مجله مهندسی مکانیک مدرس، آبان 1395، دوره 16، شماره 8، ص‌ص 207-217

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل عددی اثرات گوشه آزاد در چندلایه‌های کامپوزیتی زاویه‌دار براساس مدل سراسری-موضعی

حسین محمدی‌رکن‌آبادی[1]، محمدجواد محمودی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
2- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران
* تهران، صندوق‌پستی 167651719، mj_mahmoudi@sbu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 03 خرداد 1395
پذیرش: 24 تیر 1395
ارائه در سایت: 02 شهریور 1395

کلید واژگان:
اثر گوشه آزاد
چندلایه‌های زاویه‌دار
مدل سراسری- موضعی
تنش‌های بین‌لایه‌ای

چکیده

هدف اصلی این تحقیق، مدل‌سازی اثر گوشه آزاد در چندلایه‌های کامپوزیتی متعامد و زاویه‌دار گرافیت/ اپوکسی، با استفاده از روش حل المان محدود و براساس مدل سراسری-موضعی است. در این مدل، ناحیه سراسری با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و ناحیه موضعی، در مجاورت گوشه آزاد، با استفاده از تئوری لایروایز ردی مدل می‌شوند. استفاده از این روش امکان تحلیل چندلایه‌های ضخیم زاویه‌دار و متعامد را به‌وجود می‌آورد. چندلایه‌های متعامد و زاویه‌دار به ترتیب تحت بار حرارتی و کشش یکنواخت قرار گرفته و اثرات تنش‌های بین لایه‌ای لبه آزاد و گوشه آزاد مورد بررسی قرار می‌گیرد. اعتبارسنجی نتایج حاضر توسط نتایج در دسترس در تحقیقات پیشین صورت می‌گیرد که نشان‌دهنده تطابق خوبی است. نتایج تحقیق کنونی نشان می‌دهند هنگامی که چندلایه متعامد تحت بار حرارتی قرار می‌گیرد توزیع تنش‌های بین لایه‌ای در هر دو جهت طول و عرض چندلایه یکنواخت است. در صورتی که برای بار کششی تک‌جهته تنش‌های بین لایه‌ای در دو راستای چندلایه دارای توزیع متفاوت است، همچنین نتایج نشان می‌دهند که در چندلایه‌های زاویه‌دار تحت کشش یکنواخت با افزایش زاویه الیاف، اثر گوشه آزاد افزایش می‌یابد و بیشترین تنش‌های بین‌لایه‌ای در لایه‌های 30 درجه در مجاورت لبه‌های آزاد رخ می‌دهند. به علاوه نتایج ثابت می‌کنند در لایه‌های با زاویه الیاف کمتر از 30 درجه، اثرات لبه آزاد و گوشه آزاد تقریبا مشابه است. مطالعه پارامتری بر ضخامت و چیدمان لایه‌های چندلایه نشان می‌دهد که هر دو پارامتر بر تنش‌های بین لایه‌ای در گوشه آزاد تأثیر بسزایی دارند.

Numerical analysis of free corner effects in angle-ply composite laminates based on global-local method

Hossein Mohammadi Roknabadi[1], Mohammad Javad Mahmoodi[2*]

Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.
* P.O.B. 167651719 Tehran, mj_mahmoudi@sbu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 23 May 2016
Accepted 16 July 2016
Available Online 23 August 2016

Keywords:
Free corner effect
Angle-ply laminates
Global-local model
Interlaminar stresses

ABSTRACT

The main purpose of this paper is modeling of the free corner effect of cross-ply and angle-ply graphite/epoxy composite laminates using finite element method based on global-local method. The global area is modeled by first order shear deformation theory and the local area, in the free corner vicinity, is modeled by the Reddy's layer-wise theory. Using this method provides the possibility of analysis of thick angle-ply and cross-ply laminates. The cross-ply and angle-ply laminates are subjected to uniform thermal and extension loading, respectively and the effects of the free edge and free corner interlaminar stresses are investigated. Verification of the presented results is performed via available results in the previous studies which show good agreement. The present study results show that when the cross-ply laminate is subjected to thermal loading, the interlaminar stresses distribution is uniform in both length and width of the laminate. However, for the uni-axial extension loading, the interlaminar stresses possess different distribution in the two directions of the laminate. Also, results demonstrate that in angle-ply laminates under extension loading, the free corner effect increases by increasing fiber angle and the maximum interlaminar stresses occur in 30 degree plies in the free corner vicinity. Moreover, results prove that the effects of the free edge and the free corner are almost similar in layers with fiber angle less than 30 degrees. Parametric study on the thickness and stacking of the laminate layers illustrates that both parameters have a significant influence on the interlamianar stresses at the free corner.

1- مقدمه

امروزه کامپوزیت‌ها در ساختارهای مختلفی در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ بنابراین تحلیل آن‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. یکی از عوامل مهم در تحلیل چندلایه‌های کامپوزیتی وجود تنش‌های بین لایه‌ای در

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
H. Mohammadi Roknabadi, M. J. Mahmoodi, Numerical analysis of free corner effects in angle-ply composite laminates based on global-local method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 207-217, 2016 (in Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.8.32.9]

آن‌هاست تحلیل مناسب اثرات تنش‌های بین لایه‌ای روی لبه‌ها و گوشه‌های آزاد یک چندلایه کامپوزیتی می‌تواند کمک مناسبی برای انتخاب چندلایه‌های کامپوزیتی باشد. تنش‌های بین لایه‌ای و اهمیت بررسی آن¬ها، در حدود 40 سال پیش با کارهای پایپز و پاگانو [1] در ارتباط با لبه آزاد معرفی شد و در سال‌های اخیر با گسترش به اثر گوشه آزاد ادامه یافت [2-5]. در این زمینه تحقیقات گسترده‌ایی انجام گرفته است که هدف از این پژوهش‌ها، ارائه راه حل‌ها و روش‌های پیش‌بینی و مطالعه تنش‌های بین لایه‌ای و ارائه راه‌کارهای جدیدتر برای کاهش خرابی‌های حاصل از این اثرات است [6-9]. در حالت کلی می‌توان تحقیقات و روش‌های حل مسائل گوشه آزاد[1] و لبه آزاد[2] را به دو دسته روش‌های عددی و روش‌های تحلیلی تقسیم کرد. در بخش روش‌های عددی، المان‌های استاندارد با کاربرد چندگانه که شامل المان‌هایی که براساس معادلات تغییر مکان رایج فرمول‌بندی می‌شوند، است [2]، و یا المان‌های خاص با کاربرد ویژه که برای مدل‌سازی تنش‌های تکین و با شرایط مرزی و یا شرایط خاص پیوستگی تغییر مکان، در مرز جداکننده لایه‌ها کاربرد دارند، مورد استفاده قرار می‌گیرد [2]. نوع المان مورد استفاده وابسته به شرایط تحلیل مورد نظر است که می‌تواند براساس تغییر مکان، تنش و یا ترکیبی از هر دو باشد. علاوه‌بر این موارد، تفاوت‌هایی از قبیل استراتژی‌های مش‌بندی و تراکم المان‌بندی در روش‌های عددی به چشم می‌خورد که بیشتر مربوط به توانایی تجهیزات محاسباتی و زمان انجام پروژه می‌شود [2].

گوشه آزاد در سازه‌های لایه‌ای، یکی از محل‌های وقوع تنش‌های موضعی است. محل برخورد دو لبه آزاد را گوشه آزاد می‌نامند. اثر گوشه آزاد کمتر مورد توجه بوده و تا کنون تحقیقات اندکی در این زمینه صورت گرفته است. دلیل این امر ماهیت سه بعدی مؤلفه‌های تنش و عدم امکان در نظر گرفتن فرض‌هایی که منجر به حل شبه دو بعدی می‌شود، است؛ بنابراین برخلاف اثر لبه آزاد تحقیقات انجام‌شده در این زمینه تنها به موارد بسیار ساده و بارگذاری‌های مشخصی محدود می‌شود [3].

در سال 1999 و 2001، بکر [3,10] شکل ساده‌ای از روش نیرو- تعادل را جهت بررسی اثر گوشه آزاد در یک چندلایه کامپوزیتی متعامد، تحت بارگذاری حرارتی به کار برد. این روش برای چندلایه به کار برده شده به خوبی نتیجه داد و تنها به محاسبات ساده‌ای نیاز داشت. میتلستد و بکر در سال 2003 [4] و 2004 [5]، با استفاده از تئوری مرتبه بالای لایه منفرد[3] بر پایه تغییر مکان و استفاده از توابع مثلثاتی در راستای ضخامت به تحلیل گوشه آزاد در چندلایه متعامد پرداختند. در همین سال، باروسو و همکارانش [6] با استفاده از روش ماتریس انتقال[4]، به بررسی وضعیت و مرتبه تکین تنش در مجاورت گوشه‌های مواد چند جنسی از جمله چندلایه‌های کامپوزیتی پرداختند. این مواد شامل همسان‌گرد[5]، غیرهمسان‌گرد[6]، متعامد[7] و همسان‌گرد متعامد[8] می‌شوند. میتلستد و بکر در سال 2005 [7] و 2006 [8]، وضعیت تکین تنش در مجاورت لبه آزاد و گوشه آزاد را با استفاده از روش المان محدود مرزی[9] در مواد غیرهمسان‌گرد و با چیدمان لایه‌های مختلف بررسی کردند. آن‌ها بیان داشتند در حالت کلی اثر گوشه آزاد بحرانی‌تر از اثر لبه آزاد است. ژن و وانجی [9] در سال 2009، با اصلاح تئوری سراسری- موضعی[10] اثر گوشه آزاد در چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن متعامد تحت بارگذاری حرارتی را مورد بررسی قرار دادند. این نتایج با نتایج حاصل از کارهای بکر و میتلستد مورد مقایسه قرار گرفت. اخیرا آنالیز خمش چندلایه‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری لایروایز، چندلایه‌های با خاصیت پیزوالکتریک، استوانه‌های تو خالی و همچنین اثرات گرادیان دما روی لبه‌های آزاد مورد مطالعه قرار گرفته است [11-14]، همچنین ژانگ و بینیندا مدلی برای پیش‌بینی خواص هرلایه از یک چندلایه کامپوزیتی و همچنین اثرات لبه آزاد ارائه کرده‌اند [15]. اثر ارتعاشات روی صفحات دایره‌ای پله دار همراه با لبه آزاد نیز بررسی شده است [16].

