



حل دقیق خمشی صفحات مدرج هدفمند چندلایه مگنتو-الکترو-الاستیک واقع بر بستر ارتجاعی با لحاظ اثرات لغزش بین لایه‌ای

ناصر چراقی¹، مجتبی لزگی نظرگاه^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار

2- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار

* سبزوار، صندوق پستی 397-9617976487، m.lezgy@hsu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 07 مرداد 1394

پذیرش: 28 شهریور 1394

ارائه در سایت: 14 آذر 1394

کلید واژگان:

مواد هدفمند

حل دقیق

صفحات مگنتو-الکترو-الاستیک

چکیده

در این مطالعه برای تحلیل استاتیکی صفحات مدرج هدفمند شامل لایه‌هایی دارای خواص مگنتو-الکترو-الاستیک، یک روش حل سه‌بعدی با استفاده از سری پینو ارائه شده است. صفحه مورد نظر بر بستر ارتجاعی قرار گرفته است و اثرات لغزش بین لایه‌ای نیز در تحلیل با استفاده از مدل فنر بین لایه‌ای تعمیم‌یافته لحاظ شده است. بدون توجه به تعداد لایه‌ها، معادلات حرکت، معادلات گوس (برای الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن) و معادلات مربوط به شرایط مرزی و بین لایه‌ای به طور دقیق ارضاء شده است. در این روش هیچ فرضی بر مؤلفه‌های جابه‌جایی، تنش و میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در طول راستای ضخامت در نظر گرفته نشده است. در نهایت معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم با استفاده از روش فضای حالت حل شده است. فرمولاسیون پیشنهادی از طریق مقایسه با سایر نتایج موجود اعتبارسنجی شده است. با اعمال بارگذاری الکتریکی و مکانیکی بر صفحه، تأثیر پارامترهای مربوط به سختی بستر ارتجاعی، شاخص تغییرات خواص مواد و لغزش بین لایه‌ای بر پاسخ استاتیکی صفحه مدرج هدفمند ساخته شده از لایه‌های دارای خواص مگنتو-الکترو-الاستیک (FGMEE)، مورد بررسی قرار گرفته است. قابل ذکر است که مسائلی چون ورق‌های پیزوالکتریک، پیزومگنتیک، الاستیک، و نیز مسائلی مانند تحلیل ورق‌های واقع بر بستر ارتجاعی یا ورق‌های با نقص بین لایه‌ای حالت خاصی از فرمولاسیون پیشنهادی در این مقاله است. روش حل دقیق به‌دست آمده برای بررسی دقت تئوری‌های صفحات FGMEE چندلایه و اعتبارسنجی برنامه‌های که به روش‌های المان محدود ارائه می‌شوند قابل استفاده خواهد بود.

An exact bending solution for functionally graded magneto-electro-elastic plates resting on elastic foundations with considering interfacial imperfections

Naser Cheraghi, Mojtaba Lezgy-Nazargah *

- Department of Civil Engineering, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran

* P.O.B. 9617976487-397 Sabzevar, Iran, m.lezgy@hsu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 29 July 2015
Accepted 19 September 2015
Available Online 05 December 2015

Keywords:
Functionally materials
Exact solution
Magneto-electro-elastic plates

ABSTRACT

A three-dimensional (3D) Peano series solution is presented for the static analysis of functionally graded (FG) and layered magneto-electro-elastic (MEE) plates resting on elastic foundations considering imperfect interfacial bonding. The interfacial imperfection is modeled using a generalized spring layer. Regardless of the number of layers, the equations of motion, Gauss' equations for electrostatics and magnetostatics, the boundary and interface conditions are exactly satisfied. No assumption on deformations, stresses, magnetic and electric field along the thickness direction is introduced. The governing partial differential equations are finally solved using the state-space method. The present formulation has been validated through comparison with other similar works available in the open literature. Effects of two-parameter elastic foundation, gradient index, bonding imperfection, applied mechanical and electrical loads on the static and dynamic response of the functionally graded magneto-electro-elastic (FGMEE) plate are discussed. It is worthy to note that the present novel exact formulation includes all previous solutions, such as piezoelectric, piezomagnetic, purely elastic solution, elastic foundation and interlayer slip problems, as special cases. The obtained exact solution can be used to assess the accuracy of layered FGMEE plate theories and/or validating finite element codes.

1- مقدمه

انرژی‌های مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی به یکدیگر را دارند. تحقیقات متعددی بر پیش‌بینی رفتار استاتیکی و دینامیکی صفحات مگنتو-الکترو-الاستیک هدفمند انجام شده است.

