) = 0, f'(\infty) = 1 \quad (32-ب)$$

و:

$$\theta''(\eta) + 2 \text{Pr} f(\eta) \theta'(\eta) = 0 \quad (33-الف)$$

$$\theta(0) = 0, \theta(\infty) = 1 \quad (33-ب)$$

بنابراین، با توجه به یکسان بودن شرایط مرزی در هر دو جریان، معادلات به شکل کلی زیر نوشته خواهد شد:

$$f''''(\eta) + \beta f(\eta) f''(\eta) - f'^2(\eta) + 1 = 0 \quad (34-الف)$$

$$\theta''(\eta) + \beta \text{Pr} f(\eta) \theta'(\eta) = 0 \quad (34-ب)$$

که معادله (34) به ازای $\beta = 1$ بیان‌گر جریان سکون در صفحه، و به ازای $\beta = 2$ بیان‌گر جریان سکون با تقارن محوری خواهد بود.

5- حل مسئله با استفاده از روش آنالیز هموتوبی بهینه

در این بخش، روش آنالیز هموتوبی برای حل معادله دیفرانسیل هم‌شکلی (34-الف) به‌کارگرفته می‌شود. برای شروع، سیستم غیرخطی کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{N}[f(\eta)] = 0 \quad (35)$$

با استفاده از تعمیم روش هموتوبی، می‌توان معادله تغییر شکل مرتبه صفر را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$(1-q)\mathcal{L}[\varphi(\eta, q) - f_0(\eta)] = qhH(\eta)\mathcal{N}[\varphi(\eta, q)] \quad (36)$$

$f_0(\eta)$ یک حدس اولیه برای $f(\eta)$ است، در حالی که $\varphi(\eta, q)$ تابعی

مجهول می‌باشد. بدیهی است که برای $q = 1$ و $q = 0$ به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\varphi(\eta, 0) = f_0(\eta), \varphi(\eta, 1) = f(\eta) \quad (37)$$

شرایط مرزی جدید با توجه به معادله (32-ب) و همچنین تابع $\varphi(\eta, q)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\varphi(0, q) = 0, \frac{\partial \varphi(\eta; q)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi(\eta; q)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\infty} = 1 \quad (38)$$

با استفاده از قضیه تیلور، $\varphi(\eta, q)$ را به‌صورت سری توانی بسط می‌دهیم:

$$\varphi(\eta, q) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(\eta, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m \quad (39)$$

که در آن:

$$f_m(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(\eta, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (40)$$

با فرض این‌که تمامی پارامترها به درستی انتخاب شوند، معادله (39) زمانی همگرا می‌شود که $q = 1$ باشد. در این صورت:

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta) \quad (41)$$

که باید یکی از راه‌حل‌های معادله غیرخطی اصلی شوند. مطابق اثبات لیاثو، معادله حاکم را می‌توان از معادله تغییر شکل مرتبه صفر نتیجه گرفت.

لذا بردار زیر را در فضای n بعدی این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$\vec{f}_n = \{f_0(\eta), f_1(\eta), \dots, f_n(\eta)\} \quad (42)$$

با مشتق‌گیری از معادله (36) نسبت به q و قرار دادن $q = 0$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = hH(\eta)R_m(\vec{f}_{m-1}) \quad (43)$$

که قسمت غیرخطی معادله دیفرانسیل به شکل زیر تعریف می‌شود:

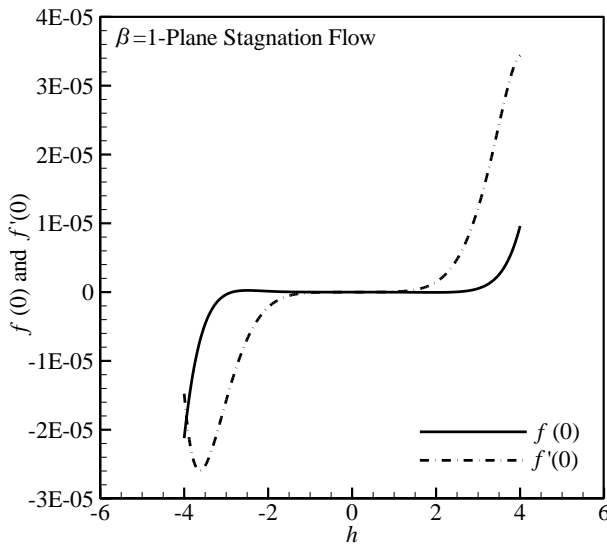


Fig. 2 the h -curve of 15th order approximation for $\beta = 1$

شکل 2 منحنی‌های h نظیر تقریب مرتبه 15 برای $\beta = 1$

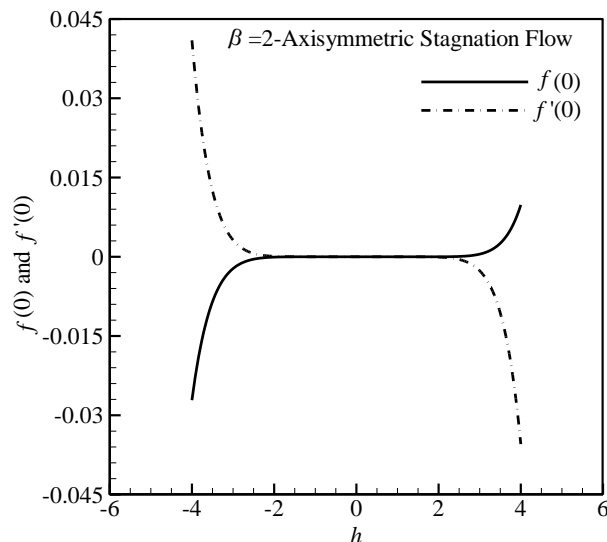


Fig. 3 the h -curve of 15th order approximation for $\beta = 2$

شکل 3 منحنی‌های h نظیر تقریب مرتبه 15 برای $\beta = 2$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(r_i) \right)''' + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(r_i) \right)'' = 0 \quad (57)$$