امروزه از روش سراسری- موضعی برای حل مسائل مختلفی مانند آنالیز کمانش پوسته‌ها در بارگذاری حرارتی و مکانیکی [17]، آنالیز ضربه در صفحه‌های ساندویچی کامپوزیتی [18] و همچنین تیرهای کامپوزیتی [19] استفاده شده است. از مدل المان محدود بر مبنای روش سراسری- موضعی برای حل مسئل مختلف در چندلایه‌های کامپوزیتی استفاده شده است [20-22].

در این مقاله هدف بررسی اثرات لبه و گوشه آزاد در چندلایه‌ای کامپوزیت متعامد و زاویه‌دار که به ترتیب تحت بار حرارتی و کششی یکنواخت هستند، با استفاده از روش سراسری- موضعی است. بدین منظور در این مدل ناحیه سراسری با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و ناحیه موضعی در مجاورت گوشه آزاد با استفاده از تئوری لایروایز ردی مدل می‌شوند و اثرات تنش‌های بین لایه‌ای نرمال و برشی روی لبه و گوشه آزاد بررسی می‌شوند. به طور کلی عوامل گوناگونی در به وجود آمدن پدیده تورق یا جدایی ین لایه‌ای[11] نقش دارند. مشکلات غیرقابل اجتناب مانند عوامل محیطی که در فرآیندهای ساخت به وجود می‌آیند، تنش‌های سیکلی، ضربه، تنش‌های بین‌لایه‌ای که در اثر ناپیوستگی‌های هندسی و یا جنس مواد به وجود می‌آیند (لبه‌ها، گوشه‌ها، سوراخ‌ها) و شکست در زمینه می‌توانند سبب جداشدن لایه‌ها، تبدیل آن‌ها به ورقه‌های باریک و در نتیجه کاهش قابل توجه سفتی مکانیکی گردند. پس از آن که جدایش در مرز لایه‌ها آغاز شد، در بارگذاری کمتر از حد شکست رشد می‌کند. با رشد جدایش، بار به گونه‌ای توزیع می‌شود که در نواحی دیگر نیز جدایی به وجود می‌آید. این جدایی‌ها همچنان افزایش می‌یابند تا به یکدیگر بپیوندند و در نهایت سبب شکست کامل قطعه شوند. در حالت کلی جدایش می‌تواند در یکی از مدهای بازشدگی و یا کچلی، برش درون‌صفحه‌ای و یا لغزش و برش برون صفحه‌ای و یا پیچش برشی و یا ترکیبی از این مدها به وجود آید [24,23]. تنش‌های برشی و نرمال بین لایه‌ای نیز می‌توانند عاملی برای پدیده تورق باشند. در مرجع [23] سان و ژو معیاری براساس تنش‌های برشی و نرمال بین لایه‌ای ارائه کرده‌اند که با استفاده از آن می‌توان پدیده تورق را با استفاده از تنش‌های بین لایه‌ای تحلیل کرد.

در ادامه به بررسی تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و لایروایز و روابط آن و همچنین نحوه پیاده‌سازی مدل سراسری- موضعی پرداخته می‌شود، سپس به مدل‌سازی مسئله گوشه آزاد پرداخته شده و در انتها نتایج بیان می‌شوند. برای بررسی اثر گوشه آزاد باید تنش‌های بین لایه‌ای را در امتداد دو لبه آزاد رسم کرد تا بتوان محل اتصال دو لبه آزاد که همان گوشه آزاد است را تحلیل کرد.

[1] Free corner
[2] Free edge
[3] Single layer higher-order theory
[4] Transfer matrix
[5] Isotropic
[6] Anisotropic
[7] Orthogonal
[8] Isotropic orthogonal
[9] Boundary finite element
[10] Local-global theory
[11] delamination

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.8.32.9]

2- تحلیل

2-1- تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول صفحات چندلایه

میدان تغییر مکان مربوط به مؤلفه تئوری لایه منفرد به صورت میدان تغییر شکل برشی مرتبه اول، مطابق رابطه (1)، در نظر گرفته می‌شود [25].

$$\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t)\\
v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t)\\
w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t)
\end{aligned}\tag{1}$$

در این روابط u_0، v_0 و w_0 به ترتیب تغییرمکان صفحه میانی چند لایه در راستای x، y و z و ϕ_x و ϕ_y چرخش حول محور x و y هستند. با استفاده از رابطه (1) می‌توان روابط کرنش- تغییرمکان را به‌صورت رابطه (2) نوشت:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial \phi_x}{\partial x}(x,y,t)\\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 + z\frac{\partial \phi_y}{\partial y}(x,y,t)\\
\varepsilon_z &= 0\\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} + z\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right)\\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x\\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y
\end{aligned}\tag{2}$$

همچنین روابط تنش-کرنش براساس رابطه (3) عبارتند از [25]:

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix}\varepsilon_x - \alpha_x\Delta T\\ \varepsilon_y - \alpha_y\Delta T\\ \gamma_{xy} - 2\alpha_{xy}\Delta T\end{Bmatrix}\\
&\begin{Bmatrix}\sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix}\bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45}\\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55}\end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix}\gamma_{yz}^{(0)}\\ \gamma_{xz}^{(0)}\end{Bmatrix}
\end{aligned}\tag{3}$$

رابطه (3) تنش‌های درون صفحه‌ای و تنش‌های برون صفحه‌ای برشی چندلایه را نشان می‌دهند. $\bar{Q}_{ij}$ (i,j= 1، 2، 4، 5، 6) ضرایب الاستیک کاهش‌یافته در مختصات مرجع سازه هستند. α_x، α_y و α_{xy} ضرایب انبساط حرارتی هستند.

2-2- تئوری لایروایز

در مقایسه با تئوری‌های لایه منفرد، تئوری لایروایز با معرفی تأثیرات برش عرضی و نرمال عرضی در لایه‌های گسسته تعریف واقعی‌تری از فیزیک مسئله ارائه می‌دهد و مدل‌سازی را دقیق‌تر می‌کند [26].

میدان تغییرمکان در تئوری لایروایز را می‌توان به‌صورت رابطه (4) تعریف کرد [25].

$$\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= \sum_{I=1}^{\mathrm{N}} U_I\,(x,y,t)\psi^{\mathrm{I}}(z)\\
v(x,y,z,t) &= \sum_{I=1}^{\mathrm{N}} V_I\,(x,y,t)\psi^{\mathrm{I}}(z)\\
w(x,y,z,t) &= \sum_{I=1}^{\mathrm{N}} W_I\,(x,y,t)\psi^{\mathrm{I}}(z)
\end{aligned}\tag{4}$$

در روابط بالا u، vوw تغییر مکان‌های کلی به ترتیب در راستاهای x y و z، N تعداد گره‌ها در راستای ضخامت و ψ^I توابع درون‌یاب تک‌بعدی لاگرانژ در راستای z هستند [25]. این توابع به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که به طور لایه‌به‌لایه پیوسته باشند. از آن‌جایی که تغییرات در راستای ضخامت در مؤلفه‌های تغییر مکان با استفاده از توابع تکه‌ای لاگرانژ تعریف می‌شود، تغییر مکان در راستای ضخامت پیوسته خواهد بود، اما کرنش عرضی دچار ناپیوستگی می‌شود، که این امر امکان پیوستگی تنش‌های عرضی را به وجود می‌آورد. در تئوری لایروایز می‌توان با استفاده از تقسیم لایه به چندین زیرلایه و استفاده از توابع درون‌یاب خطی لاگرانژ و یا با استفاده از توابع درون‌یاب مرتبه بالاتر در یک لایه، دقت حل را تا حد مطلوبی افزایش داد [25-26]. تئوری لایروایز شرح داده شده در این قسمت هیچ محدودیتی برای استفاده از زیرلایه‌ها ایجاد نمی‌کند و می‌توان با توجه به دقت مورد نیاز، تعداد زیرلایه‌ها را برابر، بیشتر و یا کمتر از تعداد لایه‌های واقعی در نظر گرفت [25-26].

روابط کرنش-تغییرمکان برای تئوری لایروایز را می‌توان با استفاده از رابطه (4) به‌صورت رابطه (5) به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \sum_{I=1}^{N}\frac{\partial U_I}{\partial x}\psi^I\\
\varepsilon\varepsilon_y &= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial V_I}{\partial y}\psi^I\\
\varepsilon\varepsilon_z &= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} W_I\frac{d\psi^{\mathrm{I}}}{dz}\\
\gamma_{xy} &= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{\partial U_I}{\partial y} + \frac{\partial V_I}{\partial x}\right)\psi^{\mathrm{I}}\\
\gamma_{xz} &= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} U_I\frac{d\Phi^I}{dz} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial W_I}{\partial x}\psi^{\mathrm{I}}\\
\gamma_{yz} &= \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} V_I\frac{d\Phi^I}{dz} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial W_I}{\partial y}\psi^{\mathrm{I}}
\end{aligned}\tag{5}$$

2-3- مدل سراسری- موضعی

در حل مسائل مربوط به چندلایه‌های کامپوزیتی می‌توان از ترکیب تئوری‌های مختلف، با عنوان مدل‌های چندگانه[1] یا مدل‌های سراسری-موضعی استفاده کرد و مسائل را با دقت بالا و با پیچیدگی‌های محاسباتی کمتر حل کرد [26,25]. مدل‌های سراسری- موضعی، حالت خاصی از مدل‌های چندگانه است و هنگامی که زیر ناحیه خاصی از دامنه حل مورد نظر که به نسبت کوچک است، به‌کار می‌روند. در بیشتر مواقع برای مدل‌های سراسری-موضعی از روش گام‌به‌گام[2] استفاده می‌شود [17-25,22]. اغلب ناحیه سراسری که بخش بزرگی از دامنه محاسباتی است، با استفاده از تئوری‌های لایه منفرد تحلیل می‌شود و با استفاده از نتایج آن شرایط مرزی نیرویی و تغییر مکان برای زیرناحیه موضعی که شامل بخش کوچکی از ناحیه محاسباتی که به منظور خاصی مورد تحلیل قرار می‌گیرد، استخراج می‌شود. ناحیه موضعی می‌تواند با استفاده از مش‌های بهبود یافته تئوری‌های لایه منفرد و یا مش‌های تئوری‌های مرتبه بالاتر و لایروایز مدل شود. جهت پیاده‌سازی این مدل‌ها از روش‌های عددی مانند اجزای محدود استفاده می‌شود [25]؛ بنابراین باید میدان‌های تغییر مکان، کرنش و تنش را برای المان‌ها تعریف کرد. میدان تغییر مکان در صورت کلی مطابق رابطه (6) به شرح زیر است.