امروزه صفحات چندلایه مگنتوالکتروالاستیک مؤلفه‌هایی مهم از سازه‌های هوشمند پیشرفته است. مواد مگنتو-الکترو-الاستیک دارای قابلیت تبدیل

Please cite this article using:

N. Cheraghi, M. Lezgy-Nazargah, An exact bending solution for functionally graded magneto-electro-elastic plates resting on elastic foundations with considering interfacial imperfections, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 12, pp. 346-356, 2015 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

چسبیده به هم، ترک‌های ریز آغاز و رشد می‌کنند که سبب ضعیف شدن و کاهش مقاومت پیوستگی بین لایه‌ها می‌شوند. چن و لی روش حل دقیق سه بعدی را برای صفحات چند لایه دارای لغزش بین لایه‌ای تحت خمش استوانه‌ای توسعه دادند [12]. این محققین از مدل لایه-فشر جهت لحاظ اثرات نقص در اتصال بین لایه‌ای استفاده کردند. در این مرجع معادلات اساسی حاکم نیز با استفاده از روش فضای حالت حل شده‌اند. چن و همکارانش در مقاله‌ای دیگر یک تحلیل سه بعدی بر پانل‌های استوانه‌ای چند لایه دارای لغزش بین لایه‌ای ارائه دادند [13]. در این مرجع که به مسأله خمش و ارتعاش آزاد صفحات با تکیه‌گاه ساده می‌پردازد، معادلات دیفرانسیل اساسی حاکم بر مسأله با استفاده از روش فضای حالت حل شده‌اند. چن و همکارانش مسأله خمش را برای یک صفحه مستطیلی مولتی‌فروئیک⁷ همراه با اثر کوپلینگ الکترومگنت و لغزش بین لایه‌ای با استفاده از یک تئوری دقیق بررسی کردند [14]. در این مرجع مدل لایه-فشر تعمیم یافته جهت لحاظ اثرات نقص در اتصال بین لایه‌ای به کار گرفته شده است. مسأله پاسخ استاتیکی و تحلیل حساسیت صفحات مرکب چند لایه سخت شده دارای لغزش بین لایه‌ای در سیستم همیلتن توسط لی و لیو مورد بررسی قرار گرفته است [15]. این نویسندگان با ترکیب روش‌های بدون مش و فضای حالت اقدام به حل معادلات دیفرانسیل اساسی حاکم بر مسأله کردند. ژائو و همکارانش یک روش حل دقیق برای مسائل دینامیکی و استاتیکی از صفحات چند لایه ارتوتروپیک و دارای خواص پیزوالکتریک و لغزش بین لایه‌ای تحت خمش استوانه‌ای معرفی کردند [16]. در این مرجع معادلات با استفاده از ترکیب روش فضای حالت و مربع‌سازی دیفرانسیل‌ها⁸ حل شده‌اند. تأثیر لغزش بین لایه‌ای بر روی رفتار سازه نیز توسط چنگ و همکارانش و در تحقیقی دیگر توسط دیسیویا براساس تئوری‌های صفحات و پوسته‌های ساده شده مورد بررسی قرار گرفت [17,18].

صفحات قرار گرفته بر سطح ارتجاعی در مسائل مهندسی دارای کاربرد فراوانی و سطح ارتجاعی که صفحات بر آن قرار می‌گیرند و تأثیر آن بر پاسخ سازه دارای اهمیت و به همین دلیل این موضوع در مقالات زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است [19]. مرور مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که هنوز تحلیل خمشی دقیقی برای صفحات FGMEE چند لایه، قرار گرفته بر بستر ارتجاعی ارائه نشده است. در این مقاله یک روش حل دقیق سه‌بعدی در فضای حالت برای تحلیل خمشی صفحات FGMEE، بدون هیچ فرضی بر میدان‌های جابه‌جایی و پتانسیل‌های الکتریکی و مغناطیسی ارائه شده است. در روش حل ارائه شده، معادلات حاکم بر صفحه FGMEE، شرایط مرزی انتهایی و شرایط نیرویی در سطح بالایی و سطح پایینی به طور دقیق، بدون در نظر گرفتن تعداد لایه‌ها ارضا شده است. لغزش بین لایه‌ای در این مقاله با استفاده از روش فنر-لایه تعمیم‌یافته⁹ مدل‌سازی شده است. برای توضیح شرایط تکیه‌گاهی بستر ارتجاعی، از مدل وینکلر-پاسترناک استفاده شده است. روش حل دقیق ارائه شده خیلی مختصر و می‌تواند برای تحلیل صفحات چند لایه FGMEE با تغییرات اختیاری و دلخواه خواص مواد مفید باشد.

