



## روش مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزمن جهت مدل سازی جریان سیال غیر نیوتنی بر روی مرزهای منحنی

محمد هادی صداقت<sup>1</sup>، محمد محسن شاه مردان<sup>2\*</sup>، محسن نظری<sup>3</sup>، محمود نوروزی<sup>4</sup>

1- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

2- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

3- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

4- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

\* شاهرود، صندوق پستی 3619995161، mmsahmardan@shahroodut.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 22 شهریور 1392

پذیرش: 20 آذر 1392

ارائه در سایت: 30 شهریور 1393

کلید واژگان:

روش مرز غوطه ور

شبکه بولتزمن

مرز منحنی

سیال غیر نیوتنی

مدل توانی

در این مطالعه با استفاده از روش مرز غوطه‌ور شبکه بولتزمن به مدل سازی جریان سیال غیر نیوتنی با مدل توانی بر روی سطوح منحنی پرداخته شده است. از جمله ویژگی های این روش در مطالعه حاضر، می توان به صورت فشاری معادلات شبکه بولتزمن جهت مدل سازی مناسب گرادبان فشار در سیستم مورد مطالعه اشاره کرد. علاوه جهت اعمال شرط مرزی عدم لغزش در اطراف مرز جسم، روش مرز غوطه‌ور به صورت ضمنی به کار گرفته شده است. همچنین برای مدل سازی مناسب فیزیکی هندسه مورد مطالعه و همچنین اعمال خواص غیر نیوتنی سیال، پارامترهای تبدیل متغیرهای فیزیکی به متغیرهای روش شبکه بولتزمن معرفی شده است. در ابتدا توانایی این روش در مدل سازی سیال غیر نیوتنی با مدل توانی در اطراف استوانه دایروی در داخل کانال در محدوده  $5 \leq Re \leq 40$  بررسی شده است. در این راستا، میدان سرعت در کانال بررسی شده و ضریب درگ بدست آمده از حل عددی حاضر تطابق خوبی با نتایج تحقیقات پیشین از خود نشان می دهد. در ادامه به بررسی میدان جریان و ضریب درگ جریان سیال غیر نیوتنی با مدل توانی بر روی استوانه بیضوی در سه نسبت ابعادی  $\eta = 1, 1.5, 2$  پرداخته شده است. نتایج نشان می دهند که در مقایسه با نسبت ابعادی، عدد رینولدز تأثیر بیشتری بر کاهش میزان ضریب درگ بر روی سیلندر بیضوی داشته و تغییرات شاخص مدل توانی کمترین تأثیر را بر کاهش میزان ضریب درگ دارد.

## Immersed boundary - lattice Boltzmann method for modeling non-Newtonian fluid flow around curved boundaries

Mohammad Hadi Sedaghat, Mohammad Mohsen Shahmardan\*, Mohsen Nazari, Mahmood Norouzi

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran

\* P. O. B. 3619995161 Shahrood, Iran, mmsahmardan@shahroodut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 13 September 2013  
Accepted 11 December 2013  
Available Online 21 September 2014

**Keywords:**  
Immersed Boundary Method  
Lattice Boltzmann Method  
Curved Boundary  
Non-Newtonian Fluid  
Power-Law

### ABSTRACT

In this paper, the immersed boundary-lattice Boltzmann method has been employed to simulate non-Newtonian flow around curve boundaries. The pressure base lattice Boltzmann equations have been used to solve the Eulerian domain to estimate proper pressure gradient in the Poiseuille flow. In addition Immersed boundary method (IBM) utilizes a discrete set of force density is also used to represent the effect of boundary on flow domain. In addition to simulate the real physical dominate problem and study the right effects of non-Newtonian fluid properties, scaling parameters have been introduced to notice the relationship between physical and lattice variables. At First, the capability of present method is examined for simulating the power-law fluid flow around a confined circular cylinder and the results show good agreement with previous study. In the following, the power-law fluid flow around elliptical cylinder in a channel is investigated for three aspect ratios  $\eta = 1, 1.5, 2$  and for  $5 \leq Re \leq 40$ . Results show that, in comparison to aspect ratio, Reynolds number has greater effects on Drag reduction of elliptical cylinder. On the other hand power law index has the least effect on drag reduction.

### 1- مقدمه

مبدل های حرارتی با سطح مقطع های متفاوت مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. از جمله دشواری های حل این مسائل می توان به اعمال شبکه بندی های پیچیده در اطراف مرز منحنی جهت مدل سازی مناسب جریان و همچنین پیچیدگی در اعمال شرط مرزی اشاره کرد. روش های عددی موجود برای حل اینگونه مسائل به دو دسته کلی

مدل سازی جریان سیال بر روی سطوح منحنی از مباحث جالب توجه در علم مکانیک سیالات محاسباتی به شمار می رود. بررسی حرکت یک جسم غوطه‌ور با مرز منحنی در سیال در مواردی همچون فرایند رسوب گذاری ذرات، انتقال دارو در رگ های خونی و همچنین مدل سازی جریان سیال بر روی لوله های

Please cite this article using:

M.H. Sedaghat, M.M. Shahmardan, M. Nazari, M. Norouzi, Immersed boundary - lattice Boltzmann method for modeling non-Newtonian fluid flow around curved boundaries, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 8, pp. 146-156, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

کانال‌گردان فشار در راستای طول کانال ثابت است (فشار رابطه خطی با طول کانال دارد) همچنین در روش شبکه بولتزمن، جهت در نظر گرفتن سیال به عنوان گاز ایده‌آل فشار یک رابطه خطی با چگالی دارد، این بدان معنی است که چگالی هم باید همانند فشار در طول کانال به صورت خطی تغییر کند که با فرض غیر قابل تراکم بودن سیال متناقض است. بنابراین، بنابراین روش‌های گذشته به درستی نمی‌توانستند سیستم‌هایی که عامل حرکت سیال در آن‌ها گردان فشار می‌باشد را به درستی مدل کنند [16]. حتی اعمال شرط مرزی گردان فشار نیز با مشکلاتی روبرو می‌شود. جهت رفع این مشکلات هی و لو [16] از تابع توزیع فشار به جای توزیع جریان (که در مدل‌های گذشته رواج داشت)، استفاده کردند و معادلات خود را بر اساس تابع توزیع فشار ارائه دادند. با رواج بیشتر روش شبکه بولتزمن و توانایی مطلوب آن در مدل‌سازی جریان سیال در اطراف سطوح منحنی، مدل‌سازی جریان سیال با استفاده از این روش رواج یافت [18,17].

برای استفاده از مزایای روش مرز غوطه‌ور برای مدل‌سازی جریان در اطراف اجسام با مرزهای پیچیده، روش شبکه بولتزمن در ترکیب با روش مرز غوطه‌ور جهت سهولت در اعمال شرط مرزی مناسب در مرز بین سیال و جامد مورد استفاده قرار گرفت و روش مرز غوطه‌ور شبکه بولتزمن<sup>6</sup> ارائه شد [7]. از جمله موارد مهم جهت مدل‌سازی مناسب جریان در این روش که می‌بایست مورد توجه قرار گیرد، محاسبه نیروی اعمالی از طرف جسم صلب به سیال می‌باشد. به طور کلی سه روش پناستی<sup>7</sup> [19] اعمال مستقیم<sup>8</sup> [20] و تغییرات تکانه<sup>9</sup> [21] برای محاسبه این نیرو مطرح شده است. تفاوت در این روش‌ها به محاسبه نیروی اعمالی از جسم غوطه‌ور به سیال برمیگردد.

فنگ و میخائیلیدز [19] اولین مدل روش مرز غوطه‌ور شبکه بولتزمن را پیشنهاد کردند. روش ترکیبی فنگ و میخائیلیدز اکثر خواص مطلوب روش‌های جسم غوطه‌ور و روش شبکه بولتزمن را در برداشت. این روش از یک شبکه اویلری معمولی برای حوزه‌ی سیال (شبکه بولتزمن) و از یک شبکه لاگرانژی برای دنبال کردن ذرات (جسم غوطه‌ور) استفاده می‌کند. آنها برای معتبرسازی روش خود، مهاجرت ذرات جامد شناور در یک جریان برشی ساده و همچنین جریان روی دو ذره مدور ساکن در یک کانال و نیز رسوب‌سازی تعداد زیادی ذره مدور در یک محوطه را شبیه‌سازی نموده و نتایج قابل قبولی به‌دست آوردند و ادعا کردند که روش مذکور یک روش نیرومند در حل مسائل برهم‌کنش ذره-سیال با تعداد زیاد ذره است و در مقایسه با روش شبکه بولتزمن معمولی، روش دقیق‌تری برای اعمال شرط مرزی بر روی مرز سیال-جامد است. این روش نه تنها مرزها را هموارتر از روش شبکه بولتزمن نشان می‌دهد بلکه از نوسانات سرعت‌ها و نیروهای وارد بر ذره که در روش شبکه بولتزمن دیده می‌شود، جلوگیری می‌کند، و به طور کلی در حل مسائل با تغییر شکل ساختاری بسیار تواناست [19]. سرانجام این روش توسط وو و شو [7] بهبود یافت و آنها توانستند نیروهای وارد بر مرز غوطه‌ور از طرف سیال را به صورت ضمنی<sup>10</sup> محاسبه و اعمال کنند، که در واقع در هزینه و دقت محاسبات تأثیر چشمگیری دارد. آنها [7] حرکت یک ذره در جریان برشی معمولی و حرکت دو ذره در یک کانال را با استفاده از روش پیشنهادی خود شبیه‌سازی نمودند. بنابراین روش شبکه بولتزمن مرز غوطه‌ور ارائه شده توسط وو و شو [7] کاملترین روشی است که جهت مدل‌سازی جریان سیال نیوتنی در اطراف سطوح منحنی و بررسی جریان سیال در اطراف ذرات و اجسام دارای سطوح منحنی مورد توجه قرار گرفته است [7].