و شرایط مرزی:

$$\alpha_1 \phi(r_i) = 0, \alpha_1 \phi'(r_i) = 0, \alpha_n \phi'(r_i) = 1 \quad (58)$$

با جایگذاری $r_{ij} = \|\eta_j - \eta_i\|$ و همچنین با در نظر گرفتن $\eta_i \in [0, 4], i, j = 1, \dots, n$ و اعمال شرایط مرزی در بالا، به دستگاه ماتریسی زیر را می‌رسیم:

$$(A_{\eta\eta\eta} + \lambda A_{\eta\eta} + A_{\text{bound}}) \alpha_0 = [0, \dots, 1]^T, \\ \rightarrow \alpha_0 = (A_{\eta\eta\eta} + \lambda A_{\eta\eta} + A_{\text{bound}})^{-1} [0, \dots, 1]^T \quad (59)$$

که در آن:

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T \quad (\text{الف-60})$$

$$A_{\eta\eta\eta} = \left[\frac{\partial^3 \phi(r_{ij})}{\partial \eta^3} \right]_{n \times n} \quad (\text{ب-60})$$

$$A_{\eta\eta} = \left[\frac{\partial^2 \phi(r_{ij})}{\partial \eta^2} \right]_{n \times n} \quad (\text{ج-60})$$

این ترتیب خواهیم داشت:

$$A_m = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{N}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (53)$$

از نتیجه مرحله قبل نسبت به پارامتر همگرایی مشتق مرتبه اول گرفته و آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dA_m}{dh} = 0 \quad (54)$$

از بین ریشه‌های حقیقی معادله به‌دست آمده، جواب‌هایی که در بازه همگرایی قرار دارند، پارامترهای همگرایی بهینه مسئله هستند که بهترین آن، جواب مسئله می‌باشد. عباس‌بندی و جلیلی به تفضیل به بحث در مورد این روش پرداخته‌اند و قضایای مرتبط را اثبات کرده‌اند [23].

در این مطالعه بازه حل به 150 نقطه تقسیم‌بندی و محاسبات بر این مبنا انجام شده است. منحنی‌های h نظیر تقریب سری هموتویی مرتبه 15 در "شکل‌های 2 و 3" آمده‌اند که با توجه به آن بازه مورد قبول برای h زمانی که $\beta = 1$ باشد، عبارتست از: $-1.714663 < h < 1.855841$ و زمانی که $\beta = 2$ باشد، عبارتست از: $-1.221997 < h < 1.227270$. با روش بهینه‌سازی ارائه شده، برای $\beta = 1$ مقدار h قابل قبول برابر با -1.087266 و برای $\beta = 2$ مقدار h قابل قبول برابر با -0.873491 به‌دست آمد.

با به‌دست آمدن تابع f ، معادله گرما تبدیل به معادله خطی شده که به راحتی قابل حل می‌باشد. در ادامه f_0 ، f_1 و f_2 برای $\beta = 1$ گزارش شده‌اند. لازم به‌ذکر است که کدنویسی انجام شده برای روش آنالیز هموتویی بهینه با استفاده از بسته نرم‌افزاری میپل¹ [24] انجام شده است.

$$f_0(\eta) = \eta - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-3\eta} \quad (\text{الف-55})$$

$$f_1(\eta) = 0.01851851852 h (26 - 42\eta + e^{-3\eta} (9\eta^2 - 36\eta - 26)) + 0.2591564050 h (3\eta - 1 + e^{-3\eta}) \quad (\text{ب-55})$$

$$f_2(\eta) = 0.01851851852 h (26 - 42\eta + e^{-3\eta} (9\eta^2 - 36\eta - 26)) + 0.2591564050 h (3\eta - 1 + e^{-3\eta}) + 4.444444444 10^{-22} e^{-3\eta} (9.37500000110^{19} h^2 \eta^4 - 7.50000000110^{20} h^2 \eta^3 + 1.791435245 10^{21} h^2 \eta^2 - 8.886574668 10^{20} h^2 \eta - 2.919786866 10^{20} h^2) + 5.555555556 10^{-23} h^2 ((8.333333334 10^9 \eta^2 - 3.333333334 10^{10} \eta - 1.851851853 10^{19}) e^{-6\eta} + 1.851377040 10^{18} \eta^2 - 1.655370418 10^{22} \eta + 7.869136120 10^{21}) + 0.306377117 h^2 (3\eta - 1) \quad (\text{ج-55})$$

6- حل مسئله با استفاده از روش ابتکاری گرہ مرزی-آنالیز هموتویی

فرم کلی معادله هموتویی برای حل معادلات دیفرانسیل به‌صورت معادلات (43) بیان شد. برای استفاده از متد گرہ مرزی حدس اولیه خود را با استفاده از شرایط مرزی و عملگر دیفرانسیلی خطی تعریف شده برای معادلات به‌دست می‌آوریم. با استفاده از تئوری روش گرہ مرزی، $r_i = \|\eta - \eta_i\|$ می‌باشد و خواهیم داشت:

$$f(\eta) \cong \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(\|\eta - \eta_i\|) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(r_i) \quad (56)$$

با جایگذاری رابطه (56) در رابطه عملگر دیفرانسیل خطی (47) به تساوی زیر خواهیم رسید:

