



حل عددی مدل‌های دوسیالی تراکم‌پذیر هم‌دما با استفاده از روش‌های بقایی در امتداد مسیر مرکزی

یونس شکاری^۱، ابراهیم حاجی‌دولو^{۲*}، وحید شکری^۳، مرتضی بهبهانی‌نژاد^۲

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

۲- دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز

۳- استادیار مدعو گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

* اهواز، صندوق پستی ۶۱۳۵۵، hajidae_1999@yahoo.com

چکیده- دقیق‌ترین و پیچیده‌ترین مدل‌های موجود برای تحلیل جریان‌های دوفازی، مدل‌های دوسیالی می‌باشند. برای جریان‌های دوفازی هم‌دما تراکم‌پذیر، دو مدل تک‌فشاری و دو فشاری موجود می‌باشد. علی‌رغم قابلیت بالای این مدل‌ها در تحلیل جریان، به دلیل حضور عبارات غیربقایی در معادلات مومنتم فازها نمی‌توان آنها را در قالب بقایی بیان کرد. بنابراین، شرط کلاسیک رنکین-هوگونیوت در محل ناپیوستگی‌های میدان جریان، برای این‌گونه معادلات قابل اعمال نیست و اعمال روش‌های عددی کلاسیک برای حل این معادلات غالباً با مشکل مواجه بوده است. در مقاله حاضر برای غلبه بر این مشکل، از شیوه جدید انتگرال‌گیری در امتداد مسیر استفاده شده است. در این شیوه می‌توان شرط عمومی رنکین-هوگونیوت را در امتداد مسیر واصل میان حالت‌های سمت چپ و راست ناپیوستگی اعمال کرد. پس از ارائه شکل بقایی در امتداد مسیر روش‌های عددی مرکزی لکس-فردریکس، لکس-وندروف و روزانوف، مسأله شیر آب و لوله ضربه با سرعت نسبی بزرگ با استفاده از این روش‌ها حل شده‌اند و با بکارگیری شبکه‌های مختلف، استقلال حل از شبکه حاصل شد. مقایسه نتایج برای شیر آب نشان می‌دهد که تطابق خوبی با حل تحلیلی وجود دارد و نتایج برای لوله ضربه نیز نشان‌دهنده توانایی بالای روش بکار رفته برای تسخیر ناپیوستگی‌های میدان جریان در مسائل دوفازی است.

کلیدواژه‌گان: جریان دوفازی، مدل تک‌فشاری، مدل دوفشاری، بقایی در امتداد مسیر، روش‌های مرکزی.

Numerical solution of compressible, isothermal two-fluid models using path-conservative central schemes

Y. Shekari¹, E. Hajidavalloo^{2*}, V. Shokri³, M. Behbahani-Nejad²

1- PhD. Candidate, Mech. Eng., SCU Univ. of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

2- Assoc. Prof., Mech. Eng., SCU Univ. of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

3- Assis. Prof., Mech. Eng., invited to SCU Univ., Ahvaz, Ahvaz, Iran

* P. O. B. 61355 Ahvaz, Iran. hajidae_1999@yahoo.com

Abstract- Two-fluid models are the most accurate and complex models for analysis of two-phase flows. There are two different two-fluid models for analyzing compressible isothermal two-phase flows which are Single Pressure Model (SPM) and Two-Pressure Model (TPM). In spite of capabilities of these models in capturing two-phase flow behavior, it is not possible to express them in conservative form due to existence of non-conservative term in momentum equation of phases. Therefore, the classical Rankine-Hugoniot condition across discontinuities in the flow field is not applicable for these equations and there would be difficulty in using classical numerical methods for solving these equations. In this paper a new path-conservative method is used to overcome this difficulty. In this method, one can apply general Rankine-Hugoniot condition along a path connecting left and right states of the discontinuity. After expressing path-conservative form of the employed central numerical methods which are Lax-Fridriches, Lax-Wendroff and Rusanove, water faucet and large relative velocity shock tube problems are solved by using these schemes. Grid independence was achieved using different grid sizes. For water faucet problem, comparison of numerical results with analytical solution show good agreement and for shock tube problem, the results indicate that this method is highly capable in capturing discontinuities in two-phase flow.

Keywords: Two Phase Flow, Single Pressure Model, Two-Pressure Model, Path-Conservative, Central Methods.

۱- مقدمه

جریانهای دوفازی اهمیت فراوانی در صنایع نفت، گاز، سیستم‌های خنک‌کاری رآکتورهای هسته‌ای، مبدل‌های حرارتی و بسیاری از پدیده‌های طبیعی و صنعتی دیگر دارند [۱]. پیش‌بینی درست رفتار دینامیکی جریانهای دوفازی و مدل‌سازی دقیق آنها اهمیت زیادی در طراحی وسایل و فرآیندهای صنعتی دارد.

به‌منظور مدل‌سازی این نوع جریانها، مدل‌های مختلفی مانند مدل همگن، مدل شار رانشی و مدل دوسیالی وجود دارند که در میان آنها مدل‌های دوسیالی دارای بالاترین دقت است. برای تحلیل جریانهای دوفازی تراکم‌پذیر هم‌دما، دو مدل دوسیالی وجود دارد که یکی مدل چهار معادله‌ای و دیگری مدل پنج معادله‌ای می‌باشد. در مدل چهار معادله‌ای فشار دو فاز یکسان فرض شده و برای هر فاز یک معادله مومنتم و یک معادله پیوستگی نوشته می‌شود. این مدل اولین بار توسط ایشی ارائه شد [۲] و چون فشار دو فاز یکسان است مدل تک فشاری نیز نامیده می‌شود. آنالیز هایدروبولیکی این مدل نشان می‌دهد که مقادیر ویژه آن ممکن است مختلط باشند لذا این مدل ممکن است خوش رفتار نباشد. در مدل پنج معادله‌ای فشار دو فاز می‌تواند یکسان نباشد. بنابراین، این مدل گاهی مدل دو فشاری نامیده می‌شود. معادلات حاکم بر این مدل همان معادلات حاکم بر مدل چهار معادله‌ای هستند با این تفاوت که یک معادله دیفرانسیل جزئی برای فرارفت^۱ کسر حجمی به سیستم معادلات اضافه می‌شود [۳]. مقادیر ویژه این مدل همواره حقیقی هستند و در نتیجه این مدل بی قید و شرط خوش‌رفتار می‌باشد. سورل و آبگرال [۴] نخستین مدلی دو فشاری را برای جریانهای گاز-مایع غیرهم‌دما ارائه دادند که مقادیر ویژه آن همواره حقیقی می‌باشد. این مدل برای جریانهای گاز-مایع غیرهم‌دما ارائه شده‌است. هنگامی که از معادله انرژی در مدل سورل و آبگرال صرف‌نظر شود، نسخه هم‌دما این مدل بدست می‌آید که همواره و بی قید و شرط هایدروبولیک است.

تاکنون روش‌های مختلفی برای حل عددی معادلات حاکم بر مدل‌های دوسیالی ارائه شده‌است. همان‌گونه که ذکر شد معادلات حاکم بر مدل‌های دوسیالی تراکم‌پذیر، هایدروبولیک

می‌باشند؛ بنابراین انتظار می‌رود که بتوان از کلیه روش‌های عددی که برای معادلات دیفرانسیل هذلولوی وجود دارد، برای حل عددی معادلات مدل‌های دوسیالی نیز استفاده کرد؛ اما متأسفانه بکارگیری این روش‌ها برای مدل‌های دوسیالی با مشکل مواجه است. مشکل اساسی که در اعمال روش‌های کلاسیک حل معادلات هایدروبولیک به مدل‌های دوسیالی به‌وجود می‌آید، حضور عبارتهای غیربقایی در این معادلات است. این عبارتهای را نه می‌توان در قالب جملات شار و نه در قالب جملات چشمه نوشت. بنابراین باید به شیوه‌ای دیگر بررسی شوند.

در ادبیات فن روش‌های مختلفی برای گسسته‌سازی عبارت غیربقایی وجود دارد که از جمله آنها می‌توان به روش‌های مین‌مود^۲ و تفاضل مرکزی اشاره کرد. روش تفاضل مرکزی در محل ناپیوستگی میدان حل دچار نوسان عددی می‌شود. دو روش مین‌مود نیز در مقالات برای گسسته‌سازی عبارت غیربقایی ارائه شده و اغلب محققانی که از این دو روش استفاده کرده‌اند مشکل این روش‌ها را تولید پخش عددی اضافی در میدان حل دانسته‌اند.

تاکنون مدل‌های دوسیالی با استفاده از روش‌های مختلفی حل شده‌اند و هر یک از محققان از روش‌های گوناگونی برای گسسته‌سازی عبارت غیربقایی استفاده کرده‌اند. سورل و آبگرال با استفاده از یک روش گادانوفی معادلات حاکم بر مدل هفت معادله‌ای غیر هم‌دما را حل کردند [۴]. آنها از روش هارتن-لکس-ون‌لیر^۳ برای محاسبه شار عددی استفاده کردند. این محققان برای گسسته‌سازی عبارتهای غیر بقایی از یک روش تفاضل مرکزی استفاده کردند. اوجه و فلاتن [۵] معادلات مدل چهار معادله‌ای را با استفاده از یک روش ترکیبی تجزیه بردار شار حل کردند. آنها از یک روش بقایی در امتداد مسیر برای گسسته‌سازی عبارت غیربقایی استفاده کردند. روشی که این محققان برای گسسته‌سازی عبارت غیربقایی استفاده کردند برای اولین بار توسط تامی معرفی شده بود [۶].