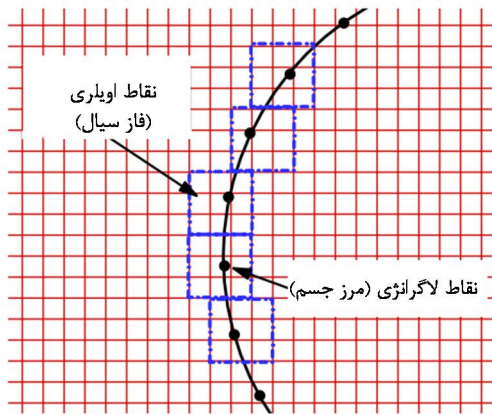
تقسیم می‌شوند: رویکرد شبکه متحرک<sup>1</sup> و رویکرد شبکه ثابت<sup>2</sup>. در رویکرد شبکه متحرک، دامنه محاسباتی مورد نظر بر روی جسم متحرک ثابت شده و با حرکت ذره در داخل سیال به هنگام می‌شود [1-3] در رویکرد شبکه ثابت، روش‌های مختلف عددی ارائه شده است [4-7]. از جمله روش‌های موجود در این رویکرد می‌توان به روش مرز غوطه‌ور اشاره کرد که اولین بار توسط پسکین [8] برای مدل‌سازی جریان خون در دریچه‌های قلب ارائه شد. برای مدل‌سازی مناسب جسم غوطه‌ور در این روش، از نقاط اویلری و لاگرانژی استفاده می‌گردد. نقاط اویلری جهت مدل‌سازی فاز سیال که در کل دامنه محاسباتی ثابت در نظر گرفته شده به کار گرفته می‌شوند. جهت مدل‌سازی صحیح در مرز جسم غوطه‌ور و اعمال شرط مرزی از نقاط لاگرانژی که بر روی مرز جسم در نظر گرفته می‌شوند، استفاده می‌گردد. در این روش جسم غوطه‌ور در سیال به عنوان یک جسم با مرز انعطاف پذیر ولی با صلیبیت بالا در نظر گرفته می‌شود. جریان سیال بر روی این جسم سبب تغییر شکلهای کوچک در مرز آن می‌گردد ولی تمایل جسم صلب در برگرداندن مرز به حالت اولیه باعث به وجود آمدن نیرویی در مرز بین سیال و جسم صلب می‌گردد. بنابراین پس از محاسبه این نیرو در نقاط لاگرانژی بر روی مرز جسم، میزان اثر این نیرو بر روی نقاط اویلری محاسبه می‌گردد تا اثرات ناشی از حضور جسم در سیال مدل‌سازی شود. بنابراین می‌بایست معادله ناویر-استوکس در حضور ترم نیرو<sup>3</sup> ناشی از حضور جسم صلب در سیال، در کل ناحیه محاسباتی حل شود [7]. ترکیب این روش با روش‌های عددی موجود به تدریج برای مدل‌سازی جریان سیال در اطراف سطوح منحنی مورد توجه قرار گرفت. فادلون و همکاران [9] روش تفاضل محدود مرز غوطه‌ور را برای مدل‌سازی جریان سیال در اطراف یک جسم صلب ارائه نمودند. همچنین اولمن [10] با بهبود روش مرز غوطه‌ور که توسط پسکین [8] ارائه شده بود، به بررسی جریان سیال در اطراف اجسام صلب دو بعدی و سه بعدی پرداخت. اخیراً روش جدید المان محدود مرز غوطه‌ور<sup>4</sup> که در واقع حالت توسعه یافته روش مرز غوطه‌ور می‌باشد، ارائه شده است [12,11].

در بیشتر مطالعات عددی موجود، معادله ناویر-استوکس با استفاده از روش‌های رایج در دینامیک سیالات محاسباتی مانند تفاضل محدود، المان محدود و حجم محدود گسسته‌سازی و حل شده است. اخیراً به جای گسسته-سازی و حل معادله ناویر-استوکس، از روش شبکه بولتزمن به عنوان یک طرح عددی مطلوب برای شبیه‌سازی جریان‌های سیال و مدل‌سازی فیزیک سیالات استفاده می‌گردد [13-15]. این روش برخلاف روش‌های رایج در دینامیک سیالات محاسباتی در مقیاس ماکروسکوپی، بر اساس مدل‌های مرسکویپیک استوار است. همچنین از جمله مزایای این روش در مقایسه با روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی می‌توان به پیاده‌سازی آسان، سهولت در محاسبات به دلیل وجود عملگرهای خطی و همچنین قابلیت موازی شدن اشاره کرد [15].

مزایای روش شبکه بولتزمن نسبت به سایر روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی موجب گردیده که این روش جهت مدل‌سازی جریان و بررسی انتقال حرارت مورد توجه قرار گیرد. در ابتدا مدلی با فرض جریان تراکم ناپذیر و با در نظر گرفتن تقریب BGK<sup>5</sup> جهت مدل‌سازی جریان ارائه گردید [14]. در سال 1997 هی و لو [16] مدل جدیدی از شبکه بولتزمن را جهت مدل‌سازی جریان تراکم ناپذیر درون کانال ارائه کرد. در جریان درون

6- LB-IBM  
7- Penalty Method  
8- Direct Forcing Scheme  
9- Momentum Exchange Method  
10- Implicit

1- Moving Mesh Method  
2- Fixed Mesh Method  
3- Force Term  
4- Immersed Finite Element Method  
5- Bhatnagar-Gross-Krook



شکل 1 شماتیکی از ناحیه محاسباتی در روش مرز غوطه‌ور

پس از توضیح کلی در مورد روش مرز غوطه‌ور، در ادامه به بررسی معادلات حاکم پرداخته می‌شود. در رابطه (1) معادلات حاکم برای جریان تراکم ناپذیر که از مدل توانی پیروی می‌کند، ارائه شده‌است. همان‌طور که قبلاً نیز ذکر شد، در روش مرز غوطه‌ور اثرات مرزهای جسم به صورت یک ترم نیروی اضافی به معادلات مومنتم اضافه می‌شود. بنابراین معادلات پیوستگی و مومنتم در مقیاس ماکروسکوپی به صورت معادلات (1) قابل بیان است:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1-الف)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \sigma + \vec{f} \quad (1-ب)$$

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \int_{\Gamma} \vec{F}(s, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}(s, t)) ds \quad (1-ج)$$

$$\frac{\partial \vec{X}(s, t)}{\partial t} = \vec{U}(\vec{X}(s, t), t) = \int_{\Omega} \vec{u}(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{X}(s, t)) d\vec{x} \quad (1-د)$$

در معادله (1)،  $\vec{u}$ ،  $p$ ،  $\vec{x}$ ،  $t$ ،  $\vec{F}$  به ترتیب زمان، مکان، فشار، سرعت و نیروی وارده بر میدان سیال به دلیل حضور جسم صلب در دستگاه مختصات اویلری می‌باشد. همچنین  $\rho$  نشان دهنده چگالی سیال می‌باشد. علاوه بر  $\vec{x}$ ،  $\vec{F}$  و  $\vec{u}$  به ترتیب نشانگر مکان، نیروی وارده به مرزها و سرعت نقاط لاگرانژی است. معادلات (1-الف) و (1-ب) معادلات ناویر-استوکس با وجود ترم نیروی اضافی به دلیل حضور جسم در سیال (در روش مرز غوطه‌ور) است و در ادامه شیوه محاسبه این نیرو ذکر می‌شود. برای اعمال روش مرز غوطه‌ور و ارتباط بین دو دستگاه مختصات اویلری و لاگرانژی، معادلات (1-ج) و (1-د) در نظر گرفته می‌شود. در واقع در معادله (1-ج) نیروهای مرزی محاسبه شده در مختصات لاگرانژی، توسط تابع دلتای دیراک  $(\delta(\vec{x} - \vec{X}(s, t)))$  به نیروهای وارد بر سیال در مختصات اویلری تبدیل می‌شود و در معادله (1-د) سرعت نودهای اویلری به نودهای لاگرانژی برازش می‌گردد. همچنین در معادله (1)،  $\sigma$  تانسور تنش بوده که از رابطه (2) قابل محاسبه است.

$$\sigma = 2\mu \varepsilon(\vec{u}) \quad (2)$$

در رابطه (2)،  $\varepsilon(\vec{u})$  تانسور نرخ برش بوده که مقدار آن از رابطه (3) محاسبه می‌شود.

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{(\nabla \vec{u}) + (\nabla \vec{u})^T}{2} \quad (3)$$

همچنین در رابطه (2)،  $\mu$  ویسکوزیته سیال بوده که در مدل توانی از رابطه (4) محاسبه می‌شود.

$$\mu = m \left( \frac{l_2}{2} \right)^{\frac{(n-1)}{2}} \quad (4)$$

از آنجا که بسیاری از سیالات موجود در محیط، همانند سیالات درشت مولکول (پلیمرها و یا مواد مذاب)، محلول‌های چند فازی و همچنین تعدادی از سیالات موجود در بدن انسان (مانند خون و مایع مخاطی درون نای و غیره) در گستره سیالات نیوتنی قرار نمی‌گیرند و خواص غیرنیوتنی را از خود نشان می‌دهند. بنابراین بررسی جریان سیال غیر نیوتنی در اطراف سطوح منحنی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. برای مثال راتو و همکاران [22]، سیواکومار و همکاران [23] و بهارتی و همکاران [24] به کمک نرم افزار فلونت به بررسی اثرات متفاوت جریان سیال غیرنیوتنی بر روی یک سیلندر بیضوی در محیط بینهایت پرداختند همچنین بهارتی و همکاران [25] به بررسی جریان سیال غیرنیوتنی در اطراف یک سیلندر دایروی در داخل کانال پرداختند و اثرات عدد رینولدز و خواص سیال غیر نیوتنی را بر روی جریان سیال و ضریب درگ بررسی کرده‌اند.

روش شبکه بولتزمن نیز برای مدل‌سازی جریان سیال غیرنیوتنی مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. سان [26] در سال 2005 به مدل‌سازی جریان خون (به عنوان یک سیال غیرنیوتنی) به روش شبکه بولتزمن پرداخت. کراولد [27] مدل کاریوسودا را برای سیال غیرنیوتنی در نظر گرفت و با استفاده از روش شبکه بولتزمن به بررسی سیال شبه پلاستیک پرداخت. همچنین گابانلی [28] به مدل‌سازی جریان توانی به روش شبکه بولتزمن پرداخت و نتایج را با حل تحلیلی مقایسه کرد.