2- روابط و فرمول‌های ریاضی

2-1- هندسه و دستگاه مختصات

صفحه چندلایه در نظر گرفته شده شامل N_L لایه که هر لایه یه بخشی از آن از مواد FGMEE تشکیل شده است.

میلاز و اورلاندو یک مدل المان محدودی با شش درجه آزادی برای یک تیر مگنتو-الکترو-الاستیک یک بعدی براساس مدل تک لایه‌ای معادل الاستیک، ارائه داده‌اند [1]. هوانگ و همکاران مسأله تنش صفحه‌ای را برای یک تیر مگنتوالکتروالاستیک غیرهمگن کلی مورد بررسی قرار داده‌اند. در این مطالعه تغییرات ضرایب الاستیک، دی‌الکتریک، پیزوالکتریک، نفوذپذیری مغناطیسی و کوپلینگ الکترومغناطیسی را تحت یک تابع دلخواه و اختیاری در راستای ضخامت در نظر گرفتن [2]. هانگ و همکارانش یک روش تحلیلی و نیمه تحلیلی برای تیرهای مگنتوالکتروالاستیک هدفمند غیرهمگن تحت بارگذاری اختیاری ارائه دادند [3]. در این مرجع فرض شده است که توابع تنش، جابه‌جایی الکتریکی و مغناطیسی از حاصل ضرب دو تابع مجهول مستقل تشکیل شده‌اند. در واقع در این مرجع از روش تفکیک متغیرها جهت حل معادلات دیفرانسیل اساسی حاکم استفاده شده است. مویتا و همکارانش یک مدل المان محدود براساس تئوری مرتبه بالا برای تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد صفحات مگنتوالکتروالاستیک ارائه دادند [4]. مدل اجزا محدود این نویسندگان متشکل از یک المان ورق مثلثی با 24 درجه آزادی است.

فینکس و همکارانش یک صفحه چند لایه با لایه‌های دارای خواص الکترومگنت تحلیل کردند. آن‌ها تئوری ترکیب شده ریزر¹ را برای تحلیل دینامیکی و استاتیکی مسائل صفحه الکترو-مگنتو-الاستیک کوپل شده بسط دادند [5]. مدل صفحه‌ای ریزر-مندلین² برای صفحات چند لایه مدرج هدفمند ساخته شده از مواد مگنتو الکترو الاستیک با استفاده از روش تغییرات جانبی توسط یفنگ و همکارانش توسعه داده شده است [6]. هیلچر و پان یک روش حل تحلیلی برای خمش استوانه‌ای برای صفحات چند لایه MEE³ متشکل از تکیه‌گاه‌های ساده ارائه کردند [7]. در این مرجع نویسندگان از روش خطی سازی معادلات دیفرانسیل (روش فضای حالت⁴) جهت حل معادلات اساسی مسأله استفاده کردند. پان در مقاله‌ای دیگر یک روش حل دقیق سه‌بعدی برای صفحات مستطیلی چندلایه مگنتو-الکترو-الاستیک خطی با قیدهای ساده با استفاده از ترم‌های ماتریس گسترش یافته، به‌دست آورد [8]. پان و هان یک روش حل دقیق سه بعدی برای صفحه مستطیلی چند لایه ساخته شده از مواد مگنتو-الکترو-الاستیک غیرهمگن مدرج هدفمند ارائه کردند [9]. در این مرجع تغییرات ویژگی‌های مواد در راستای ضخامت لایه‌ها به‌صورت تابع نمایی در نظر گرفته شده است. معادلات اساسی حاکم بر رفتار ورق نیز با استفاده از فرمولاسیون استرو⁵ حل شده‌اند. لی و همکارانش یک روش حل تحلیلی برای صفحات دایره‌ای FGMEE⁶ تحت بار یکنواخت با استفاده از معرفی جابه‌جایی‌ها، پتانسیل الکتریکی، پتانسیل مغناطیسی به صورت قرینه، به عنوان متغیرهای حالت به‌دست آوردند [10]. در این مطالعه نویسندگان تغییرات میدان‌های جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی در راستای شعاعی را به صورت چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب مجهول در نظر گرفته‌اند. ژائو و چن یک تحلیل جانبی در قالب سیستم همیلتن برای حل مسائل صفحه‌ای از مواد FGMEE را بررسی کردند [11]. در این مرجع مؤلفه‌های جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی به عنوان متغیرهای حالت در نظر گرفته شده‌اند. تغییرات ویژگی‌های مکانیکی مواد در راستای طولی نیز به صورت تابع نمایی در نظر گرفته شده است.