¹ Maple

بنابراین:

$$\zeta_0 = (C_{\eta\eta} + \beta \times \text{Pr} \times \text{diag}(f) \times C + C_{\text{bound}})^{-1} [0, \dots, 1]^T \quad (71)$$

که در آن $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_n]^T$ می‌باشد. همچنین:

$$C_{\eta\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi''(r_{21}) & \phi''(r_{22}) & \dots & \phi''(r_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''(r_{n-1,1}) & \phi''(r_{n-1,2}) & \dots & \phi''(r_{n-1,n}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (72\text{-الف})$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi(r_{21}) & \phi(r_{22}) & \dots & \phi(r_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(r_{n-1,1}) & \phi(r_{n-1,2}) & \dots & \phi(r_{n-1,n}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (72\text{-ب})$$

$$C_{\text{bound}} = \begin{pmatrix} \phi(r_{11}) & \phi(r_{12}) & \dots & \phi(r_{1n}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi(r_{n1}) & \phi(r_{n2}) & \dots & \phi(r_{nn}) \end{pmatrix} \quad (72\text{-ج})$$

$$\text{diag}(f) = \begin{pmatrix} f(\eta_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\eta_n) \end{pmatrix} \quad (72\text{-د})$$

و در نهایت جواب نهایی به صورت زیر خواهد شد:

$$\theta(\eta) \cong \sum_{i=1}^n \zeta_i \phi(\|\eta - \eta_i\|) \quad (73)$$

برای حل و استفاده از این روش از بسته نرم‌افزاری متلب¹ [25] و از کرنل GA و مقدار پارامتر شکل زیر استفاده شده است [26].

$$c = 1.25 \frac{(D)}{\sqrt{N}} \quad (74)$$

که در آن D طول بازه و N تعداد نقاط می‌باشد.

1-6- تعیین بازه همگرایی روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتوبی

در روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتوبی منحنی‌های h نظیر $f(0)$ و $f'(0)$ به علت تضمین شدن شرایط مرزی در تابع اولیه به دست آمده از روش گره مرزی، خطی افقی خواهد بود. لذا منحنی‌های h نظیر $f''(0)$ رسم شده‌اند. منحنی‌های h نظیر تقریب سری هموتوبی مرتبه 50 در "شکل‌های 3 و 4" آمده‌اند که با توجه به آن، برای $\beta = 1$ بازه مورد قبول برای h عبارتست از: $-0.08 < h < -1.64$ و برای $\beta = 2$ بازه مورد قبول برای h عبارتست از: $-0.12 < h < -1.2$.

همچنین زمان اجرا برای دو روش آنالیز هموتوبی بهینه و روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتوبی در جدول 2 گزارش شده است. همان‌طور که مشخص است با بالا رفتن مرتبه تکرار، زمان همگرا شدن روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتوبی به علت اعمال محاسبات ماتریسی به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد.

جدول 2 مقایسه زمان اجرا در هر دو روش

Table 2 Comparison of running time for both methods		
مرتب تکرار و $f''(0)$	روش آنالیز هموتوبی بهینه (s)	روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتوبی (s)
5	2.496	10.436
$f''(0)$	1.247355	1.240888
10	25.319	28.225
$f''(0)$	1.232700	1.232749
15	74.226	44.211
$f''(0)$	1.232728	1.232836

¹ Matlab

$$A_{\eta\eta\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi'''(r_{21}) & \phi'''(r_{22}) & \dots & \phi'''(r_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi'''(r_{n-1,1}) & \phi'''(r_{n-1,2}) & \dots & \phi'''(r_{n-1,n}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (61\text{-الف})$$

$$A_{\eta\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi''(r_{21}) & \phi''(r_{22}) & \dots & \phi''(r_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi''(r_{n-1,1}) & \phi''(r_{n-1,2}) & \dots & \phi''(r_{n-1,n}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (61\text{-ب})$$

$$A_{\text{bound}} = \begin{pmatrix} \phi(r_{11}) & \phi(r_{12}) & \dots & \phi(r_{1n}) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi'(r_{n1}) & \phi'(r_{n2}) & \dots & \phi'(r_{nn}) \end{pmatrix} \quad (61\text{-ج})$$

بنابراین حدس اولیه ما برای استفاده در روش آنالیز هموتوبی به صورت زیر است:

$$f_0(\eta) \cong \sum_{i=1}^n \alpha_{0i} \phi(r_i) \quad (62)$$

حال با بازنویسی رابطه هموتوبی (43) به فرم ساده شده زیر دست خواهیم یافت:

$$(A_{\eta\eta\eta} + \lambda A_{\eta\eta} + A_{\text{bound}}) \alpha_m = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{m-1}(\eta_2) \\ \vdots \\ f_{m-1}(\eta_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix} + h R_m(\overrightarrow{f_{m-1}}) \quad (63)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\alpha_m = (A_{\eta\eta\eta} + \lambda A_{\eta\eta} + A_{\text{bound}})^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ f_{m-1}(\eta_2) \\ \vdots \\ f_{m-1}(\eta_{n-1}) \\ 0 \end{pmatrix} + h R_m(\overrightarrow{f_{m-1}}) \right) \quad (64)$$

که در آن $\eta = [0, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}, 0]$ و:

$$\overrightarrow{f_{m-1}} = [f_0, \dots, f_{m-1}] \quad (65)$$

در هر مرحله ضرایب جدید محاسبه می‌شوند و خواهیم داشت:

$$f_m(\eta) \cong \sum_{i=1}^n \alpha_{mi} \phi(r_i) \quad (66)$$

برای معادلات گرما در جریان سکون خواهیم داشت:

$$\theta(\eta) \cong \sum_{i=1}^n \zeta_i \phi(\|\eta - \eta_i\|) = \sum_{i=1}^n \zeta_i \phi(r_i) \quad (67)$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله گرما (34-ب) خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{i=1}^n \zeta_i \phi(r_i) \right)'' + \text{Pr} \times \text{diag}(f(\eta_i)) \left(\sum_{i=1}^n \zeta_i \phi(r_i) \right) = 0 \quad (68)$$