در این تحقیق ابتدا روش مرز غوطه‌ور شبکه بولتزمن فشاری جهت بررسی جریان سیال غیرنیوتنی با مدل توانی درون کانال معرفی می‌شود. به‌علاوه برای مدل‌سازی مناسب فیزیکی و خواص غیر نیوتنی، روابط بین پارامترهای فیزیکی و پارامترهای موجود در روش شبکه بولتزمن معرفی می‌شود. پس از آن، نتایج برای جریان سیال غیر نیوتنی در اطراف یک استوانه دایروی در داخل کانال، معتبرسازی می‌گردد. در ادامه به بررسی جریان سیال غیر نیوتنی در اطراف یک استوانه دارای مقطع بیضوی در دو نسبت تناسب<sup>1</sup> در داخل کانال پرداخته می‌شود. در این مسأله به بررسی عدد رینولدز، خواص غیرنیوتنی سیال و همچنین اثرات نسبت تناسب جسم بر رژیم حاکم بر جریان سیال و نیز درگ ایجاد شده بر روی سیلندر پرداخته می‌شود.

## 2- معادلات حاکم

مطابق شکل 1، جسمی با مرز منحنی که در داخل فاز سیال قرار گرفته، در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، برای مدل‌سازی جریان به روش مرز غوطه‌ور نقاط اویلری در مختصات کارتزین در داخل فاز سیال و نقاط لاگرانژی بر روی مرز جسم غوطه‌ور، در ناحیه محاسباتی در نظر گرفته می‌شود. به‌علاوه نقاط لاگرانژی بر روی مرز جسم می‌توانند در هر زمان با جسم مورد نظر حرکت کنند. بنابراین در روش مرز غوطه‌ور، ابتدا معادلات مومنتم و پیوستگی، بدون در نظر گرفتن جسم غوطه‌ور، توسط یکی از روش‌های مرسوم عددی بر روی نقاط اویلری حل می‌شود. سپس با تعریف یک تابع دلتای دیراک<sup>2</sup> می‌توان سرعت نقاط اویلری محاسبه شده را بر روی نقاط لاگرانژی برازش کرد. اگر سرعت جسم بر روی مرز مشخص باشد، از اختلاف سرعت به دست آمده از برازش مقادیر نقاط اویلری بر نقاط لاگرانژی و سرعت واقعی جسم (در مرز)، می‌توان یک نیروی اضافی به صورت ترم نیرو به معادلات مومنتم اضافه کرد. حال معادلات برای نقاط اویلری تا زمانی که سرعت به دست آمده از برازش مذکور با سرعت واقعی جسم غوطه‌ور برابر شود، مجدداً حل می‌شود.

1- Aspect ratio  
2- Dirac delta function

با توجه به مزایای ذکر شده روش شبکه بولتزمن فشاری در مقایسه با روشهای متداول شبکه بولتزمن در مدل‌سازی جریان سیال غیر قابل تراکم درون کانال [16]، در این قسمت مدل فشاری شبکه بولتزمن جهت مدل‌سازی جریان سیال غیر نیوتنی (مدل جریان توانی) استفاده شده است. برای این منظور تابع توزیع فشاری و تابع توزیع تعادلی فشاری به ترتیب به صورت  $p_\alpha \equiv c_s^2 f_\alpha$  و  $p_\alpha^{eq} \equiv c_s^2 f_\alpha^{eq}$  تعریف می‌شود که  $f_\alpha$  و  $f_\alpha^{eq}$  به ترتیب تابع توزیع جریان و تابع توزیع تعادلی جریان می‌باشد [16]. با توجه به این تعاریف، فشار مرجع و فشار در شبکه بولتزمن به ترتیب با استفاده از رابطه (9) محاسبه می‌شوند:

$$P_0 = c_s^2 \rho_0, \quad P = c_s^2 \rho \quad (9)$$

همچنین برای ارائه مدل فشاری جریان تراکم ناپذیر در روش شبکه بولتزمن، چگالی سیال به صورت  $\rho = \rho_0 + \delta\rho$  تعریف می‌شود. در این تعریف  $\rho_0$  چگالی مرجع در شبکه و  $\delta\rho$  تغییرات چگالی را در شبکه نشان می‌دهد بطوریکه از مرتبه  $O(M^2)$  می‌باشد [16]. بنابراین معادلات فشاری روش شبکه بولتزمن برای سیال غیرنیوتنی در حضور جسم با مرز منحنی با استفاده از تعریف مذکور و جایگذاری رابطه (9) در معادلات شبکه بولتزمن که توسط گو و همکاران [29] (جهت حل معادله (1)) ارائه شده است، (با حذف جملات از مرتبه  $O(M^3)$ ) به صورت رابطه (10) قابل تعمیم است.

$$p_\alpha(\bar{x} + \bar{e}_\alpha \delta t, t + \delta t) - p_\alpha(\bar{x}, t) = -\frac{1}{\tau} (p_\alpha(\bar{x}, t) - p_\alpha^{eq}(\bar{x}, t)) + \bar{F}_\alpha \delta t$$

$$F_\alpha = \omega_\alpha P_0 \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) \left( \frac{\bar{e}_\alpha \cdot \bar{u}}{c_s^2} + \frac{\bar{e}_\alpha \cdot \bar{u}}{c_s^4} \bar{e}_\alpha \right) \cdot \bar{F} \quad (10)$$

در رابطه (10)،  $p_\alpha$  تابع توزیع فشاری و  $p_\alpha^{eq}$  تابع توزیع تعادلی فشاری در جهت  $\bar{e}_\alpha$  است. همچنین  $F_\alpha$  ترم نیرو در روش مرز غوطه‌ور شبکه بولتزمن به دلیل حضور جسم با مرز منحنی در سیال می‌باشد. تابع توزیع تعادلی فشاری ( $p_\alpha^{eq}$ ) به صورت رابطه (11) قابل تعریف است.

$$p_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \left\{ P + P_0 \left[ 1 + \frac{3(\bar{e}_\alpha \cdot \bar{u})}{c^2} + \frac{9(\bar{e}_\alpha \cdot \bar{u})^2}{2c^4} - \frac{3|\bar{u}|^2}{2c^2} \right] \right\} \quad (11)$$

همچنین زمان آسودگی ( $\tau$ ) در رابطه (10) مطابق با رابطه (12) تعریف می‌شود [16]:

$$\tau = \frac{v}{c_s^2 \delta t} + 0.5 \quad (12)$$

مؤلفه‌های گسسته سرعت برای مدل  $D_2Q_9$  (مدل دو بعدی شامل 9 سرعت) از رابطه (13) محاسبه می‌شود.

$$\bar{e}_\alpha = \begin{cases} [0, 0] & \alpha=0 \\ c[\cos(\frac{(\alpha-1)\pi}{2}), \sin(\frac{(\alpha-1)\pi}{2})] & \alpha=1-4 \\ \sqrt{2}c[\cos(\frac{(\alpha-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}), \sin(\frac{(\alpha-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{4})] & \alpha=5-8 \end{cases} \quad (13)$$

در رابطه (13)،  $c = \Delta x / \Delta t$  در شبکه بولتزمن می‌باشد. در روابط (10) و (11)،  $\omega_\alpha$  ضریب وزنی بوده که از رابطه (14) پیروی می‌کند.

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & i=0 \\ \frac{1}{9} & i=1-4 \\ \frac{1}{36} & i=5-8 \end{cases} \quad (14)$$

در رابطه (4)،  $m$  ضریب سازگاری<sup>1</sup> بوده که در واقع ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر است و  $n$  شاخص مدل توانی<sup>2</sup> است. در این مدل،  $n < 1$  مربوط به سیال باریک شونده<sup>3</sup>،  $n = 1$  مربوط به سیال نیوتنی و  $n > 1$  مربوط به سیال ضخیم شونده<sup>4</sup> می‌باشد. همچنین  $I_2$  نامتغیر دوم<sup>5</sup> تانسور نرخ برش  $\bar{u}$  است که از رابطه (5) قابل محاسبه است.

$$I_2 = 2(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yx}^2) \quad (5)$$

در معادله (5)، مؤلفه‌های تانسور نرخ برش در مختصات کارترین از رابطه (6) محاسبه می‌شود.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (6)$$

### 3- روش عددی

در این بخش، روش مرز غوطه‌ور شبکه بولتزمن جهت حل معادلات جریان (معادلات (1- الف و 1- ب)) و اعمال شرط مرزی مناسب در مرز جسم ارائه می‌گردد. در ابتدا و پیش از بررسی معادلات شبکه بولتزمن جهت حل معادلات به این روش، لازم است که رابطه بین پارامترهای محیط فیزیکی و پارامترهای ورودی در روش شبکه بولتزمن مشخص شود. برای این منظور ضرایب تبدیل در رابطه (7)، رابطه بین مکان، زمان و چگالی از محیط فیزیکی به محیط بولتزمن را تبیین می‌کند:

$$C_{h_x} = \frac{\Delta x_{\text{phy}}}{\Delta x}, \quad C_{h_y} = \frac{\Delta y_{\text{phy}}}{\Delta y}, \quad C_t = \frac{\delta t_{\text{phy}}}{\delta t}, \quad C_\rho = \frac{\rho_{\text{phy}}}{\rho_0} \quad (7)$$

در رابطه (7)،  $C_\rho$  و  $C_t$  به ترتیب ضرایب تبدیل برای مکان در راستای  $x$  و  $y$ ، زمان و چگالی می‌باشند.  $\rho_0$  نیز چگالی مرجع در شبکه بولتزمن است. علت استفاده از ضرایب تبدیل فوق در این تحقیق دو دلیل عمده دارد. اول آنکه به راحتی بتوان اندازه‌ها و خواص واقعی محیط فیزیکی در مدل‌سازی محاسباتی به کار گرفته شود. این در حالی است که در صورت استفاده مستقیم از روش شبکه بولتزمن، به علت محدودیت در مقدار زمان رهایی از تنش و عدد ماخ، در انتخاب ویسکوزیته سیال و شرایط واقعی محیط فیزیکی محدودیت وجود دارد. دومین دلیل آن است که بتوان به راحتی خواص غیرنیوتنی سیال را از محیط فیزیکی به محیط شبکه بولتزمن منتقل نمود. این روش در بسیاری از مدل‌های پیچیده سیال غیرنیوتنی مانند سیالات ویسکوالاستیک نیز که هنوز مدل مناسبی از آنها در روش شبکه بولتزمن ارائه نشده است نیز قابل تعمیم است.