اساما [۷] تعداد زیادی از روش‌های حجم محدود مرکزی همانند لکس-فردریکس، ریچمایر، روش مرتبه اول مرکزی^۴ (فرس) و روش انتقال شار تصحیح شده^۵ را برای حل معادلات

2. Minmod

3. Harten-Lax-Van Leer (HLL)

4. First Order Centered (FORCE)

5. Flux Corrected Transport (FCT)

1. Advection

در این مقاله هدف آن است که روشی بکار گرفته شود که مشکلات ذکر شده برای گسسته‌سازی عبارات‌های غیربقایی را نداشته باشد. برای این منظور از مفهوم روش‌های بقایی در امتداد مسیر استفاده می‌شود. اولین بار تامی [۶] مفهوم روش بقایی در امتداد مسیر را ارائه نمود. وی یک فرمولاسیون ضعیف برای روش رو را در امتداد یک مسیر مشخص ارائه کرد. مهمترین تحقیق در زمینه روش‌های بقایی در امتداد مسیر برای روش حجم محدود را پیرس [۱۱] و کاسترو و همکاران [۱۲] ارائه کرده‌اند. در زمینه جریان‌های دو فازی نیز دومبسر و تورو [۱۳] با استفاده از یک روش اوشر^۴ بقایی در امتداد مسیر، معادلات حاکم بر مدل دو سیالی پیتمن و لی را به صورت عددی حل کرده‌اند. روش‌های بقایی در امتداد مسیر باعث پخش عددی اضافی و یا نوسان عددی در میدان حل نمی‌شوند بنابراین در مقایسه با روش‌های کلاسیک قادر به پیش‌بینی دقیق‌تر مسائل جریان دوفازی هستند. میزان افزایش دقت پیش‌بینی جریان به مسئله تحت بررسی وابسته است. علی‌رغم موارد ذکر شده هزینه محاسباتی این روش‌ها در مقایسه با روش‌های کلاسیک بالا است. علت این امر این است که در روش‌های بقایی در امتداد مسیر بایستی انتگرال‌های موجود را با استفاده از روش‌های عددی همانند گوس-کوادرچر محاسبه کرد. به عنوان مثال اگر از روش گوس-کوادرچر ۵ نقطه‌ای استفاده شود تعداد محاسبات لازم در هر گام زمانی ۵ برابر می‌شود.

با بررسی منابع علمی در دسترس ملاحظه می‌شود که تاکنون تحقیقی در زمینه حل معادلات مدل‌های دو سیالی تراکم‌پذیر هم‌دما با استفاده از شکل بقایی در امتداد مسیر روش‌های لکس-فردریکس، لکس-وندروف و روزانوف صورت نگرفته است. بنابراین در تحقیق حاضر هدف آن است که این معادلات با استفاده از این روش‌ها به صورت عددی حل شوند. برای این کار از شکل بقایی در امتداد مسیر روش‌های لکس-فردریکس، لکس-وندروف و روزانوف به عنوان روش‌های عددی استفاده شده است. علت این انتخاب این است که در این روش‌ها نیازی به استفاده از ساختار مشخصه‌ای کامل سیستم معادلات نمی‌باشد؛ در نتیجه این روش‌ها سرعت محاسباتی بالایی دارند. برای نشان دادن اهداف مقاله، ترتیب اجزا مقاله بشرح ذیل است. در بخش ۲، معادلات حاکم بر مدل‌های دوسیالی

مدل چهار معادله‌ای بکار برد. همچنین وی در این تحقیق از روش‌هایی همانند روزانوف و روش تغییرات کلی کاهش‌یابنده^۱ لکس-فردریکس نیز استفاده کرد و برای گسسته‌سازی عبارت غیر بقایی از روش تفاضل مرکزی و دو روش مین‌مود استفاده کرده است. لولیر [۸] از روش‌هایی همانند لکس-وندروف، روش جداسازی بالادست فرارفت^۲، انتقال شار تصحیح شده و روش مرتبه اول مرکزی (فرس) برای محاسبه شار عددی معادلات مدل پنج معادله‌ای استفاده کرد. وی برای گسسته‌سازی عبارات‌های غیربقایی از روش تفاضل مرکزی و دو روش مین‌مود استفاده کرد.

مانکجورد [۹،۳] هر دو مدل چهار و پنج معادله‌ای را با استفاده از روش رو^۳ بررسی کرد. وی برای گسسته‌سازی عبارت غیر بقایی از دو شیوه استفاده نمود. در شیوه اول از روش تامی [۶] برای گسسته‌سازی عبارت غیربقایی استفاده کرد و در شیوه دوم با نوشتن معادلات گسسته شده به صورت شبه بقایی تاثیر عبارات‌های غیربقایی را در نظر گرفت.

شکری [۱۰] با استفاده از روش‌هایی که در آنها نیازی به استفاده از ساختار مشخصه‌ای کامل سیستم نباشد، مدل‌های چهار و پنج معادله‌ای را حل نمود. وی از روش‌هایی مانند هارتن-لکس-ون‌لیر و فرس این معادلات را حل نموده و در ادامه به بررسی پدیده شروع و رشد اسلاگ با استفاده از مدل‌های دو سیالی پرداخت. همانند مانکجورد [۹] وی نیز با گسسته‌سازی معادلات به صورت شبه‌بقایی تاثیر حضور عبارات‌های غیربقایی را در نظر گرفت.

با بررسی تحقیقات صورت گرفته در زمینه حل معادلات مدل‌های دو سیالی ملاحظه می‌شود که همواره یکی از مشکلات اساسی محققان چگونگی گسسته‌سازی عبارات‌های غیربقایی بوده است. همان‌گونه که ذکر شد هر یک از محققان روشی خاص برای حل این مشکل بکار گرفته‌اند. این روش‌ها عموماً دارای مشکلاتی می‌باشند که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- عموماً این روش‌ها باعث تولید پخش عددی اضافی و یا نوسان عددی می‌شوند.
- در این روش‌ها عبارات‌های بقایی و غیربقایی به طور جداگانه گسسته‌سازی می‌شوند و از روش واحدی برای گسسته‌سازی همه مشتقات مکانی استفاده نمی‌شود.

1. Total Variation Diminishing (TVD)
2. Advection upwinding splitting method (AUSM)
3. Roe

4. Osher

می‌باشد. به دلیل حضور عبارت $p_{ik} \partial \alpha_k / \partial x$ معادلات فوق را نمی‌توان به صورت بقایی نوشت. همچنین برای بسته شدن سیستم معادلات بایستی رابطه‌ای میان فشار فازها بیان نمود. در این مدل فشارهای دو فاز یکسان فرض می‌شوند.

۲-۲- معادلات حاکم بر مدل پنج معادله‌ای

در این مدل از فرض یکسان بودن فشار دو فاز صرف‌نظر می‌شود. بنابراین به یک رابطه دیگر برای بسته شدن سیستم معادلات نیاز است. این رابطه، معادله انتقال کسر حجمی بوده که در معادله (۴) ارائه شده است. بنابراین معادلات حاکم بر مدل پنج معادله‌ای را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۳].

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k) + u_i \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k) = r_p(p_g - p_l) \quad (۴)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k \rho_k u_k) = 0 \quad (۵)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k u_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k \rho_k u_k^2) + \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial x} + (p_k - p_{ik}) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = S_{km} \quad (۶)$$

در جایی که r_p پارامتر تعدیل فشار می‌باشد. اگر این پارامتر صفر باشد، دو فاز فشار متفاوتی دارند و اگر $r_p \rightarrow \infty$ آنگاه فشار دو فاز یکسان است. همچنین در رابطه (۴)، u_i سرعت فصل مشترک دو فاز می‌باشد که از رابطه زیر می‌توان آن را محاسبه نمود [۳]:

$$u_i = \frac{\sum_{\forall k} \alpha_k \rho_k u_k}{\sum_{\forall k} \alpha_k \rho_k} \quad (۷)$$

همچنین عبارت تصحیح فشار می‌باشد و از رابطه زیر بدست می‌آید [۱۴]:

$$p_k - p_{ik} = \Delta p_{ik} = \gamma \frac{\alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g} (u_g - u_l)^2 \quad (۸)$$

در رابطه بالا γ یک ضریب ثابت است و غالباً $1/2$ فرض می‌شود.

۲-۳- معادله حالت

برای اینکه تعداد معادلات با تعداد مجهولات مدل‌های ذکر شده برابر شوند به یک معادله حالت نیاز است. در این تحقیق از معادله حالت زیر استفاده شده‌است.

$$\rho_k = \rho_{k,0} + \frac{p_k - p_{k,0}}{c_k^2} \quad (۹)$$

مورد استفاده ارائه می‌شود. در بخش ۳ شکل مشخصه‌ای معادلات و آنالیز هایپربولیکی آنها بیان می‌شود. در بخش ۴ پس از بیان مقدمه‌ای بر روش‌های بقایی در امتداد مسیر، روش‌های عددی مورد استفاده بیان می‌شوند. نتایج و یافته‌های بدست آمده در بخش ۵ ارائه شده و در بخش ۶ نتیجه‌گیری نهایی مطرح می‌شود.

۲- معادلات حاکم

در این بخش معادلات حاکم بر مدل های دوسیالی هم‌دما تراکم‌پذیر ارائه می‌شوند. فرضیات حاکم عبارتند از:

- از اثرات اصطکاک دیواره با فازها و اصطکاک فصل مشترک صرف‌نظر می‌شود.
- هندسه جریان یک‌بعدی است.
- تنها نیروی حجمی، نیروی گرانش است.
- هر دو فاز تراکم‌پذیر فرض می‌شوند.
- جریان هم‌دماست و از انتقال جرم میان فازها صرف‌نظر می‌شود.

در تحقیق حاضر دو مدل دوسیالی چهار و پنج معادله‌ای برای تحلیل جریان دوفازی بکار گرفته می‌شود. در ادامه با استفاده از فرضیات ذکر شده، معادلات حاکم بر این مدل‌ها ذکر می‌شوند.

۲-۱- معادلات حاکم بر مدل چهار معادله‌ای

معادلات حاکم بر مدل چهار معادله‌ای شامل دو معادله پیوستگی و دو معادله مومنتم به صورت زیر می‌باشد [۳]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k \rho_k u_k) = 0 \quad (۱)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k u_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k \rho_k u_k^2) + \alpha_k \frac{\partial p_k}{\partial x} + (p_k - p_{ik}) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} = S_{km} \quad (۲)$$

در این روابط ρ_k چگالی، u_k سرعت، p_k فشار و p_{ik} فشار فاز k در روی فصل مشترک می‌باشد. S_{km} عبارت چشمه معادله مومنتم می‌باشد و در تحقیق حاضر تنها شامل اثرات نیروی گرانش است. علاوه بر این α_k کسر حجمی فاز k می‌باشد. بین کسر حجمی فازها رابطه زیر برقرار است:

$$\alpha_g + \alpha_l = 1.0 \quad (۳)$$

که در این رابطه α_g و α_l به ترتیب کسر حجمی فاز گاز و مایع

معادله‌ای به فرآیند تعدیل فشار نیازی نیست ولی برای محاسبه کسر حجمی دقیقاً از همین شیوه استفاده می‌شود.