در طول زمان خدمت سازه‌های هوشمند ساخته شده از لایه‌های

- 1- Reissner
- 2- Reissner-Mindlin
- 3- Magneto-Electro-Elastic
- 4- State-Space method
- 5- Stroh
- 6- Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic

7- Multiferroic
8- Differential quadrature method
9- Generalized spring layer

2-3- معادلات اساسی

مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی (u_i) با استفاده از رابطه کرنش- جابه‌جایی با مؤلفه‌های میدان کرنش به صورت رابطه (3) با هم رابطه دارند.

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \quad (3)$$

مؤلفه‌های میدان الکتریکی نیز می‌توانند با رابطه (4) با پتانسیل الکتریکی (φ) مرتبط شوند.

$$E_i^{(k)} = -\varphi_{,i}^{(k)} \quad (4)$$

رابطه (5) نیز بین مؤلفه‌های میدان مغناطیسی و پتانسیل مغناطیسی (Ψ) برقرار است.

$$H_i^{(k)} = -\Psi_{,i}^{(k)} \quad (5)$$

معادلات تعادل در صورت عدم حضور نیروهای حجمی برای k امین لایه ساخته شده از مواد MEE برای حالت استاتیکی به صورت رابطه (6) است.

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^{(k)} - e_{ijk} E_{k,j}^{(k)} - q_{ijk} H_{k,j}^{(k)} = 0 \quad (6)$$

قوانین گوس 1 در حالت الکترومگنت از صفحه، برای الکترواستاتیک و مغناطیس ساکن بر صفحه حاکم است. در صورت عدم حضور چگالی شارژ الکتریکی و مغناطیسی، قانون گوس به صورت رابطه (7) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} D_{i,i}^{(k)} &= e_{ijk} \varepsilon_{jk,i}^{(k)} - x_{ij}^{(k)} E_{j,i}^{(k)} - d_{ij}^{(k)} H_{j,i}^{(k)} = 0 \\ B_{i,i}^{(k)} &= q_{ijk} \varepsilon_{jk,i}^{(k)} - d_{ij}^{(k)} E_{j,i}^{(k)} - p_{ij}^{(k)} H_{j,i}^{(k)} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

برای صفحه FGMEE که به صورت ساده مقید شده است، شرایط مرزی در چهار لبه عمودی به صورت روابط (8) است.

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)}(0, y, z) &= \sigma_{11}^{(k)}(L_x, y, z) = \sigma_{22}^{(k)}(x, 0, z) \\ &= \sigma_{22}^{(k)}(x, L_y, z) = 0 \\ u_3^{(k)}(0, y, z) &= u_3^{(k)}(L_x, y, z) = u_3^{(k)}(x, 0, z) \\ &= u_3^{(k)}(x, L_y, z) = 0 \\ \varphi^{(k)}(0, y, z) &= \varphi^{(k)}(L_x, y, z) = \varphi^{(k)}(x, 0, z) \\ &= \varphi^{(k)}(x, L_y, z) = 0 \\ \Psi^{(k)}(0, y, z) &= \Psi^{(k)}(L_x, y, z) = \Psi^{(k)}(x, 0, z) \\ &= \Psi^{(k)}(x, L_y, z) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

با این که پتانسیل الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی در مرزها از بین نمی‌رود، روش حل سه بعدی دقیقی برای صفحات ورقه شده فقط برای ترکیباتی مطمئن از شرایط مرزی روی لبه‌ها می‌توان به دست آورد. در مراجع [20,9,8]، فرضیات یکسانی برای روش حل دقیق به دست آمده برای خمش صفحات چند لایه به کار گرفته شده است. همه معادلات (7-1)، باید برای خواص مواد از هر لایه مشخص ارضاء شود. علاوه بر این معادلات باید برای شرایط مرزی مکانیکی و الکترومگنت روی سطح پایین و سطح بالای صفحه به صورت رابطه (9) ارضاء شود.