لازم به ذکر است که از این به بعد در این مقاله، زیر نویس phy مربوط به متغیرهای فیزیکی مسأله می‌باشد و برای اختصار بیشتر، متغیرهای روش شبکه بولتزمن بدون زیر نویس نوشته شده‌اند.

در رابطه (7)، با فرض  $\Delta x_{\text{phy}} = \Delta y_{\text{phy}} = \Delta x = \Delta y$  می‌توان نوشت  $C_{h_x} = C_{h_y} = C_h$ . همچنین مابقی ضرایب تبدیل متغیرهای مسأله به صورت زیر (در رابطه (8)) قابل محاسبه هستند:

$$C_u = \frac{u_{\text{phy}}}{u} = \frac{C_h}{C_t}, \quad C_v = \frac{v_{\text{phy}}}{v} = \frac{C_h^2}{C_t}, \quad C_p = \frac{P_{\text{phy}}}{P} = C_\rho \left( \frac{C_h}{C_t} \right)^2 \quad (8)$$

در رابطه (8)،  $C_u$ ،  $C_v$  و  $C_p$  به ترتیب ضرایب تبدیل برای سرعت، ویسکوزیته و فشار می‌باشند.

1- Consistency Index  
2- Power-Law index  
3- Shear-Thinning  
4- Shear-Thickening  
5- Second Invariant

$$A\bar{X} = \bar{B} \quad (25)$$

که در رابطه (25) مقادیر  $A$ ،  $B$  و  $X$  به صورت روابط (26) قابل تعریفند:

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \dots & \delta_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11}^B & \delta_{12}^B & \dots & \delta_{1m}^B \\ \delta_{21}^B & \delta_{22}^B & \dots & \delta_{2m}^B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1}^B & \delta_{n2}^B & \dots & \delta_{nm}^B \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \dots & \delta_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \\ \vdots \\ U_n^* \end{bmatrix}$$

$$X = \{\delta U_1, \delta U_2, \dots, \delta U_m\}^T \quad (26)$$

در روابط (26) تعداد نقاط لاگرانژی (مرزی) و  $n$  تعداد نقاط اوپلری است که با توجه به تعریف تابع دلتای دیراک به نوعی با نقاط لاگرانژی در ارتباط هستند.

از حل دستگاه معادله (25) می‌توان تصحیح سرعت نقاط لاگرانژی ( $\delta \bar{U}(X, t)$ ) را محاسبه نمود و به کمک آن نیروی اعمالی از طرف سیال (نقاط اوپلری) بر مرز غوطه‌ور (نقاط لاگرانژی) را طبق رابطه (27) محاسبه نمود:

$$F(X_i) = 2 \frac{\delta U_i}{\delta t} \quad (27)$$

بنابراین الگوریتم کلی این روش به صورت زیر قابل تبیین است:

1- با داشتن مشخصات ( $\Delta x_{phy}$ ،  $\Delta y_{phy}$  و  $\delta t_{phy}$ ) و اندازه دامنه فیزیکی و با در نظر گرفتن  $\Delta x = \Delta y = 1$  و  $\Delta t = 1$  و با استفاده از روابط (7) و (8) ضرایب تبدیل و دامنه محیط شبکه بولتزمن محاسبه می‌شود.

2- با استفاده از متغیرهای شبکه بولتزمن ماتریس  $A$  و معکوس آن ( $A^{-1}$ ) محاسبه می‌شود.

3- با داشتن مقادیر اولیه سرعت فیزیکی و با استفاده از رابطه (4) مقدار ویسکوزیته فیزیکی محاسبه و با استفاده از ضریب تبدیل ویسکوزیته مقدار ویسکوزیته شبکه بولتزمن در هر نقطه محاسبه می‌شود.

4- با استفاده از رابطه (12) زمان آسودگی ( $\tau$ ) برای هر نقطه محاسبه می‌شود.

5- به کمک ضریب تصحیح سرعت، سرعت نقاط شبکه بولتزمن محاسبه و با استفاده از رابطه (10) تابع توزیع برای زمان  $t = t_n$  (زمان اولیه که در آن  $F_\alpha = 0$ ) محاسبه شده و با توجه به رابطه (15) سرعت نقاط شبکه بولتزمن محاسبه می‌شود.

6- با مشخص شدن دستگاه معادلات (25) تصحیح سرعت نقاط لاگرانژی ( $\delta \bar{U}(\bar{X}, t)$ ) و با برازش این مقادیر بر نقاط اوپلری تصحیح سرعت نقاط اوپلری بدست می‌آیند.

7- به کمک رابطه (16) مقادیر سرعت اوپلری نقاط اطراف مرز، که با نقاط لاگرانژی در ارتباط هستند تصحیح می‌شوند.

8- با مقادیر سرعت جدید به دست آمده، مقدار  $p_\alpha^{eq}$  با استفاده از رابطه (11) محاسبه می‌شود.

9- به کمک رابطه (27) مقدار نیروی وارده بر مرزها (نودهای لاگرانژی) که از اختلاف سرعت نودهای لاگرانژی به وجود آمده محاسبه می‌شود.

10- مراحل 3 تا 9 تکرار می‌شود تا همگرایی حاصل شود.

#### 4- نتایج عددی

در این قسمت، با استفاده از روش عددی ارائه شده در بخش 3، به بررسی جریان سیال توانی بر روی یک سیلندر بیضوی درون یک کانال پرداخته می‌شود (شکل 2).

در روش شبکه بولتزمن مقادیر ماکروسکوپی فشار و سرعت به ترتیب از روابط (15) محاسبه می‌شوند:

$$P = \sum_\alpha p_\alpha, \quad P_0 \bar{u} = \sum_\alpha e_\alpha f_\alpha + \frac{1}{2} P_0 \bar{f} \delta t \quad (15)$$

برای اعمال شرط مرزی در فصل مشترک سیال و مرز جسم، مطابق با اصل عدم لغزش می‌بایست که سرعت نقاط مرزی بدست آمده از حل عددی (روش شبکه بولتزمن یا هر روش دیگر) با سرعت مرز جسم برابر باشد. همان‌طور که توضیح داده شد، در این مقاله از روش مرز غوطه‌ور برای اعمال شرط مرزی و مدل‌سازی جریان در مرز منحنی جسم استفاده می‌شود. در این روش، سرعت نقاط مرزی که با استفاده از یک نگاشت مناسب از مقادیر سرعت بدست آمده در نقاط اوپلری محاسبه شده است، به گونه‌ای تصحیح می‌شوند که با سرعت نقاط لاگرانژی که بر روی مرز جسم قرار دارند برابر شوند. بنابراین سرعت نقاط اوپلری از یک سرعت متوسط ( $\bar{u}^*$ ) و یک تصحیح سرعت ( $\delta \bar{u}$ ) (به خاطر وجود جسم غوطه‌ور) مطابق رابطه (16) محاسبه می‌شود:

$$\bar{u} = \bar{u}^* + \delta \bar{u} \quad (16)$$

با مقایسه رابطه (15) و رابطه (16) می‌توان روابط (17) را نوشت.

$$\bar{u}^* = \frac{1}{P_0} \sum_\alpha \bar{e}_\alpha p_\alpha, \quad \delta \bar{u} = \frac{1}{2} \bar{f} \delta t \quad (17)$$

به کمک تابع دلتای دیراک می‌توان مقادیر تصحیح سرعت نقاط اوپلری را با استفاده از مقادیر تصحیح سرعت نقاط لاگرانژی از رابطه (18) بدست آورد.

$$\delta \bar{u}(\bar{x}, t) = \int_\Gamma \delta \bar{U}(\bar{X}, t) \delta(\bar{x} - \bar{X}(s, t)) ds \quad (18)$$

در رابطه (18)، تابع دلتای دیراک ( $\delta(\bar{x} - \bar{X}(s, t))$ ) به صورت رابطه (19) تعریف می‌شود.

$$\delta(\bar{x} - \bar{X}(s, t)) = D_{ij}(x_{ij} - X_i) = \delta(x_{ij} - X_i) \delta(y_{ij} - Y_j) \quad (19)$$

در رابطه (19)،  $i$  و  $j$  به ترتیب اندیس مختصات نقاط اوپلری در جهت  $x$  و  $y$  و  $l$  نیز اندیس نودهای لاگرانژی است تابع  $\delta(r)$  توسط پسکین [8] به صورت رابطه (20) ارائه شد.

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{h} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) \right), & |r| \leq 2 \\ 0, & |r| > 2 \end{cases} \quad (20)$$

در رابطه (20)،  $h$  فاصله بین نودهای اوپلری در اطراف مرز است.

با جایگذاری رابطه (19) در رابطه (18)، می‌توان رابطه (21) را نوشت.

$$\delta \bar{u}(\bar{x}, t) = \sum_j \delta \bar{U}(\bar{X}, t) D_{ij}(x_{ij} - X_i) \Delta S_j \quad (21)$$

در رابطه (21)،  $\Delta S_j$  طول کمان المان‌های مرزی (لاگرانژی) است. همچنین برای ارضای شرط عدم لغزش بر روی مرز باید سرعت سیال در مرز برابر سرعت نقاط متناظر در مرز باشند. که به صورت رابطه (22) بیان می‌شود.

$$\bar{U}_i(X_i, t) = \sum_{i,j} \bar{u}(x_{ij}, t) D_{ij}(x_{ij} - X_i) \Delta x \Delta y \quad (22)$$

با جایگذاری معادلات (16) و (18) در معادله (22) رابطه (23) بدست می‌آید.

$$\bar{U}_i(X_i, t) = \sum_{i,j} \bar{u}^*(x_{ij}, t) D_{ij}(x_{ij} - X_i) \Delta x \Delta y + \sum_{i,j} \sum_l \delta \bar{U}_l(X_l, t) D_{ij}(X_l - x_{ij}) \Delta S_l D_{ij}(x_{ij} - X_i) \Delta x \Delta y \quad (23)$$

تابع دلتای دیراک برای نقاط اوپلری و لاگرانژی به ترتیب در روابط (24) قابل بیان است.

$$\delta_{ij} = D_{ij}(x_{ij} - X_i) \Delta x \Delta y, \quad \delta_{ij}^B = D_{ij}(x_{ij} - X_i) \Delta S_j \quad (24)$$

آنگاه معادله (8) به صورت ماتریسی طبق رابطه (25) خلاصه می‌شود.