۳- شکل مشخصه‌ای معادلات حاکم و آنالیز هایپربولیکی

به‌منظور اعمال روش‌های عددی بقایای در امتداد مسیر و همچنین برای یافتن مقادیر ویژه سیستم لازم است که معادلات حاکم به‌صورت غیر بقایای زیر نوشته شوند:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A(Q) \frac{\partial Q}{\partial x} = S(Q) \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)، Q بردار متغیرهای بقایای، S بردار شامل عبارات چشمه و A ماتریس سیستم می‌باشد که در ادامه این متغیرها برای مدل‌های چهار و پنج معادله‌ای معرفی می‌شوند.

۳-۱- مدل چهار معادله‌ای

بردارهای Q و S و ماتریس A برای مدل چهار معادله‌ای به‌صورت زیر می‌باشند:

$$Q = [\alpha_g \rho_g \quad \alpha_l \rho_l \quad \alpha_g \rho_g u_g \quad \alpha_l \rho_l u_l]^T \quad (14)$$

$$S = [0 \quad \alpha_g \rho_g g \quad 0 \quad \alpha_l \rho_l g]^T \quad (15)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & 2u_g & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & 2u_l \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$A_{31} = \frac{\alpha_g \rho_l + \Delta p_{ig} \alpha_l / c_l^2}{\kappa} - u_g^2$$

$$A_{32} = \frac{\alpha_g \rho_g - \Delta p_{ig} \alpha_g / c_g^2}{\kappa}$$

$$A_{41} = \frac{\alpha_l \rho_l - \Delta p_{il} \alpha_l / c_l^2}{\kappa}$$

$$A_{42} = \frac{\alpha_l \rho_g + \Delta p_{il} \alpha_g / c_g^2}{\kappa} - u_l^2$$

در رابطه بالا $\kappa = \alpha_l \rho_g / c_l^2 + \alpha_g \rho_l / c_g^2$ است.

با محاسبه مقادیر ویژه ماتریس A می‌توان محدودده‌ای که در آن مدل چهار معادله‌ای هایپربولیک باقی می‌ماند را تعیین کرد. متأسفانه به دلیل پیچیدگی معادله مشخصه ماتریس موردنظر، رابطه تحلیلی دقیقی برای محاسبه مقادیر ویژه این ماتریس وجود ندارد. اوجه و فلائن با استفاده از روش اغتشاشات چگالی روابط (۱۷) را برای مقادیر ویژه ماتریس A ارائه کردند [۵] که در آن روابط (۱۸) و (۱۹) برقرار هستند.

که در رابطه بالا $\rho_{k,0}$ و $p_{k,0}$ به ترتیب چگالی و فشار در شرایط مرجع هستند و c_k سرعت صوت در فاز k ام می‌باشد. مقادیر چگالی و فشار مرجع مطابق جدول ۱ می‌باشند.

جدول ۱ مقادیر مرجع و ثوابت مورد استفاده در معادله حالت [۵]

متغیر	مایع	گاز
$\rho_{k,0}$ (kg/m ³)	۱۰۰۰	۰
$p_{k,0}$ (kPa)	۱۰۰	۰
c_k (m/s)	۱۰۰۰	$\sqrt{۱.۰^۵}$

۲-۴- فرآیند تعدیل فشار و محاسبه کسر حجمی

فرض یکسان بودن فشار دو فاز در بسیاری از جریان‌ها فرض قابل قبولی است. به این منظور در مدل پنج معادله‌ای پس از حل معادلات و محاسبه فشارها کسر حجمی دو فاز به‌گونه‌ای اصلاح می‌شود که فشار دو فاز یکسان شود. این فرآیند را تعدیل فشار گویند. دو شیوه برای تعدیل فشار در منابع علمی گزارش شده است [۹]. تعدیل فشار محدود و تعدیل فشار لحظه‌ای. در تحقیق حاضر از فرآیند تعدیل فشار لحظه‌ای استفاده می‌شود که در ادامه، این فرآیند تشریح می‌شود.

در تعدیل فشار لحظه‌ای بعد از حل قسمت هایپربولیک مسأله ($r_p = 0$) کسر حجمی دو فاز به‌گونه‌ای اصلاح می‌شوند که فشار آنها یکسان شوند. بدین منظور با جایگذاری α_k با $\alpha_k \rho_k / \rho_k(p)$ در رابطه (۳) و با جایگذاری ρ_k بر حسب فشار با استفاده از معادلات حالت می‌توان به رابطه (۱۰) برای فشار دست یافت که در آن روابط (۱۱) و (۱۲) برقرار است:

$$p^2 + ap + b = 0 \quad (10)$$

$$a = (\rho_{g,0} c_g^2 + \rho_{l,0} c_l^2) - (p_{l,0} + p_{g,0}) - (m_g c_g^2 + m_l c_l^2) \quad (11)$$

$$b = \rho_{g,0} \rho_{l,0} c_g^2 c_l^2 - (p_{g,0} \rho_{l,0} + m_g c_g^2 \rho_{l,0} - m_l p_{g,0}) c_l^2 - (p_{l,0} \rho_{g,0} + m_l c_l^2 \rho_{g,0} - m_g p_{l,0}) c_g^2 - p_{l,0} p_{g,0} \quad (12)$$

در این روابط $m_k = \alpha_k \rho_k$ می‌باشد. با حل این معادله و انتخاب ریشه مثبت آن فشار تعدیل شده بدست می‌آید. با داشتن فشار، چگالی اصلاح شده بدست می‌آید و در نتیجه کسرهای حجمی اصلاح شده با استفاده از متغیرهای بقایای معادلات پیوستگی فازها محاسبه می‌شوند. در مدل چهار

مسیر روش‌های لکس-فردریکس، لکس-وندروف و روزانوف برای حل عددی مدل‌های دو سبالی استفاده می‌شود. بحث جامعی در ارتباط با مبانی نظری روش‌های بقایی در امتداد مسیر در مرجع [۱۶] ارائه شده‌است.

۴-۱- روش‌های حجم‌محدود بقایی در امتداد مسیر مرکزی
یک روش حجم محدود بقایی در امتداد مسیر عمومی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(D_{i+\frac{1}{2}}^- + D_{i-\frac{1}{2}}^+ \right) + \Delta t S_i \quad (24)$$

که عبارات پرش D بر روی مرزها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{i+\frac{1}{2}}^- = C_{i+\frac{1}{2}}^-(Q_{i+1}^n - Q_i^n) \quad (25)$$

$$D_{i-\frac{1}{2}}^+ = C_{i-\frac{1}{2}}^+(Q_i^n - Q_{i-1}^n)$$

انتخاب یک روش عددی به چگونگی انتخاب ماتریس‌های C^\pm وابسته است. این ماتریس‌ها تابعی از حالت‌های طرفین مرز یک سلول محاسباتی هستند. یعنی اینکه:

$$C_{i+\frac{1}{2}}^- = C_{i+\frac{1}{2}}^-(Q_{i+1}^n, Q_i^n), \quad C_{i-\frac{1}{2}}^+ = C_{i-\frac{1}{2}}^+(Q_{i-1}^n, Q_i^n) \quad (26)$$

برای هر روش عددی بقایی در امتداد مسیر این ماتریس‌ها باید در شرط زیر صدق کنند:

$$C_{i+\frac{1}{2}}^- + C_{i+\frac{1}{2}}^+ = \tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} \quad (27)$$

که در آن $\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{A}_{i+\frac{1}{2}}(Q_{i+1}^n, Q_i^n)$ ماتریس روکلی با سه خاصیت زیر می‌باشد.

- برای هر $Q_L, Q_R \in \Omega, \tilde{A}_{i+\frac{1}{2}}(Q_L, Q_R)$ مقدار ویژه حقیقی دارد. این شرط تضمین کننده هایپربولیک ماندن سیستم ضمن حل عددی است. که N تعداد معادلات مدل بکار رفته می‌باشد.
- برای هر $Q \in \Omega, \tilde{A}_{i+\frac{1}{2}}(Q, Q) = A(Q)$. این شرط تأمین کننده شرایط سازگاری ماتریس عمومی رو با ماتریس سیستم است.

- ماتریس رو باید در شرط رنگین-هوغونیوت عمومی صدق کند یعنی:

$$\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}}(Q_R - Q_L) = \int_0^1 A(\Psi(s, Q_L, Q_R)) \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds \quad (28)$$

حال با استفاده از تعاریف ذکر شده، برای روش‌های حجم محدود بقایی در امتداد مسیر می‌توان رابطه‌ای کلی برای بردار

$$\lambda_{\{1,2\}} = u_p \pm c_m, \quad \lambda_{\{3,4\}} = u_u \pm v \quad (17)$$

$$u_p = \frac{\alpha_g \rho_l u_g + \alpha_l \rho_g u_l}{\rho_m}$$

$$u_u = \frac{\alpha_g \rho_l u_l + \alpha_l \rho_g u_g}{\rho_m} \quad (18)$$

$$v = \sqrt{\frac{\Delta p_i (\rho_m) - \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l (u_r)^2}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g)^2}} u_u$$

$$c_m = \sqrt{\frac{\rho_m}{\frac{\partial \rho_g}{\partial p} \alpha_g \rho_l + \frac{\partial \rho_l}{\partial p} \alpha_l \rho_g}}$$

$$\rho_m = \alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g, \quad u_r = u_g - u_l \quad (19)$$

رابطه اول (۱۹) نشان می‌دهد که اگر Δp_i صفر باشد مقادیر ویژه مختلط می‌شوند و در نتیجه سیستم بد رفتار می‌شود. لذا به همین دلیل در رابطه (۸) مقدار $\gamma = 1/2$ فرض می‌شود.