$$u_i(x,y,z) = u_i^{\mathrm{ESL}}(x,y,z) + u_i^{\mathrm{LWT}}(x,y,z)\tag{6}$$

اندیس‌های i=1، 2، 3 به ترتیب تغییر مکان در جهت x، تغییر مکان در

[1] Multiple models
[2] Step by step

جهت y و تغییرمکان در جهت z است. u_i^{LWT} مؤلفه‌های تغییر مکان مربوط به تئوری لایه منفرد هستند که از روابط (1) u_i^{ESL} مؤلفه‌های تغییر مکان مربوط به تئوری لایروایز هستند که از روابط (4) به‌دست می‌آیند. با توجه به سطح دقت مورد نیاز می‌توان از بخشی و یا کل میدان لایروایز استفاده کرد تا مجموعه‌ای از المان‌هایی را به‌دست آورد که بتوانند رفتارهای پیچیده سینماتیکی را نشان دهند.

برای ایجاد اتصال مناسب بین المان‌های تئوری مرتبه اول برشی (FSDT) و تئوری لایروایز (LWT) باید شرط مرزی مطابق رابطه (7) برقرار باشد.

$$U_I = U_N = 0, V_I = V_N = 0, W_1 = 0 \tag{7}$$

شکل 1 نحوه تغییر مکان المان‌ها با توجه به شرط رابطه (7) را نشان می‌دهد.

4-2- پیاده‌سازی المان محدود مدل سراسری- موضعی

شکل ضعیف تئوری مرتبه اول برشی حداکثر می‌تواند شامل مشتق‌های مرتبه اول از متغیرهای u_0، v_0، w_0، ϕ_x، ϕ_y باشد؛ بنابراین می‌توان آن‌ها را با استفاده از توابع درون یاب لاگرانژ، تقریب زد، در نتیجه مؤلفه‌های تغییر مکان به صورت رابطه (8) تبدیل می‌شوند [25].

$$\begin{aligned}
u_o(x,y,t) &\approx \sum_{j=1}^{m} u_j(t)\psi_j^e\,(x,y)\\
v_o(x,y,t) &\approx \sum_{j=1}^{m} v_j(t)\psi_j^e\,(x,y)\\
w_o(x,y,t) &\approx \sum_{k=1}^{n} w_j(t)\psi_j^e\,(x,y)\\
\phi_x(x,y,t) &\approx \sum_{j=1}^{p} S_j^1(t)\psi_j^e\,(x,y)\\
\phi_y(x,y,t) &\approx \sum_{j=1}^{p} S_j^2(t)\psi_j^e\,(x,y
\end{aligned} \tag{8}$$

u_j، v_j، w_j، S_j^1، S_j^2 درجه‌های آزادی المان FSDT است. توابع درون‌یاب لاگرانژ $\psi_j^e(x,y)$ برای تقریب مقادیر تغییر مکان مورد استفاده قرار می‌گیرد. با نوشتن معادلات حرکت مربوط به چندلایه و استفاده از شکل ضعیف تئوری

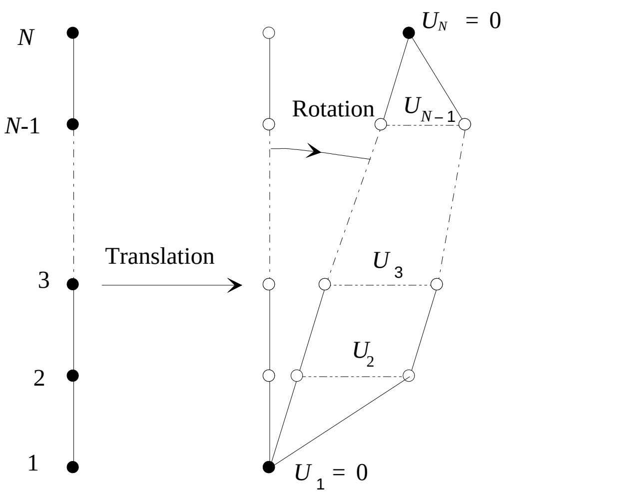

Fig. 1 Superposition of a FSDT and LWT elements displacement fields

شکل 1 برهم‌نهی میدان تغییر مکان المان‌های FSDT و LWT

مرتبه اول برشی و توابع درون‌یاب آن می‌توان مدل المان محدود تئوری مرتبه اول برشی را به‌دست آورد. مدل المان محدود تئوری مرتبه اول برشی مطابق رابطه (9) به شرح زیر است [25].

$$\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] & [K^{14}] & [K^{15}]\\ [K^{12}] & [K^{22}] & [K^{23}] & [K^{24}] & [K^{25}]\\ [K^{13}] & [K^{23}] & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}]\\ [K^{14}] & [K^{24}] & [K^{34}] & [K^{44}] & [K^{45}]\\ [K^{15}] & [K^{25}] & [K^{35}] & [K^{45}] & [K^{55}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{u^e\}\\ \{v^e\}\\ \{w^e\}\\ \{S^1\}\\ \{S^2\}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{F^1\}-\{F^{T1}\}\\ \{F^2\}-\{F^{T2}\}\\ \{F^3\}\\ \{F^4\}-\{F^{T4}\}\\ \{F^5\}-\{F^{T5}\}\end{Bmatrix} \tag{9}$$

با روندی مشابه شکل ضعیف و مدل المان محدود تئوری لایروایز مطابق رابطه (10) عبارت است از [25]:

$$\begin{aligned}
U_I(x,y,t) &\approx \sum_{j=1}^{p} U_I^j(t)\psi_j\,(x,y)\\
V_I(x,y,t) &\approx \sum_{j=1}^{p} V_I^j(t)\psi_j\,(x,y)\\
W_I(x,y,t) &\approx \sum_{k=1}^{q} W_I^{\mathrm{k}}(t)\varphi_k\,(x,y)
\end{aligned} \tag{10}$$

p و q تعداد گره‌های المان دوبعدی برای تقریب‌های درون‌صفحه‌ای و عرضی است، به همین ترتیب $U_I^{\mathrm{j}}(t)$، $V_I^j(t)$ و $W_I^{\mathrm{k}}(t)$ به ترتیب مقدار تغییر مکان‌های U_I، V_I و W_I در jامین گره از سطح Iام المان را نشان می‌دهند، $\Psi_j(x,y)$ و $\varphi_k(x,y)$ چند جمله‌ای‌های درون‌یاب دوبعدی لاگرانژ هستند. در این مقاله فرض بر این است که $q=p$ و در نتیجه $\varphi_k = \Psi_j$، همچنین در این حالت روابط به‌صورت رابطه (11) اصلاح می‌شوند.

$$\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}]\\ [K^{12}] & [K^{22}] & [K^{23}]\\ [K^{13}] & [K^{23}] & [K^{33}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{U_I\}\\ \{V_I\}\\ \{W_I\}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\{F_I^1\}-\{F_I^{T1}\}\\ \{F_I^2\}-\{F_I^{T2}\}\\ \{F_I^3\}-\{F_I^{T3}\}\end{Bmatrix} \tag{11}$$

با استفاده از المان‌های مدل‌شده در رابطه (9) و (11) می‌توان مدل المان محدود سراسری- موضعی را به شکل رابطه (12) به‌دست آورد [25].

$$\begin{bmatrix}[K^{EE}] & [K^{EL}]\\ [K^{LE}] & [K^{LL}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U^E\\ U^L\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\{F^E\}\\ \{F^L\}\end{bmatrix} \tag{12}$$

ماتریس $[K^{\mathrm{EE}}]$ همان ماتریس سختی رابطه (8)، $[K^{\mathrm{LL}}]$ ماتریس سختی رابطه (10) و ماتریس‌های $[K^{\mathrm{LE}}]$ و $[K^{\mathrm{LE}}]$ طبق رابطه (13)عبارتند از [25]:

$$[K^{\mathrm{EL}}] = \begin{bmatrix}K_{u_0U_I} & K_{u_0V_I} & K_{u_0W_I}\\ K_{v_0U_I} & K_{v_0V_I} & K_{v_0W_I}\\ K_{w_0U_I} & K_{w_0V_I} & K_{w_0W_I}\\ K_{\phi_xU_I} & K_{\phi_xV_I} & K_{\phi_xW_I}\\ K_{\phi_yU_I} & K_{\phi_yV_I} & K_{\phi_yW_I}\end{bmatrix},\qquad [K^{\mathrm{LE}}] = [K^{EL}]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