و شرایط مرزی:

$$\zeta_1 \phi(r_i) = 0, \zeta_n \phi(r_i) = 1 \quad (69)$$

با توجه به رابطه (68) یک معادله دیفرانسیل داریم که آن را با استفاده

از روش گره مرزی به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$(C_{\eta\eta} + \beta \times \text{Pr} \times \text{diag}(f) \times C + C_{\text{bound}}) \zeta_0 = [0, \dots, 1]^T \quad (70)$$

بنابراین:

بهینه، روش ترکیبی گره مرزی-هموتویی، روش هموتویی مجانبی بهینه [2] و روش عددی [21] مقایسه می‌شوند. در جداول 4 و 5 مقادیر متناظر سرعت موازی با دیوار حاصل از این سه روش برای جریان سکون صفحه‌ای و همچنین جریان سکون با تقارن محوری آورده شده است. مقادیر مربوط به روش ترکیبی گره مرزی-هموتویی برای مرتبه تکرار 50 و تعداد کل گره 40 و همچنین مقادیر مربوط به روش هموتویی بهینه برای مرتبه تکرار 15 گزارش شده‌اند. به منظور درک بهتر از دقت نتایج، اعداد تا شش رقم اعشار گزارش شده‌اند و مقدار مطلق خطای روش ترکیبی گره مرزی-هموتویی با روش عددی آورده شده است. همان‌طور که پیداست، نتایج این مطالعه، تطابق بسیار خوبی با نتایج حاصل از حل عددی دارند.

جریان سکون یکی از جریان‌های متداول در سیالات می‌باشد. عوامل متعددی منجر به تشکیل این حالت در سیال شده که از آن جمله می‌توان به سکون سیال ناشی از برخورد آن با یک دیواره جامد اشاره نمود. در "شکل 6"، نمودار خط جریان $f(\eta)$ ، سرعت $f'(\eta)$ و تنش برشی $f''(\eta)$ بر حسب پارامتر هم‌شکلی η با استفاده از روش این تحقیق در مقایسه با حل عددی را مشاهده می‌کنیم. با توجه به روابط (23-ج) و (31-ج) ملاحظه می‌شود که با کاهش فاصله عمودی تا دیوار، مولفه سرعت در راستاهای x و y کاهش می‌یابند، تا جایی که در روی صفحه اندازه سرعت به صفر می‌رسد. همچنین با افزایش فاصله عمودی از صفحه، به علت کاهش اثرات دیوار تنش برشی سیال کاهش می‌یابد.

توزیع دما به ازای مقادیر عدد پرناندال خیلی کوچک (0.001، 0.2 و 0.5) برای جریان سکون در صفحه در "شکل 7 و 8" و برای جریان با تقارن محوری در "شکل 9 و 10" ترسیم شده‌اند. همان‌گونه که انتظار داریم برای مقدار پرناندال کوچک توزیع دما با فاصله از دیوار در ناحیه لایه مرزی سرعت به‌طور خطی تغییر می‌کند. با افزایش عدد پرناندال و کاهش ضخامت لایه مرزی حرارتی و نزدیک شدن ضخامت‌ها به هم، منحنی توزیع دما نیز به‌طور محسوسی تغییر می‌کند.

8- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، حل تحلیلی مسئله دینامیک و انتقال حرارت جریان‌های آرام

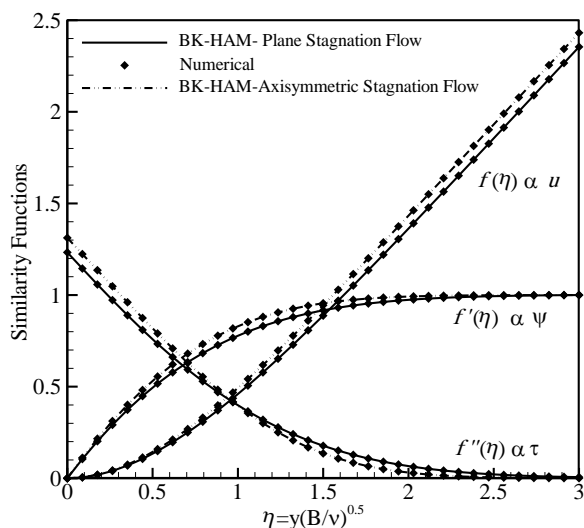


Fig. 6 Comparison of similarity functions profiles obtained from the boundary knot-homotopy analysis method with numerical results for both flows

شکل 6 مقایسه منحنی حل توابع تشابهی به‌دست آمده از روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتویی با نتایج عددی برای هر دو جریان

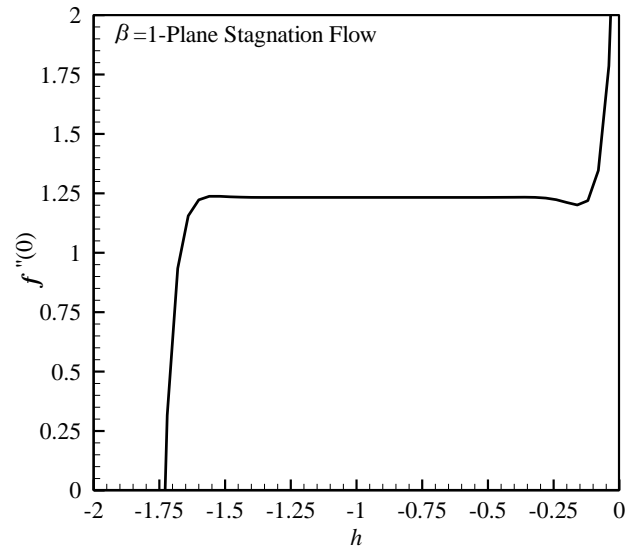


Fig. 4 the h -curve of 50th order approximation for $\beta = 1$ for boundary knot-homotopy analysis method