۳-۲- مدل پنج معادله‌ای

بردارهای Q و S و ماتریس A برای مدل پنج معادله‌ای به صورت زیر می‌باشند:

$$Q = [\alpha_g \quad \alpha_g \rho_g \quad \alpha_g \rho_g u_g \quad \alpha_l \rho_l \quad \alpha_l \rho_l u_l]^T \quad (20)$$

$$S = [0 \quad 0 \quad \alpha_g \rho_g g \quad 0 \quad \alpha_l \rho_l g]^T \quad (21)$$

$$A = \begin{bmatrix} u_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{31} & c_g^2 - u_g^2 & 2u_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{51} & 0 & 0 & c_l^2 - u_l^2 & 2u_l \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$A_{31} = \Delta p_{ig} - \rho_g c_g^2, \quad A_{51} = -\Delta p_{il} - \rho_l c_l^2$$

مقادیر ویژه ماتریس A برای مدل پنج معادله‌ای را می‌توان

به صورت تحلیلی بدست آورد. این مقادیر ویژه عبارتند از:

$$\lambda = [u_l u_g - c_g u_g + c_g u_l - c_l u_l + c_l] \quad (23)$$

ملاحظه می‌شود که همه مقادیر ویژه حقیقی هستند و بجز

زمانی که سرعت صوت در یک فاز با سرعت آن فاز یکسان

شود، همه مقادیر ویژه مخالف صفر هستند و سیستم قویا

هایپربولیک می‌باشد. بحث جامعی در مورد مقادیر ویژه سیستم

پنج معادله‌ای در [۱۵] ارائه شده‌است.

۴- روش‌های حل عددی

در این بخش روش‌های حل عددی مدل‌های چهار و پنج معادله‌ای بیان می‌شوند. برای اینکار از شکل بقایی در امتداد

D^\pm تعریف کرد. این رابطه به صورت (۲۹) است.

$$D^\pm = \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} \pm \Theta_{i+\frac{1}{2}} \right) (Q_R - Q_L) \quad (29)$$

که در آن $\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}}$ ماتریس رو عمومی و $\Theta_{i+\frac{1}{2}}$ ماتریس اتلاف می‌باشد. در همه روش‌های عددی مورد استفاده در تحقیق حاضر ماتریس عمومی رو وجود دارد و تنها تفاوت این روش‌ها در چگونگی انتخاب ماتریس اتلاف می‌باشد. در ادامه این ماتریس برای روش‌های مختلف ارائه می‌شود.

- روش لکس-فردریکس

روش لکس-فردریکس یک روش مرتبه اول است و چون خاصیت اتلافی دارد، در محل ناپیوستگی‌های میدان حل دچار نوسان نمی‌شود. ماتریس اتلاف برای روش لکس-فردریکس به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}}^{LF} = \frac{\Delta x}{\Delta t} I \quad (30)$$

در این رابطه I ماتریس یک، Δx طول یک سلول محاسباتی و Δt گام زمانی است.

- روش لکس-وندروف

این روش از مرتبه دوم در زمان و مکان می‌باشد و در محل ناپیوستگی‌های میدان جریان دچار نوسانات محدود عددی می‌گردد. ماتریس $\Theta_{i+\frac{1}{2}}$ برای روش لکس-وندروف به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}}^{LW} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{A}_{i+\frac{1}{2}}^2 \quad (31)$$

- روش روزانوف

ماتریس اتلاف برای روش روزانوف به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}}^R = \max(|\Lambda(Q_i)|, |\Lambda(Q_{i+1})|) I \quad (32)$$

که در آن Λ ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه می‌باشد. لازم به ذکر است که در این روابط ماتریس $\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}}$ را با استفاده از شرط عمومی رنگین-هوگونیوت می‌توان محاسبه کرد. برای یک مسیر ارائه شده به صورت زیر:

$$\Psi = \Psi(s, Q_L, Q_R) = Q_L + s(Q_R - Q_L) \quad (33)$$

می‌توان این ماتریس را از رابطه زیر بدست آورد.

$$\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} = \int_0^1 A(\Psi(s, Q_L, Q_R)) \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds \quad (34)$$

این انتگرال را می‌توان به راحتی و با استفاده از روش انتگرال‌گیری گوس-کوادرچر محاسبه کرد. در تحقیق حاضر از یک روش گوس-کوادرچر پنج نقطه‌ای استفاده شده است.

۴-۲- انتخاب گام زمانی و شبکه محاسباتی

مطابق قضیه لکس-فردریکس یک روش عددی بکار رفته برای حل عددی سیستم معادلات بقایی به حل ضعیف مسأله همگرا می‌شود اگر و فقط اگر روش مورد نظر پایدار باشد و فرم گسسته معادلات با معادلات اصلی سازگار باشد. مطابق این قضیه شرط همگرایی یک روش عددی سازگاری و پایداری آن روش است. هر روش عددی یک شرط پایداری دارد که به صورت شرط CFL بیان می‌شود. به منظور تعیین شبکه محاسباتی از شرط همگرایی روش عددی بکار رفته استفاده می‌شود. شرط پایداری همه روش‌های عددی بکار رفته در تحقیق حاضر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$0 < CFL = |\lambda_{max}| \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (35)$$

که در رابطه فوق λ_{max} بزرگترین مقدار ویژه سیستم در تمام ناحیه محاسباتی است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|\lambda_{max}| = \max_j \{ \max_k |\lambda_j^k| \} \quad (36)$$

در رابطه بالا N_{eq} تعداد معادلات و M تعداد سلول‌های محاسباتی می‌باشد. با انتخاب Δx و CFL ، گام زمانی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{|\lambda_{max}|} \quad (37)$$

بنابراین با محاسبه درست گام زمانی می‌توان از همگرایی روش عددی بکار رفته اطمینان حاصل کرد.

۵- نتایج حل عددی

در این بخش نتایج حل عددی دو مسأله معروف در مسائل دوفازی که با استفاده از روش‌های ذکر شده حل شده‌اند، ارائه می‌شوند. ابتدا مسأله شیر آب حل می‌شود و سپس مسأله لوله ضربه با سرعت نسبی بزرگ بررسی می‌شود.

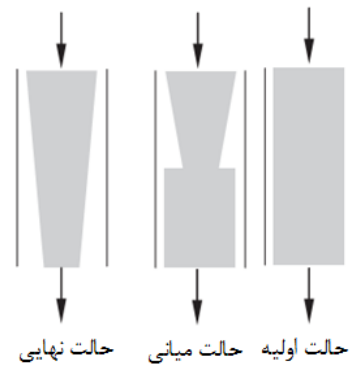
۵-۱- مسأله شیر آب

مسأله شیر آب توسط رنسم [۱۷] بیان شده‌است. یک لوله قائم به طول ۱۲ متر و قطر ۱ متر در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱). از بالای لوله، آب با چگالی 1000 kg/m^3 و با کسر حجمی 0.18 به‌طور یکنواخت و با سرعت 10 m/s وارد می‌شود. در اطراف آب، هوا با چگالی 1 kg/m^3 با سرعت صفر قرار دارد.

در قسمت الف این شکل کسر حجمی فاز گاز با کسر حجمی بدست آمده از حل تحلیلی مقایسه شده است. ملاحظه می‌شود که نتایج بدست آمده از مدل تک‌فشاری در مقایسه با نتایج مدل دوفشاری خطای کمتری نسبت به حل تحلیلی دارد. در حقیقت مدل دوفشاری باعث پخش بیشتر جواب‌ها در میدان حل شده‌است. در قسمت‌های ب و ج شکل ۲ به ترتیب سرعت فازهای مایع و گاز، ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که با استفاده از شبکه‌های بکار رفته جواب‌های دقیقی بدست آمده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که روش لکس-فردریکس در محل ناپیوستگی‌های میدان جریان دچار نوسان نشده است. علت این امر این است که این روش دارای دقت مرتبه یک مکانی و زمانی است بنابراین ماهیت پخشی دارد. توزیع فشار در قسمت د شکل ۲ ارائه شده است. به عقیده بسیاری از محققان فشار حساس‌ترین پارامتر در مسأله شیر آب است [۹]. بنابراین به‌منظور اطمینان از صحت نتایج بدست آمده، لازم است این نتایج با توزیع فشار ارائه شده توسط سایر محققان مقایسه شود. لذا در این شکل، توزیع فشار حاصل از روش لکس-فردریکس با نتایج ارائه شده در مرجع [۹] مقایسه شده است. برای مقایسه جواب‌های مدل تک‌فشاری از نتایج روش فرس استفاده شده است. علت انتخاب روش فرس به‌عنوان مبنای مقایسه این است که در میان روش‌های مرکزی موجود، به‌عنوان بهترین روش شناخته شده است [۱۸]. همان‌گونه که در این شکل نیز مشخص است توزیع فشار بدست آمده با دقت قابل قبولی با نتایج روش فرس مطابقت دارد. علاوه بر این برای مقایسه نتایج مدل دوفشاری از نتایج روش رو مرتبه اول مرجع [۹] استفاده شده‌است. ملاحظه می‌شود که نتایج تحقیق حاضر با توزیع فشار ارائه شده در این مرجع مطابقت خوبی دارند. بنابراین می‌توان از صحت توزیع فشار بدست آمده از هر دو مدل اطمینان حاصل کرد. خاطر نشان می‌شود که چنین توزیع فشاری در مراجع [۱۹، ۹، ۵، ۳] با استفاده از روش‌های عددی مختلف نیز ارائه شده است. نکته قابل توجه در این بخش این است که مدل دوفشاری خاصیت پخش ذاتی دارد.

۵-۲-۲- نتایج روش بقایی در امتداد مسیر لکس-وندروف

نتایج حل عددی مدل چهار معادله‌ای با استفاده از روش لکس-وندروف و بکارگیری دو شبکه ۵۰۰۰ و ۶۰۰۰ سلولی و نتایج مدل دوفشاری (پنج معادله‌ای) با استفاده از دو شبکه ۱۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلولی بدست آمده‌اند.



شکل ۱ نمای کلی مسأله شیر آب

فشار در خروجی لوله 10^5 Pa می‌باشد. شرط اولیه با شرط مرزی ورودی یکسان در نظر گرفته می‌شود.

