مجله مهندسی مکانیک مدرس، بهمن 1396، دوره 17، شماره 11، ص‌ص 229-238

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

محاسبه صلبیت پیچشی معادل برای مقاطع جدار نازک تک سلولی و چند سلولی از جنس مواد مرکب چندلایه‌ای

محمدرضا کاظمی[1]، شاهرخ شمس[2*]، علیرضا ترابی[3]، سید محمد منصوری[1]، محمدرضا سپاه امیری[4]

1- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
2- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
3- دانشیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران
4- کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران
* تهران،صندوق پستی 14395-1561، shahrokh.shams@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: 24 مرداد 1396
پذیرش: 12 مهر 1396
ارائه در سایت: 27 آبان 1396

کلید واژگان:
صلبیت پیچشی معادل
مواد مرکب
پارامترهای سفتی
مقاطع تک سلولی و چند سلولی

چکیده

در این مقاله با ارائه شیوه‌ی نوین حل تحلیلی و ایراد فرضیات مناسب به محاسبه عبارات سفتی و به دنبال آن صلبیت پیچشی (و مدول برشی) معادل در مقاطع جدار نازک تک سلولی و چند سلولی کامپوزیتی با شکل مقطع معین پرداخته می‌شود و نتایج محاسبات در قالب کدهایی برای محاسبه سریع این پارامترها ارائه می‌گردد. در استخراج معادلات مورد نیاز، با بکارگیری فرضیات بکار رفته برای تیر اویلر- برنولی ابتدا روابط تنش- کرنش و سپس روابط کرنش- شعاع انحناء استخراج شده و در ادامه با استفاده از رابطه انرژی پتانسیل برای تیرهای الاستیک، پارامترهای سفتی تیر کامپوزیتی مذکور محاسبه می‌شود. در ادامه با بکارگیری پارامترهای سفتی، صلبیت پیچشی معادل برای مقاطع تک سلولی و چند سلولی جدار نازک بیان می‌شود. برای صحت‌سنجی فلسفه ارائه شده و برنامه تهیه شده متناسب با آن نتایج حاصل از کار حاضر با نتایج حاصل از المان محدود مقایسه و نتایج در قالب جدول‌هایی ارائه شده است. بررسی‌ها نشان می‌دهد استفاده از روش ارائه شده در این مقاله در محاسبه صلبیت پیچشی مقاطع تک سلولی و چند سلولی ساخته شده از مواد مرکب چند لایه به عنوان یک تقریب اولیه و مناسب می‌تواند مورد استفاده قرار گرفته و در روند تحلیل و طراحی سریع مسائل مشابه، به خصوص طراحی سازه‌های ساخته شده از مواد مرکب در صنعت هوایی بسیار مفید و حائز اهمیت باشد.

Calculation of the equivalent torsional rigidity for single and multi-cell thin-walled sections made of laminated composites

Mohammad Reza Kazemi[1], Shahrokh Shams[1*], Ali Reza Torabi[1], Seyyed Mohammad Mansoori[1], Mohammad Reza Sepah Amiri[2]

1- Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Sciences & Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran
2- Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran
* P.O.B. 14395-1561 Tehran, Iran, shahrokh.shams@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 15 August 2017
Accepted 04 October 2017
Available Online 18 November 2017

Keywords:
Equivalent shear modulus
Composite material
Stiffness coefficients
Single and multi-cell sections

ABSTRACT

In this paper, by defining a novel analytical derivation method for a composite beam, using the suitable assumptions, the stiffness coefficients and torsional rigidity (shear modulus) for single-cell and multi-cell thin walled layer wise composite sections of a beam are calculated. The results are presented in the form of Maple and FORTRAN codes in order to calculate these parameters in a timely manner. These parameters are used for the preliminary structural analysis of the beam. The nonlinear Euler Bernoulli beam assumptions are used to derive the stress-strain and strain-curvature relations. Next, by using the potential energy and elastic curvature relation for elastic beams, the stiffness parameter is calculated. Then, the equivalent torsional rigidity is introduced for single and multi-cell thin walled layer wise composite sections, using the stiffness parameter. To verify the validity of the computations, the results are compared with the numerical results obtained from a finite element analysis. The results show that applying this method for the calculation of the torsional rigidity of single and multi-cell thin-walled composite sections is a viable method and is very useful in obtaining a suitable, initial analytical approximation in the preliminary design of engineering structures, particularly in that of composite structures utilized in aerial industries.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. R. Kazemi, Sh. Shams, A. R. Torabi, S. M. Mansoori, M. R. Sepah Amiri, Calculation of the equivalent torsional rigidity for single and multi-cell thin-walled sections made of laminated composites, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 229-238, 2018 (in Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]

1- مقدمه

سازه‌های جدارنازک تقویت شده که از یک پوسته و تعدادی تیر تقویت کننده تشکیل یافته‌اند، کاربرد زیادی در صنایع هوافضایی دارند. بسیاری از بخش‌های اصلی سازه هواپیما، بالگرد و موشک را، این نوع سازه‌ها تشکیل داده‌اند. با توجه به میزان بارهای خارجی، محاسبه دقیق نیروهای داخلی و به دنبال آن تنش‌ها و کرنش در تمام نقاط مقطع، همواره مورد توجه محققان بوده است. محاسبه جریان برش در مقاطع بسته و باز به عنوان یک حل تحلیلی پرکاربرد در محاسبات تنش‌ها و کرنش‌ها همواره مطرح می‌باشد که مستلزم شناخت خواص مکانیکی مواد تشکیل دهنده آن از جمله مدول برشی می‌باشد.

از سویی دیگر استفاده از مواد کامپوزیتی برای ساخت مقاطع بال به دلیل مزایای فراوان آن از جمله مدول و استحکام ویژه بالا، موجب شده محاسبات لازم جهت تعیین برخی خواص و محاسبه تنش‌ها و کرنش‌ها به دلیل ساختار ارتوتروپیک این مواد، پیچیدگی‌های خاص خود را داشته باشد. از این رو محققان با انتخاب روش‌های گوناگون و ساده‌سازی‌ها و مدل‌سازی‌های فراوان تلاش کرده‌اند پاسخ‌های تقریبی با دقت کافی را برای محاسبه پارامترهای مذکور از جمله صلبیت پیچشی در مقاطع جدار نازک ارائه دهند. استفاده از روش تشابه غشایی وقتی جداره سلول‌ها نازک باشد، و یا استفاده از روش تفاضل محدود برای جداره‌های ضخیم وقتی که تعداد سلول‌ها کم باشد [1] از جمله این کارها می باشد.

روش اجزای محدود نیز بارها به عنوان یک روش کارآمد و سریع برای تحلیل سازه‌هایی که مقاطع چند سلولی در آنها به کار رفته مورد استفاده قرار گرفته است [2].

در سال 1996 آلفانو و همکارانش [3] و در سال 2000 پورکیچ [4] با ارائه شیوه‌ای با عنوان تئوری گراف‌ها و تهیه برنامه کامپیوتری در همین راستا به تحلیل مقاطع چند سلولی جدار نازک و تعیین خواص هندسی آنها پرداختند. آنها اثربخشی رویکرد پیشنهادی خود را با یک مثال عددی بررسی کرده و نشان دادند برنامه ایشان از دقت قابل قبولی در تحلیل این نوع از مقاطع را دارد.

همزمان لی و همکارانش با محاسبه خواص میله‌های بتنی مسطح با سطح مقطع دلخواه از جمله سفتی پیچشی، با ارائه شیوه نوینی از حل پرداختند و با حل چندین نمونه مثال و انتخاب مواد گوناگون دقت روش خود را ارزیابی کردند [5].

در سال 2004 ساپونزاکیس به بررسی رفتار غیرخطی تیرهایی با مقاطع جدار نازک با مقطع دلخواه ثابت و متغیر تحت بار پیچشی پرداخت. روش اجزای مرزی توسعه یافته روشی بود که وی برای بررسی‌های خود انتخاب و گسترش داد. وی نشان داد در تجزیه و تحلیل یک تیر با مقطع جدار نازک با انتخاب یک مش مناسب و استفاده از توابع شکل صحیح و پس از محاسبه ثابت‌های پیچش و اعوجاج با استفاده از تئوری لوله- نازک، می‌توان به نتایج تقریبی قابل قبولی حتی در مواقعی که جداره بسیار نازک باشد، رسید [6].

در همین سال و مشابه چنین کاری، توسط سده و همکارانش صورت گرفت. استفاده از فرضیه تیر و بکارگیری تابع اعوجاج در روابط بدون در نظر داشتن نوع سطح مقطع (باز یا بسته) فرضیات اساسی بود که ایشان در پژوهش خود از آنها استفاده نمودند. نتایج حاصل از روش المان محدود صورت گرفته توسط ایشان با نتایج تئوری کلاسیک و دیگر روش‌های عددی موجود، همخوانی مناسبی داشت [7].

در ادامه و با گسترش مواد کامپوزیتی در صنایع مختلف، مطالعات بر روی مقاطع جدار نازک کامپوزیتی هم گسترده‌تر شد.