## 1-1-4- ورودی

در ورودی شرط مرزی سرعت توسعه یافته برای سیال توانی به صورت معادلات (35) قابل بیان است.

$$u_x = U_{\max} \left( 1 - \left( \frac{y}{H/2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad -\frac{H}{2} \leq y \leq \frac{H}{2}$$

$$u_y = 0 \quad (35)$$

در معادله (35)  $H$  عرض کانال و  $U_{\max}$  سرعت بیشینه در ورودی کانال است که از رابطه (31) قابل محاسبه است.

## 1-1-4-2- خروجی

در مرز خروجی شرط مرزی توسعه یافتگی سرعت افقی به صورت معادلات (36) قابل بیان است.

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0, \quad u_y = 0 \quad (36)$$

## 1-1-4-3- دیواره‌های کانال

در دیواره‌های کانال شرط مرزی عدم لغزش قابل اعمال است.

## 1-1-4-4- سیلندر

بر روی سیلندر نیز شرط مرزی عدم لغزش بر روی نقاط لاگرانژی اعمال می‌شود. طبق رابطه (38) داریم:

$$U_x = 0, \quad U_y = 0 \quad (38)$$

در معادلات (34-36)،  $u_x$  و  $u_y$  ترتیب مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت نقاط اویلری و در معادلات (37)  $U_x$  و  $U_y$  به ترتیب مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت نقاط لاگرانژی هستند.

برای اعمال شرایط مرزی ذکر شده در روش شبکه بولتزمن فشاری، تابع توزیع مشابه تحقیق هی و لو [16] برای دیواره‌ها و ورودی و خروجی کانال استفاده شده است.

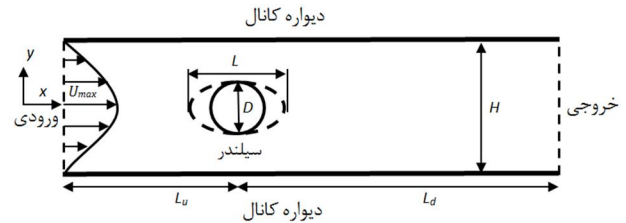
## 2-2-4- مطالعه استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی

قبل از ارائه نتایج عددی بدست آمده، در این بخش استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، ضریب درگ بر روی سیلندر دایروی درون کانال در  $Re = 40$  برای شبکه‌بندی‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات این شبکه‌بندی‌ها و میزان خطای نسبی نسبت به ریزترین گره محاسباتی ( $200 \times 2488$ ) در جدول 1 ارائه شده است.

با توجه به نتایج موجود در جدول 1، شبکه  $1489 \times 120$  با خطای نسبی کمتر از 1% شبکه مناسبی برای حل عددی بوده و حل عددی مستقل از شبکه محاسباتی می‌باشد. بنابراین در این مقاله از این شبکه جهت حل عددی استفاده شده است.

جدول 1 بررسی خطای حل عددی در مقادیر ضریب درگ در شبکه‌های مختلف

محاسباتی برای $Re = 40$ نسبت به شبکه $2488 \times 200$		
اندازه شبکه ( $N_x \times N_y$ )	$C_D$	خطای نسبی (%)
$864 \times 70$	1 / 8208	3 / 670
$1239 \times 100$	1 / 7846	1 / 610
$1489 \times 120$	1 / 7629	0 / 370
$1863 \times 150$	1 / 7507	0 / 320



شکل 2 هندسه مورد بررسی در تحقیق حاضر

در ابتدا بعد از بررسی استقلال کد عددی از شبکه محاسباتی، برای معتبرسازی نتایج، جریان سیال غیر نیوتنی (سیال با مدل توانی) بر روی یک سیلندر با مقطع دایروی در  $5 \leq Re \leq 40$  و  $n = 0/6, 1, 1/4$  بررسی شده و نتایج عددی با نتایج ارائه شده توسط بهارتی و همکاران [25] معتبر سازی شده است. در ادامه به بررسی جریان سیال بر روی سیلندر با مقطع بیضوی در سه نسبت ابعادی پرداخته شده و اثرات تغییرات خواص غیر نیوتنی سیال و همچنین عدد رینولدز بر رژیم حاکم بر جریان و نیز ضریب درگ بر روی سیلندر بررسی شده است. هندسه مورد استفاده در این تحقیق همانند هندسه مورد استفاده در مطالعه بهارتی و همکاران [25] (شکل 2) می‌باشد و با در نظر گرفتن  $D_{phy} = 0/1$  دیگر مشخصات هندسی به صورت روابط (28-30) قابل محاسبه است [25]:

$$\frac{L_u}{D} = 10, \quad \frac{L_d}{D} = 40 \quad (28)$$

$$\beta = \frac{H}{D} = 4 \quad (29)$$

$$\eta = \frac{L}{D} \quad (30)$$

در معادلات (29) و (30)  $\beta$  و  $\eta$  به ترتیب نسبت انسداد<sup>1</sup> و نسبت ابعادی<sup>2</sup> هستند.

همچنین با توجه به جریان سیال توانی درون کانال، سرعت بیشینه و مقادیر عدد رینولدز و ضریب درگ به صورت زیر قابل تعریف است [25]. طبق روابط (31-34) داریم:

$$U_{\max} = \left( \frac{2n+1}{n+1} \right) U_{ave} \quad (31)$$

$$Re = \frac{\rho U_{ave}^{(2-n)} D^n}{m} \quad (32)$$

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} U_{\max}^2 D} \quad (33)$$

$$St = \frac{fD}{U_{ave}} \quad (34)$$

در رابطه (33) نیروی درگ کل بر واحد چگالی بوده که شامل هر دو درگ فشاری و اصطکاکی است و  $C_D$  ضریب درگ شکلی است که مجموع ضریب درگ اصطکاکی و فشاری است. رابطه (34) نشان دهنده عدد استروهال<sup>3</sup> است که به علت تشکیل گردابه در پشت سیلندر تعریف شده است. در این رابطه  $f$  فرکانس گردابه‌های تشکیل شده در پشت سیلندر است.

## 1-1-4- شرایط مرزی

با توجه به شکل 2 شرایط مرزی هندسه مورد مطالعه به صورت معادلات (34-37) قابل بیان است [25].

1- Blockage Ratio  
2- Aspect Ratio  
3- Strouhal Number

به علت بزرگ شدن گردابه‌ها است. این گردابه‌ها در واقع شروع گردابه‌های فن کارمن است که به صورت تناوبی و ناپایا در پشت سیلندر تشکیل می‌شوند. برای بررسی بیشتر این موضوع نمودار توزیع سرعت افقی ( $u_x$ ) در یک نقطه در پشت سیلندر (در فاصله  $1/2D$  در پشت سیلندر) نسبت به زمان در شکل 5 ترسیم شده است. همان‌طور که این نمودار نشان می‌دهد در پشت سیلندر سرعت این نقطه به صورت ناپایا بوده و به شکل نوسانی با دوره تناوب ثابت  $T = 0/09$  s نسبت به زمان تغییر می‌کند. که این دوره تناوب با دوره تناوب سرعت کلیه نقاط و گردابه‌های تولیدی در پشت سیلندر نیز برابر است. با توجه به تعریف فرکانس می‌توان رابطه (39) را نوشت:

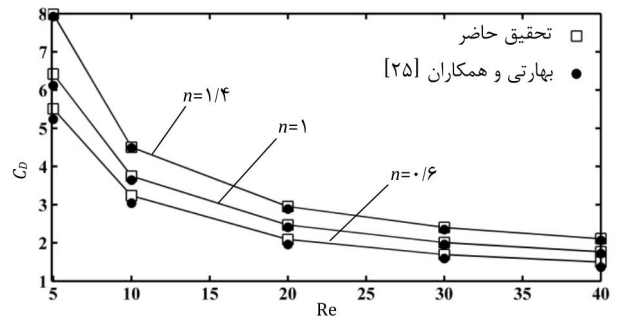
$$f = \frac{2\pi}{T} \quad (39)$$

با محاسبه مقدار فرکانس گردابه‌ها از رابطه (39) و جایگزینی آن در رابطه (34) مقدار عدد استروهل محاسبه می‌شود. که در این حالت  $Re = 40$  و  $n = 0/5$  مقدار عدد استروهل  $St = 34/9$  بدست می‌آید. همان‌طور که قبلاً ذکر شد جریان در این حالت به صورت ناپایا است و شکل 5- د حالت گردابه‌ها را در زمان  $t/T = 0/18$  نشان می‌دهد.