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x, y, h) &= q_0^t \sin mx \sin ny, \quad \sigma_{33}(x, y, 0) \\ &= k_w u_3^{(1)}(x, y, 0) - k_p \left(\frac{\partial^2 u_3^{(1)}(x, y, 0)}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{13}(x, y, h) &= 0, \quad \sigma_{13}(x, y, 0) = 0 \\ \sigma_{23}(x, y, h) &= 0, \quad \sigma_{23}(x, y, 0) = 0 \\ \varphi(x, y, h) &= \varphi_0^t \sin mx \sin ny \quad \text{یا} \quad D_3(x, y, h) = 0 \\ \varphi(x, y, 0) &= \varphi_0^b \sin mx \sin ny \quad \text{یا} \quad D_3(x, y, 0) = 0 \\ \Psi(x, y, h) &= \Psi_0^t \sin mx \sin ny \quad \text{یا} \quad B_3(x, y, h) = 0 \\ \Psi(x, y, 0) &= \Psi_0^b \sin mx \sin ny \quad \text{یا} \quad B_3(x, y, 0) = 0 \\ n &= \frac{\alpha\pi}{L_x}, \quad m = \frac{\beta\pi}{L_y} \end{aligned} \quad (9)$$

در روابط بالا $q_0^t, \varphi_0^t, \Psi_0^t$ و $\varphi_0^b, \varphi_0^b, \Psi_0^b$ ثابت‌هایی مشخص، مقادیر α و β عدد مثبت صحیح است. شایان توجه است که روش حل دقیق ارائه شده در این مقاله کلی و برای هر بارگزاری دلخواه مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی قابل کاربرد است و این ویژگی به این دلیل است که هر بار مکانیکی اعمالی و یا

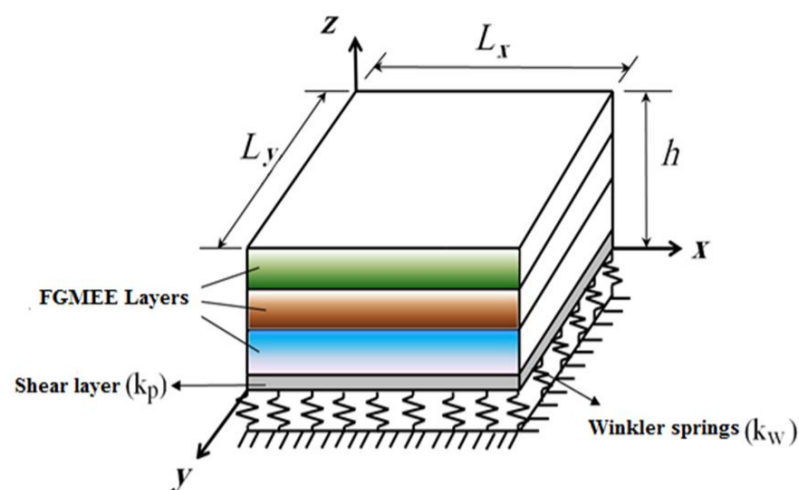


Fig. 1 Layered FGMEE plate resting on a two-parameter foundation: Cartesian coordinate system and geometric parameters

شکل 1 شکل شماتیک از صفحه FGMEE چند لایه، واقع بر بستر ارتجاعی دارای دو پارامتر سختی: پارامترهای هندسی در دستگاه مختصات هندسی نشان داده شده است.

در بین لایه‌ها لغزش بین لایه‌ای از نوع الاستیک و الکترومگنت لحاظ شده است. صفحه مورد مطالعه بر بستر ارتجاعی از نوع وینکلر-پاسترناک¹ قرار گرفته است، که سختی وینکلر را با K_w و سختی برشی را با K_p نمایش می‌دهیم. ابعاد صفحه مورد نظر در دستگاه مختصات کارتزین (x, y, z) به صورت $L_x \times L_y \times h$ است، شرایط تکیه‌گاهی لبه‌های صفحه به صورت ساده مقید شده فرض می‌شود. در این رساله کران‌های k امین لایه به این صورت معرفی می‌شود که سطح پایین آن در $Z=z_k$ و سطح بالایی آن لایه در $Z=z_{k+1}$ قرار دارد و همچنین سطح پایینی لایه اول در $Z=z_1=0$ و سطح بالایی لایه N_l در $Z=z_{(N_l+1)}=h$ قرار گرفته است. پارامترهای هندسی صفحه FGMEE در دستگاه مختصات کارتزین انتخاب شده است، شکل 1 را ببینید.