شادمهری و همکارانش (2007) به بررسی خصوصیات دینامیکی و استاتیکی تیرهای کامپوزیتی تک سلولی با جداره‌های نازک پرداختند. ایشان معادلات خود را بر پایه اصل همیلتون توسعه یافته استخراج نموده و از روش گالرکین توسعه یافته برای حل معادلات خود بهره بردند. نتایج آنان در بررسی مشخصات دینامیکی و استاتیکی مقطع تیر جدار نازک نشان داد، زاویه الیاف اثرات قابل ملاحظه‌ای را در رفتار پیچشی و خمشی تیر به دنبال دارد. به طور مثال در بررسی رفتار دینامیکی خمشی- پیچشی تیر ذکر شده و در مودهای اول و دوم، مود قالب بر سیستم در تمام زوایای الیاف شکل مود خمش است به طوری که در مودهای سوم و چهارم مود قالب در زوایای مختلف بین پیچش و خمش متغیر است [8].

کیم و شین در سال 2009 به بررسی تیرهای جدار نازک کامپوزیتی متشکل از یک و دو سلول پرداختند. ایجاد یک ماتریس غیرمتقارن و استفاده از یک سیستم معادلات جبری خطی متشکل از چهارده پارامتر جابجایی و کاهش این معادلات به مرتبه‌های پایین برای حل معادلات اساس کار ایشان در این بررسی بود. ایشان نتایج حاصل از پژوهش خود را با نتایج بدست آمده از مدل‌سازی یک تیر کامپوزیتی با المان‌های مشخص در نرم‌افزار آباکوس مقایسه نموده و نشان دادند اثرات شرایط مرزی بر زاویه پیچش مقاطع مستطیل شکل یک سلولی و دو سلولی، تحت بار پیچشی خالص ناچیز است [9].

در ادامه مطالعات بر روی غیرخطی‌های هندسی مقاطع جدار نازک کامپوزیتی نیز مورد توجه قرار گرفت. وو و لی (2010) با بکارگیری تئوری کلاسیک برای مواد کامپوزیتی، بررسی‌های خود در این زمینه را معطوف به دو مقطع I شکل و Z شکل نمودند و اثراتی چون غیرخطی ناشی از هندسه، تغییرات الیاف و جلوگیری از اعوجاج را در اثر بارگذاری‌های خمشی- پیچشی بررسی نمودند. آنها روش نیوتون- رافسون را برای حل معادلات غیرخطی خود انتخاب نموده و نشان دادند روش ارائه شده روش مناسب و کارآمدی برای تحلیل رفتار غیرخطی خمشی- پیچشی مقاطع جدار نازک در تیرهای کامپوزیتی انعطاف‌پذیر است [10].

استفاده از مدل‌های مکانیکی با دقت بالا که در آن هم اثرات اعوجاج محوری و هم اثرات ناهمگنی مواد در نظر گرفته شده بود توسط وانگ و ژانگ (2014) برای مقاطع جدار نازک بسته تک سلولی [11] و چند سلولی [12] صورت پذیرفت. مشاهدات ایشان برای مقاطع مستطیل شکل و دایره‌ای شکل نشان داد، اثرات ناهمگنی نسبت به اعوجاج محوری دارای اثرات به مراتب بیشتری در نتایج و پاسخ‌های بدست آمده است.

در سال 2016 پاوازا و ماتکویچ با ارائه تئوری جدیدی به بررسی خمش در تیرهای جدار نازک با در نظر گرفتن همزمان اثرات برش پرداختند. تئوری آنها بر پایه دو تئوری تیر ولاسو و تیر تیموشینکو شکل گرفت [13]. ایشان تئوری خود با عنوان اختصاری TBTS را برای تحلیل چندین نمونه تیر جدارنازک با مقاطع باز و با شکل سطوح مختلف، بارگذاری و شرایط مرزی گوناگون بررسی نموده و نتایج خود را با نتایج حاصل از تحلیل‌های المان محدود مقایسه نمودند. نتایج حاصل از بررسی ایشان به عنوان یک فرمول پارامتریک برای بررسی اولیه و کلی سطوح جدار نازک با شکل مقطع متفاوت مورد استفاده قرار می‌گیرد [14].

همان‌طور که مشاهده می‌شود استفاده از یک روش تحلیلی کارامد که بتواند با ایراد کمترین فرضیات ممکن و صرف کمترین زمان شبیه‌سازی مناسبی از مساله را ایجاد و پاسخ تقریبی مناسبی را ارائه دهد همواره مورد

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]

توجه محققان در این زمینه بوده است.

در این مقاله با ایراد کمترین فرضیات ممکن و محدود کننده و استفاده از تئوری تیر غیرخطی اویلر- برنولی کامپوزیتی و ارائه دیدگاه جدید در استخراج معادلات سفتی پیچشی با استفاده از لایه‌چینی‌های عمودی و افقی برای مقاطع چند سلولی، معادله سفتی پیچشی معادل استخراج شده و نتایج با حالت ایزوتروپ و نتایج اجزای محدود مقایسه شده است.

2- تئوری حاکم

2-1- استخراج رابطه تنش- کرنش

در این بخش ابتدا به بررسی نحوه استخراج روابط تنش- کرنش برای یک بال با مقطع کلی پرداخته و در ادامه با معرفی معادلات میدان نحوه محاسبه صلبیت پیچشی معادل بیان می‌شود. برای این امر بال مفروض به شکل یک تیر مرکب یکسرگیر دار فرض شده و از تئوری‌ها و فرضیات موجود برای تیرهای نازک برای استخراج خاصیت معادل برای این پارامتر استفاده می‌شود. با توجه به شکل 1 برای تیر مرکب چند لایهٔ مستقیم نازک به طول l و جرم واحد طول m دارای خصوصیات سختی و جرمی یکنواخت در طول تیر فرضیات زیر درنظر گرفته می‌شوند:

1- صفحهٔ عمود بر محور اصلی پس از جابجایی تیر، صفحه و عمود بر محور اصلی تیر باقی می‌ماند.

2- شکل سطح مقطع پس از جابجایی تیر، ثابت می‌ماند و تغییرات ابعادی و تابیدگی آن ناچیز درنظر گرفته می‌شود.

3 – کرنش‌ها کوچک و جابجایی‌ها و دوران‌ها بزرگ هستند. الگوی غیرخطی هندسی مطالعه خواهد شد.

4- تنش‌های عمود σ_{22} و σ_{33} و تنش برشی σ_{23} صفر در نظر گرفته می‌شوند.

5- جنس لایه‌های تشکیل دهندهٔ تیر از مواد ارتوتروپ است.

6- لایه‌چینی متقارن است.

7- از تغییر محوری طول تیر صرفنظر شده است.

8- رابطهٔ تنش-کرنش به‌صورت خطی درنظر گرفته می‌شود (رفتار خطی الاستیک).

دستگاه‌های مختصات عمومی و محلی به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

(e_X, e_Y, e_Z): دستگاه مختصات عمومی، ثابت برای کلیهٔ نقاط، مبداء منطبق بر محور اصلی تیر در محل تکیه‌گاه، محور x، منطبق بر محور اصلی تیر تغییرشکل نیافته.

(e_x, e_y, e_z): دستگاه مختصات محلی اینرسی[1]، مبداء، منطبق بر هر نقطه روی محور اصلی تیر، محور x، منطبق بر محور اصلی تیر تغییرمکان نیافته، همراستا با (e_X, e_Y, e_Z).

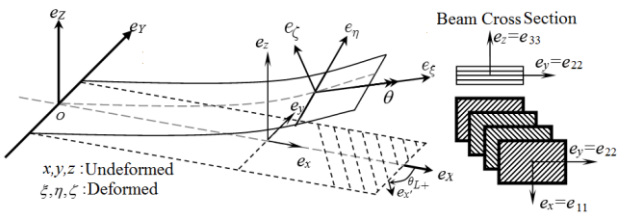


Fig. 1 Flexible multi-layer composite orthotropic beam [15]

شکل 1 تیر انعطاف‌پذیر مرکب چند لایهٔ ارتوتروپ [15]

[1] Inertial coordinates system

(e_ξ, e_η, e_ζ): دستگاه مختصات محلی منحنی‌الخط[2]، مبداء، منطبق در هر نقطهٔ تغییرمکان یافته روی محور اصلی تیر.