رابطه‌ای جبری برای سرعت مایع و کسر حجمی مایع برای مسأله شیر آب توسط اوجه و فلاتن [۵] به‌صورت (۳۸) و (۳۹) بیان شده است:

$$u_l = \begin{cases} \sqrt{(u_l^0)^2 + 2gx} & \text{برای } x < u_l^0 t + \frac{1}{2} g t^2 \\ u_l^0 + gt & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (38)$$

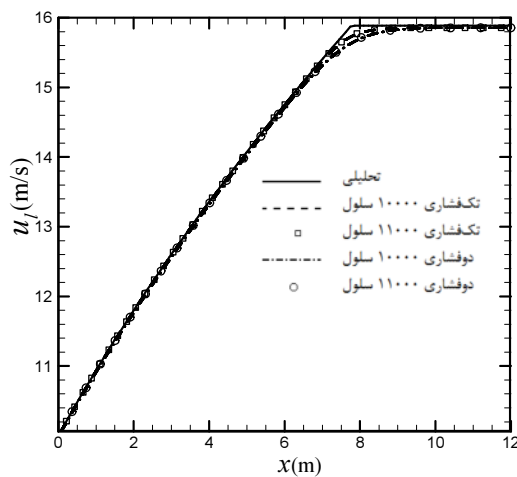
$$\alpha_l = \begin{cases} \frac{\alpha_l^0 u_l^0}{\sqrt{(u_l^0)^2 + 2gx}} & \text{برای } x < u_l^0 t + \frac{gt^2}{2} \\ \alpha_{l,0} & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (39)$$

۵-۲- نتایج حل عددی مسأله شیر آب

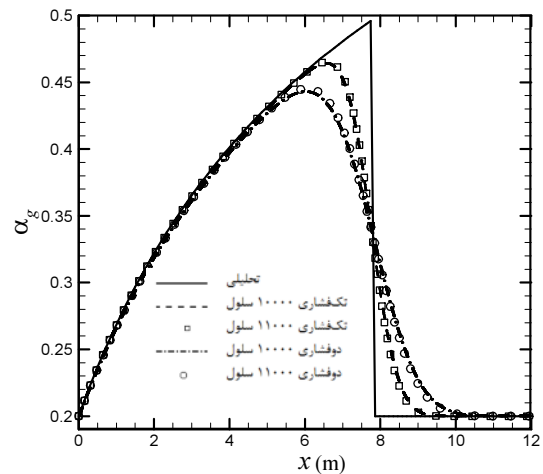
در این بخش نتایج حل مسأله شیر آب در زمان $t=0.6s$ با استفاده از روش‌های مرکزی ذکر شده ارائه می‌شود.

۵-۲-۱- نتایج روش بقایی در امتداد مسیر لکس-فردریکس

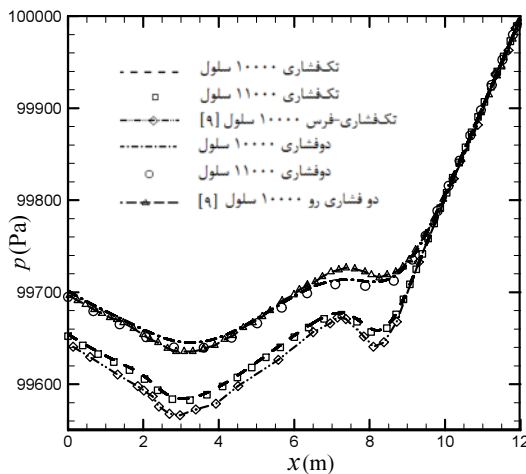
در این بخش نتایج حل مدل‌های چهار و پنج معادله‌ای با استفاده از روش لکس-فردریکس ارائه می‌شود. در شکل ۲، نتایج حاصل از حل این مدل‌ها با استفاده از روش بقایی در امتداد مسیر لکس-فردریکس، برای دو شبکه محاسباتی ۱۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلولی ارائه شده‌است. ملاحظه می‌شود که نتایج حاصل از این دو شبکه برای هر دو مدل با تقریب قابل قبولی بر هم منطبق می‌باشند. بنابراین می‌توان گفت که با استفاده از ۱۰۰۰۰ سلول محاسباتی جواب‌های مستقل از شبکه بدست آمده است.



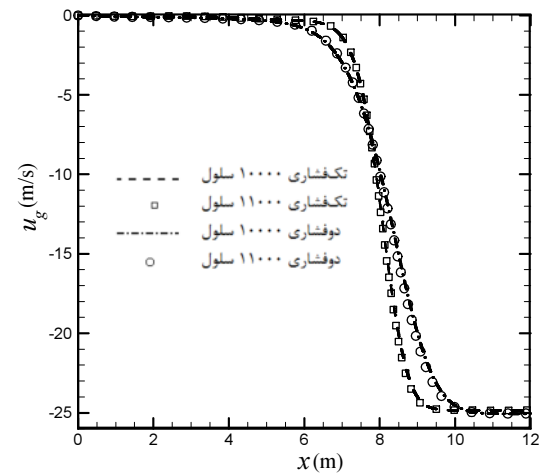
ب- سرعت فاز مایع



الف- کسر حجمی



د- فشار



ج- سرعت فاز گاز

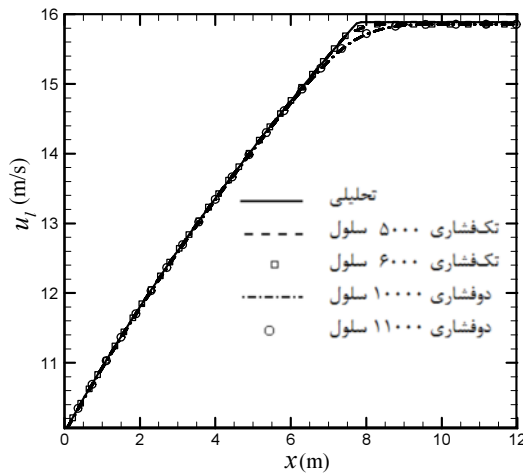
شکل ۲ حل مسأله شیر آب با استفاده از مدل‌های تک‌فشاری و دو فشاری و روش بقایی در امتداد مسیر لکس-فردریکس

نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که هر دو مدل به‌خوبی توانسته‌اند سرعت فاز مایع را با دقت بالایی پیش‌بینی کنند و خطای اندکی با حل تحلیلی دارند. همچنین مدل چهار معادله‌ای سرعت فاز گاز را با دقت بالاتری پیش‌بینی نموده است که علت آن خطای ناشی از پخش ذاتی مدل پنج معادله‌ای است.

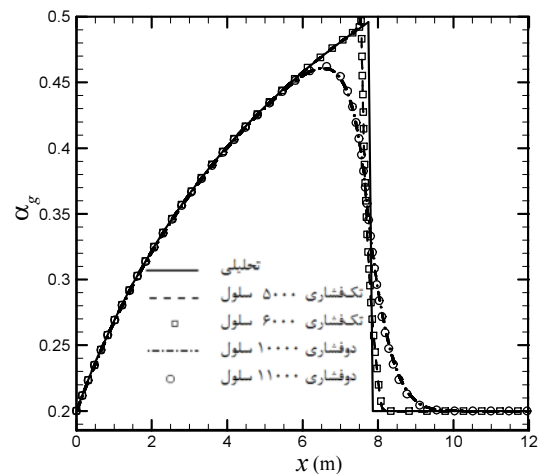
به‌منظور اعتبار سنجی توزیع فشار بدست آمده، از نتایج روش رو مرتبه دوم مرجع [۹] استفاده شده است. در بخش د شکل ۳ با مقایسه نتایج مدل چهار معادله‌ای با استفاده از ۱۶۰۰ سلول محاسباتی با نتایج روش رو مرتبه دوم با همین تعداد سلول ملاحظه می‌شود که روش لکس-وندروف به‌خوبی توانسته است توزیع فشار را پیش‌بینی کند.

در شکل ۳ نتایج بدست آمده از هر دو مدل ارائه و با هم مقایسه شده‌اند. در بخش الف این شکل کسر حجمی فاز گاز ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که مدل چهار معادله‌ای در مقایسه با مدل پنج معادله‌ای با تعداد سلول‌های کمتر جواب‌های دقیق‌تری ارائه کرده است ولی در محل ناپیوستگی میدان جریان مدل چهار معادله‌ای دچار نوسان شده ولی مدل پنج معادله‌ای جواب‌های کاملاً همواری ارائه کرده است. علت این امر این است که روش لکس-وندروف، دارای دقت زمانی و مکانی مرتبه دوم می‌باشد، بنابراین قادر به میرا کردن نوسانات عددی نیست. از طرفی مدل پنج معادله‌ای خاصیت پخش ذاتی دارد بنابراین تا اندازه‌ای می‌تواند نوسانات ناشی از روش حل عددی را میرا کند.