برای بررسی بیشتر اثرات عدد رینولدز و خواص غیرنیوتنی سیال، در شکل 6 تغییرات ضریب درگ کل بر حسب عدد رینولدز در پنج سیال مختلف با مشخصات  $n = 0/5, 0/75, 1/1, 25/1, 5/5$  ترسیم شده است. همان‌طور در این شکل مشاهده می‌شود، ضریب درگ با افزایش عدد رینولدز به علت افزایش نیروی اینرسی در مقابل نیروی ویسکوز کاهش می‌یابد. بعلاوه در یک عدد رینولدز ثابت، با افزایش شاخص مدل توانی ( $n$ )، ضریب درگ به علت افزایش ویسکوزیته سیال و به تبع آن افزایش نیروی درگ اصطکاکی، افزایش می‌یابد این شکل همچنین نشان می‌دهد که اثرات افزایش عدد رینولدز نسبت به کاهش مقدار  $n$  بر کاهش ضریب درگ تأثیر بیشتری دارد. برای مثال در حالت  $n = 1/5$  با افزایش عدد رینولدز از 5 تا 40 ضریب درگ از مقدار حدودی  $8/5$  تا مقدار  $2/2$  کاهش می‌یابد در حالی که در عدد رینولدز 5 با کاهش میزان  $n$  از  $1/5$  به  $0/5$  ضریب درگ از مقدار حدودی  $8/5$  تا مقدار  $5/5$  کاهش می‌یابد که این کاهش در اعداد رینولدز بالاتر کمتر است. که این ناشی از تأثیر پذیری بیشتر ضریب درگ نسبت به عدد رینولدز است. نکته جالب توجه در این نمودار کاهش چشمگیر ضریب درگ در عدد رینولدز 40 با کاهش مقدار  $n$  از  $0/75$  به  $0/5$  است. این کاهش همان‌طور که در شکل 4 توضیح داده شد ناشی از شروع ناپایداری گردابه‌های تولیدی در پشت سیلندر و شروع گردابه‌های فن کارمن است که سبب نوسانی شدن جریان در پشت سیلندر می‌شود و باعث کاهش میزان ضریب درگ تا حدود  $0/5$  شده است.

برای بررسی بیشتر اثرات سطح در این بخش، نتایج عددی جریان غیر نیوتنی با مدل توانی بر روی یک سیلندر با مقطع بیضی افقی با دو نسبت ابعادی  $\eta = 1/5, 2$ ، بررسی شده است. (شکل 2).

در شکل 7 خطوط جریان در اطراف سیلندر بیضی برای اعداد رینولدز و شاخص مدل توانی ( $n$ ) در دو نسبت ابعادی  $\eta = 1/5, 2$  ترسیم شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌گردد، بر خلاف سیلندر دایروی که گردابه‌های پشت سیلندر از  $Re = 10$  به بعد شروع به تولید شدن می‌کنند، در این حالت گردابه‌ها در اعداد رینولدز بالاتری تولید و با کاهش میزان  $n$  به تدریج شروع به بزرگ شدن می‌کنند. این شکل همچنین نشان می‌دهد که در یک عدد رینولدز و یک  $n$  ثابت با افزایش میزان نسبت ابعادی از  $1/5$  به 2 گردابه‌های تولیدی در پشت سیلندر کوچکتر می‌شود. علت این امر را می‌توان به افزایش درگ اصطکاکی در مقابل درگ فشاری به علت افزایش سطح مقطع نسبت داد.



شکل 3 مقیاسه ضریب درگ در تحقیق حاضر با نتایج بهارتی و همکاران [25]

### 3-3- معتبر سازی نتایج عددی

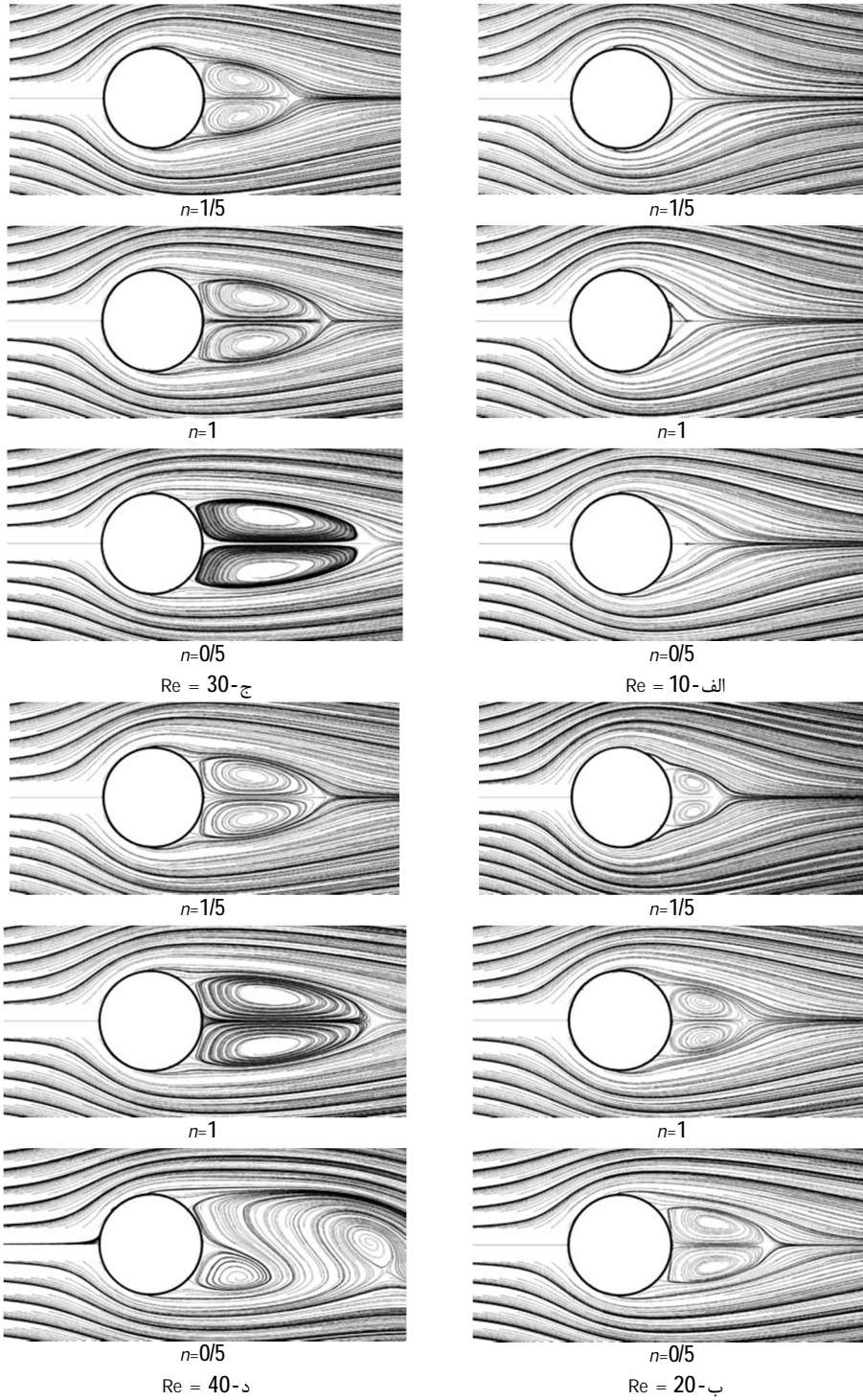
در این قسمت جهت معتبر سازی روش عددی ارائه شده به بررسی جریان سیال غیرنیوتنی با مدل توانی بر روی یک سیلندر دایروی درون کانال مطابق شکل 2 پرداخته می‌شود. برای معتبرسازی نتایج بدست آمده، ضریب درگ محاسبه شده از روش عددی حاضر، در اعداد رینولدز 5، 10، 20، 30 و 40 برای سه سیال مختلف با مشخصات  $(n = 0/6, 1/1, 4)$  با نتایج بهارتی و همکاران [25] در شکل 3 مقایسه شده است. همان‌طور که این شکل مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین نتایج بدست آمده از روش عددی حاضر و نتایج بهارتی و همکاران [25] وجود دارد.

### 4-4- جریان بر روی سیلندر بیضی

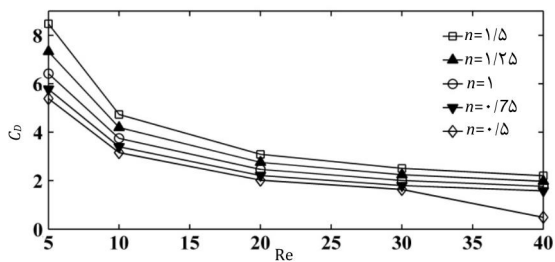
در این قسمت به بررسی جریان سیال توانی بر روی یک سیلندر بیضی در سه نسبت ابعادی  $(\eta = 1, 1/5, 2)$  برای  $5 \leq Re \leq 40$  و برای پنج سیال مختلف با مشخصات  $n = 0/5, 0/75, 1/1, 25/1, 5/5$  پرداخته شده است. (شکل 2). در حالت اول جریان بر روی سیلندر با نسبت ابعادی  $\eta = 1$  (سیلندر دایروی) بررسی می‌شود.

در شکل 4، خطوط جریان سیال غیرنیوتنی بر روی سیلندر دایروی در اعداد رینولدز 10، 20، 30 و 40 برای  $n = 0/5, 1/1, 5/5$  ترسیم شده است. در این شکل اثرات عدد رینولدز و همچنین خواص غیرنیوتنی سیال بر روی جریان قابل مشاهده می‌باشد. همان‌طور که در شکل 5-الف مشاهده می‌شود، در اعداد رینولدز کم ( $Re = 10$ ) فارغ از نوع سیال و تغییرات  $n$  به علت کم بودن اثرات نیروی اینرسی در مقابل نیروی ویسکوز، جدایش سیال از روی استوانه رخ نمی‌دهد اما با افزایش عدد رینولدز ( $Re = 20$ ) جریان سیال از روی استوانه به تدریج جدا شده و به علت بازیابی مومنتم ورودی به مقدار اولیه، دو گردابه در پشت استوانه شروع به تشکیل شدن می‌کند. این گردابه‌ها با تغییر خواص سیال از سیال ضخیم شونده ( $n > 1$ ) به سیال باریک شونده ( $n < 1$ ) به علت کاهش ویسکوزیته سیال و کمتر شدن اثرات نیروی اصطکاکی در مقابل نیروی اینرسی شروع به بزرگ شدن می‌کنند. همچنین با توجه به شکل‌های 5-ب، 5-ج و 5-د با افزایش عدد رینولدز در یک  $n$  خاص، طول گردابه‌های تولید شده افزایش یافته و نقطه جدایش در زاویه کمتری نسبت به نقطه سکون اتفاق می‌افتد.