برای مقطع عمومی تیر که با استفاده از لایه‌های ارتوتروپ بصورت متقارن لایه‌چینی شده است شکل 2 و با توجه به جهات اصلی و محلی معرفی شده براساس زاویهٔ الیاف نشان‌داده شده در شکل 3، برای لایهٔ m ام (اندیس درون پرانتز) از مقطع تیر لایه‌چینی شده، ارتباط بین مؤلفه‌های تانسور کرنش (که به‌شکل برداری بیان می‌شوند) در دستگاه مختصات محلی الیاف $(e_{\acute{x}}, e_{\acute{y}}, e_{\acute{z}})$ و دستگاه مختصات عمومی صفحهٔ ارتوتروپ (e_x, e_y, e_z) به‌صورت رابطه (1) به‌دست خواهد آمد [16]:

$$\{\acute{\varepsilon}_{11}^{(m)}\,\acute{\varepsilon}_{22}^{(m)}\,\acute{\varepsilon}_{33}^{(m)}\,\acute{\varepsilon}_{23}^{(m)}\,\acute{\varepsilon}_{13}^{(m)}\,\acute{\varepsilon}_{12}^{(m)}\}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} Cs^2 & Si^2 & 0 & 0 & 0 & CsSi \\ Si^2 & Cs^2 & 0 & 0 & 0 & -CsSi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cs & -Si & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Si & Cs & 0 \\ -2CsSi & 2CsSi & 0 & 0 & 0 & Cs^2-Si^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{(m)} \\ \varepsilon_{22}^{(m)} \\ \varepsilon_{33}^{(m)} \\ \varepsilon_{23}^{(m)} \\ \varepsilon_{13}^{(m)} \\ \varepsilon_{12}^{(m)} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

همچنین بطور مشابه برای تانسور تنش می‌توان رابطه (2) را نوشت:

$$\{\acute{\sigma}_{11}^{(m)}\,\acute{\sigma}_{22}^{(m)}\,\acute{\sigma}_{33}^{(m)}\,\acute{\sigma}_{23}^{(m)}\,\acute{\sigma}_{13}^{(m)}\,\acute{\sigma}_{12}^{(m)}\}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} Cs^2 & Si^2 & 0 & 0 & 0 & 2CsSi \\ Si^2 & Cs^2 & 0 & 0 & 0 & -2CsSi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Cs & -Si & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Si & Cs & 0 \\ -CsSi & CsSi & 0 & 0 & 0 & Cs^2-Si^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{(m)} \\ \sigma_{22}^{(m)} \\ \sigma_{33}^{(m)} \\ \sigma_{23}^{(m)} \\ \sigma_{13}^{(m)} \\ \sigma_{12}^{(m)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

که در ماتریس فوق، $Cs = \cos(\theta_L)$ و $Si = \sin(\theta_L)$ و θ_L زاویهٔ الیاف است.

همچنین رابطهٔ تانسوری تنش-کرنش برای یک مادهٔ ارتوتروپ الاستیک به‌صورت رابطه (3) تعریف می‌شود:

$$\sigma_{ij}^{(m)} = [T_\sigma]_{(-\theta_L)}\bar{C}_{ijkl}^{(m)}[T_\varepsilon]_{(\theta_L)}\varepsilon_{kl}^{(m)} = \bar{Q}_{ijkl}^{(m)}\varepsilon_{kl}^{(m)} \quad (3)$$

در رابطه (3)، $\bar{C}_{ijkl}^{(m)}$ و $\bar{Q}_{ijkl}^{(m)}$ تانسورهای مرتبهٔ 4 هستند که خصوصیات مواد لایهٔ m ام را براساس مختصات محلی الیاف و زاویهٔ الیاف هر لایه نسبت به محور عمومی در دستگاه مختصات عمومی بیان می‌کند.

برای صفحات ارتوتروپ با دو صفحهٔ تقارن مادی، تانسورهای $\bar{C}_{ijkl}^{(m)}$ و

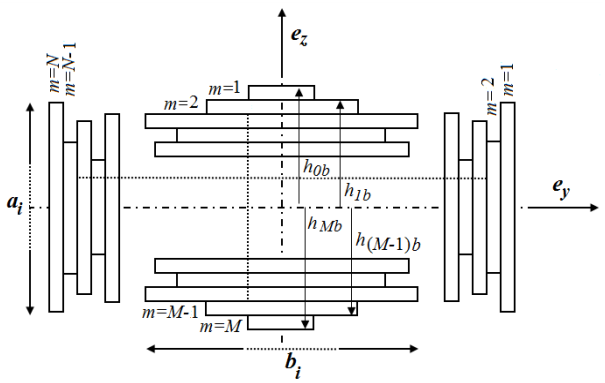


Fig. 2 Public section beam assuming orthotropic symmetric layup

شکل 2 مقطع عمومی تیر با فرض لایه‌چینی ارتوتروپ متقارن

[2] Curvilinear coordinates system

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]

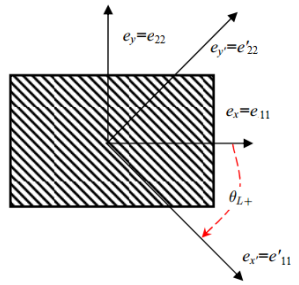


Fig. 3 Main coordinate system (e_x, e_y, e_z) and the orthotropic plate fibers coordinate system ($e_{\acute{x}}$, $e_{\acute{y}}$, $e_{\acute{z}}$)

شکل 3 دستگاه مختصات اصلی (e_x, e_y, e_z) و دستگاه مختصات الیاف صفحهٔ ارتوتروپ $(e_{\acute{x}}, e_{\acute{y}}, e_{\acute{z}})$

$\bar{Q}_{ijkl}^{(m)}$ را می‌توان به‌صورت ماتریسی 6×6 با 9 متغیر مستقل نشان داد.

لذا با توجه به رابطهٔ (3) رابطهٔ تنش-کرنش به‌شکل رابطه (4) تبدیل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}^{(m)}\\ \sigma_{22}^{(m)}\\ \sigma_{33}^{(m)}\\ \sigma_{23}^{(m)}\\ \sigma_{13}^{(m)}\\ \sigma_{12}^{(m)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}^{(m)} & Q_{12}^{(m)} & Q_{13}^{(m)} & 0 & 0 & Q_{16}^{(m)}\\ Q_{12}^{(m)} & Q_{22}^{(m)} & Q_{23}^{(m)} & 0 & 0 & Q_{26}^{(m)}\\ Q_{13}^{(m)} & Q_{23}^{(m)} & Q_{33}^{(m)} & 0 & 0 & Q_{36}^{(m)}\\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^{(m)} & Q_{45}^{(m)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{45}^{(m)} & Q_{55}^{(m)} & 0\\ Q_{16}^{(m)} & Q_{26}^{(m)} & Q_{36}^{(m)} & 0 & 0 & Q_{66}^{(m)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}^{(m)}\\ \varepsilon_{22}^{(m)}\\ \varepsilon_{33}^{(m)}\\ \varepsilon_{23}^{(m)}\\ \varepsilon_{13}^{(m)}\\ \varepsilon_{12}^{(m)}\end{Bmatrix} \tag{4}$$

برای مواد ایزوتروپ (با خصوصیات مواد مستقل از جهت) فقط 2 متغیر مستقل، به‌دست می‌آید که همان مدول الاستیسیته (مدول یانگ) و ضریب پوآسن می‌باشند.

در تیرهای نازک با فرض عدم تغییر طول محور اصلی تیر، تنش‌های عمود σ_{22} و σ_{33} و تنش برشی σ_{23} صفر درنظر گرفته می‌شود [17] که بر این اساس کرنش‌های ε_{22} و ε_{33} وε_{23} با کرنش‌های ε_{11} و ε_{12} و ε_{13} رابطه پیدا کرده و از معادلات کنار گذاشته می‌شوند [15].در نهایت معادلات تنش-کرنش به صورت رابطه (5) در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}^{(m)}\\ \sigma_{12}^{(m)}\\ \sigma_{13}^{(m)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}^{(m)} & \bar{Q}_{12}^{(m)} & 0\\ \bar{Q}_{12}^{(m)} & \bar{Q}_{22}^{(m)} & 0\\ 0 & 0 & \bar{Q}_{33}^{(m)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}^{(m)}\\ \varepsilon_{12}^{(m)}\\ \varepsilon_{13}^{(m)}\end{Bmatrix} \tag{5}$$

که در آن:

$$\bar{Q}_{11}^{(m)}=Q_{11}-\frac{Q_{12}^2Q_{33}-2Q_{12}Q_{23}Q_{13}-Q_{22}Q_{13}^2}{Q_{22}Q_{33}-Q_{23}^2}$$
$$\bar{Q}_{12}^{(m)}=Q_{16}-\frac{Q_{26}Q_{12}Q_{33}-Q_{26}Q_{23}Q_{13}+Q_{22}Q_{36}Q_{13}-Q_{36}Q_{23}Q_{12}}{Q_{22}Q_{33}-Q_{23}^2}$$
$$\bar{Q}_{22}^{(m)}=Q_{66}-\frac{Q_{26}^2Q_{33}+2Q_{26}Q_{23}Q_{36}-Q_{22}Q_{36}^2}{Q_{22}Q_{33}-Q_{23}^2}$$
$$\bar{Q}_{33}^{(m)}=Q_{55}-\frac{Q_{45}^2}{Q_{44}} \tag{6}$$

2-2- استخراج رابطه کرنش- شعاع انحناء

برای محاسبه سفتی پیچشی معادل مقطع ابتدا معادلات میدان (رابطه کرنش- شعاع انحنا) برای تیرهای غیرخطی با فرضیات در نظر گرفته شده در بخش 2-1 استخراج می‌شود.