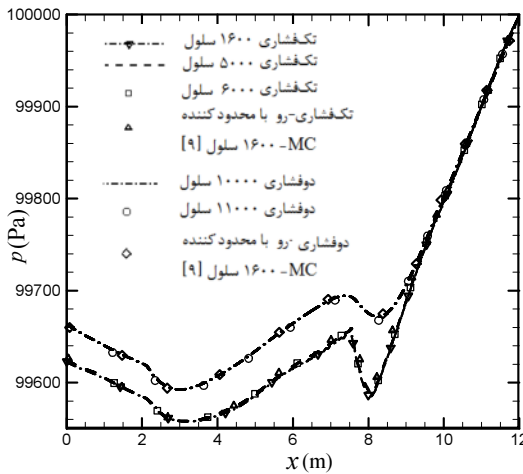
در بخش ب و ج شکل ۳ به‌ترتیب سرعت فاز مایع و فاز گاز



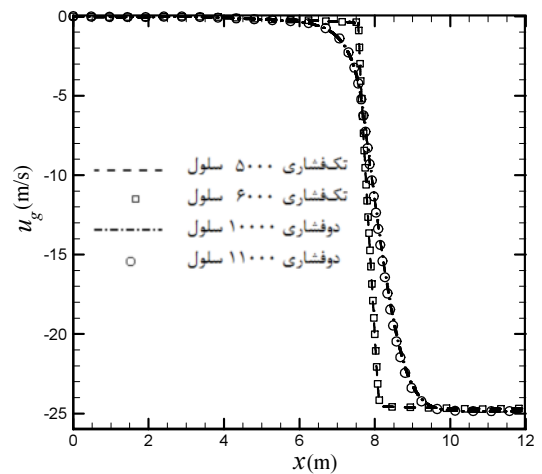
ب- سرعت فاز مایع



الف- کسر حجمی



د- فشار



ج- سرعت فاز گاز

شکل ۳ حل مسأله شیر آب با استفاده از مدل‌های چهار و پنج معادله‌ای و روش بقایی در امتداد مسیر لکس-وندروف

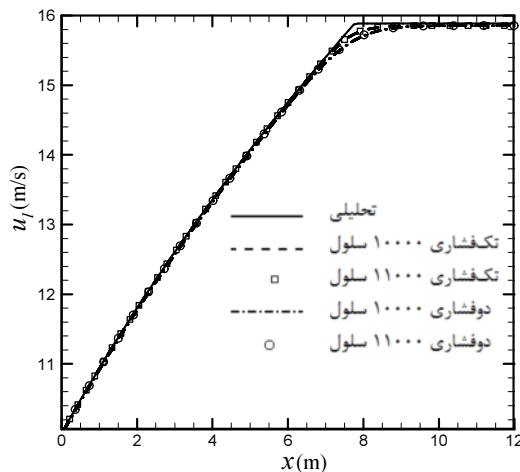
در بخش د شکل ۴ توزیع فشار بدست آمده از حل مدل چهار معادله‌ای با استفاده از روش روزانوف با توزیع فشار روش فرس که در مرجع [۹] ارائه شده، مقایسه شده است. ملاحظه می‌شود که تطابق بسیار خوبی بین نتایج تحقیق حاضر با نتایج روش فرس وجود دارد.

همچنین با مقایسه نتایج حل مدل پنج معادله‌ای با استفاده از روش روزانوف با نتایج حل همین مدل توسط روش روزانوف مرجع [۹] ملاحظه می‌شود که نتیجه تحقیق حاضر بر نتایج این مرجع منطبق شده است بنابراین می‌توان از صحت نتایج بدست آمده اطمینان حاصل نمود. لازم به ذکر است که بحث جامعی در ارتباط با آنالیز خطای و نرخ همگرایی روش‌های عددی بکار رفته در پیوست ۱ ارائه شده است.

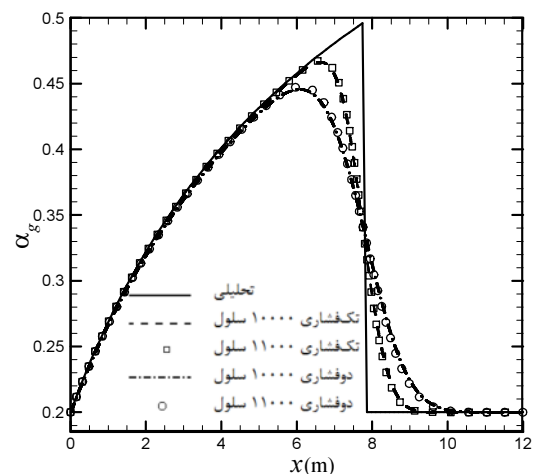
علاوه بر این در همین بخش از این شکل نتایج حل مدل پنج معادله‌ای با استفاده از روش لکس-وندروف با نتایج روش روزانوف دوم با استفاده از ۱۰۰۰۰ سلول مقایسه و مطابقت خوبی مشاهده شده است. علت استفاده از روش روزانوف دوم به‌عنوان مبنای مقایسه این است که روش لکس-وندروف نیز یک روش مرتبه دوم می‌باشد.

۵-۲-۳- نتایج روش بقایی در امتداد مسیر روزانوف

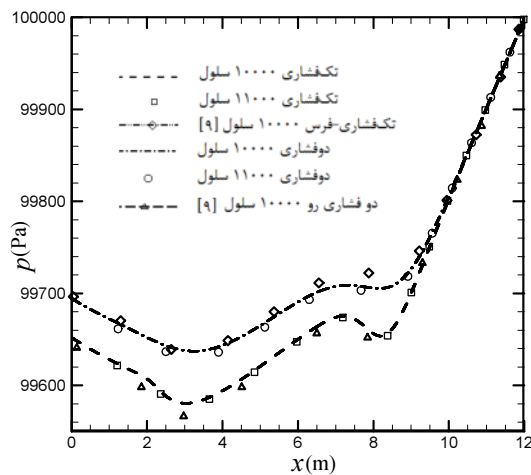
نتایج حل عددی مدل‌های چهار و پنج معادله‌ای با استفاده از روش روزانوف و با بکارگیری دو شبکه ۱۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلولی در شکل ۴ ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که نتایج این دو شبکه برای هر دو مدل کاملاً بر هم منطبق هستند.



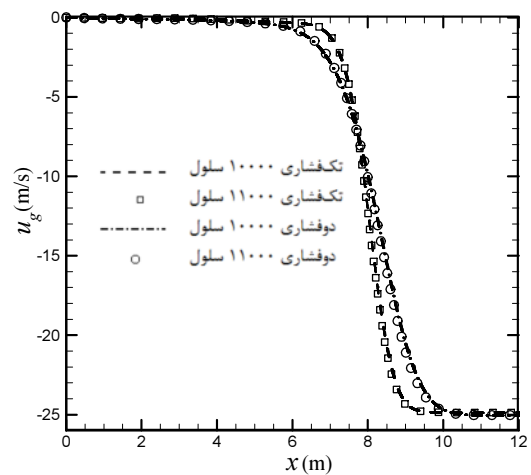
ب- سرعت فاز مایع



الف- کسر حجمی



د- فشار



ج- سرعت فاز گاز

شکل ۴ حل مسأله شیر آب با استفاده از مدل‌های چهار و پنج معادله‌ای و روش بقایی در امتداد مسیر روزانوف

۵-۴- نتایج حل عددی

۵-۴-۱- مدل تک فشاری

نتایج حل در زمان $t=0.1$ s و با استفاده از سه شبکه با ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلول محاسباتی ارائه شده‌اند. برای رعایت اختصار فقط نمودار سرعت فاز گاز ارائه می‌شود.

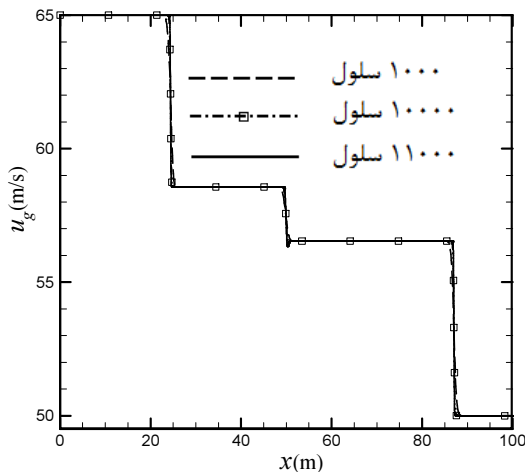
با حل معادلات حاکم بر مدل چهار معادله‌ای و با استفاده از روش‌های بقایی در امتداد مسیر لکس- فردریکس، لکس- وندروف و روزانوف، تغییرات سرعت فاز گاز در امتداد لوله محاسبه شد. در شکل ۵ نتایج حاصل از روش لکس- فردریکس با بکارگیری سه شبکه ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلولی نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که نتایج دو شبکه ۱۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلولی کاملاً بر هم منطبق می‌باشند. بنابراین می‌توان گفت که نتایج بدست آمده مستقل از شبکه بکار رفته می‌باشد.

۵-۳- لوله ضربه با سرعت نسبی بزرگ

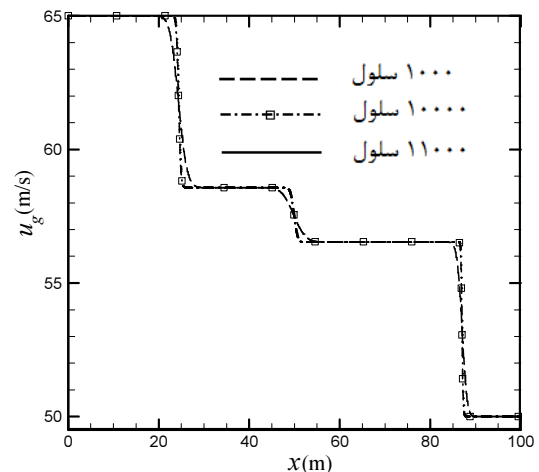
برای این مسئله، یک لوله افقی به طول ۱۰۰ متر با یک دیافراگم در مکان ۵۰ متری در نظر گرفته می‌شود. شرایط اولیه جریان در سمت چپ و راست جریان در رابطه (۴۰) ذکر شده است.

$$Q_L = \begin{pmatrix} p(\text{kPa}) \\ \alpha_g \\ u_g(\text{m/s}) \\ u_l(\text{m/s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265 \\ 0.29 \\ 65 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_R = \begin{pmatrix} p(\text{kPa}) \\ \alpha_g \\ u_g(\text{m/s}) \\ u_l(\text{m/s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265 \\ 0.3 \\ 50 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (40)$$



شکل ۷ تغییرات سرعت فاز گاز با استفاده از مدل چهار معادله‌ای و روش لکس-وندروف با لزجت مصنوعی



شکل ۵ تغییرات سرعت فاز گاز با استفاده از مدل چهار معادله‌ای و روش لکس-فردریکس

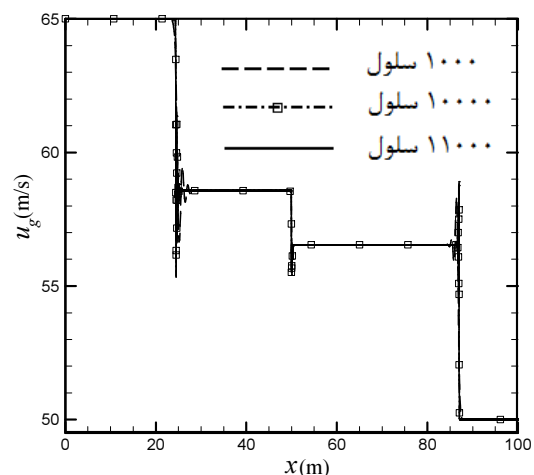
نتایج حاصل از حل مدل چهار معادله‌ای با استفاده از روش روزانوف در شکل ۸ برای سه شبکه محاسباتی مختلف نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که نتایج دو شبکه ۱۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلولی کاملاً بر هم منطبق هستند. همچنین نتایج بدست آمده نشان‌دهنده ماهیت پخشی روش روزانوف می‌باشد.