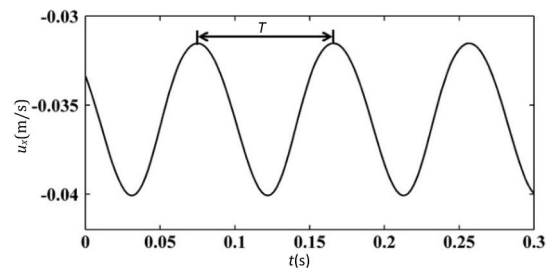
بعلاوه چنانچه ذکر شد در یک عدد رینولدز مشخص با کاهش مقدار شاخص مدل توانی ( $n$ )، زاویه جدایش نسبت به نقطه سکون کمتر شده و اندازه گردابه‌ها بزرگتر می‌شود. تا آن حد که در  $Re = 40$  (شکل 5-د) با کاهش میزان شاخص مدل توانی ( $n$ ) از 1 به  $0/5$  گردابه‌ها تا آن حد بزرگ شده که از حالت تقارن خارج گشته و شروع به حرکت در پشت سیلندر می‌کنند. که این حالت شروع ناحیه ناپایداری در جریان آرام در پشت سیلندر



شکل 4 خطوط جریان سیال غیر نیوتنی در اطراف سیلندر دایروی در اعداد رینولدز مختلف



شکل 6 تغییرات ضریب درگ اطراف سیلندر دایروی بر حسب عدد رینولدز و شاخص مدل توانی (n)



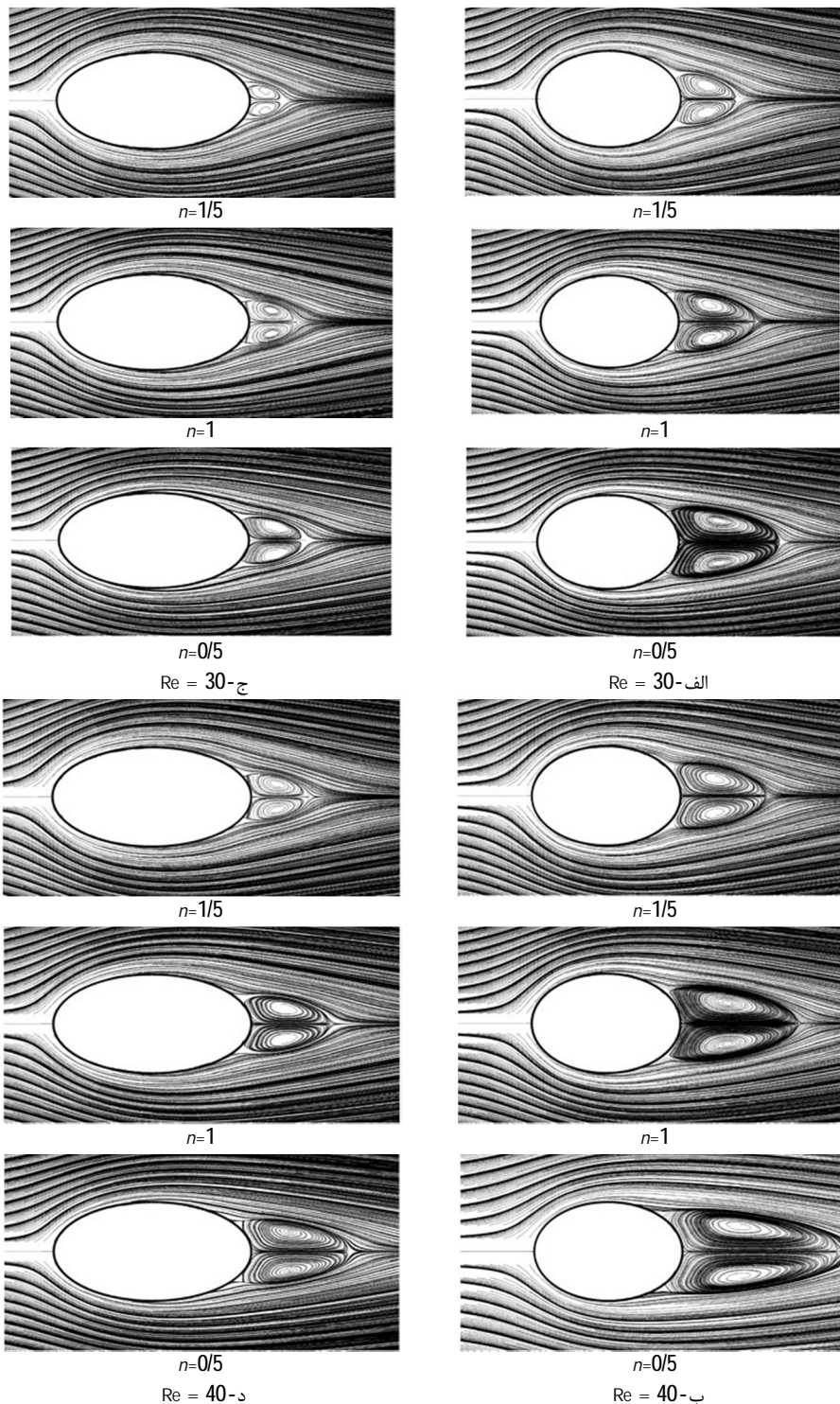
شکل 5 توزیع سرعت افقی در یک نقطه از پشت سیلندر دایره ای بر حسب زمان در حالت  $n = 0/5$  و  $Re = 40$



توانی ( $n$ ) در دو نسبت ابعادی را نشان می‌دهد. شکل 8- الف و ب نشان می‌دهد که تغییرات ضریب درگ در هر دو حالت مشابه هم بوده و با افزایش عدد رینولدز به علت افزایش نیروی اینرسی در مقابل نیروی ویسکوز، ضریب درگ کاهش می‌یابد. اما نکته قابل توجه در این نمودار تغییرات مقادیر ضریب درگ در این دو حالت است. همان طور که این شکل نشان می‌دهد تغییرات ضریب درگ با  $n$  در هر دو حالت تقریباً با هم برابرند اما با افزایش مقدار نسبت ابعادی (سطح مقطع) تغییرات ضریب درگ با عدد رینولدز نیز بیشتر می‌شود.

این شکل نشان می‌دهد همانند جریان بر روی سیلندر دایروی، با افزایش عدد رینولدز و همچنین کاهش میزان  $n$  جدایی از سطح در زوایای کمتری نسبت به نقطه سکون اتفاق افتاده و گردابه‌های تولیدی در پشت سیلندر بزرگتر می‌شوند اما در اینجا بر خلاف سیلندر استوانه‌ای این بار گردابه‌های تولیدی در پشت سیلندر همچنان متقارن بوده و جریان سیال پایدار است. بنابراین با تبدیل سیلندر دایروی به سیلندر بیضوی می‌توان ناپایداری در جریان را حتی بر اثر افزایش عدد رینولدز و یا کاهش  $n$  به تعویق انداخت.

شکل 8 تغییرات ضریب درگ بر حسب عدد رینولدز و شاخص مدل



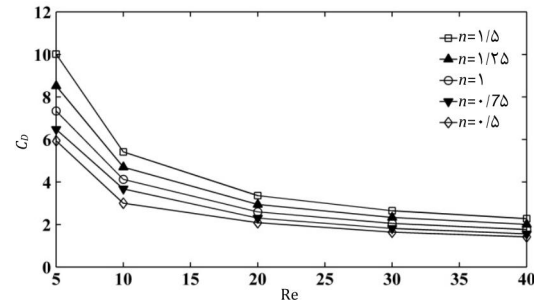
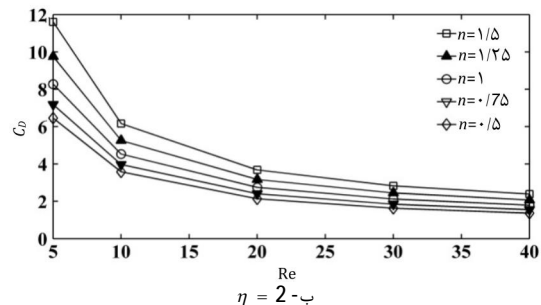
شکل 7 خطوط جریان سیال غیر نیوتنی در اطراف سیلندر بیضوی بر حسب عدد رینولدز برای الف و ب-  $n = 1/5$ ، ج و د-  $n = 2$

برای مثال ضریب درگ برای سیلندر بیضوی در حالت  $\eta = 1/5$  در  $n = 1/5$ ، از مقدار 10 برای  $Re = 5$  تا مقدار 2/2 در  $Re = 40$  کاهش می‌یابد اما در حالت  $\eta = 2$  تغییرات ضریب درگ از 12 به 2/3 برای اعداد رینولدز ذکر شده است. علت این امر را می‌توان به انحنای بیشتر سیلندر بیضوی و به تعویق افتادن جدایش در سطح نسبت داد. برای بررسی بیشتر اثرات سطح مقطع در شکل 9 تغییرات ضریب درگ نسبت به عدد رینولدز و نسبت ابعادی در سه شاخص مدل توانی ( $n$ ) مختلف ترسیم شده است. این نمودار نشان می‌دهد با کاهش مقدار  $n$  اختلاف بین ضریب درگ در سه نسبت ابعادی را کاهش می‌دهد. یعنی با کاهش میزان شاخص مدل توانی تغییر سطح مقطع از دایره به بیضی (به خصوص در اعداد رینولدز بالا) تغییر چندانی در مقدار ضریب درگ ایجاد نمی‌کند. این نمودار همچنین نشان می‌دهد که افزایش عدد رینولدز در کاهش میزان ضریب درگ بیشترین تأثیر را داشته و همان‌طور که این شکل نشان می‌دهد افزایش نسبت ابعادی ( $\eta$ ) در کاهش میزان ضریب درگ تأثیر کمتری دارد. تغییرات شاخص مدل توانی ( $n$ ) هم کمترین میزان تأثیر بر کاهش ضریب درگ دارد.