با توجه به شکل 4 فرض کنید$\overline{PQ}=(\eta e_y+\zeta e_z)$ (خطی فرضی در مقطع تیر تغییرشکل نیافته) پس از تغییر شکل تیر به خط

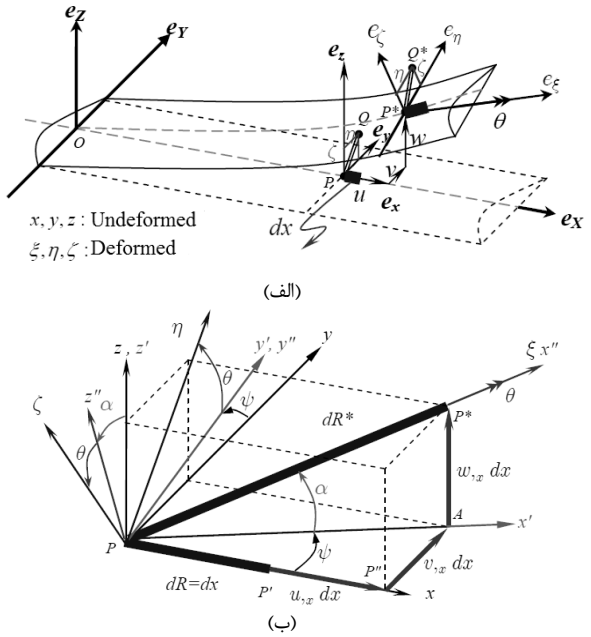


Fig. 4 a) Deformed beam coordinates system b) The displacement and rotation vectors of the element of beam along the main axis [15]

شکل 4 الف) دستگاه مختصات تغییرشکل یافته تیر ب) نمایش بردار جابجایی و دوران المان تیر در راستای محور اصلی تیر [15]

$\overline{P^*Q^*}=(\eta e_\eta+\zeta e_\zeta)$ انتقال می‌یابد [15].

روابط تغییر مکان نقاط Q^*, Q, P^*, P روی تیر مستقیم به‌صورت رابطه (7) نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\vec{R}=\overrightarrow{OP}=x\hat{e}_x\\
&\overrightarrow{R^*}=\overrightarrow{OP^*}=\bar{\xi}\hat{e}_\xi+\bar{\eta}\hat{e}_\eta+\bar{\zeta}\hat{e}_\zeta=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP^*}\\
&\quad=(x+u)\hat{e}_x+v\hat{e}_y+w\hat{e}_z\\
&\vec{r}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=x\hat{e}_x+\eta\hat{e}_y+\zeta\hat{e}_z\\
&\overrightarrow{r^*}=\overrightarrow{OQ^*}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP^*}+\overrightarrow{P^*Q^*}\\
&\quad=(x+u)\hat{e}_x+v\hat{e}_y+w\hat{e}_z+\eta\hat{e}_\eta+\zeta\hat{e}_\zeta\\
&\quad=\overrightarrow{OP^*}+\overrightarrow{P^*Q^*}=\bar{\xi}\hat{e}_\xi+(\bar{\eta}+\eta)\hat{e}_\eta+(\bar{\zeta}+\zeta)\hat{e}_\zeta
\end{aligned} \tag{7}$$

اگر جابجایی المانی در راستای محور اصلی تیر به طول dx با بردار جابجایی $\vec{u}=(u,v,w)$ و بردار دوران با زاویای اولر- به‌ترتیب از چپ به راست با $(+\psi,-\alpha,+\theta)$ نشان داده شود، ماتریس تبدیل که بردار یکهٔ (e_x,e_y,e_z) را به بردار یکهٔ (e_ξ,e_η,e_ζ) تبدیل می‌کند بر اساس زوایای اویلر به‌صورت رابطه (8) به‌دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}\hat{e}_\xi\\ \hat{e}_\eta\\ \hat{e}_\zeta\end{Bmatrix}=[T_\theta]\begin{Bmatrix}\hat{e}_{x''}\\ \hat{e}_{y''}\\ \hat{e}_{z''}\end{Bmatrix}=[T_\theta][T_{-\alpha}]\begin{Bmatrix}\hat{e}_{x'}\\ \hat{e}_{y'}\\ \hat{e}_{z'}\end{Bmatrix}$$
$$=[T_\theta][T_{-\alpha}][T_\psi]\begin{Bmatrix}\hat{e}_x\\ \hat{e}_y\\ \hat{e}_z\end{Bmatrix} \tag{8}$$

که در آن می‌توان رابطه (9) را نوشت:

$$[T_\theta]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$
$$[T_{-\alpha}]=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$$
$$[T_\psi]=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{9}$$

با توجه به تغییر مکان نقاط و استفاده از ماتریس‌های انتقال و بکارگیری

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]

معادلات کیرشهف [15] بردار تابع شعاع انحنا به‌صورت رابطه (10) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\vec{\rho}(x,t) &= -\psi_x\hat{e}_z - \alpha_x\hat{e}_{y'} - \theta_x\hat{e}_\xi \\ &= \rho_\xi\hat{e}_\xi + \rho_\eta\hat{e}_\eta + \rho_\zeta\hat{e}_\zeta \\ &= -(\psi_x\sin\alpha + \theta_x)\hat{e}_\xi \\ &\quad + (\psi_x\sin\theta\cos\alpha - \alpha_x\cos\theta)\hat{e}_\eta \\ &\quad -(\psi_x\cos\theta\cos\alpha + \alpha_x\sin\theta)\hat{e}_\zeta\end{aligned} \tag{10}$$

از سویی دیگر با توجه به فرض کرنش‌های کوچک و صرف نظر از ترم‌های غیرخطی و استفاده از تانسور کرنش مهندسی ε_{ij} معادلات میدان به نحو رابطه (11) بیان می‌شوند [15]:

$$\overrightarrow{dr^*}.\overrightarrow{dr^*} - \overrightarrow{dr}.\overrightarrow{dr} = 2\{dx\ \ d\eta\ \ d\zeta\}[\varepsilon_{ij}]\{dx\ \ d\eta\ \ d\zeta\}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

همان‌طور که در بخش 2-1 گفته شد برای تیرهای نازک بدون تغییر طول، تنش‌های عمود σ_{22} و σ_{33} و تنش برشی σ_{23} برابر صفر است. از طرفی هدف تحلیل‌های صورت گرفته رسیدن به به ارتباط بین کرنش و شعاع انحنا است، بنابراین با توجه به روابط بیان شده در این بخش روابط کرنش-شعاع انحنای متناظر با تنش‌های غیر صفر، برای تیر مفروض به‌شکل رابطه (12) به‌دست می‌آیند [18]:

$$\varepsilon_{11} = (\zeta\rho_\eta - \eta\rho_\zeta),\ \ \varepsilon_{12} = -\zeta\rho_\zeta, \varepsilon_{13} = +\eta\rho_\zeta \tag{12}$$

2-3- محاسبه صلبیت پیچشی برای مقطع تیر کامپوزیتی

با توجه به تحلیل تیرهای الاستیک که در آن انرژی پتانسیل برابر با انرژی کرنشی تیر می‌باشد، انرژی پتانسیل برای هر لایه از تیر کامپوزیتی مطابق با رابطه (13) و انرژی پتانسیل کل مطابق با رابطه (14) می‌باشد:

$$U^{(m)} = \frac{1}{2}\int_0^l \{\iint (\sigma_{11}^{(m)}\varepsilon_{11}^{(m)} + \sigma_{12}^{(m)}\varepsilon_{12}^{(m)} + \sigma_{13}^{(m)}\varepsilon_{13}^{(m)})\, d\eta d\zeta\}dx \tag{13}$$

$$U = \sum_{m=1}^{n} U^{(m)} = \frac{1}{2}\int_0^l \{\bar{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}[K]\{\bar{\varepsilon}\}dx \tag{14}$$

که در آن بردار $\{\bar{\varepsilon}\}$ و ماتریس $[K]$ به شکل روابط (16,15) بیان می‌باشند:

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} e \\ \varepsilon_{\xi\eta} \\ \varepsilon_{\zeta\xi} \\ \rho_\xi \\ \rho_\eta \\ \rho_\zeta \end{Bmatrix} \tag{15}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & D \end{bmatrix} \tag{16}$$

ماتریس A وابسته به انرژی کششی، ماتریس B وابسته به انرژی همبندی کشش-خمش و پیچش و ماتریس D وابسته به انرژی خمشی و پیچشی بردار شعاع انحناء هستند. به‌علت عدم وجود نیروی محوری و فرض عدم تغییر طول محور اصلی تیر، از انرژی‌های وابسته به ماتریس‌های A و B در معادلات صرف‌نظر شده و فقط اثر انرژی خمشی و پیچشی تیر الگوسازی می‌شود که با فرض نازک بودن تیر با لایه‌چینی متقارن نیز سازگار است.