2-2- معادلات ساختاری

معادله ساختاری کوپل شده سه بعدی و خطی برای k امین لایه صفحه FGMEE به صورت رابطه (1) می‌توان بیان کرد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{(k)} \\ D^{(k)} \\ B^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(k)} & -e^{(k)} & -q^{(k)} \\ e^{(k)} & x^{(k)} & d^{(k)} \\ q^{(k)} & d^{(k)} & p^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(k)} \\ E^{(k)} \\ H^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در معادله (1) روابط (2) را داریم.

$$\begin{aligned} \sigma^{(k)} &= \{\sigma_{11}^{(k)} \quad \sigma_{22}^{(k)} \quad \sigma_{33}^{(k)} \quad \sigma_{23}^{(k)} \quad \sigma_{13}^{(k)} \quad \sigma_{12}^{(k)}\}^T \\ \varepsilon^{(k)} &= \{\varepsilon_{11}^{(k)} \quad \varepsilon_{22}^{(k)} \quad \varepsilon_{33}^{(k)} \quad \gamma_{23}^{(k)} \quad \gamma_{13}^{(k)} \quad \gamma_{12}^{(k)}\}^T \\ H^{(k)} &= \{H_1^{(k)} \quad H_2^{(k)} \quad H_3^{(k)}\}^T \\ E^{(k)} &= \{E_1^{(k)} \quad E_2^{(k)} \quad E_3^{(k)}\}^T \\ D^{(k)} &= \{D_1^{(k)} \quad D_2^{(k)} \quad D_3^{(k)}\}^T \\ B^{(k)} &= \{B_1^{(k)} \quad B_2^{(k)} \quad B_3^{(k)}\}^T \end{aligned} \quad (2)$$

که در این جا $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}, E^{(k)}$ و $H^{(k)}$ به ترتیب نشان دهنده مؤلفه‌های تانسور تنش، تانسور کرنش‌های بسیار کوچک، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی است. $D^{(k)}$ مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی الکتریکی و $B^{(k)}$ مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی مغناطیسی است. $c^{(k)}, e^{(k)}, q^{(k)}, x^{(k)}, d^{(k)}, p^{(k)}$ به ترتیب ضرایب الاستیک، پیزوالکتریک، دی‌الکتریک، پیزومگنت، کوپلینگ الکترومگنت و نفوذپذیری مغناطیسی مواد است، که ماتریس این ضرایب در پیوست (الف) آمده است. بر خلاف مواد همگن MEE، $c^{(k)}, e^{(k)}, q^{(k)}, x^{(k)}, d^{(k)}, p^{(k)}$ نشان داده شده در معادله (1) مقادیری ثابت نیستند، این ضرایب تحت یک تابع توانی (تابع نمایی یا هر تابع اختیاری دیگر) در راستای ضخامت از لایه‌های صفحه FGMEE قابل تغییر است.

1- Winkler-Pasternak

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= -mC_{13}(z)U(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad - nC_{32}(z)V(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + C_{33}(z) \frac{\partial W(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + e_{33}(z) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + q_{33}(z) \frac{\partial \Psi(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ \tau_{23} &= C_{44}(z) \frac{\partial V(z)}{\partial z} \sin(mx) \cos(ny) \\ &\quad + nC_{44}(z)W(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ &\quad + ne_{24}(z)\Phi(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ &\quad + nq_{24}(z)\Psi(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ \tau_{13} &= mC_{55}(z)W(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ &\quad + C_{55}(z) \frac{\partial U(z)}{\partial z} \cos(mx) \sin(ny) \\ &\quad + me_{15}(z)\Phi(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ &\quad + mq_{15}(z)\Psi(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ \tau_{12} &= nC_{66}(z)U(z) \cos(mx) \cos(ny) \\ &\quad + mC_{66}(z)V(z) \cos(mx) \cos(ny) \\ D_1 &= me_{15}(z)W(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ &\quad + e_{15}(z) \frac{\partial U(z)}{\partial z} \cos(mx) \sin(ny) \\ &\quad - mx_{11}(z)\Phi(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ &\quad - md_{11}(z)\Psi(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ D_2 &= e_{24}(z) \frac{\partial V(z)}{\partial z} \sin(mx) \cos(ny) + ne_{24}(z)W(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ &\quad - nx_{22}(z)\Phi(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ &\quad - nd_{22}(z)\Psi(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ D_3 &= -me_{31}(z)U(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad - ne_{32}(z)V(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + e_{33}(z) \frac{\partial W(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad - x_{33}(z) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad - d_{33}(z) \frac{\partial \Psi(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ B_1 &= mq_{15}(z)W(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ &\quad + q_{15}(z) \frac{\partial U(z)}{\partial z} \cos(mx) \sin(ny) \\ &\quad - md_{11}(z)\Phi(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ &\quad - mp_{11}(z)\Psi(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ B_2 &= q_{24}(z) \frac{\partial V(z)}{\partial z} \sin(mx) \cos(ny) + nq_{24}(z)W(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ &\quad - nd_{22}(z)\Phi(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ &\quad - np_{22}(z)\Psi(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ B_3 &= -mq_{31}(z)U(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad - nq_{32}(z)V(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + q_{33}(z) \frac{\partial W(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad - d_{33}(z) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \end{aligned} \quad (12)$$