۵-۴-۲- مدل دوفشاری

معادلات حاکم بر مدل پنج معادله‌ای با استفاده از روش بقایی در امتداد مسیر لکس-فردریکس حل شده است که نتایج آن با استفاده از سه شبکه محاسباتی مختلف شامل ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلول محاسباتی در شکل ۹ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که نتایج شبکه‌های ۱۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلولی کاملاً بر هم منطبق هستند بنابراین می‌توان از مستقل بودن حل از شبکه اطمینان حاصل کرد. علاوه بر این ملاحظه می‌شود که این روش به خوبی توانسته است محل ناپیوستگی‌های میدان جریان را پیش‌بینی کند.

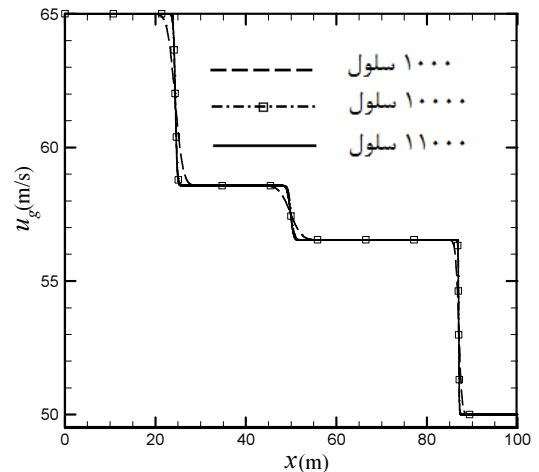
در شکل ۱۰ نتایج حل مدل دو فشاری با استفاده از روش مرتبه دوم لکس-وندروف ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که حل عددی در محل ناپیوستگی‌های میدان جریان دچار نوسان شده است ولی در مقایسه با جواب‌های متناظر مدل چهار معادله‌ای دامنه نوسانات کمتر است. علت این امر ماهیت پخشی مدل پنج معادله‌ای است. برای رفع مشکل نوسان عددی روش لکس-وندروف، لزجت مصنوعی به حل عددی اضافه شد که نتایج آن در شکل ۱۱ با استفاده از سه شبکه محاسباتی مختلف نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که نوسانات عددی روش لکس-وندروف با استفاده از این روش میرا شده است.

در شکل ۶ سرعت محاسبه شده فاز گاز با استفاده از روش لکس-وندروف نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که جواب‌های ارائه شده توسط این روش در محل ناپیوستگی‌های میدان حل دچار نوسان می‌شوند. علت این امر این است که روش لکس-وندروف روشی مرتبه دوم است و قادر به میرا کردن نوسانات در محل ناپیوستگی‌های میدان جریان نیست. برای رفع این مشکل به معادلات گسسته شده، لزجت مصنوعی مرتبه دوم اضافه شد که نتایج بدست آمده از این تغییر در شکل ۷ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با این روش نوسانات میدان جریان به خوبی میرا شده‌اند.

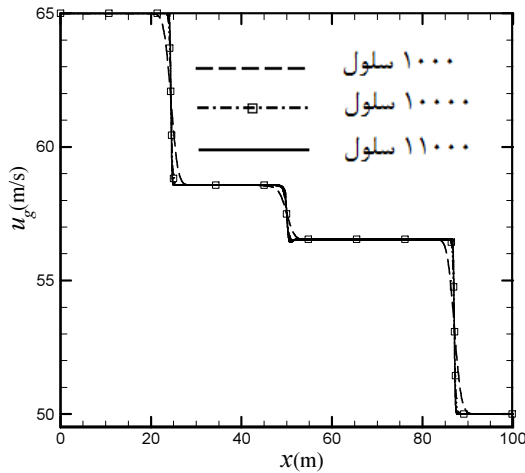


شکل ۶ تغییرات سرعت فاز گاز با استفاده از مدل چهار معادله‌ای و روش لکس-وندروف

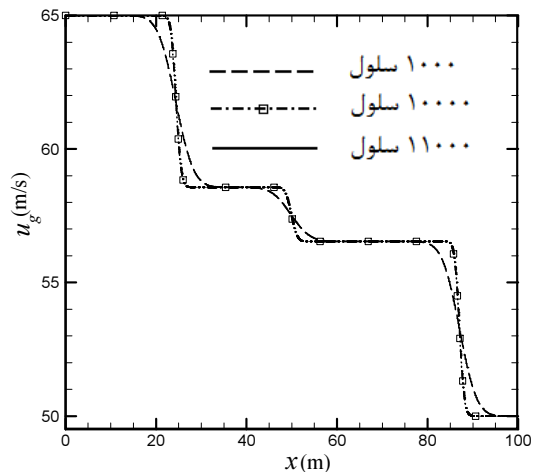
نتایج حل مدل پنج معادله‌ای با استفاده از روش روزانوف در شکل ۱۲ نشان داده شده‌است. همانند همه روش‌های قبلی از سه شبکه محاسباتی ۱۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلولی استفاده شده است. ملاحظه می‌شود که نتایج دو شبکه ۱۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰ سلولی کاملاً بر هم منطبق هستند بنابراین می‌توان گفت که حل بدست آمده متأثر از شبکه بکار رفته نیست. علاوه بر این، روش روزانوف به‌خوبی توانسته است محل ناپیوستگی‌های میدان جریان را پیش‌بینی کند.



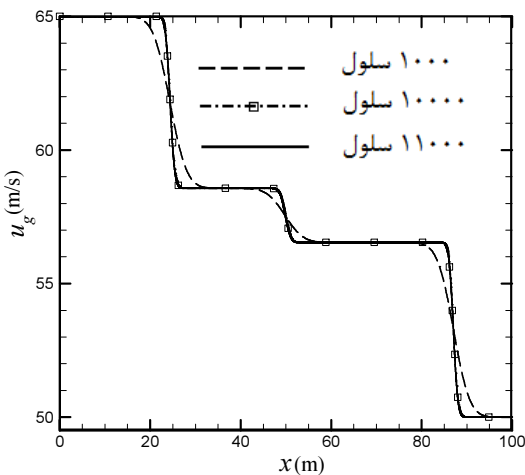
شکل ۸ تغییرات سرعت فاز گاز با استفاده از مدل چهار معادله‌ای و روش روزانوف



شکل ۱۱ تغییرات سرعت فاز گاز با استفاده از مدل پنج معادله‌ای و روش لکس-وندروف با لزجت مصنوعی



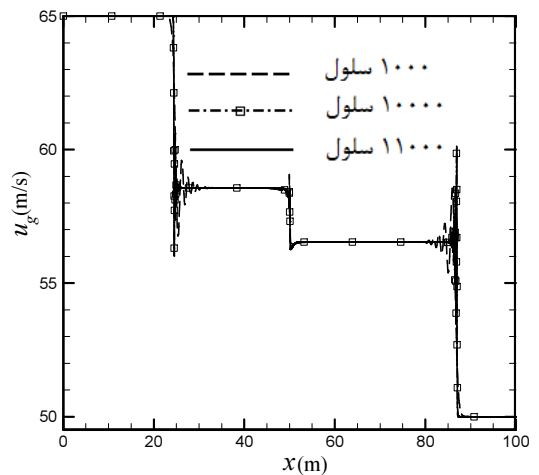
شکل ۹ تغییرات سرعت فاز گاز با استفاده از مدل پنج معادله‌ای و روش لکس-فردریکس



شکل ۱۲ تغییرات سرعت فاز گاز با استفاده از مدل پنج معادله‌ای و روش روزانوف

۶- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر پس از معرفی معادلات حاکم بر مدل‌های دوسیالی چهار و پنج معادله‌ای، مقادیر ویژه این معادلات



شکل ۱۰ تغییرات سرعت فاز گاز با استفاده از مدل پنج معادله‌ای و روش لکس-وندروف

کلاسیک گسسته‌سازی عبارات‌های غیربقایی، این روش‌ها باعث ایجاد نوسان و یا پخش اضافی ناشی از گسسته‌سازی عبارت غیربقایی نمی‌شوند و در نتیجه این امر باعث افزایش دقت محاسباتی می‌شود ولی مقدار دقیق افزایش دقت به مسئله تحت بررسی وابسته است.

۷- پیوست - آنالیز خطا و نرخ همگرایی

در این بخش مقیاس^۱ خطا و نرخ همگرایی روش‌های عددی بکار رفته با استفاده از تعداد سلول‌های محاسباتی مختلف ارائه می‌شود. اگر متغیر فیزیکی Q با مقدار عددی q تقریب زده شود آنگاه می‌توان خطای این تقریب را به صورت (۴۱) بیان کرد:

$$E = Q - q \quad (41)$$

برای بیان کمی مقدار خطا در ناحیه محاسباتی Ω غالباً از تعریف مقیاس مرتبه P به شکل رابطه (۴۲) استفاده می‌شود [۲۰]:

$$\|E\|_P = \left(\Delta x \sum_{i \in \Omega} |E_i|^P \right)^{\frac{1}{P}} \quad (42)$$

برای قوانین بقا معمولاً از مقیاس خطای مرتبه ۱ استفاده می‌شود. یک روش عددی دارای دقت مرتبه n مکانی می‌باشد اگر رابطه (۴۳) برقرار باشد:

$$\|E\| = O(\Delta x^n) \quad \text{as} \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad (43)$$

اگر فرض شود که بتوان مقیاس خطا را به صورت (۴۴) نوشت:

$$\|E\| = \gamma(\Delta x^n) \quad (44)$$

که در آن γ یک ثابت می‌باشد، آنگاه مرتبه همگرایی یک روش عددی میان دو شبکه با دو فاصله مکانی متفاوت Δx_1 و Δx_2 را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$n = \frac{\ln [\|E(\Delta x_2)\| / \|E(\Delta x_1)\|]}{\ln [\Delta x_2 / \Delta x_1]} \quad (45)$$

همگرایی روش‌های عددی مختلف با ریز کردن متوالی شبکه با استفاده از مقیاس خطای مرتبه ۱ کسر حجمی مورد بررسی قرار گرفت. این مقیاس برای مسأله شیر آب با استفاده از تعریف زیر محاسبه شده است:

$$E = \alpha_g - \alpha_{g,ref} \quad (46)$$

مقدار کسر حجمی مرجع $\alpha_{g,ref}$ در هر موقعیت مکانی برابر با مقدار کسر حجمی محاسبه شده با استفاده از شبکه ۱۰۰۰۰ سلولی انتخاب شده است.