به ترتیب با جایگذاری رابطه (6)، (12) و (13) در رابطه (14) و انتگرال‌گیری روی سطح، تغییرات انرژی پتانسیل به شکل رابطه (17) بدست خواهد آمد:

$$\delta U = \int_0^1 \{\rho\}^{\mathrm{T}}[D]\{\delta\rho\}dx \tag{17}$$

برای مقطع مستطیلی ساخته شده از مواد کامپوزیتی که هم در عرض و هم در ضخامت به‌صورت متقارن لایه‌چینی شده است (شکل 5)، عناصر ماتریس $[D]$ که عبارت‌های سفتی بال نامیده می‌شوند، به شکل رابطه (18) تعریف می‌شوند [15].

$$\begin{aligned}D_{11} &= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{12}a_i^3\bar{Q}_{22}^{(i)}dh_i + \frac{1}{3}a_i\bar{Q}_{33}^{(i)}{dh_i}^3\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M}\left(\frac{1}{3}b_i\bar{Q}_{22}^{(i)}{dh_i}^3 + \frac{1}{12}b_i^3\bar{Q}_{33}^{(i)}dh_i\right) \\ D_{12} &= -\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{12}a_i^3\bar{Q}_{12}^{(i)}dh_i - \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{3}b_i\bar{Q}_{12}^{(i)}{dh_i}^3 \\ D_{13} &= 0 \\ D_{22} &= \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{12}b_i\bar{Q}_{11}^{(i)}{dh_i}^3 + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{12}a_i^3\bar{Q}_{11}^{(i)}dh_i \\ D_{23} &= 0 \\ D_{33} &= \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{12}b_i^3\bar{Q}_{11}^{(i)}dh_i + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{3}a_i\bar{Q}_{11}^{(i)}{dh_i}^3\end{aligned} \tag{18}$$

که در آن: ${dh_i}^n = h_{i+1}^n - h_i^n$

شایان ذکر است که مقادیر سختی D_{22} و D_{33} عوامل تعیین کننده‌ای در سختی خمشی عمودی و عرضی بال و سختی D_{11} عامل بسیار مهمی در تعیین مقدار سفتی پیچشی بال می‌باشند.

با فرض بارگذاری پیچشی خالص (T) و استفاده از رابطه دوران φ برای مقاطع جدار نازک بسته به شکل رابطه (19)، [19]:

$$\varphi = \frac{TL}{4A^2}\oint\frac{ds}{hG} \tag{19}$$

که در آن L طول و A مساحت مقطع بسته می‌باشد، و بکارگیری روابط (10) تا (17)، مقدار GJ معادل برای مقطع کامپوزیتی جدار نازک مذکور با لایه‌چینی دلخواه، بر حسب پارامترهای سفتی از رابطه (20) محاسبه می‌شود:

$$GJ_{EQ} = D_{11} - \frac{{D_{12}}^2}{D_{22}} - \frac{{D_{13}}^2}{D_{33}} \tag{20}$$

از سویی می‌توان با استفاده از روابط تئوری کلاسیک و بکارگیری قضیه کاستیلیانو و در نظر داشتن فرض عدم ایجاد هر گونه تغییر شکل در مقطع عرضی پوسته و در نظر داشتن رابطه (21)، [19]:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = \varphi \tag{21}$$

صلبیت پیچشی در سایر مقاطع مقطع چند محفظه‌ای بسته تحت بارگذاری پیچشی خالص را محاسبه نمود [19].

در نهایت با روش معرفی شده در این بخش و استفاده از الگوی بکار رفته برای محاسبه صلبیت پیچشی مقاطع تک سلولی و چند سلولی کامپوزیتی، کدهایی برای محاسبه پارامترهای مذکور تهیه شده است که موجب تسریع در روند حل مسائل مشابه و صرفه‌جویی در زمان گردیده است.

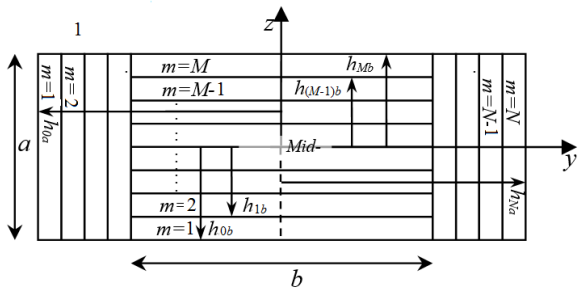


Fig. 5 orthotropic beam section with symmetric layup and define number and condition of any layers from mid surface

شکل 5 لایه‌چینی متقارن مقطع ارتوتروپ تیر و تعریف شماره لایه (m) و موقعیت لایه از صفحهٔ میانی

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]

3- نتایج و اعتبار سنجی

3-1- صحت سنجی برنامه تهیه شده با استفاده از مدول برشی فولاد

در این بخش به منظور بررسی صحت و دقت روش بیان شده و کد برنامه تهیه شده برای آن، نتایج حاصل از کار حاضر با نتایج بدست آمده از حل تحلیلی و یا المان محدود برای چندین نمونه با شکل مقطع و جنس مشخص مقایسه و بیان می‌شود. در گام نخست مقطع مستطیلی شکل از یک تیر را مطابق شکل 6 در نظر بگیرید. فرض اولیه بر این است که جنس تیر با مقطع مستطیلی شکل و از فولادی با مدول برشی مشخص و معادل با 77 گیگاپاسکال باشد. مشخصات هندسی مقطع مستطیل شکل در جدول 1 بیان شده است.

با فرض لایه چینی ایزوتروپ (خواص در تمام جهات یکسان) برای هر ضلع از مقطع مستطیل شکل و استفاده از الگوی کار حاضر، مقدار مدول برشی برای این مقطع با در نظر گرفتن زوایای مختلف برای آن، قابل محاسبه است (جدول 2). همان‌طور که مشخص است میزان اختلاف در مقایسه با مقدار صلبیت پیچشی فولاد (77 گیگاپاسکال) برابر با 2.58 درصد می باشد. توجه شود که اندیس s در جدول 2 به مفهوم لایه‌چینی متقارن در هر ضلع از مستطیل نشان داده شده در شکل 6 می‌باشد.

3-2- صحت سنجی برنامه تهیه شده با استفاده از نتایج المان محدود

در این بخش به منظور ارزیابی بهتر مدل ارائه شده و سنجش دقت برنامه تهیه شده برای آن، نتایج بدست آمده از الگوی حاضر برای دو نمونه از مقاطع تک سلولی و سه سلولی بسته ساخته شده از مواد مرکب، با نتایج بدست آمده از نمونه‌های مشابه در نرم افزار المان محدود مقایسه می‌شود. این مقایسه شامل بررسی صلبیت پیچشی در این مقاطع با در نظر گرفتن دو جنس مختلف برای هر کدام می‌باشد.

3-2-1- نمونه اول

نمونه اول مقطع مستطیل شکلی مشابه با مدل ارائه شده در بخش 3-1 با مشخصات هندسی بیان شده در جدول 1 می‌باشد با این تفاوت که جنس

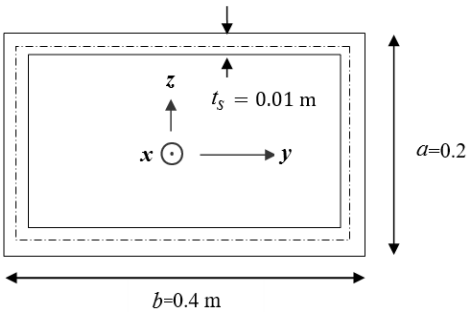


Fig. 6 Geometric dimensions and coordinate system in a rectangular thin- walled cross- section

شکل 6 نمایش ابعاد هندسی و دستگاه مختصات در مقطع جدار نازک مستطیل شکل

جدول 1 اطلاعات هندسی مقطع جدار نازک مستطیل شکل

Table 1 Geometrical information of rectangular thin- walled cross- section

نوع پارامتر	نشانه	واحد	مقدار
طول مقطع مستطیل شکل	b	m	0.4
عرض مقطع مستطیل شکل	a	m	0.2
ضخامت پوسته مقطع	t_s	m	0.01

جدول 2 مقایسه مدول برشی بدست آمده از کار حاضر با مقدار واقعی برای مقطع جدار نازک مستطیل شکل با فرض لایه چینی ایزوتروپ

Table 2 Comparison of the shear modulus in present study & real amount in rectangular thin- walled section with isotropic layup

نحوه لایه چینی (زوایا بر حسب درجه)	کار حاضر (گیگاپاسکال)	میزان اختلاف (درصد)
[0]	75.013	2.58
$[0,90]_S$	75.013	2.58
$[0,45]_S$	75.013	2.58
$[0,30,60,90]_S$	75.013	2.58

لایه‌ها از مواد مرکب لایه‌ای تشکیل شده است.

نتایج حاصل از کار حاضر در محاسبه صلبیت پیچشی مقطع بسته تک‌سلولی کامپوزیتی در مقایسه با نتایج المان محدود برای لایه‌چینی‌هایی با زوایای مختلف و برای دو جنس گرافیت- اپوکسی و شیشه- اپوکسی، به ترتیب در جدول‌های 3 و 4 بیان شده است.

در نظر گرفتن محاسبات المان محدود به عنوان مبنای سنجش اختلاف و محاسبه اختلاف برای زوایا و لایه‌چینی‌های متنوع (ستون چهارم از جدول‌های 3 و 4)، مشاهده می‌شود اگرچه در لایه‌چینی‌های محدود، میزان این اختلاف با تغییر زاویه الیاف تغییرات محسوسی دارد اما، با افزایش تعداد لایه‌ها میزان افزایش این اختلاف نیز کاهش می‌یابد. لذا می‌توان ادعا کرد نتایج حاصل از کار حاضر در محاسبه صلبیت پیچشی و به دنبال آن مدول برشی مقاطع کامپوزیتی بسته تک سلولی به عنوان یک تقریب اولیه و مناسب برای تحلیل و یا طراحی قطعات صنعتی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

از سویی دیگر مطابق با انتظار مشاهده می‌شود میزان صلبیت پیچشی برای مقطع تک سلولی ساخته شده از الیاف شیشه (جدول 4) دارای مقادیر کمتری در مقایسه با مقادیر مشابه آن برای جنس گرافیت (جدول 3) است که با توجه به دارا بودن مدول برشی پایین‌تر الیاف شیشه در مقایسه با الیاف گرافیت در واقعیت، این مساله قابل توجیه می‌باشد.