شکل 4 منحنی‌های h نظیر تقریب مرتبه 50 برای $\beta = 1$ در روش گره مرزی-آنالیز هموتویی

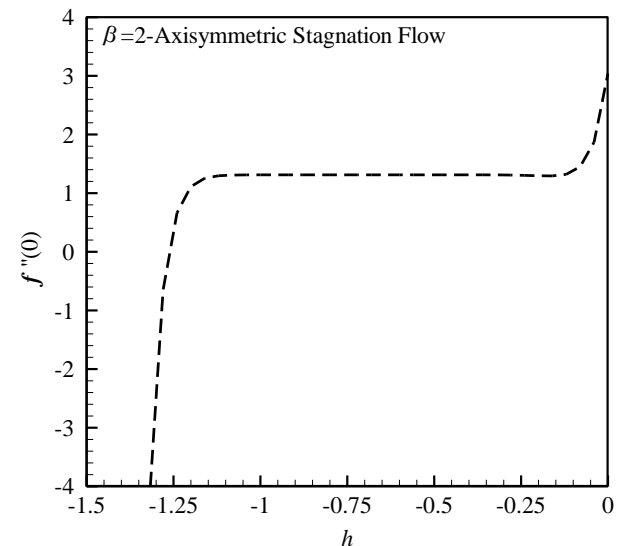


Fig. 5 the h -curve of 50th order approximation for $\beta = 2$ for boundary knot-homotopy analysis method

شکل 5 منحنی‌های h نظیر تقریب مرتبه 50 برای $\beta = 2$ در روش گره مرزی-آنالیز هموتویی

7- نتایج

معادلات برای هر دو حالت جریان سکون بر روی صفحه و جریان سکون با تقارن محوری با استفاده از روش ترکیبی گره مرزی-هموتویی در مرتبه تکرار 50 و تعداد کل گره در دامنه و مرز برابر با 40 نقطه محاسبه شد. لازم به‌ذکر است که برای رسیدن به جواب دقیق باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{L}_f(f_m(\eta)) - [\mathcal{L}_f(f_{m-1}(\eta)) + R_f(f_{m-1}(\eta))] = 0 \quad (75)$$

لذا هرچه این معادله به صفر نزدیک باشد جواب به‌دست آمده دقیق‌تر خواهد بود. در جدول 3 مقادیر متناظر با $f'''(0)$ برای جریان سکون در صفحه و با تقارن محوری گزارش و با حل عددی مقایسه شده‌اند. در ادامه نتایج فیزیکی و محسوس محاسباتی به‌دست آمده از سه روش هموتویی

جدول 3 مقایسه نتایج $f''(0)$ با حل عددی در $\lambda = 3$ برای جریان سکون در صفحه و با تقارن محوری

Table 3 Comparison of $f''(0)$ with numerical result in $\lambda = 3$ for plane and axisymmetric stagnation flow

β	حل عددی [21]	معادله (75)	روش گره مرزی-آنالیز هموتویی	روش آنالیز هموتویی بهینه	خطای مطلق روش گره مرزی-آنالیز هموتویی	خطای مطلق روش آنالیز هموتویی بهینه
1	1.23259	$\leq 5.66 \times 10^{-9}$	1.232652	1.232660	6.2×10^{-5}	7.0×10^{-5}
2	1.31194	$\leq 9.10 \times 10^{-9}$	1.311969	1.312036	2.9×10^{-5}	9.6×10^{-5}

جدول 4 مقایسه نتایج $f'(\eta)$ با حل عددی در $\lambda = 3$ برای جریان سکون در صفحه ($\beta = 1$)

Table 4 Comparison of $f'(\eta)$ with numerical result in $\lambda = 3$ for plane stagnation flow ($\beta = 1$)

η	حل عددی [21]	روش گره مرزی-آنالیز هموتویی	روش آنالیز هموتویی بهینه	شاه و همکاران [2]	خطای مطلق روش گره مرزی-آنالیز هموتویی	خطای مطلق روش آنالیز هموتویی بهینه	خطای مطلق شاه و همکاران [2]
0.2	0.22661	0.226559	0.226612	0.229304	5.1×10^{-5}	2.0×10^{-6}	2.6×10^{-3}
0.4	0.41446	0.414413	0.414451	0.419679	4.7×10^{-5}	9.0×10^{-6}	5.2×10^{-3}
0.6	0.56628	0.566247	0.566267	0.573568	3.3×10^{-5}	1.3×10^{-5}	7.2×10^{-3}
0.8	0.68594	0.685913	0.685917	0.694494	2.7×10^{-5}	2.3×10^{-5}	8.5×10^{-3}
1	0.77787	0.777849	0.777845	0.786653	2.1×10^{-5}	2.5×10^{-5}	8.7×10^{-3}
1.4	0.89681	0.896804	0.896802	0.902838	6.0×10^{-6}	8.0×10^{-6}	6.0×10^{-3}
1.8	0.95684	0.956838	0.956837	0.957660	2.0×10^{-6}	3.0×10^{-6}	8.2×10^{-4}
2.2	0.98386	0.983865	0.983857	0.981165	5.0×10^{-6}	3.0×10^{-6}	2.6×10^{-3}
2.6	0.99464	0.994653	0.994635	0.993354	1.3×10^{-5}	5.0×10^{-6}	1.3×10^{-3}
3	0.99843	0.998451	0.998424	1	2.1×10^{-5}	6.0×10^{-6}	1.5×10^{-3}