ضرایب ماتریس سختی نیز مطابق رابطه (14) تعریف می‌شوند [25]:

$$K_{\phi_xW_I} = I_{13}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\psi_j\,dx\,dy + I_{36}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\psi_j dx\,dy + C_{45}\int_{\Omega^e}\psi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy + C_{55}\int_{\Omega^e}\psi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy$$

$$K_{\phi_yU_I} = H_{16}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy +$$

$$H_{66}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy + H_{21}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy +$$
$$H_{26}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy + E_{45}\int_{\Omega^e}\psi_i\psi_j\,dx\,dy$$

$$K_{\emptyset_y V_I} = H_{26}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy +$$
$$H_{66}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy + H_{22}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy +$$
$$H_{26}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy + E_{44}\int_{\Omega^e}\psi_i\psi_j\,dx\,dy$$

$$K_{\emptyset_y W_I} = I_{36}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\psi_j\,dx\,dy +$$
$$I_{23}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\psi_j dx\,dy + C_{44}\int_{\Omega^e}\psi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy +$$
$$C_{45}\int_{\Omega^e}\psi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy$$

$$K_{u_0 U_I} = C_{11}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy +$$
$$C_{16}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy + C_{61}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy +$$
$$C_{66}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy$$

$$K_{u_0 V_I} = C_{12}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy +$$
$$C_{16}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy + C_{26}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy +$$
$$C_{66}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy$$

$$K_{u_0 W_I} = E_{13}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\psi_j\,dx\,dy + E_{36}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\psi_j dx\,dy$$

$$K_{v_0 U_I} = C_{16}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy +$$
$$C_{66}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy + C_{21}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy +$$
$$C_{26}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy$$

$$K_{v_0 V_I} = C_{26}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy +$$
$$C_{66}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy + C_{22}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy +$$
$$C_{26}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy$$

$$K_{v_0 W_I} = E_{36}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\psi_j\,dx\,dy + E_{23}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\psi_j dx\,dy$$

$$K_{w_0 U_I} = E_{55}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\psi_j\,dx\,dy + E_{45}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\psi_j dx\,dy$$

$$K_{w_0 V_I} = E_{45}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\psi_j\,dx\,dy + E_{44}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\psi_j dx\,dy$$

$$K_{w_0 W_I} = C_{45}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy +$$
$$C_{55}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy + C_{44}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy +$$
$$C_{45}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy$$

$$K_{\phi_x U_I} = H_{11}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy$$
$$+ H_{16}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy + H_{61}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}dx\,dy$$
$$+ H_{66}\int_{\Omega^e}\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}dx\,dy + E_{55}\int_{\Omega^e}\psi_i\psi_j\,dx\,dy \tag{14}$$

که در آن ضرایب طبق رابطه (15) عبارتند از:

$$C_{ij} = \int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\bar{C}_{ij}\Phi^I dz,\ E_{ij} = \int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\bar{C}_{ij}\frac{d\Phi^I}{\mathrm{dZ}}dz$$

$$H_{ij} = \int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\bar{C}_{ij}z\Phi^I dz\,,\ I_{ij} = \int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\bar{C}_{ij}z\frac{d\Phi^I}{\mathrm{dZ}}dz \tag{15}$$

3- مدل‌سازی مسئله گوشه آزاد

در این بخش، مسئله گوشه آزاد با استفاده از مدل سراسری- موضعی معرفی شده در بخش 2، مدل‌سازی می‌شود و به شرح هندسه مسئله، ناحیه سراسری و موضعی، نحوه مش‌بندی و اصلاح مش‌ها پرداخته خواهد شد، همان‌طور که در شکل 2 نشان‌داده شده چندلایه مورد نظر در این تحقیق، یک چندلایه مربع شکل با طول ضلع 4 سانتی‌متر است. ضخامت هر لایه از چندلایه 0.3 mm است. در این مقاله دامنه حل در صفحه xy با استفاده از مش‌بندی شکل 3 در ناحیه گوشه آزاد مدل شده است. در تئوری لایروایز، می‌توان در راستای ضخامت، لایه‌ها را به قسمت‌های مختلفی تقسیم کرد. هر کدام از این قسمت‌ها یک زیرلایه[1] نامیده می‌شوند. تعداد این زیرلایه‌ها می‌تواند بیشتر، برابر و یا حتی در حالتی که دو لایه مجاور از یک جنس باشند (که می‌توان برای هر دوی آن‌ها یک لایه در نظر گرفت)، کمتر از تعداد لایه‌های مادی باشند[26,25,10] .

از آن‌جایی که اثر گوشه آزاد و لبه آزاد به دلیل تغییر در خواص در مرز جداکننده لایه‌ها به وجود می‌آیند، هر کدام از این زیرلایه‌ها با نزدیک شدن به مرزها کوچک‌تر می‌شوند در شکل 4 نمونه‌ای از اصلاح تقسیم‌بندی زیر لایه‌ها مشهود است. همان‌طور که در بخش‌های پیشین اشاره شد ناحیه سراسری بخش اعظم دامنه حل از جمله نواحی داخلی چندلایه را تشکیل می‌دهد و با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی مدل‌سازی می‌شود، ناحیه موضعی ناحیه مجاور گوشه آزاد است که در این ناحیه تئوری لایروایز، حاکم است. شکل 4 چیدمان اصلاح‌شده زیرلایه‌ها در راستای ضخامت را نشان می‌دهد.

ناحیه‌ای که افزایش ناگهانی تنش‌های بین‌لایه‌ای در آن رخ می‌دهد، در حدود ضخامت لایه‌هاست و ناحیه لایه مرزی نامیده می‌شود، برای افزایش دقت حل ناحیه بزرگ‌تری نسبت به ناحیه لایه مرزی با استفاده از المان‌های لایروایز المان‌بندی شده است. در مجموع چندلایه مورد نظر به 400 المان تقسیم شده است که تعداد 140 المان از نوع مرتبه اول برشی و تعداد 260 المان از نوع لایروایز است. با توجه به مقایسه‌ای که با نتایج دیگر انجام می‌گیرد ثابت می‌شود این تعداد مش برای حل این مسئله مناسب است.

4- بحث و نتایج

در این قسمت ابتدا جهت اعتبارسنجی مدل سراسری- موضعی ارائه شده،

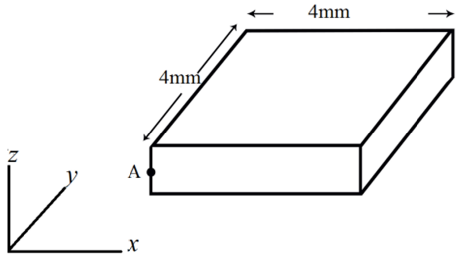

Fig. 2 Geometry of the laminate; the coordinate origin coincides with point A

شکل 2 هندسه چندلایه، انطباق مبدا مختصات بر نقطه A

[1] substrate

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.8.32.9]

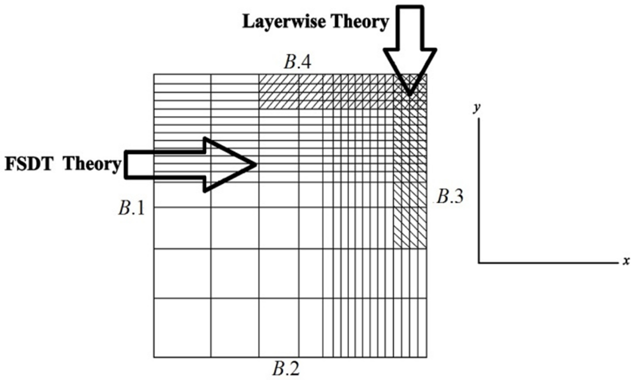

Fig. 3 The modified meshing of the solution domain

شکل 3 مش‌بندی اصلاح‌شده دامنه حل

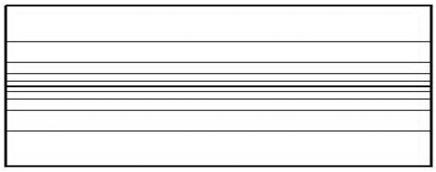

Fig. 4 The modified layout of the layers in the thickness direction

شکل 4 چیدمان اصلاح‌شده زیرلایه‌ها در راستای ضخامت

نتایج حاصل از کارهای ژن و وانجی [9]، بکر [3] و بکر و میتلستد [5] با مدل کنونی مقایسه می‌شود، سپس نتایج حاصل از بارگذاری کششی بر چندلایه‌های زاویه‌دار ارائه می‌شود.کدنویسی المان محدود مسئله، با استفاده از بسته تجاری متلب R2012 انجام می‌پذیرد. در مراجع بالا اثر گوشه آزاد در چندلایه متقارن چهار لایه CFRP با آرایش $[90/0]_s$ تحت بارگذاری حرارتی ΔT=100°C مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مکانیکی هر لایه طبق رابطه (16) به شرح زیر است [9،4،3].

$$E_1 = 135\text{ GPa}, E_2 = E_3 = 10\text{ GPa}$$
$$G_{12} = G_{13} = 5\text{ GPa},\ G_{23} = 3.972\text{ GPa}$$
$$\upsilon_{12} = \upsilon_{13} = \upsilon_{23} = 0.27, \alpha_1 = -0.6 \times 10^{-6}\ {}^{o}\text{C}^{-1},$$
$$\alpha_2 = \alpha_3 = 40 \times 10^{-6}\ {}^{o}\text{C}^{-1} \quad (16)$$

تغییر مکان چندلایه در مرز 1، درجهت محور x و در مرز 4، در جهت محور y محدود شده است و چندلایه تحت بارگذاری حرارتی قرار می‌گیرد، به دلیل ناپیوستگی خواص حرارتی در سطح بین لایه 0 درجه و 90 درجه، این بارگذاری سبب به وجود آمدن تنش‌های بین‌لایه‌ای در مجاورت گوشه آزاد و در طول لبه آزاد می‌شود.

در شکل 5 یک آنالیز حساسیت در مورد اثر تعداد زیرلایه‌های تئوری لایروایز مورد استفاده بر تنش نرمال بین‌لایه‌ای در مجاورت لبه آزاد چندلایه متقارن متعامد مورد بحث انجام شده است. دیاگرام متناظر تعداد 3، 5 و 7 نشان داده شده است، همچنین نتایج مرجع [27] که کار نثیر و طهانی است، جهت اعتبارسنجی نتایج مدل کنونی در شکل 5 آورده شده است. چنان‌چه از شکل 5 مشاهده می‌شود، تعداد زیرلایه‌ها در راستای ضخامت مربوط به ناحیه موضعی برابر n=7 نتایج قابل قبولی را ائه می‌دهد.