3-2-2- نمونه دوم

در ادامه و برای ارزیابی بهتر الگوی معرفی شده در مقاله حاضر برای مقاطع چند سلولی، مقطعی از یک بال مشخص مشابه شکل 7 در نظر گرفته می‌شود. مقطع مذکور، مقطعی از یک بال ساخته شده از جنس مواد مرکب در صنعت و به طول یک متر بوده و دارای دو اسپار است که توسط پوسته‌ای با ضخامت مشخص احاطه شده است. فرض بر این است که جنس اسپار و پوسته مشابه بوده و اسپار توسط پرچ‌هایی به صورت کامل در تمام نقاط و در سرتاسر طول بال به پوسته متصل شده است. مشخصات هندسی مقطع مذکور در جدول 5 بیان شده است.

با مدل‌سازی مناسب مقطع سه سلولی مذکور به صورت لایه‌ای (مواد مرکب) در نرم‌افزارهای المان محدود، اعمال بارگذاری و استفاده از مش‌بندی مناسب (شکل 8)، می‌توان مقدار صلبیت پیچشی این مقطع را با بکارگیری شکل صحیحی از رابطه 19 محاسبه نمود. نتایج بدست آمده از تحلیل‌های المان محدود و کار حاضر در محاسبه صلبیت پیچشی مقطع سه سلولی بسته ساخته شده از مواد مرکب برای زوایای متفاوت و دو جنس گرافیت- اپوکسی و شیشه- اپوکسی محاسبه شده است (جدول‌های 6 و 7).

همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج بدست آمده برای مقطع سه سلولی مشابه مقطع تک سلولی بسته بوده و میزان اختلاف بدست آمده در بیشترین حالت تا حدود 20 درصد (با در نظر گرفتن نتایج المان محدود به عنوان

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]

جدول 3 مقایسه مقادیر صلبیت پیچشی بدست آمده از کار حاضر با مقادیر المان محدود برای مقطع جدار نازک مستطیل شکل کامپوزیتی از جنس گرافیت- اپوکسی

Table 3 Comparison of the *GJ* in present study & finite element results for rectangular thin- walled composite section of graphite-epoxy

نحوه لایه چینی (زوایا برحسب درجه)	تعداد لایه‌ها	المان محدود (Nm^2)	کار حاضر (Nm^2)	میزان اختلاف (درصد)
[0,0]	2 لایه	2.4594e6	2.3130e6	5.95
[0,90]	2 لایه	2.4946e6	2.3169e6	7.12
$[0,90]_S$	4 لایه	2.4814e6	2.2945e6	7.53
$[0,45]_S$	4 لایه	5.9671e6	5.4288e6	9.02
[0,30,60,90]	4 لایه	5.8923e6	5.0544e6	14.22
$[0,30,60,90]_S$	8 لایه	5.8266e6	5.0411e6	14.94
$[0,15,30,45,60,75,90]_S$	14 لایه	5.8304e6	4.9529e6	15.05
$[0,45,60,90]_S$	40 لایه	6.2880e6	5.3259e6	15.3

جدول 4 مقایسه مقادیر صلبیت پیچشی بدست آمده از کار حاضر با مقادیر المان محدود برای مقطع جدار نازک مستطیل شکل کامپوزیتی از جنس شیشه- اپوکسی

Table 4 Comparison of the *GJ* in present study & finite element results for rectangular thin- walled composite section of glass-epoxy

نحوه لایه چینی (زوایا بر حسب درجه)	تعداد لایه‌ها	المان محدود (Nm^2)	کار حاضر (Nm^2)	میزان اختلاف (در صد)
[0,0]	2 لایه	1.3953e6	1.3143e6	5.80
[0,90]	2 لایه	1.4059e6	1.3159e6	6.42
$[0,90]_S$	4 لایه	1.4020e6	1.3055e9	6.88
$[0,45]_S$	4 لایه	2.2021e6	2.0107e6	8.69
[0,30,60,90]	4 لایه	2.0388e6	1.7623e6	13.56
$[0,30,60,90]_S$	8 لایه	2.0354e6	1.7526e6	13.89
$[0,15,30,45,60,75,90]_S$	14 لایه	2.0595e6	1.7691e6	14.10
$[0,45,60,90]_S$	40 لایه	2.1181e6	1.8188e6	14.13

مبنای سنجش) قابل مشاهده می‌باشد که میزان این اختلاف مشابه مقطع تک‌سلولی بسته بیان شده در بخش 3-2-1 با افزایش تعداد لایه‌ها تغییرات کمتری را به دنبال دارد. مقایسه جدول‌های 6 و 7 با نمونه‌های مشابه آن در بخش قبل (جدول‌های3 و 4) نیز نشان می‌دهد با افزایش تعداد سلول‌های مقطع، مقدار صلبیت پیچشی نیز افزایش می‌یابد.

3-3- بررسی اثر تغییر زاویه الیاف بر پارامترهای سفتی بال

پس از اطمینان از صحت روابط بدست آمده برای مقاطع یک سلولی و چند سلولی کامپوزیتی، در این بخش به بررسی اثر تغییر زاویهٔ الیاف بر عبارات

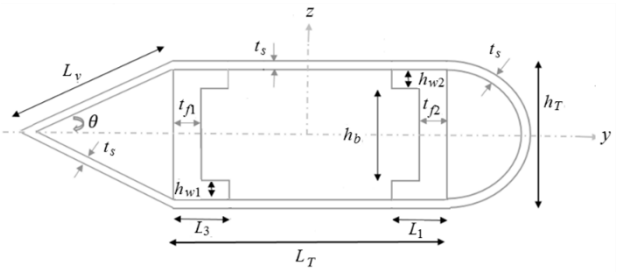


Fig. 7 Geometric dimensions in a composite thin-walled three-cell closed cross-section

شکل 7 نمایش ابعاد هندسی مقطع جدار نازک سه سلولی بسته ساخته شده از مواد مرکب

جدول 5 اطلاعات هندسی مقطع سه سلولی بسته

Table 5 Geometrical information of thin-walled three-cell closed cross-section

نوع پارامتر و نشانه آن	نشانه	واحد	مقدار
طول بال اسپار سمت راست	L_1	m	0.08
طول بال اسپار سمت چپ	L_3	m	0.08
عرض بال اسپار سمت راست	h_{w2}	m	0.04
عرض بال اسپار سمت چپ	h_{w1}	m	0.04
طول جان اسپارها	h_b	m	0.12
عرض جان اسپار سمت راست	t_{f2}	m	0.04
عرض جان اسپار سمت چپ	t_{f1}	m	0.04
طول مستطیل مرکزی	L_T	m	0.4
زاویه بین وتر و محور y در سلول مثلثی شکل	θ	Degree	15
ضخامت پوسته مقطع	t_s	m	0.01
طول بال	l	m	1

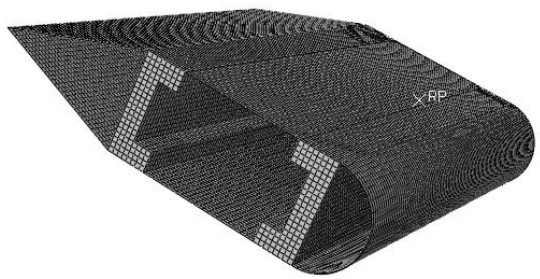


Fig. 8 Modeling the wing sections in finite element software

شکل 8 مدل‌سازی مقطع بال در نرم افزار المان محدود

سفتی بال (D_{ij}) در بالی ساخته شده از مواد کامپوزیت پرداخته می‌شود. برای بررسی این اثر فرض می‌شود تمامی لایه‌ها دارای ضخامت و زاویهٔ یکسان هستند که در آن صورت از یک لایهٔ معادل استفاده می‌شود. اطلاعات ابعادی و خصوصیات مادی بال در جدول 8 ارائه شده است.