جدول 5 مقایسه نتایج $f'(\eta)$ با حل عددی در $\lambda = 3$ برای جریان سکون در صفحه ($\beta = 2$)

Table 5 Comparison of $f'(\eta)$ with numerical result in $\lambda = 3$ for axisymmetric stagnation flow ($\beta = 2$)

η	حل عددی [21]	روش گره مرزی-آنالیز هموتویی	روش آنالیز هموتویی بهینه	شاه و همکاران [2]	خطای مطلق روش گره مرزی-آنالیز هموتویی	خطای مطلق روش آنالیز هموتویی بهینه	خطای مطلق شاه و همکاران [2]
0.2	0.24239	0.242382	0.242439	0.251130	8.0×10^{-6}	4.9×10^{-5}	8.7×10^{-3}
0.4	0.44499	0.444975	0.445109	0.462374	1.5×10^{-5}	1.1×10^{-4}	1.7×10^{-2}
0.6	0.60871	0.608698	0.608860	0.634286	1.2×10^{-5}	1.5×10^{-5}	2.5×10^{-2}
0.8	0.73577	0.735762	0.735855	0.768227	8.0×10^{-6}	8.5×10^{-5}	3.2×10^{-2}
1	0.82987	0.829857	0.829847	0.866651	1.3×10^{-5}	2.3×10^{-5}	3.6×10^{-2}
1.4	0.93983	0.939815	0.939736	0.972948	1.5×10^{-5}	9.4×10^{-5}	3.3×10^{-2}
1.8	0.98316	0.983144	0.983110	0.996252	1.6×10^{-5}	5.0×10^{-5}	1.3×10^{-2}
2.2	0.99635	0.996327	0.996311	0.98881	2.3×10^{-5}	3.9×10^{-5}	7.5×10^{-3}
2.6	0.99940	0.999372	0.999355	0.990822	2.8×10^{-5}	4.5×10^{-5}	8.5×10^{-3}
3	0.99993	0.999899	0.999876	1	3.1×10^{-5}	5.4×10^{-5}	7.0×10^{-5}

نشدن ماتریس معادلات) همواره به بهترین نتیجه خواهد انجامید.

از مزایای این روش می توان به موارد زیر اشاره کرد:

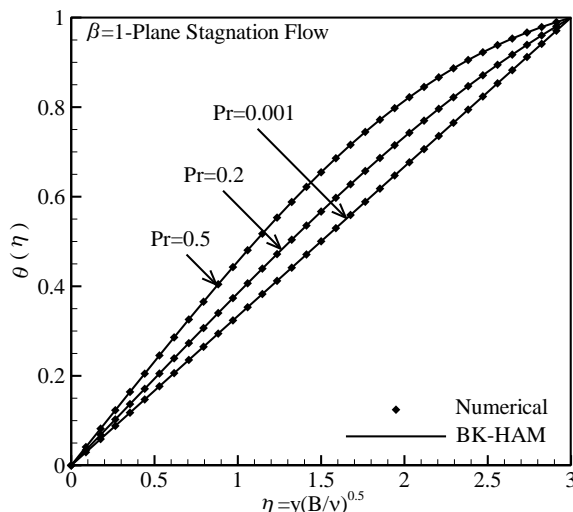


Fig. 7 Comparison of temperature distribution profiles obtained from the boundary knot-homotopy analysis method with numerical results for plane stagnation flow

شکل 7 مقایسه منحنی توزیع دما به دست آمده در اعداد مختلف پراندا با نتایج

عددی برای جریان سکون در صفحه

تراکم ناپذیر سکون در صفحه و با تقارن محوری با استفاده از روش آنالیز هموتویی و روش ابتکاری ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتویی ارائه و با روش عددی مقایسه گردید. مقادیر $f'(\eta)$ که به نحوی بیانگر سرعت موازی با سطح می باشند، برای هر دو جریان، در جدول های 3 و 4 گزارش شده اند. با مقایسه داده ها در جداول و نمودارها، مشاهده می شود که پاسخ روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتویی هم خوانی بسیار خوبی با پاسخ روش عددی دارد. یکی از مشکلات روش آنالیز هموتویی محدودیت مرتبه معادله دیفرانسیل خطی است، زیرا تا مرتبه خاصی به صورت تحلیل و فرمول وار می توان مقدار مشتقات را محاسبه کرد. به همین منظور در این مطالعه برای این که قادر باشیم مراتب بالاتری از معادلات دیفرانسیل با هر مرتبه ای را محاسبه کنیم از روش گره مرزی استفاده شد که هم سرعت همگرایی بالایی دارد و هم صدق کردن شرایط مرزی در آن تضمین شده است. در جدول 2 سرعت اجرا برای 3 مرتبه تکرار برای هر دو روش آنالیز هموتویی بهینه و روش ترکیبی گره مرزی-آنالیز هموتویی گزارش شده است. مشخص شد که هرچه مرتبه تکرار بیشتر می شود، زمان اجرا برای روش گره مرزی-آنالیز هموتویی کاهش به علت محاسبات ماتریسی کاهش می یابد که نشان دهنده مزیت این روش می باشد. این روش برای معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط مرزی همگن به شرط انتخاب پارامتر و تابع پایه ای مناسب کارآمد است. ترکیب این روش با روش آنالیز هموتویی برای هر مقدار از پارامتر شکل (به شرط سینگولار