با توجه به شکل 5 و همچنین مدل‌سازی‌های مختلف مشخص می‌شود با استفاده از این تعداد زیرلایه، دقت قابل قبولی حاصل خواهد شد. نتایج حاصل از مدل ارائه شده و نتایج تحقیقات پیشین در شکل‌های 6 تا 9 مشاهده می‌شود. نتایج حاصل از این مقاله برای بارگذاری حرارتی با مراجع پیشین مقایسه شده است. در مرجع [3] که اثر بکر است، روش حل با استفاده از یک تحلیل توصیفی فرم بسته[1] از اثرات گوشه آزاد برای یک چندلایه ساده کامپوزیتی است. در مرجع [5] از روش حل بر مبنای تئوری مرتبه بالای فرم بسته برای به‌دست‌آوردن تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در مجاورت گوشه آزاد استفاده شده است. در مرجع [9] ژن و وانجی با استفاده از مدل جابه‌جایی مرتبه بالا[2] که بر مبنای المان محدود است، برای آنالیز مسئله گوشه آزاد استفاده کرده‌اند. نتایج استنتاج‌شده از مدل ارائه‌شده در تحقیق کنونی با نتایج حاصل از نرم‌افزار نسترن[3] [3] که بر پایه روش المان محدود (FEM) کلاسیک مقایسه شده است. در مرجع [3] از المان آجری (شش‌وجهی) 20 گرهی سه‌بعدی Hex20 در نرم‌افزار نسترن جهت تحلیل المان محدود استفاده شده است. در این تحلیل هر لایه چندلایه به 7 المان آجری گسسته شده است و برخی تظریف شبکه (مش) در گوشه آزاد چندلایه انجام شده است [3]. توجه به شکل‌های 6 تا 9 کاملا مشهود است که مدل سراسری- موضعی در حل مسئله گوشه آزاد از دقت خوبی برخوردار است. باید دقت شود که در مسئله بالا تنش‌های برشی بین‌لایه‌ای در مجاورت گوشه آزاد مقدار کمتری نسبت به تنش‌های بین‌لایه‌ای برشی حاصل از لبه آزاد دارند. همان‌طور که در شکل‌های6 تا 8 نشان داده شده تنش نرمال بین لایه‌ای در این ناحیه غالب است که این مسئله احتمال وقوع آسیب‌هایی نظیر جدایی بین‌لایه‌ای[4] را در مجاورت گوشه آزاد بیشتر می‌کند.

شکل 6 تنش نرمال بین‌لایه‌ای σ_{zz} در راستای x بین لایه‌های0 و 90 درجه را نمایش می‌دهد. مقدار تنش نرمال بین‌لایه‌ای در x= 3.993 mm برابر با σ_{zz}=32.75MPa است با دقت در شکل 7 و با توجه به این‌که بارگذاری به صورت حرارتی است، نمودار تنش نرمال بین لایه‌ای σ_{zz} برحسب y نیز مانند شکل 6، (σ_{zz} - x) است. با دقت در شکل‌های 8 و 9 مشخص می‌گردد که تنش‌های برشی بین‌لایه‌ای σ_{yz} و σ_{xz} در مجاورت گوشه آزاد دارای نقطه اوج هستند، این مقدار بیشینه در y= x=3.77 mm. بوده و تنش‌های بین‌لایه‌ای برشی در آن برابر σ_{yz}=σ_{xz}=18.83 MPa است، همچنین σ_{yz} در y=3.993mm دارای مقدار σ_{yz}=10.67 MPa است، در حالی که مقدار σ_{xz}نیز در x=3.993 mm دارای مقدار σ_{yz}=10.67 MPa است. به طور کلی در بارگذاری حرارتی حالت تنش‌های برشی بین لایه σ_{yz} و σ_{xz} دارای مقدار عددی برابر بوده و نمودار آن‌ها متقارن است.

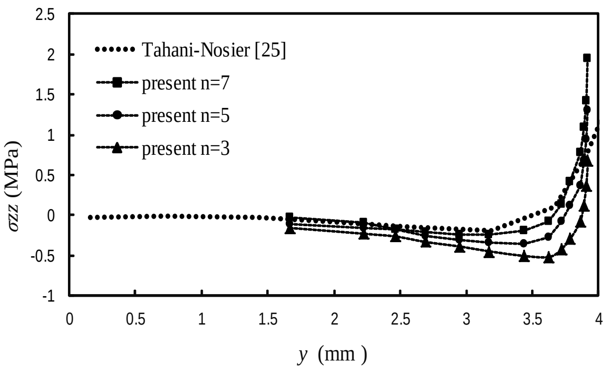

Fig. 5 Interlaminar normal stress σ_{zz} versus y coordinate in the free edge at the interface of 0/90.under extension loading.

شکل 5 تنش نرمال بین لایه‌ای σ_{zz} در مجاورت لبه آزاد در سطح میانی 0/90 در راستای محور y

[1] closed-form
[2] higher-order displacement model
[3] MSC/NASTRAN
[4] delamination

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.8.32.9]

در ادامه اثر جهت‌گیری الیاف بر پدیده گوشه آزاد در چندلایه‌های زاویه‌دار و آرایش $[\theta/\text{-}\theta]_s$ تحت بارگذاری کششی مورد بررسی قرار می‌گیرد. این چندلایه شامل 4 لایه که به‌صورت متقارن مطابق شکل 10 قرار گرفته‌اند و تحت کرنش کششی $\varepsilon_0=10^{-6}$ در راستای محور x بارگذاری می‌شود. جنس کامپوزیت گرافیت/ اپوکسی بوده و خواص مکانیکی هر لایه از این چندلایه به شرح رابطه (17) است [27,28].

$$E_1 = 137.9\ \text{GPa},\quad E_2 = E_3 = 14.48\ \text{GPa}$$
$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5.86\ \text{GPa} \qquad (17)$$
$$\upsilon_{12} = \upsilon_{13} = \upsilon_{23} = 0.21$$

نتایج حاصل از بارگذاری کششی برای چندلایه‌های زاویه‌دار در شکل‌های 11-14 نشان داده شده است. در شکل 11 و 12 مشخص است که توزیع تنش نرمال σ_{zz} در راستای x و y یکسان نیست. در مثال پیشین که مربوط به بارگذاری حرارتی بود تنش در راستای دو محور به صورت یکسان توزیع می‌گشت. در این‌جا به دلیل بارگذاری در جهت محور x توزیع تنش در شکل‌های 11 و 12 متفاوت شده است.

با توجه به شکل‌های 11-14 مشخص می‌شود که با افزایش زاویه، اثر گوشه آزاد به خصوص اثر حاصل از تنش نرمال افزایش می‌یابد. این بدین معنی است که با افزایش زاویه الیاف امکان ایجاد جدایی بین‌لایه‌ای افزایش می‌یابد و این آسیب در لایه‌های با زاویه الیاف بزرگ‌تر از گوشه‌های چندلایه

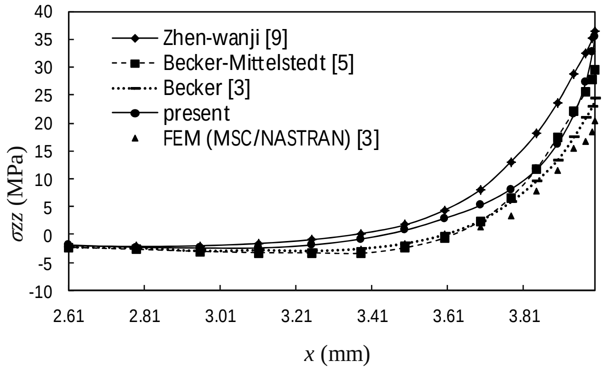

Fig. 6 Interlaminar normal stress σ_{zz} in the vicinity of free corner in the cross-ply laminate at the 90/0 interface under thermal loading.

شکل 6 نمودار تنش نرمال بین لایه‌ای در مجاورت گوشه آزاد کامپوزیت متعامد در سطح 90/0 تحت بار حرارتی در راستای محور x.

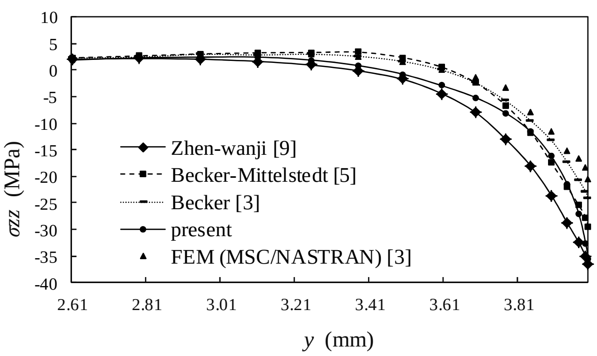

Fig. 7 Interlaminar normal stress σ_{zz} in the vicinity of free corner in the cross-ply laminate at the 90/0 interface under thermal loading.

شکل 7 نمودار تنش نرمال بین‌لایه‌ای در مجاورت گوشه آزاد کامپوزیت متعامد در سطح 90/0 تحت بار حرارتی در راستای محور y

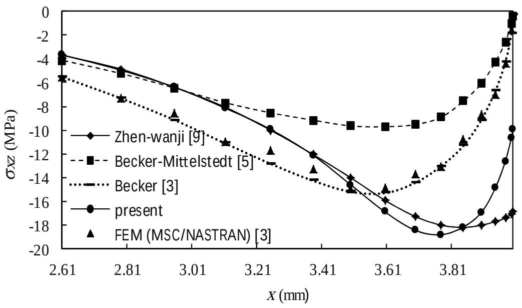

Fig. 8 Interlaminar shear stress σ_{xz} in the vicinity of free corner in the cross-ply laminate at the 90/0 interface under thermal loading

شکل 8 نمودار تنش برشی بین‌لایه‌ای در مجاورت گوشه آزاد کامپوزیت متعامد در سطح 90/0 تحت بار حرارتی در راستای محور x

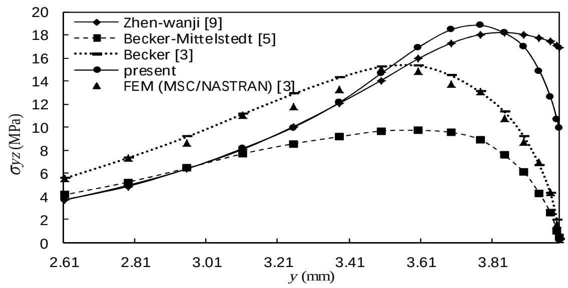

Fig. 9 Interlaminar shear stress σ_{yz} in the vicinity of free corner in the cross-ply laminate at the 90/0 interface under thermal loading