در شکل 9 تغییرات عبارات سختی بال کامپوزیت (D_{ij}) دراثر تغییر زاویهٔ الیاف نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر سختی D_{22} و D_{33} در زاویهٔ صفر درجه بیشترین مقدار را دارند و با افزایش یا کاهش زاویه (به سمت°90+ یا °90-) این مقادیر به‌صورت متقارن محوری (با تابعیت زوج) دچار کاهش محسوسی می‌شوند. همچنین سختی D_{11} که عامل بسیار تعیین

جدول 6 مقایسه مقادیر صلبیت پیچشی بدست آمده از کار حاضر با مقادیر المان محدود برای مقطع بال کامپوزیتی ساخته شده از جنس گرافیت- اپوکسی

Table 6 Comparison of the *GJ* in present study & finite element results for composite wing section create of graphite-epoxy materials

نحوه لایه چینی (زوایا بر حسب درجه)	تعداد لایه‌ها	المان محدود (Nm^2)	کار حاضر (Nm^2)	میزان اختلاف (در صد)
[0,0]	2 لایه	3.8827e6	3.6039e6	7.18
[0,90]	2 لایه	4.6241e6	4.2144e6	8.86
$[0,90]_S$	4 لایه	4.1366e6	3.7593e6	9.12
$[0,45]_S$	4 لایه	8.8291e6	7.7042e6	12.74
[0,30,60,90]	4 لایه	9.5806e6	7.7717e6	18.88
$[0,30,60,90]_S$	8 لایه	9.2120e6	7.4515e6	19.11
$[0,45,60,90]_S$	40 لایه	1.1793e7	9.5157e6	19.31

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]

جدول 7 مقایسه مقادیر صلبیت پیچشی بدست آمده از کار حاضر با مقادیر المان محدود برای مقطع بال کامپوزیتی ساخته شده از جنس شیشه- اپوکسی

Table 7 Comparison of the *GJ* in present study & finite element results for composite wing section create of glass-epoxy materials

نحوه لایه چینی (زوایا بر حسب درجه)	تعداد لایه‌ها	المان محدود (Nm^2)	کار حاضر (Nm^2)	میزان اختلاف (در صد)
[0,0]	2 لایه	2.3045e6	2.1464e6	6.86
[0,90]	2 لایه	2.6413e6	2.410e6	8.64
$[0,90]_S$	4 لایه	2.039706	1.8579e6	8.91
$[0,45]_S$	4 لایه	3.6224e6	3.1887e6	11.79
[0,30,60,90]	4 لایه	3.4938e6	2.9005e6	16.98
$[0,30,60,90]_S$	8 لایه	3.4680e6	2.8680e6	17.3
$[0,45,60,90]_S$	40 لایه	3.8970e6	3.2150e6	17.5

جدول 8 اطلاعات هندسی و مواد نمونه بال کامپوزیتی

Table 8 Geometrical information and material property of composite wing

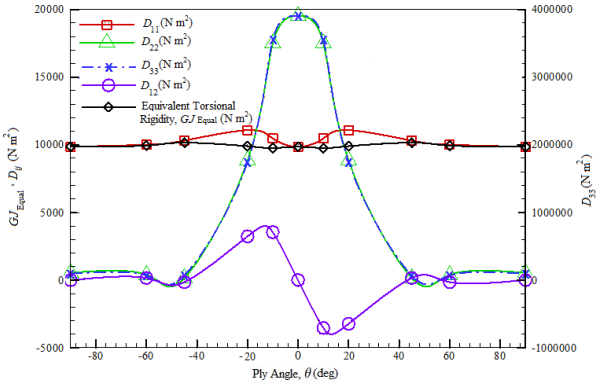
نوع پارامتر و نشانه آن	نشانه	واحد	مقدار
طول اسپن بال	b_{wing}	m	16
عرض اسپار	h_{wing}	m	0.24
ضخامت اسپار	t_s	m	0.017
طول وتر میانگین بال	c_w	m	1
مدول الاستیک در راستای الیاف	E_{11}	Pa	2e11
مدول الاستیک در جهت 2	E_{22}	Pa	5e9
مدول الاستیک در جهت 3	E_{33}	Pa	5e9
مدول برشی در صفحه 1-2	G_{12}	Pa	5e8
مدول برشی در صفحه 2-3	G_{23}	Pa	5e8
مدول برشی در صفحه 1-3	G_{13}	Pa	5e8
ضریب پوآسون در صفحه 1-2	υ_{12}	-	0.25
ضریب پوآسون در صفحه 2-3	υ_{23}	-	0.3
ضریب پوآسون در صفحه 1-3	υ_{13}	-	0.25

کننده‌ای در میزان سفتی پیچشی بال است در زوایای صفر درجه و ±90° کمترین مقدار خود را دارد و در زوایای حدود ±20° دارای بیشترین مقدار است. البته تغییرات این سختی در اثر تغییر زاویهٔ الیاف، به شدت تغییرات سختی خمشی نیست. رفتار این پارامتر نیز به‌علت زوج بودن تابعیت آن به‌صورت متقارن محوریست. سختی همبند[1] پیچشی-خمشی D_{12} نیز در حدود صفر درجه و ±90° کمترین قدرمطلق مقدار خود را دارد و در زوایای حدود ±20° دارای مقدار اکسترمم (بیشترین قدرمطلق مقدار) است. این عبارت سختی به‌علت فرد بودن تابعیت آن، رفتار متقارن نقطه‌ای (مرکزی) از خود نشان داده است. با مقایسه این مؤلفه‌های ماتریس سختی و عبارت صلبیت پیچشی معادل GJ_{EQ} که از رابطه (20) محاسبه می‌شود، نشان داده شد که این عبارت و عبارت D_{11} در یک محدوده نزدیک به هم تغییر میکنند. لیکن شکل رفتار آنها با هم متفاوت است (شکل 9- ب). مشاهده می‌شود که نقاط اکسترمم منحنی GJ_{EQ} در حدود زوایای صفر، ±10 و ±45 است و این به دلیل تأثیر D_{12} می‌باشد. با شکل 10 مقادیر نرمال شدهٔ پارامترهای مذکور نسبت به بیشترین مقدار آن پارامتر را نشان می‌دهد. همان‌طور که از این نمودار مشخص است مقادیر نرمال سختی‌های خمشی عمودی و عرضی بر هم منطبق شده‌اند. همچنین رفتار منحنی بی بعد GJ_{EQ} نسبت به D_{11} نشان می دهد در بیشتر زوایا نسبت بی بعد GJ_{EQ} بالاتر از D_{11} قرار دارد (شکل 10- ب).

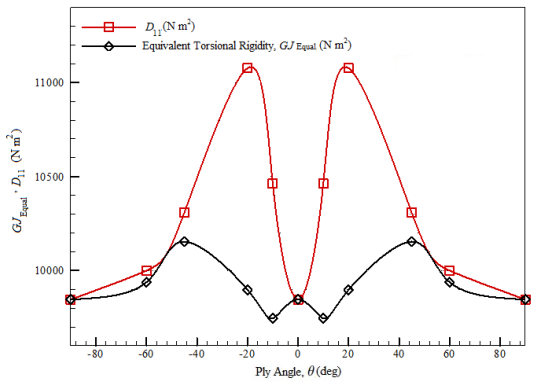
[1] Coupled bending-torsion stiffness

4- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با بکارگیری روش جدیدی به معادل‌سازی پارامترهای سفتی و به دنبال آن صلبیت پیچشی در مقاطع کامپوزیتی تک سلولی و چند سلولی پرداخته شد و نتایج حاصل در قالب یک برنامه جامع تدوین گردید. به منظور ارزیابی روش ارائه شده، ابتدا مدول برشی یک مقطع تک سلولی مستطیلی شکل از جنس فولاد توسط برنامه حاضر برای چندین لایه‌چینی مختلف محاسبه و با مقدار واقعی آن مقایسه شد که بررسی نتایج نشان از اختلاف پایین این مقادیر با یکدیگر بود که نشان از صحت روش ارائه شده داشت. در ادامه و برای ارزیابی بیشتر دو نمونه دیگر مورد بررسی قرار گرفت. در نمونه اول یک مقطع تک سلولی بسته (مستطیل شکل) ساخته شده از مواد مرکب و در نمونه دوم یک مقطع سه سلولی بسته ساخته شده از مواد مرکب (مقطعی از یک بال) مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت که جنس مواد مرکب از دو جنس گرافیت و شیشه و با زمینه اپوکسی انتخاب شد. بررسی نتایج بدست آمده از کار حاضر با مقادیر بدست آمده از تحلیل‌های المان محدود در این بخش نشان داد که الگوی معرفی شده در این مقاله و کد تهیه شده‌ی متناسب با آن می‌تواند به عنوان یک تقریب اولیه و سریع مورد استفاده صنعتگران در این حوزه قرار گیرد. در ادامه به بررسی نحوه تغییرات صلبیت



(الف)

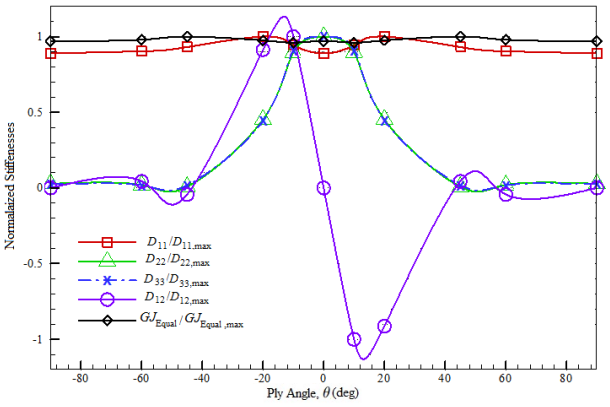


(ب)