محاسبه شد. به دلیل حضور عبارات غیربقایی در این معادلات، نمی‌توان سیستم معادلات را به صورت بقایی نوشت. بنابراین استفاده از روش‌های کلاسیک حل مسائل هایپربولیک به دلیل عدم برقرار بودن شرط کلاسیک رنگین-هوگونیوت با مشکل مواجه می‌شود. برای رفع این مشکل از مفهوم روش‌های بقایی در امتداد مسیر استفاده شد. به این منظور با تعریف یک چارچوب کلی، شکل بقایی در امتداد مسیر روش‌های لکس-فردریکس، لکس-وندروف و روزانوف ارائه گردید. از این روش‌ها برای حل عددی مسأله شیر آب و مسأله لوله ضربه با سرعت نسبی بزرگ استفاده شد.

با استفاده از شبکه‌های محاسباتی مختلف مستقل بودن حل از شبکه بررسی شد و با مقایسه نتایج بدست آمده با حل تحلیلی و نتایج ارائه شده توسط دیگر محققان، صحت نتایج ارائه شده بررسی شد. نتایج بدست آمده برای مسأله شیر آب نشان می‌دهد که روش لکس-وندروف محل وقوع ناپیوستگی میدان جریان را به خوبی پیش‌بینی می‌کند ولی در این نقاط دچار نوسان عددی کمی می‌شود. هر سه روش بکار رفته توانایی بالایی در تسخیر ناپیوستگی‌های میدان جریان دارند. در این میان روش لکس-وندروف نتایج دقیق‌تری ارائه کرده است. این موضوع با حل لوله ضربه با سرعت نسبی بزرگ نشان داده شد. روش‌های لکس-فردریکس و روزانوف پخش عددی زیادی از خود نشان می‌دهند و روش لکس-وندروف در محل ناپیوستگی‌ها دچار نوسان می‌شود. این مشکل روش لکس-وندروف با افزودن لزجت مصنوعی به حل برطرف گردید. نکته حائز اهمیت این است که نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که مدل پنج معادله‌ای علی‌رغم داشتن محدوده خوش رفتاری بسیار وسیع، داری پخش ذاتی می‌باشد و نسبت به مدل چهار معادله‌ای، غالباً نتایجی ارائه می‌کند که خطای پخش عددی بیشتری دارد. این ویژگی این مدل در برخی موارد باعث میرا شدن نوسانات عددی روش‌های مرتبه دوم می‌شود. این نتیجه با حل مسأله شیر آب با استفاده از روش لکس-وندروف حاصل شد. علاوه بر این با حل مسأله لوله ضربه با استفاده از مدل پنج معادله‌ای و با بکارگیری روش لکس-وندروف این نتیجه حاصل شد که پخش ذاتی این مدل نمی‌تواند باعث میرایی نوسانات شدید میدان حل شود. بنابراین برای رسیدن به حلی هموار استفاده از لزجت مصنوعی ضروری به نظر می‌رسد. همچنین در تحقیق حاضر نشان داده شده که روش‌های بقایی در امتداد مسیر به خوبی قادر هستند تا ناپیوستگی‌های موجود در میدان جریان را تسخیر نمایند. علاوه بر این در مقایسه با روش‌های

- Fluids*, Vol. 36, No. 6, 2007, pp. 1061-1080.
- [4] Saurel R., Abgrall R., "A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows", *Journal of Computational Physics*, Vol. 150, No. 2, 1999, pp. 425-467.
- [5] Evje S., Flatten T., "Hybrid Flux-Splitting Schemes for a Common Two-Fluid Model", *Journal of Computational Physics*, Vol. 192, 2003, pp. 175-210.
- [6] Toumi I., "A weak Formulation of Roe's Approximate Riemann Solver", *Journal of Computational Physics*, Vol. 102, 1999, pp. 360-373.
- [7] Omgba-Essama C., "Numerical Modelling of Transient Gas-Liquid Flows :Application to Stratified and Slug Flow Regimes", *PhD thesis*, Cranfield University, London, England, 2004.
- [8] Loilier P., "Numerical Simulation of Two-Phase Gas-Liquid Flows in Inclined and Vertical Pipelines", *PhD thesis*, Cranfield University, London, England, 2006.
- [9] Munkejord S.T., "Analysis of the Two-Fluid Model and the Drift-Flux Model for Numerical Calculation of Two-Phase Flow", *PhD thesis*, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway, 2005.
- [10] Shokri V., "Numerical Modeling of Two-Phase Stratified Flows and its Application to Slug Flowregime with Well-Posed Model", *PhD Thesis*, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran, 2010.
- [11] Pares C., "Numerical Methods for Nonconservative Hyperbolic Systems: A Theoretical Framework", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 44, 2006, pp. 300-321.
- [12] Castro M., LeFloch P. G., Muñoz-Ruiz M., Parés C., "Why Many Theories of Shock Waves are Necessary: Convergence Error in Formally Path-Consistent Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 17, 2008., pp. 8107-8129.
- [13] Dumbser M., Toro E.F., "A Simple Extension of the Osher Riemann Solver to Non-Conservative Hyperbolic Systems", *Journal of Scientific Computing*, Vol. 48, 2011, pp. 70-88.
- [14] Bestion D., "The Physical Closure Laws in the CATHARE Code", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 124, 1990, pp. 229-245.
- [15] Ransom V., Hicks V.L., "Hyperbolic Two-Pressure Model For Two-Phase Flow", *Journal of Computational Physics*, Vol. 53, 1984, pp. 124-151.
- [16] Dumbser M., *Advanced Numerical Methods for Hyperbolic Equations and Applications*, Trento, in print, 2011,
- [17] Ransom, V., *Numerical Benchmark Tests*, Berlin: Hemishpere Publishing Corporation., Vol. 3. 1987.
- [18] Toro E.F., *Riemann Solvers and Numerical Methods For Fluid Dynamics*, 3rd Eddition, Manchester: Springer, 2005.
- [19] Evje S., Flatten T. "Hybrid Central-Upwind Schemes for Numerical Resolution of Two-Phase Flows", *ESIAM- Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, Vol. 29, No. 2, 2005, pp. 253-273.
- [20] Leveque R.J., *Finite volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2004.

با استفاده از تعاریف ذکر شده مرتبه همگرایی و مقیاس خطای مرتبه اول روش‌های عددی بکار رفته با استفاده از شبکه‌های مختلف محاسبه شده و نتایج آن در جدول ۲ برای مدل‌های تک‌فشاری و دو فشاری ارائه شده است. نتایج بدست آمده برای شبکه‌های ۱۰۰، ۲۰۰، ۴۰۰، ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ سلولی محاسبه شده‌اند. علت این انتخاب این است که مرکز سلول‌های محاسباتی این شبکه‌ها در مرکز سلول‌های متناظر شبکه ۱۰۰۰۰ سلولی قرار می‌گیرند.

جدول ۲ مقیاس خطا و نرخ همگرایی روش‌های عددی بکار رفته

روش	مدل تک‌فشاری		مدل دو فشاری	
	$\ E\ $	n	$\ E\ $	n
لکس-فردریکس	۰/۱۲	-	۰/۹۶۴۲۱۹	-
	۰/۰۶	۰/۳۲	۰/۷۷۳۷۲۷	۰/۱۹
	۰/۰۳	۰/۴۵	۰/۵۶۴۴۶۶	۰/۲۹
روزانوف	۰/۱۲	-	۰/۳۱۸۵۱۵	۰/۴۶
	۰/۰۶	۰/۲۶	۰/۷۳۷۹۶	۰/۲۲
	۰/۰۳	۰/۴۷	۰/۵۳۰۹۴	۰/۳۱
لکس-وندروف	۰/۱۲	-	۰/۲۹۶۱۶	۰/۴۱
	۰/۰۶	۰/۴۸	۰/۱۱۸۲۳۶	۰/۲۸
	۰/۰۳	۰/۷۴	۰/۶۵۵۵۸	۰/۳۹
	۰/۱۲	۱/۴۸	۰/۲۱۴۲۵	۰/۵۵

خاطر نشان می‌شود که برای مدل تک‌فشاری و روش لکس-وندروف از شبکه ۵۰۰۰ سلولی به‌عنوان شبکه مرجع استفاده شده است و از شبکه‌های ۱۰۰، ۲۰۰، ۵۰۰ و ۱۰۰۰ سلولی برای محاسبه مقیاس خطا استفاده شده است. ملاحظه می‌شود که هیچ‌یک از روش‌های ذکر شده، نرخ همگرایی متناظر با نرخ همگرایی مورد انتظار را ندارند. در مرجع [۹] نیز به چنین نکته‌ای اشاره شده‌است. علاوه بر این مدل نرخ همگرایی یک روش عددی برای مدل دو فشاری کمتر از مدل تک‌فشاری است. همچنین ملاحظه می‌شود که در تمامی روش‌های عددی بکار رفته مقیاس اول خطا با افزایش تعداد سلول‌های محاسباتی کاهش می‌یابد.

۸- مراجع

- [1] Ishii M., Hibiki T., *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*, West Lafayette, Springer, 2005.
- [2] Ishii M., *Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow*, Paris, Eyrolles, 1975.
- [3] Munkejord, S.T., "Comparison of Roe-Type Methods for Solving the Two-Fluid Model with and Without Pressure Relaxation", *Computer and*