شکل 9 نمودار تنش برشی بین‌لایه‌ای در مجاورت گوشه آزاد کامپوزیت متعامد در سطح 90/0 تحت بار حرارتی در راستای محور y

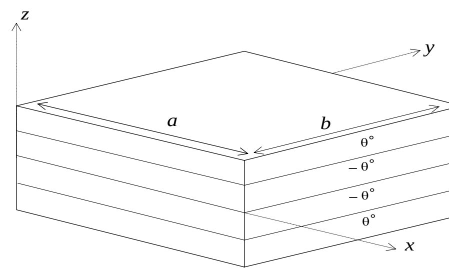

Fig. 10 Geometry of the angle-ply composite laminate

شکل 10 هندسه چندلایه کامپوزیتی زاویه‌دار

آغاز می‌شود. برای نمونه تنش نرمال بین‌لایه‌ای در نقاط $y/b=1$ و $x/a=1$ برای زاویه 15 درجه برابر σ_{zz}=0.82 MPa است، در حالی که این مقدار در همان نقطه برای زاویه 60 درجه به σ_{zz}=6.33 MPa افزایش می‌یابد. مقدار تنش برشی بین‌لایه‌ای σ_{xz} در نقطه x/a=1 برای زاویه 15 درجه برابر σ_{xz}=0.07 MPa، برای زوایه 30 درجه برابر σ_{xz} =0.32 MPa و برای زاویه 60 درجه برابر σ_{xz}=0.02 MPa است. مقدار تنش برشی بین‌لایه‌ای σ_{yz} در نقطه y/a=1 برای زاویه 15 درجه برابر σ_{yz}=0.03 MPa، برای زاویه 30 درجه برابر σ_{yz}=0.05 MPa و برای زاویه 60 درجه برابر σ_{yz}=0.9 MPa است.

با توجه به شکل‌های 11-14 می‌توان این طور بیان کرد که آغاز جدایش از گوشه‌ها در لایه‌هایی با زاویه الیاف بزرگ‌تر از 30 درجه رخ می‌دهد. در لایه‌هایی که زاویه الیاف آن‌ها کمتر از 30 درجه است، اثر لبه آزاد و گوشه آزاد تقریبا مشابه است. در شکل‌های 13 و 14 بیشترین تنش‌های برشی σ_{yz} و σ_{xz} در لایه‌های 30 درجه در مجاورت لبه‌های آزاد رخ می‌دهند که می‌تواند

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.8.32.9]

منجر به لغزش لایه‌ها و آسیب چندلایه در لبه‌ها شود. در چندلایه‌هایی که دارای الیاف با زاویه بیشتر از 30 هستند، کمترین تنش برشی در لبه‌ها رخ می‌دهد؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در لایه‌های با زاویه کم لغزش لایه‌ها در لبه آزاد موجب خرابی می‌شود و در لایه‌ها با زاویه بیشتر جدایی بین لایه‌ای در گوشه‌ها موجب آسیب چندلایه می‌شود.

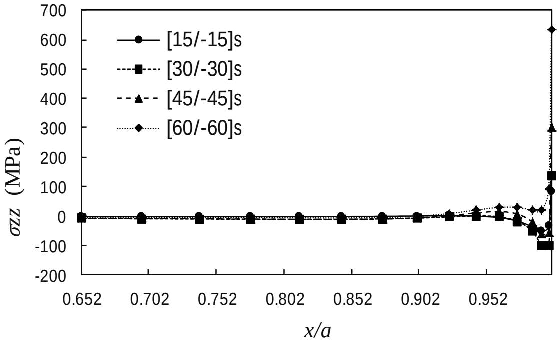

Fig. 11 Interlaminar normal stress σ_{zz} versus *x/a* non dimentional coordinate in the angle-ply laminate at the θ/-θ interface under extension loading.

شکل 11 نمودار تنش نرمال بین‌لایه‌ای در مجاورت لبه آزاد کامپوزیت زاویه‌دار در سطح θ/-θ تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *x/a*.

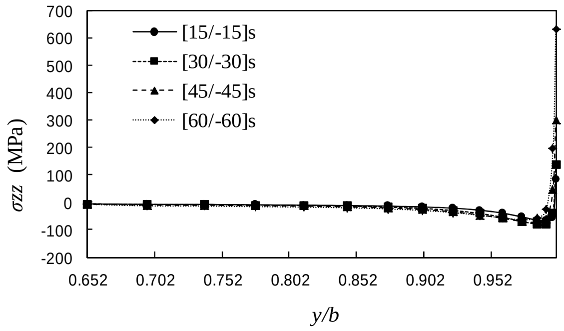

Fig. 12 Transverse normal stress σ_{zz} versus *y/b* non dimentional at the angle-ply laminate at θ/-θ interface under extension loading.

شکل 12 نمودار تنش نرمال بین‌لایه‌ای در مجاورت لبه آزاد کامپوزیت با الیاف زاویه‌دار در سطح θ/-θ تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *y/b*

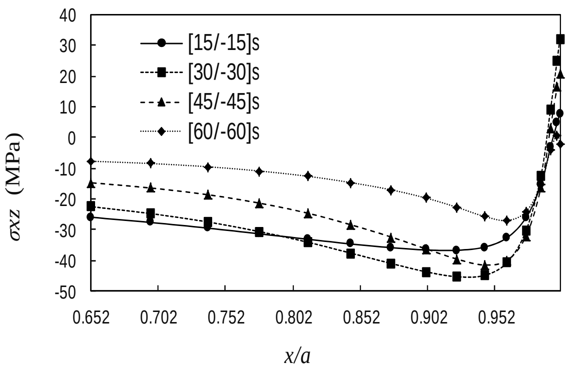

Fig.13 Interlaminar shear stress σ_{xz} versus *x/a* non dimentional coordinate in the angle-ply laminate at the θ/-θ interface under extension loading.

شکل 13 نمودار تنش برشی بین‌لایه‌ای در مجاورت لبه آزاد کامپوزیت زاویه‌دار در سطح θ/-θ تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *x/a*

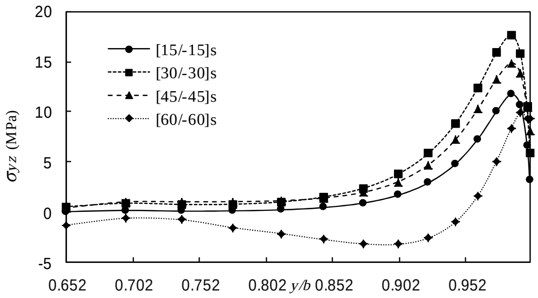

Fig. 14 Interlaminar shear stress σ_{yz} versus *x/a* non dimentional coordinate in the angle-ply laminate at the θ/-θ interface under extension loading.

شکل 14 نمودار تنش برشی بین‌لایه‌ای در مجاورت لبه آزاد کامپوزیت زاویه‌دار در سطح θ/-θ تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *y/b*

در ادامه به بررسی اثر ضخامت چندلایه بر تنش‌های بین‌لایه‌ای در سطح -45/45 هنگامی که چند لایه $[45/\text{-}45]_s$ تحت کشش یکنواخت در راستای محور *x* قرار می‌گیرد، پرداخته می‌شود. بدین منظور چندین چندلایه با ضخامت‌های h=0.1, 0.3, 0.5, 1, 1.5 mm درنظر گرفته و تحت کشش یکنواخت $\varepsilon_0=10^{-6}$ قرار داده می‌شوند. خواص چند لایه نیز مطابق رابطه (17) است. نمودارها برای فهم بیشتر در راستای طول و عرض چندلایه بی‌بعد شده‌اند.

با دقت در شکل‌های 15-18 مشخص می‌شود تمامی تنش‌های بین‌لایه‌ای با افزایش ضخامت کاهش می‌یابند. این کاهش تنش‌ها در نقاط انتهایی نمودار و گوشه آزاد مشهودتر است. برای نمونه تنش نرمال بین‌لایه‌ای σ_{zz} در نقطه x/a=1 برای ضخامت h=0.1mm برابر 6.54 MPa بوده، در حالی که این مقدار تنش برای ضخامت h=1.5 mm تا مقدار 0.73 MPa کاهش می‌یابد. مقدار تنش نرمال بین‌لایه‌ای σ_{zz} در راستای محور *y* برای ضخامت h=0.1mm در نقطه‌ی y/a=1 برابر 6.54 MPa بوده که این مقدار تنش برای ضخامت h=1.5 mm در همان نقطه تا 0.73 MPa کاهش می‌یابد. می‌توان نتیجه گرفت هنگام بارگذاری کششی چندلایه کامپوزیتی زاویه‌دار، افزایش ضخامت چندلایه تأثیر قابل توجهی در کاهش تنش‌های نرمال بین لایه‌ای در انتهای طول و عرض چندلایه و در نزدیکی گوشه آزاد دارد. با دقت در شکل‌های 15 تا 18 می‌توان نتیجه گرفت هنگامی که یک چندلایه کامپوزیتی زاویه‌دار تحت کشش یکنواخت قرار می‌گیرد، تنش‌های نرمال بین‌لایه‌ای به وجود آمده مقدار بیشتری نسبت به تنش‌های برشی بین‌لایه‌ای دارند.

مقدار تنش برشی σ_{xz} در نقطه x/a=1 برای ضخامت h=0.1mm برابر 0.87 MPa و این مقدار تنش برای ضخامت h=1.5 mm برابر با 0.01 MPa است. تنش برشی σ_{yz} در نقطه y/a=1 برای ضخامت h=0.1mm برابر 0.33 MPa بوده که این مقدار برای ضخامت h=1.5 mm در همان نقطه تقریبا تا مقدار صفر کاهش می‌یابد.

با دقت در شکل‌های 15-18 و اعداد گزارش‌شده نتیجه‌گیری می‌شود که افزایش ضخامت چندلایه سبب کاهش تمامی تنش‌های بین لایه‌ای در راستای طول و عرض چندلایه و روی لبه آزاد و گوشه آزاد می‌شود که این پدیده شامل کاهش تنش‌های بین‌لایه‌ای روی گوشه‌های آزاد تأثیر بیشتری دارد.