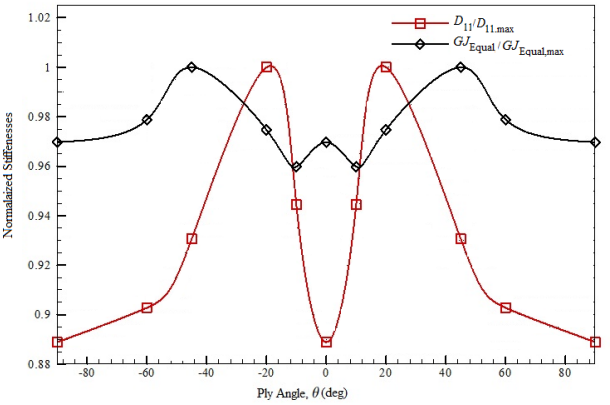
Fig. 9 Variation of stiffness parameters vs. ply angle at the composite wing, a) D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{33} and GJ_{EQ} equivalent torsional rigidity, b) Comparing D_{11}, and equivalent torsional rigidity GJ_{EQ}

شکل 9 اثر تغییر زاویهٔ الیاف بر مؤلفه‌های ماتریس سختی بال کامپوزیت، الف) D_{11}, D_{22}, D_{12} و D_{33} در مقایسه با صلبیت پیچشی معادل GJ_{EQ}، ب) مقایسه صلبیت پیچشی معادل GJ_{EQ} و D_{11}

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]



(الف)



(ب)

Fig. 10 The effect of angle ply variation on stiffness dimensionless parameters at the composite wing (normalized to the highest value in any direction), a) Normalized D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{33} and GJ_{EQ} equivalent torsional rigidity, b) Comparing Normalized D_{11} and GJ_{EQ}

شکل 10 اثر تغییر زاویهٔ الیاف بر عبارات بی‌بعد سختی بال کامپوزیت (نرمال شده نسبت به بیشترین مقدار در هر جهت) الف) برای کلیه مؤلفه‌های بی بعد شده ماتریس سختی D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{33} و صلبیت پیچشی معادل GJ_{EQ}، ب) مقایسه صلبیت پیچشی معادل GJ_{EQ} و D_{11} بی بعد شده

پیچشی یک مقطع سه سلولی بسته ساخته شده از مواد مرکب (گرافیت با زمینه اپوکسی) پرداخته شد و نشان داده شد که با بکارگیری روش مذکور می‌توان بدون مدل‌سازی و اعمال بارگذاری در نرم‌افزارهای المان محدود و در زمان‌های به نسبت پایین‌تری به تحلیل‌های قابل قبول و اولیه با تقریب مناسبی، دست یافت. در ادامه به بررسی نحوه تغییرات پارامترهای سفتی یک بال کامپوزیتی با تغییر زاویه الیاف پرداخته شد. نتایج این بررسی هم نشان داد مقادیر سختی D_{22} و D_{33} در زاویهٔ صفر درجه بیشترین مقدار را دارند و با افزایش یا کاهش زاویه این مقادیر به‌صورت متقارن محوری کاهش می‌یابند. همچنین سختی D_{11} در زوایای صفر درجه و $\pm 90°$ کمترین مقدار خود را دارد و در زوایای حدود $\pm 20°$ دارای بیشترین مقدار است. به صورت خلاصه، اهم نتایج این پژوهش عبارتند از:

- ارائه یک فرم بسته برای محاسبه مدول پیچشی خمشی مقاطع تیر چندلایه چندسلولی
- تأثیر تغییر زاویه الیاف در مقادیر مؤلفه‌های ماتریس سختی مواد چند لایه در همه جهات یکسان نیست.
- بیشترین تأثیر مؤلفه‌های قطری مرتبط با سختی خمشی (D_{22}, D_{33}) در زاویه صفر الیاف اتفاق می‌افتد.
- بیشترین تأثیر مؤلفه‌های قطری مرتبط با سختی پیچشی (D_{11}) در حدود ± 20 درجه زاویه الیاف و کمترین تأثیر آن در زاویه صفر و نود درجه اتفاق می‌افتد.
- بیشترین تأثیر مؤلفه‌های غیر قطری غیر صفر مرتبط با کوپل پیچش-خمش (D_{12}, D_{13}) در حدود ± 20 درجه زاویه الیاف اتفاق می‌افتد.
- نقاط اکسترمم منحنی صلبیت پیچشی معادل GJ_{EQ} در حدود زوایای صفر، ± 10 و ± 45 است و این به دلیل تأثیر متقابل D_{11} و D_{12} بر GJ_{EQ} می‌باشد.

در پایان شایان ذکر است، استفاده از فلسفه بیان شده در این مقاله برای دستیابی به یک تقریب اولیه از مدول برشی و یا صلبیت پیچشی در زمان اندک، می‌تواند در روند تحلیل و طراحی مسائل مشابه به خصوص در صنعت بسیار مفید و حائز اهمیت باشد.

5- فهرست علایم

$[A]$	ماتریس وابسته به انرژی کششی در مواد کامپوزیت
$[B]$	ماتریس وابسته به انرژی همبندی کشش-"خمش‌وپیچش در مواد کامپوزیت
$[D]$	ماتریس وابسته به انرژی خمشی و پیچشی بردار شعاع انحناء در مواد کامپوزیت
$[T]$	ماتریس تبدیل
σ_{ij}	تانسور تنش
ε_{ij}	تانسور کرنش مهندسی
E	مدول الاستیسیته (یانگ)
G	مدول برشی
υ	ضریب پواسن
φ	دوران مقطع
ψ, α, θ	زاویای اولر
dx	طول المانی در راستای محور اصلی تیر
$\vec{\rho}(x,t)$	تابع برداری شعاع انحنای تیر
$\rho_\xi, \rho_\eta, \rho_\zeta$	مؤلفه‌های بردار شعاع انحنای تیر

6- مراجع

[1] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, pp. 20-101, New York, McGraw: Hill Book Company, 1970.
[2] T. Kawai, The application of finite element methods to ship structures, *Computers & Structures*, Vol. 3, No. 5, pp. 1175-1194, 1973.
[3] G. Alfano, F. Marotti de Sciarra, L. Rosati, Automatic analysis of multi cell thin-walled sections, *Computers and Structures*, Vol. 59, No. 4, pp. 641-655, 1996.
[4] A. Porkić, Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open-closed section, *Computers and Structures*, Vol. 74, No. 3, pp. 705-715, 2000.
[5] Z. Li, J. M. Ko, Y. Q. Ni, Torsional rigidity of reinforced concrete bars with arbitrary sectional shape, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 35, No. 4, pp. 349-361, 2000.
[6] E. J. Sapountzakis, Non uniform torsion of bars of variable cross section, *Computers and Structures*, Vol. 82, No. 9, pp. 703-715, 2004.
[7] K. Saadé, B. Espion, G. Warzée, Non-uniform torsional behavior and stability of thin-walled elastic beams with arbitrary cross sections, *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, No. 4, pp. 857-881, 2004.
[8] F. Shadmehri, H. Haddadpour, M. A. Kouchakzadeh, Flexural–torsional behavior of thin-walled composite beams with closed cross-section, *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 4, pp. 699-705, 2007.
[9] N. I. Kim, D. K. Shin, Torsional analysis of thin-walled composite beams with single- and double-celled sections, *Engineering Structures*, Vol. 31, No. 9, pp. 1509-1521, 2009.
[10] T. P. Vo, J. Lee, Geometrically nonlinear analysis of thin-walled open-section composite beams, *Computers & Structures*, Vol. 88, No. 5, pp. 347-356, 2010.
[11] C. Zhang, S. Wang, Structure mechanical modeling of thin-walled closed

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]

section composite beams, Part 1: Single-cell cross section, *Composite Structures*, Vol. 113, No. 6, pp. 12-22, 2014.

[12] S. Wang, C. Zhang, Structure mechanical modeling of thin-walled closed-section composite beams, part 2: Multi-cell cross section, *Composite Structures*, Vol. 113, No. 2, pp. 56-62, 2014.

[13] R. Pavazza, A. Matoković, Bending of thin-walled beams of open section with influence of shear, part I: Theory, *Thin-Walled Structures*, Vol. 37, No. 3, pp. 1-12, 2016.

[14] R. Pavazza, A. Matoković, M. Vukasović, Bending of thin-walled beams of open section with influence of shear—Part II: Application, *Thin-Walled Structures*, Vol. 37, No. 4, pp. 1-18, 2016.

[15] S. Shams, *Investigation of Aeroelastic Behavior of High Aspect Ratio Flexible Composite Wings Undergoing Geometrical Nonlinearity in Incompressible Flow*, PhD thesis, Department of Aerospace Engineering, Amirkabir University of Technology, 2008. (in Persian فارسی)

[16] G. Staab, *Laminar Composite*, pp. 18-45, Butterworth-Heinemann: ISBN Company, 1999.

[17] P. F. Pai, A. H. Nayfeh, Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations, *Nonlinear Mechanics*, Vol. 25, No. 5, pp. 455-474, 1990.

[18] H. N. Arafat, *Nonlinear Response of Cantilever Beams*, PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1999.

[19] M. Neu, *Airframe Structure Design*, pp. 21-101, Hong Kong, Conmilit Press limited Company, 1988

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-04-20]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1396.17.11.34.4]