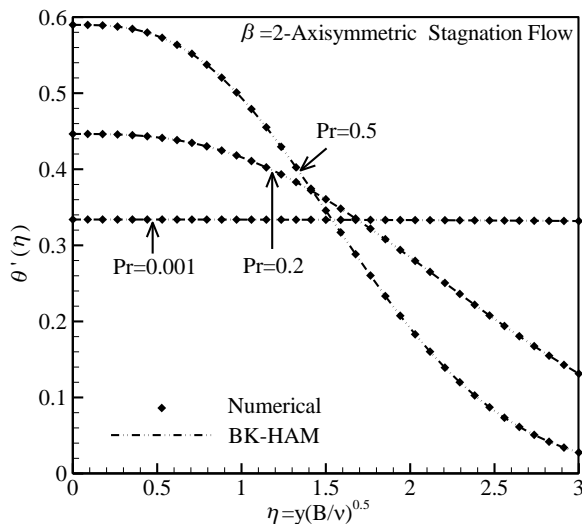


Fig. 10 Comparison of temperature distribution profiles in differential form obtained from the boundary knot-homotopy analysis method with numerical results for axisymmetric stagnation flow

شکل 10 مقایسه منحنی توزیع دما در فرم دیفرانسیلی به دست آمده در اعداد مختلف پیراندال با نتایج عددی برای جریان سکون با تقارن محوری

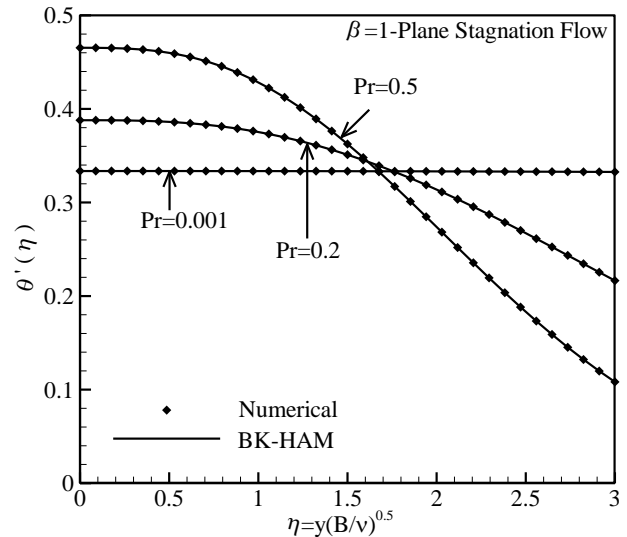


Fig. 8 Comparison of temperature distribution profiles in differential form obtained from the boundary knot-homotopy analysis method with numerical results for plane stagnation flow

شکل 8 مقایسه منحنی توزیع دما در فرم دیفرانسیلی به دست آمده در اعداد مختلف پیراندال با نتایج عددی برای جریان سکون در صفحه

9- فهرست علائم

B	ضریب ثابت
c	پارامتر شکل
c_p	گرمای مخصوص ($\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$)
f	تابع تشابهی جریان سکون
G	تابع تشابهی
h	پارامتر کمکی
H	تابع کمکی
k	ضریب هدایت گرمایی ($\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$)
m	تعداد مراحل تکرار
N	ترم غیر خطی معادله دیفرانسیل
P	فشار ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
Pr	عدد پیراندال
q	پارامتر همگرایی
\dot{Q}_{Source}	تابع اتلاف ($\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$)
R	ترم غیر خطی
Re	عدد رینولدز سیال
\vec{S}	نیروهای حجمی (kgms^{-2})
\vec{T}	بردار دما (K)
T_{∞}	دمای دور دست (K)
T_w	دمای دیواره (K)
u	سرعت سیال در راستای موازی با سطح (ms^{-1})
V	سرعت لحظه‌ای عمودی (ms^{-1})
\vec{V}	بردار سرعت سیال (ms^{-1})
W	فاصله عمودی تا سطح (m)
x	جهت طولی (m)
y	جهت عرضی (m)
علائم یونانی	
η	پارامتر تشابهی

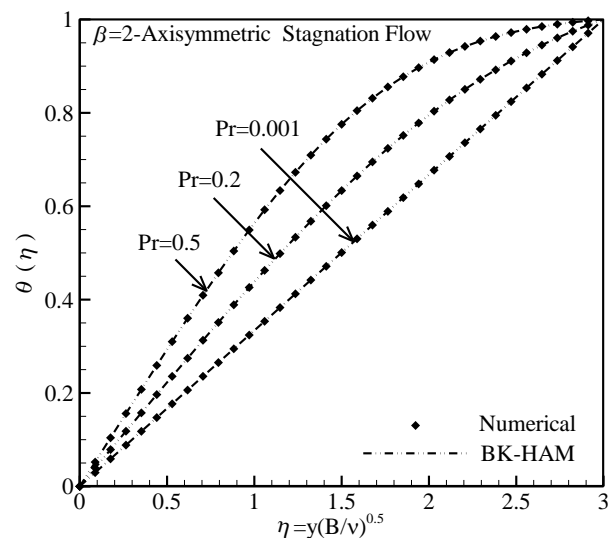


Fig. 9 Comparison of temperature distribution profiles obtained from the boundary knot-homotopy analysis method with numerical results for axisymmetric stagnation flow

شکل 9 مقایسه منحنی توزیع دما به دست آمده در اعداد مختلف پیراندال با نتایج عددی برای جریان سکون با تقارن محوری