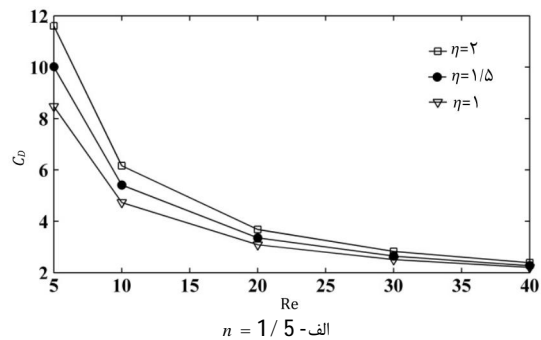
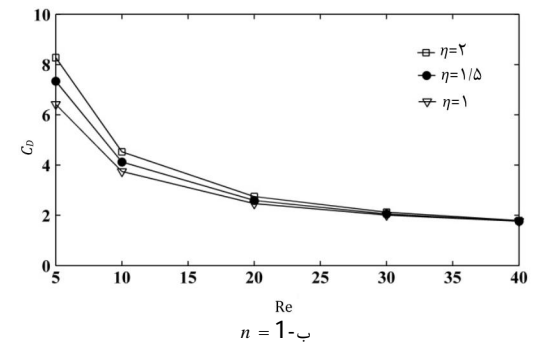
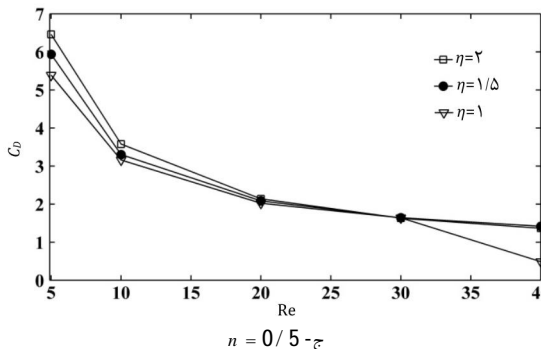
### 5- جمع‌بندی

در تحقیق حاضر از ترکیب روش شبکه بولتزمن فشاری (ارائه شده توسط هی و لو [16]) و روش مرز غوطه‌ور (ارائه شده توسط وو و شو [7]) و اضافه کردن خواص غیرنیوتنی به آن یک روش جدید برای حل جریان سیال غیر نیوتنی بر روی مرزهای منحنی درون یک کانال ارائه شده است. نتایج این روش برای جریان سیال غیرنیوتنی بر روی یک سیلندر دایروی درون کانال با تنها تحقیق موجود در این زمینه (بهارتی و همکاران [25]) که توسط نرم‌افزار فلونت انجام گرفته بود مقایسه و معتبر سازی شده است. جهت نوع‌آوری بیشتر، برای اولین بار جریان سیال غیرنیوتنی بر روی یک بیضی افقی درون کانال بررسی شد و نتایج برای اثرات عدد رینولدز ( $5 \leq Re \leq 40$ )، مدل شاخص توانی ( $n = 0/5, 0/75, 1, 1/25, 1/5$ ) و همچنین نسبت تناسب ( $\eta = 1, 1/5, 2$ ) بر روی رژیم جریان و ضریب درگ بر روی سیلندر به صورت مبسوط مورد بررسی قرار گرفت. همچنین در یک حالت خاص (و) اثرات تشکیل گردابه‌های فن کارمن در پشت سیلندر بررسی گردید و مقدار عدد استروهال برای آن حالت خاص محاسبه شده است. به طور خلاصه روش مورد استفاده در این تحقیق دارای مزیت‌های زیر است:

- 1- جریان غیر قابل تراکم سیال درون کانال که مدل‌های معمولی شبکه بولتزمن به علت تغییرات خطی فشار با طول کانال، قادر به مدل‌سازی صحیح آن نیست در این روش به راحتی قابل حل است.
- 2- به کمک این روش می‌توان بدون محدودیت شبکه بندی، جریان بر روی جسم‌های با مقطع پیچیده را مدل‌سازی نمود.
- 3- شرط مرزی عدم لغزش که در روش‌های معمول محاسباتی بر روی مرزهای منحنی و پیچیده به سختی اعمال می‌شود، در این روش به علت تعریف نقاط لاگرانژی بر روی مرز، به راحتی قابل اعمال است.
- 4- ضرایب تبدیل تعریف شده از محیط فیزیکی به محیط شبکه بولتزمن، این امکان را به این روش می‌دهد تا علاوه بر اعمال مقادیر و خواص واقعی محیط فیزیکی به محیط محاسباتی (که یکی از محدودیت‌های روش شبکه بولتزمن است) همچنین مدل‌های پیچیده تر غیرنیوتنی (همانند سیالات ویسکوالاستیک) نیز به کمک این روش اعمال گردد.

الف -  $\eta = 1/5$ ب -  $\eta = 2$ 

شکل 8 تغییرات ضریب درگ اطراف سیلندر بیضوی بر حسب عدد رینولدز و شاخص مدل توانی ( $n$ )

الف -  $n = 1/5$ ب -  $n = 1$ ج -  $n = 0/5$ 

شکل 9 تغییرات ضریب درگ اطراف سیلندر بیضوی بر حسب عدد رینولدز و نسبت ابعادی ( $\eta$ )

- [16] X. He, L.-S. Luo, Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equation, *Journal of Statistical Physics*, Vol. 88, No. 3-4, pp. 927-944, 1997.
- [17] C. K. Aidun, Y. Lu, E.-J. Ding, Direct analysis of particulate suspensions with inertia using the discrete Boltzmann equation, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 373, No. 1, pp. 287-311, 1998.
- [18] M. Ashrafizadeh, V. Broujeni, Simulation of non-Newtonian fluid flow around curved boundary with Lattice Boltzmann method, in *The 17th International Conference of mechanical engineering*, Tehran, Iran, 2009. (In Persian)
- [19] Z.-G. Feng, E. E. Michaelides, The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 195, No. 2, pp. 602-628, 2004.
- [20] Z.-G. Feng, E. E. Michaelides, < i> Proteus</i>: a direct forcing method in the simulations of particulate flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 202, No. 1, pp. 20-51, 2005.
- [21] X. Niu, C. Shu, Y. Chew, Y. Peng, A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows, *Physics Letters A*, Vol. 354, No. 3, pp. 173-182, 2006.
- [22] P. K. Rao, A. K. Sahu, R. Chhabra, Flow of Newtonian and power-law fluids past an elliptical cylinder: a numerical study, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 49, No. 14, pp. 6649-6661, 2010.
- [23] P. Sivakumar, R. P. Bharti, R. Chhabra, Steady flow of power-law fluids across an unconfined elliptical cylinder, *Chemical engineering science*, Vol. 62, No. 6, pp. 1682-1702, 2007.
- [24] R. Bharti, P. Sivakumar, R. Chhabra, Forced convection heat transfer from an elliptical cylinder to power-law fluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, No. 7, pp. 1838-1853, 2008.
- [25] R. P. Bharti, R. Chhabra, V. Eswaran, Two-dimensional steady Poiseuille flow of power-law fluids across a circular cylinder in a plane confined channel: wall effects and drag coefficients, *Industrial & engineering chemistry research*, Vol. 46, No. 11, pp. 3820-3840, 2007.
- [26] C. Sun, L. L. Munn, Particulate nature of blood determines macroscopic rheology: a 2-D lattice Boltzmann analysis, *Biophysical journal*, Vol. 88, No. 3, pp. 1635-1645, 2005.
- [27] D. Kehrwald, Lattice Boltzmann simulation of shear-thinning fluids, *Journal of statistical physics*, Vol. 121, No. 1-2, pp. 223-237, 2005.
- [28] S. Gabbanelli, G. Drazer, J. Koplik, Lattice Boltzmann method for non-Newtonian (power-law) fluids, *Physical Review E*, Vol. 72, No. 4, pp. 046312, 2005.
- [29] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method, *PHYSICAL REVIEW E Phys Rev E*, Vol. 65, pp. 046308, 2002.
- [1] H. H. Hu, Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 22, No. 2, pp. 335-352, 1996.
- [2] B. Maury, Direct simulations of 2D fluid-particle flows in bi-periodic domains, *Journal of computational physics*, Vol. 156, No. 2, pp. 325-351, 1999.
- [3] H. H. Hu, N. A. Patankar, M. Zhu, Direct numerical simulations of fluid-solid systems using the arbitrary Lagrangian-Eulerian technique, *Journal of Computational Physics*, Vol. 169, No. 2, pp. 427-462, 2001.
- [4] R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, J. Periaux, A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for flows around moving rigid bodies: application to particulate flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 30, No. 8, pp. 1043-1066, 1999.
- [5] R. Glowinski, T.-W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 25, No. 5, pp. 755-794, 1999.
- [6] Z. Yu, N. Phan-Thien, Y. Fan, R. I. Tanner, Viscoelastic mobility problem of a system of particles, *Journal of non-newtonian fluid mechanics*, Vol. 104, No. 2, pp. 87-124, 2002.
- [7] J. Wu, C. Shu, Particulate flow simulation via a boundary condition-enforced immersed boundary-lattice Boltzmann scheme, *Communications in Computational Physics*, Vol. 7, No. 4, pp. 793, 2010.
- [8] C. S. Peskin, Numerical analysis of blood flow in the heart, *Journal of Computational Physics*, Vol. 25, No. 3, pp. 220-252, 1977.
- [9] E. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, J. Mohd-Yusof, Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 161, No. 1, pp. 35-60, 2000.
- [10] M. Uhlmann, An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 209, No. 2, pp. 448-476, 2005.
- [11] X. Wang, W. K. Liu, Extended immersed boundary method using FEM and RKPM, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 12, pp. 1305-1321, 2004.
- [12] L. Zhang, A. Gerstenberger, X. Wang, W. K. Liu, Immersed finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 21, pp. 2051-2067, 2004.
- [13] S. Chen, G. D. Doolen, Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Annual review of fluid mechanics*, Vol. 30, No. 1, pp. 329-364, 1998.
- [14] S. Succi, *The lattice Boltzmann equation: for fluid dynamics and beyond*: Oxford university press, 2001.
- [15] M. C. Sukop, D. T. Thorne Jr, *Lattice Boltzmann modeling: an introduction for geoscientists and engineers*: Springer Publishing Company, Incorporated, 2007.