با جای‌گزینی معادلات (11) در داخل معادلات (6,5)، و دستگاه معادلات حاصل شده شامل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود که آن را مانند معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می‌نویسیم، که معادله به فرم ماتریسی در فضای حالت آن به صورت روابط (13-15) به دست می‌آید.

$$K^{(k)} X_z^{(k)} + B^{(k)} X^{(k)} = 0 \quad (13)$$

$$X_z^{(k)} = A^{(k)} X^{(k)} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= -(K^{(k)})^{-1} B^{(k)} \\ X^{(k)} &= [U^{(k)}(z) \quad V^{(k)}(z) \quad W^{(k)}(z) \quad \Phi^{(k)}(z) \quad \Psi^{(k)}(z)]^T \\ \frac{\partial U^{(k)}(z)}{\partial z} \quad \frac{\partial V^{(k)}(z)}{\partial z} \quad \frac{\partial W^{(k)}(z)}{\partial z} \quad \frac{\partial \Phi^{(k)}(z)}{\partial z} \quad \frac{\partial \Psi^{(k)}(z)}{\partial z} & \end{aligned} \quad (15)$$

مؤلفه‌های ماتریس‌های $K^{(k)}$ و $B^{(k)}$ در پیوست (ب) آمده است. برای لایه‌های همگن MEE براساس معادله (14) ماتریس $A^{(k)}$ به ماتریس ثابت‌های همگن کاهش داده می‌شود. در این حالت برای حل معادله (14) آن را مشابه مراجع [22,21] به صورت رابطه (16) می‌نویسیم.

$$X^{(k)} = \exp[A^{(k)}z] \delta^{(k)} \quad (16)$$

پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی اعمال شده بر سطح صفحه FGMEE را می‌توان به صورت سری فوریه نوشت.

با لحاظ لغزش بین لایه‌ای شرایط اتصال بین لایه‌ها نیز باید ارضاء شود. برای توصیف لغزش بین لایه‌ای در صفحه چند لایه FGMEE مدل فنر- لایه به صورت رابطه (10) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(k)}(x, y, z_{k+1}) &= \sigma_{13}^{(k+1)}(x, y, z_{k+1}) \\ &= [u_1^{(k)}(x, y, z_{k+1}) - u_1^{(k+1)}(x, y, z_{k+1})] / \bar{R}_1^{(k)} \\ \sigma_{23}^{(k)}(x, y, z_{k+1}) &= \sigma_{23}^{(k+1)}(x, y, z_{k+1}) \\ &= [u_3^{(k)}(x, y, z_{k+1}) - u_3^{(k+1)}(x, y, z_{k+1})] / \bar{R}_3^{(k)} \\ D_3^{(k)}(x, y, z_{k+1}) &= D_3^{(k+1)}(x, y, z_{k+1}) \\ &= [\varphi_3^{(k)}(x, y, z_{k+1}) - \varphi_3^{(k+1)}(x, y, z_{k+1})] / \bar{R}_4^{(k)} \\ B_3^{(k)}(x, y, z_{k+1}) &= B_3^{(k+1)}(x, y, z_{k+1}) \\ &= [\Psi_3^{(k)}(x, y, z_{k+1}) - \Psi_3^{(k+1)}(x, y, z_{k+1})] / \bar{R}_5^{(k)} \end{aligned} \quad (10)$$

در این معادلات $\bar{R}_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3$) ضریب سختی الاستیک بین لایه‌ای k امین لایه است. $\bar{R}_4^{(k)}$ و $\bar{R}_5^{(k)}$ به ترتیب ضرایب نفوذپذیری الکتریکی و نفوذپذیری مغناطیسی است. در شرایط کاربردی، ضعف کلی در پیوستگی بین لایه‌ها را می‌توان با استفاده از تقریب میکرومکانیکی¹ مناسب ارزیابی کرد؛ بنابراین ممکن است به دلیل وجود لغزش بین لایه‌ای در پاسخ صفحات FGMEE تحت بارگذاری‌های مختلف تغییراتی ایجاد شود. توجه شود که وقتی $\bar{R}_i^{(k)} = 0$ (5, 3, 2, 1) مدل لایه‌ای- فنر تعمیم‌یافته که در بالا یاد شده است، پیوستگی بین لایه‌ای از صفحه FGMEE را بدون لغزش در نظر می‌گیرد.