- به دست آوردن بهترین حدس اولیه که دقیقاً در شرایط جواب اولیه در روش هموتوبی صدق می‌کند (چرا که از خود حل عملگر حاصل شده)
- سرعت همگرایی مناسب
- همگرا بودن در دامنه وسیعی از پارامتر
- پایدار بودن روش بدلیل مثبت معین بودن ماتریس‌های مشتق حاصله
- عدم محدودیت در استفاده در بازه‌های خاص
- عدم نیاز تغییر شکل معادله کلی (مانند روش اسپکترال)
- آسان بودن روش برای فراگیری و اعمال بر معادلات پیچیده با استفاده از یک کرنل مشترک

- deformation equations in homotopy analysis method, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, No. 8, pp. 357-367, 2012 .
- [9] S. Abbasbandy, Y. Tan, S. Liao, Newton-homotopy analysis method for nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 188, No. 2, pp. 1794-1800, 2007.
- [10] Y. Zhao, Z. Lin, S. Liao, A modified homotopy analysis method for solving boundary layer equations, *Applied Mathematics*, Vol. 4, No. 1, pp. 11-15, 2013 .
- [11] Y. Lok, N. Amin, I. Pop, Non-orthogonal stagnation point flow towards a stretching sheet, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 41, No. 4, pp. 622-627, 2006 .
- [12] A. Kimiaefar, G. Bagheri, A. Barari, A. Arabsolghar, M. Rahimpour, On the analytical solution of non-orthogonal stagnation point flow towards a stretching sheet, *International Journal of Applied Mathematics*, Vol. 41, No. 2, pp. 41-51, 2011 .
- [13] M. Jadidi, N. Moallemi, I. Shafieenejad, J. Alaei, An Analytical Approximation of Stagnation Point Flow and Heat Transfer of a Micropolar Fluid in a Porous Medium, *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 4, No. 2, pp. 81-90, 2011 .
- [14] N. Freidoonimehr, A. Baradaran Rahimi, Investigation of MHD nano-fluid flow over stretching surface with velocity slip and convective surface boundary conditions, *Modares Mechanical Engineering* Vol. 15, No. 3, pp. 208-218, 2015. (in Persian فارسی)
- [15] S. Nadeem, A. Hussain, M. Khan, HAM solutions for boundary layer flow in the region of the stagnation point towards a stretching sheet, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 15, No. 3, pp. 475-481, 2010 .
- [16] E. J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 19, No. 8-9, pp. 147-161, 1990 .
- [17] J. Mužik, The boundary knot method for simulating unsteady incompressible fluid flow, *Procedia Engineering*, Vol. 111, No. 1, pp. 575-581, 2015 .
- [18] F. Wang, K. Zheng, Analysis of the boundary knot method for 3D Helmholtz-type equation, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2014, No. 1, pp. 1-9, 2014 .
- [19] W. Chen, Symmetric boundary knot method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, No. 6, pp. 489-494, 2002 .
- [20] W. Chen, L. Shen, Z. Shen, G. Yuan, Boundary knot method for Poisson equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 29, No. 8, pp. 756-760, 2005 .
- [21] F. M. White, J. Corfield, *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill New York, pp. 144-153, 2006 .
- [22] D.-J. Shen, J. Lin, W. Chen, Boundary Knot Method Solution of Helmholtz Problems with Boundary Singularities, *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 22, No. 4, pp. 440-449, 2014 .
- [23] S. Abbasbandy, M. Jalili, Determination of optimal convergence-control parameter value in homotopy analysis method, *Numerical Algorithms*, Vol. 64, No. 4, pp. 593-605, 2013 .
- [24] W. Gander, J. Hrebicek, *Solving problems in scientific computing using Maple and Matlab*: Springer Science & Business Media, pp. 29-35, 2011 .
- [25] M. U. s. Guide, Natick, MA: The MathWorks, Inc, 2002.
- [26] G. E. Fasshauer, J. G. Zhang, On choosing "optimal" shape parameters for RBF approximation, *Numerical Algorithms*, Vol. 45, No. 1-4, pp. 345-368, 2007.

θ	دمای بی بعد جریان سکون در صفحه
μ	لزجت دینامیکی ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
ν	لزجت سینماتیک (m^2s^{-1})
ρ	چگالی (kgm^{-3})
φ	تابع نگاشت شده f
χ	تابع دو ضابطه‌ای
ψ	خط جریان
زیر نویس ها	
bound	مرز
diag	ماتریس قطری
m	مرتب‌ه تکرار
n	تعداد توابع در بردار
Source	منبع حرارتی
w	دیواره
x	طول

10- مراجع

- [1] C. Wang, Similarity stagnation point solutions of the Navier–Stokes equations—review and extension, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, Vol. 27, No. 6, pp. 678-683, 2008 .
- [2] R. A. Shah, S. Islam, G. Zaman, T. Hussain, G. Zaman, Solution of stagnation point flow with heat transfer analysis by optimal homotopy asymptotic method, *Proceedings of the Romanian Academy, Series A*, Vol. 11, No. 4, pp. 312-321, 2010.
- [3] S. Liao, *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*, CRC press, New York, pp. 24-256, 2003 .
- [4] S. Abbasbandy, The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, Vol. 360, No. 1, pp. 109-113, 2006 .
- [5] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, A new application of the homotopy analysis method: Solving the Sturm–Liouville problems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 16, No. 1, pp. 112-126, 2011 .
- [6] S. Abbasbandy, F. S. Zakaria, Soliton solutions for the fifth-order KdV equation with the homotopy analysis method, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 51, No. 1-2, pp. 83-87, 2008 .
- [7] V. Gupta, S. Gupta, Application of homotopy analysis method for solving nonlinear Cauchy problem, *Surveys in Mathematics and its Applications*, Vol. 7, No. 1, pp. 105-116, 2012 .
- [8] J. Izadian, M. Mohammadzade Attar, M. Jalili, Numerical solution of