در انتها به تأثیر لایه‌چینی یک چندلایه کامپوزیتی زاویه‌دار تحت کشش یکنواخت پرداخته می‌شود. بدین منظور دو چندلایه کامپوزیتی متقارن

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.8.32.9]

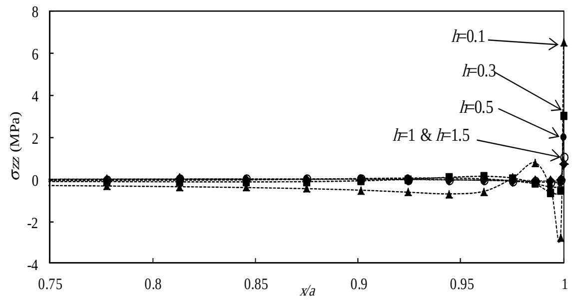

Fig. 15 Interlaminar normal stress σ_{zz} versus *x/a* non-dimentional coordinate for different laminate thickness in the angle-ply laminate at the 45/-45 interface under extension loading

شکل 15 نمودار تنش نرمال بین‌لایه‌ای در کامپوزیت زاویه‌دار در سطح 45-/45 تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *x/a* برای ضخامت‌های مختلف

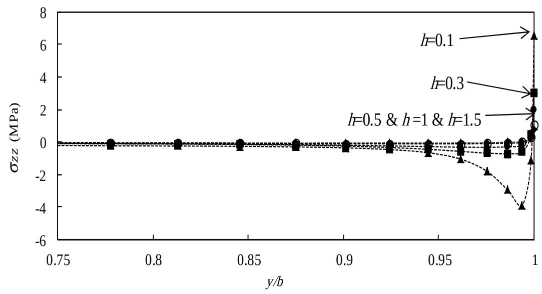

Fig. 16 Interlaminar normal stress σ_{zz} versus *y/b* non-dimentional coordinate for different laminate thickness in the angle-ply laminate at at 45/-45 interface under extension loading

شکل 16 نمودار تنش نرمال بین‌لایه‌ای در کامپوزیت زاویه‌دار در سطح 45-/45 تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *y/b* برای ضخامت‌های مختلف

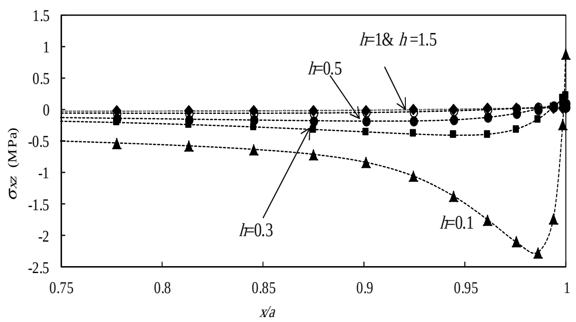

Fig. 17 Interlaminar shear stress σ_{xz} versus *x/a* non-dimentional coordinate for different laminate thickness in the angle-ply under extension loading laminate at the 45/-45 interface

شکل 17 نمودار تنش برشی بین‌لایه‌ای در چندلایه زاویه‌دار در سطح 45-/45 تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *x/a* برای ضخامت‌های مختلف

$[45/-45]_s$ و $[-45/45]_s$ تحت کشش یکنواخت قرار می‌گیرند و تنش‌های نرمال و برشی بین‌لایه‌ای در راستای طول و عرض چندلایه و روی لبه و گوشه آزاد آن مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرند. خواص چندلایه نیز مطابق رابطه (17) است.

شکل‌های 19-22 تأثیر چیدمان لایه‌های یک چندلایه کامپوزیتی زاویه‌دار با زوایای 45 درجه را بر مؤلفه‌های نرمال و برشی تنش بین‌لایه‌ای در سطح میانی لایه‌های 45-/45 تحت بار کششی یکنواخت نشان می‌دهند. با دقت در این شکل‌ها مشاهده می‌شود تنش‌های برشی بین لایه‌ای با تغییر در

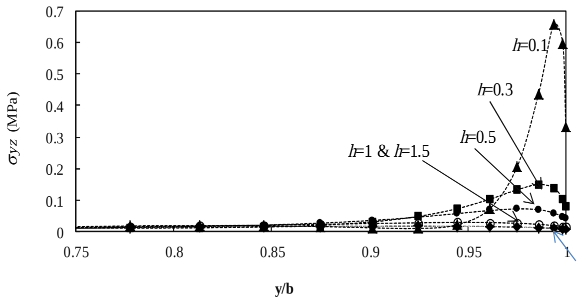

Fig. 18 Interlaminar shear stress σ_{yz} versus *y/b* non-dimentional coordinate for different laminate thickness in the angle-ply laminate at the 45/-45 interface under extension loading

شکل 18 نمودار تنش برشی بین‌لایه‌ای در کامپوزیت زاویه‌دار در سطح 45-/45 تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *y/b* برای ضخامت‌های مختلف

ترتیب لایه‌چینی به‌صورت قرینه نسبت به محور افقی تغییر می‌کنند و دارای مقدار عددی برابر هستند، ولی تنش‌های نرمال بین‌لایه‌ای در گوشه آزاد نسبت به تغییر چیدمان لایه‌ها واکنش نشان می‌دهند.

برای نمونه مقدار تنش نرمال بین‌لایه‌ای σ_{zz} در نقطه x/a=1 برای چندلایه $[45/-45]_s$ برابر 0.78 MPa بوده، در حالی که این مقدار تنش برای چندلایه $[-45/45]_s$ برابر 0.23 MPa است. مقدار تنش نرمال بین‌لایه‌ای σ_{zz} در نقطه y/b=1 برای چندلایه $[45/-45]_s$ برابر 0.78 MPa است و این مقدار برای چندلایه $[-45/45]_s$ در همان نقطه به مقدار 0.23 MPa می‌رسد. با دقت در شکل‌های 18 و 19 نتیجه‌گیری می‌شود که تغییر چیدمان چندلایه تغییر خاصی در تنش‌های نرمال بین لایه‌ای روی لبه آزاد ندارد و نمودار آن‌ها تقریبا بر هم منطبق است، ولی در انتهای لبه آزاد و روی گوشه آزاد تنش‌های نرمال بین‌لایه‌ای دارای تغییراتی هستند.

مقدار تنش برشی σ_{xz} برای هر دو چندلایه $[45/-45]_s$ و $[-45/45]_s$ در نقطه x/a=1 برابر مقدار عددی 0.31 MPa است، همچنین مقدار تنش برشی بین لایه‌ای σ_{yz} برای هر دو چندلایه مورد بررسی در نقطه y/b=1 برابر مقدار عددی 0.23 MPa است.

با توجه به شکل‌های 19-22 مشاهده می‌شود تنش‌های بین‌لایه‌ای در انتهای لبه آزاد چندلایه دارای یک نقطه برآمدگی یا فرورفتگی هستند که این موضوع بیانگر بالا بودن شدت تنش‌های بین‌لایه‌ای در این نقاط و امکان جدایی بین لایه‌ای بیشتر در این نقاط چندلایه است. در انتهای نمودارها تغییر تنش از مقدار منفی به مثبت یا بالعکس دیده می‌شود.

5- جمع‌بندی

در این مقاله مدل سراسری- موضعی اجزاء محدود جهت بررسی اثرات گوشه آزاد در چند لایه‌های کامپوزیتی معرفی و بررسی شد. روابط المان محدود مدل با استفاده از ترکیب تئوری‌های مرتبه اول برشی و لایرواиз ردیبه‌دست آمد. با توجه به کاهش محاسبات و پیچیدگی این روش نسبت به مدل‌های سه بعدی می‌توان در مسائلی که نیاز به دقت بالای تحلیل‌های سه بعدی دارند، با تقریب قابل قبولی از این روش استفاده کرد. در این‌جا صحت این روش با استفاده از نتایج موجود در تحقیقات پیشین مورد تأیید قرار گرفت و سپس با استفاده از آن اثر گوشه آزاد در چندلایه‌های زاویه‌دار مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که در بارگذاری حرارتی توزیع تنش نرمال و برشی بین‌لایه‌ای از نظر مقدار عددی در دو راستای طول و عرض چندلایه مشابه است، همچنین در بارگذاری کشش تک جهته، زاویه

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.8.32.9]

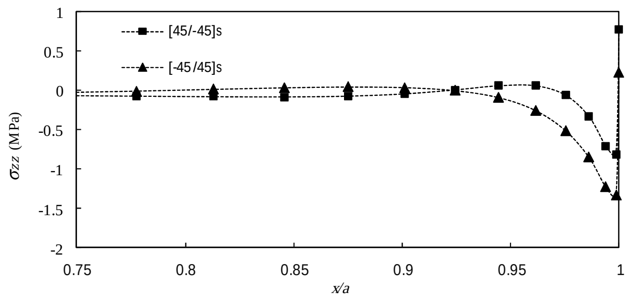

Fig. 19 Interlaminar normal stress σ_{zz} versus *x/a* non-dimentional coordinate for $[45/-45]_s$ and $[-45/45]_s$ laminates under extension loading at the 45/-45 interface

شکل 19 نمودار تنش نرمال بین‌لایه‌ای در سطح میانی 45-/45 برای چندلایه‌های $[45/-45]_s$ و $[-45/45]_s$ تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *x/a*.

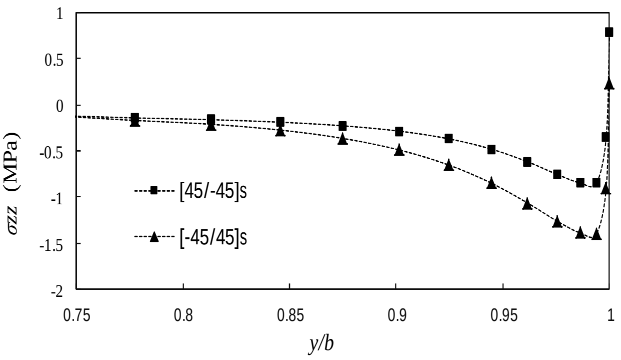

Fig. 20 Interlaminar normal stress σ_{zz} versus *y/b* non-dimentional coordinate for $[45/-45]_s$ and and $[-45/45]_s$ laminates under extension loading at the 45/-45 interface

شکل 20 نمودار تنش نرمال بین‌لایه‌ای در سطح میانی 45-/45 برای چندلایه‌های $[45/-45]_s$ و $[-45/45]_s$ تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *y/b*

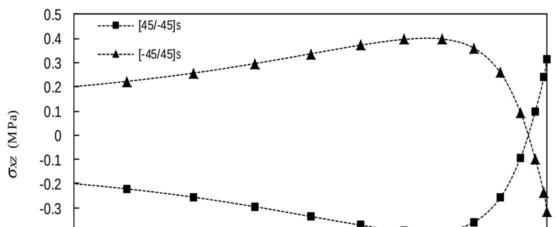

Fig. 21 Interlaminar shear stress σ_{xz} versus *x/a* non-dimentional coordinate for $[45/-45]_s$ and and $[-45/45]_s$ laminates under extension loading at the 45/-45 interface.

شکل 21 نمودار تنش برشی بین‌لایه‌ای در سطح میانی 45-/45 برای چندلایه‌های $[45/-45]_s$ و $[-45/45]_s$ تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *x/a*.

الیاف در مقدار تنش‌های بین‌لایه‌ای در مجاورت گوشه آزاد اثر بسزایی دارد، به گونه‌ایی که در مجاورت گوشه آزاد مقدار تنش نرمال بین‌لایه‌ای در زاویه 15 درجه 0.82 MPa بوده در حالی که این مقدار برای زاویه 60 درجه تا6.33 MPa افزایش می‌یابد. اثر گوشه آزاد می‌تواند به اندازه لبه آزاد خطرناک باشد، چرا که همان‌طور که نتایج نشان می‌دهند بیشترین مقدار تنش‌های بین‌لایه‌ای در مجاورت گوشه آزاد هستند و نمودارها در مجاورت گوشه آزاد از نظر عددی دارای نقطه بیشینه هستند. در نتیجه در طراحی

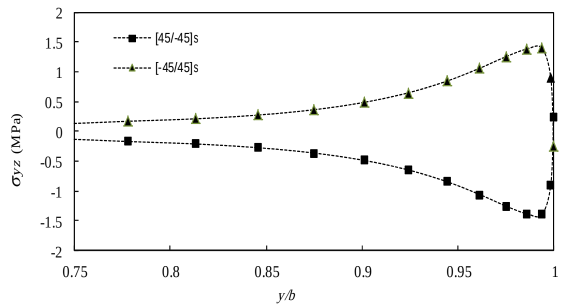

Fig. 22 Interlaminar shear stress σ_{yz} versus *y/b* non-dimentional coordinate for $[45/-45]_s$ and and $[-45/45]_s$ laminates under extension loading at the 45/-45 interface

شکل 22 نمودار تنش برشی بین‌لایه‌ای در سطح میانی 45-/45 برای چندلایه‌های $[45/-45]_s$ و $[-45/45]_s$ تحت بار کششی در راستای محور بدون بعد *y/b*

سازه‌های کامپوزیتی باید این اثر را نیز مورد نظر قرار داد. به علاوه نتایج روشن می‌سازند که در زوایای کمتر از 30 درجه، اثر لبه آزاد و گوشه آزاد تقریبا مشابه هم است. با توجه به نتایج تحقیق حاضر مشخص شد بحرانی‌تر بودن اثر گوشه آزاد و یا لبه آزاد می‌تواند تابعی از زاویه الیاف باشد. با بررسی ضخامت چندلایه‌های زاویه‌دار مشاهده شد که با افزایش ضخامت، تنش‌های بین‌لایه‌ای به ویژه در انتهای لبه آزاد و گوشه آزاد کاهش قابل توجهی دارند؛ بنابراین در طراحی استفاده از چندلایه‌های کامپوزیتی ضخیم‌تر مناسب‌تر است، همچنین نتایج ثابت می‌کنند تغییر در چیدمان لایه‌های چندلایه سبب تغییر رفتار تنش‌های نرمال بین لایه‌ای می‌شود، هرچند این تغییر لایه‌چینی تأثیری روی مقدار تنش‌های برشی بین لایه‌ای ندارد.

6- مراجع

[1] B. Pipes, N. J. Pagano, Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension, *Composite Materials*, Vol. 4, No. 4, pp. 528-540, 1970.

[2] Ch. Mittelstedt, W. Becker, Interlaminar stress concentration in layered structures: Part I-A selective literature survey on the free-edge effect since 1967, *Composite Materials*, Vol. 38, No. 12, pp. 1037-1062, 2004.

[3] W. Becker, P. P. Jin, P. Neuser, Interlaminar stresses at the free corners of a laminate, *Composite Materials*, Vol. 45, No. 2, pp. 155-162,1999.

[4] Ch. Mittelstedt, W. Becker, Free-corner effects in cross-ply laminates: An approximate higher-order theory solution, *Composite Materials*, Vol. 37, No. 22, pp. 2043-2068, 2003.

[5] Ch. Mittelstedt, W. Becker, A single-layer theory approach to stress concentration phenomena in layered plates, *Composites Science and Technology*, Vol. 64, No. 10-11, pp 1737-1748, 2004.

[6] A. Barroso, V. Mantič, F. París, Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners, *Fracture*, Vol. 119, No. 1, pp. 1-23, 2003.

[7] Ch. Mittelstedt, W. Becker, Asymptotic analysis of stress singularities in composite laminates by the boundary finite element method, *Composite Structures*, Vol. 71, No. 2, pp. 210-219, 2005.

[8] Ch. Mittelstedt, W. Becker, Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method, *Solids and Structures*, Vol. 43, No. 10, pp. 2868-2903, 2006.

[9] W. Zhen, Ch. Wanji, A higher-order displacement model for stress concentration problems in general lamination configurations, *Material & Design*, Vol. 30, No. 5, pp. 1458-1467, 2009.

[10] W. Becker, P. P. Jin, J. Lindemann. The free corner effect in thermally loaded laminates, *Composite Structures*, Vol. 52, No. 1, pp. 97-102, 2001.

[11] H. Yazdani Sarvestani, A. Naghashpour, M. Heidari-Rarani, Bending analysis of a general cross-ply laminated using 3D elasticity solution and layerwise theory, *Advanced Structural Engineering*, Vol. 7, No. 4, pp. 329-340, 2015.

[12] J. Q. Ye, H. Y. Sheng, Free-edge effect in cross-ply laminated hollow cylinders subjected to axisymmetric transverse loads, *Mechanical Sciences*, Vol. 45, No. 8, pp. 1309-1326, 2003.

[13] J. S. Ahn, Y. W Kim, Analysis of circular free edge effect in composite laminates by ρ-convergent global–local model, *Mechanical Sciences*, Vol. 66, No. 1, PP. 149-155, 2013.

[14] M. Mirzababaee, M. Tahani, Accurate determination of coupling effects on free edge interlaminar stresses in piezoelectric laminated plates, *Composite Materials*, Vol. 30, No. 8, pp. 2963-2974, 2009.

[15] Ch. Zhang, A. Binienda, A meso-scale finite element model for simulating free-edge effect in carbon/epoxy textile composite, *Mechanics of Materials*, Vol. 76, No. 1, pp. 1-19, 2014.

[16] T. T. H. Le, C. M. Wang, T. Y. Wu, Exact vibration results for stepped circular plates with free edge, *Mechanical Sciences*, Vol. 47, No. 8, pp. 1224–1248, 2005.

[17] M. Shariyat, Nonlinear thermomechanical dynamic buckling analysis of imperfec viscoelastic composite/sandwich shells by a double-superposition global–local theory and various constitutive models, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 11, pp. 2833-2843, 2011.

[18] M. Shariyat, S. H. Hosseini, Eccentric impact analysis of pre-stressed composite sandwich plates with viscoelastic cores: a novel global–local theory and a refined contact law, *Composite Structures*, Vol. 117, No. 1, pp. 333–345, 2014.

[19] Ch. Wanji, S. I. Junling, A model of composite laminated beam based on the global-local theory and new modified couple-stress theory, *Composite Structures*, Vol. 113, No. 1, pp. 99-107, 2013.

[20] S. M. R. Khalili, M. Shariyat, A finite element based global-local theory for static analysis of rectangular sandwich and laminated composite plates, *Composite Structures*, Vol. 107, No. 1, pp. 177-189, 2014.

[21] S. H. Lo, W. Zhen, Y. K Cheung, Ch. Wanji, An enhanced global–local higher-order theory for the free edge effect in laminates, *Composite Structures*, Vol. 81, No. 4, pp. 499-510, 2007.

[22] W. Zhen, C. H. Roggeng, Ch. Wanji, Refined laminated composite plate element based on global–local higher-order shear deformation theory, *Composite Structures*, Vol. 70, No. 2, pp. 135-152, 2005.

[23] W. Ding, *Delamination Analysis of Composite Laminates*, PhD Thesis, University of Toronto, Toronto, 1999.

[24] C. T. Sun , S. G. Zhou, Failure of quasi-isotropic composite laminates with free edges, *Reinforced Plastics and Composites*,Vol. 7, No. 6, pp. 515-557, 1988.

[25] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: theory and analysis*, Second Edittion, pp. 12.725-12.769, CRC Press LCC, Boca Raton, Florida, 1945.

[26] E. J. Barbero, J. N. Reddy, Modeling of delamination in composite laminate using a laye-rwise plate theory, *Solids and Structures*, Vol. 28, No. 3, pp. 373–389, 1991.

[27] M. Tahani, A. Nosier, Free edge stress analysis of general cross-ply composite laminates under extension and thermal loading, *Composite Structures*, Vol. 60, No. 1, pp. 91-103, 2003.

[28] A. S. D. Wang, F. W Crossman, Some new result on edge effect in symmetric composite laminates, *Composite Materials*, Vol. 11, No. 1, pp. 92-106, 1977.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1395.16.8.32.9]