3- روش حل دقیق

در این روش حل مؤلفه‌های جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی را به صورت رابطه (11) فرض می‌کنیم.

$$\begin{aligned} u_1^{(k)}(x, y, z) &= U^{(k)}(z) \cos(mx) \sin(ny) \\ u_2^{(k)}(x, y, z) &= V^{(k)}(z) \sin(mx) \cos(ny) \\ u_3^{(k)}(x, y, z) &= W^{(k)}(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ \varphi^{(k)}(x, y, z) &= \Phi^{(k)}(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ \psi^{(k)}(x, y, z) &= \Psi^{(k)}(z) \sin(mx) \sin(ny) \end{aligned} \quad (11)$$

فرض شده است که معادلات بالا شرایط مرزی (8)، در چهار لبه صفحه FGMEE را ارضاء نماید. باید توجه شود که هیچ فرضی برای $U^{(k)}(z)$ ، $V^{(k)}(z)$ ، $W^{(k)}(z)$ ، $\Phi^{(k)}(z)$ و $\Psi^{(k)}(z)$ در معادله (11) در نظر گرفته نشده است، آن‌ها توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. با قرار دادن معادلات (11) در داخل معادلات (3-5)، و جای‌گذاری نتایج حاصل‌شده در داخل معادله (12)، عبارت زیر برای مؤلفه‌های تنش، جابه‌جایی الکتریکی و جابه‌جایی مغناطیسی حاصل شده است.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -mC_{11}(z)U(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad - nC_{12}(z)V(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + C_{13}(z) \frac{\partial W(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + e_{31}(z) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + q_{31}(z) \frac{\partial \Psi(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ \sigma_{22} &= -mC_{12}(z)U(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad - nC_{22}(z)V(z) \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + C_{23}(z) \frac{\partial W(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + e_{32}(z) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \\ &\quad + q_{32}(z) \frac{\partial \Psi(z)}{\partial z} \sin(mx) \sin(ny) \end{aligned}$$

4-2- مثال 2

در این مثال یک صفحه سه لایه FGMEE در نظر گرفته شده، که به صورت ساده در چهار لبه مقید شده و از مواد پیزوالکتریک، به نام $BaTiO_3$ و مواد دارای خواص مغناطیسی، به نام $CoFe_2O_4$ ساخته شده است. ابعاد افقی صفحه در دو جهت برابر با $L_x = L_y = 1m$ و ضخامت هر لایه مساوی با 0.1 متر و ضخامت کل صفحه را 0.3 متر در نظر گرفتیم. در این مقاله برای سادگی $BaTiO_3$ را به اختصار با B و $CoFe_2O_4$ را با C نشان می‌دهیم. لایه میانی صفحه را مطابق با مرجع [9] به صورت همگن فرض می‌کنیم.

لایه بالایی و پایینی از مواد مدرج هدفمند که خواص آن تحت تابع نمایی روابط (21) تغییر می‌کند ساخته شده است.

$$C_{kl} = C_{kl}^0 e^{az}, \quad e_{ik} = e_{ik}^0 e^{az}, \quad x_{ij} = x_{ij}^0 e^{az} \\ q_{ik} = q_{ik}^0 e^{az}, \quad d_{ij} = d_{ij}^0 e^{az}, \quad p_{ij} = p_{ij}^0 e^{az} \quad (21)$$

که در این جا a شامل پنج مقدار ثابت مشخص که نشان‌دهنده درجه تغییرات خواص مواد در راستای z است. $C_{kl}^0, e_{ik}^0, x_{ij}^0, q_{ik}^0, d_{ij}^0$ و p_{ij}^0 مقادیر خواص مواد در بالای لایه پایینی و پایین لایه بالایی است.

برای شاخص تغییرات خواص مواد، پنج مقدار مختلف $a = 10, -5, -10, 5, 0$ در نظر گرفته شده است. تغییرات خواص مواد در لایه بالایی و پایینی همان‌طور که در شکل 3 نشان داده شده، به صورت متقارن است.

این مثال با شرایط یاد شده از پیش توسط پان و هان مورد مطالعه قرار گرفته است [9] و ما در مطالعه حاضر برای ارزیابی صحت نتایج به‌دست‌آمده از روش حل دقیقی که ارائه داده شده، از نتایج به‌دست‌آمده توسط پان و هان در مرجع [9] استفاده شده است.

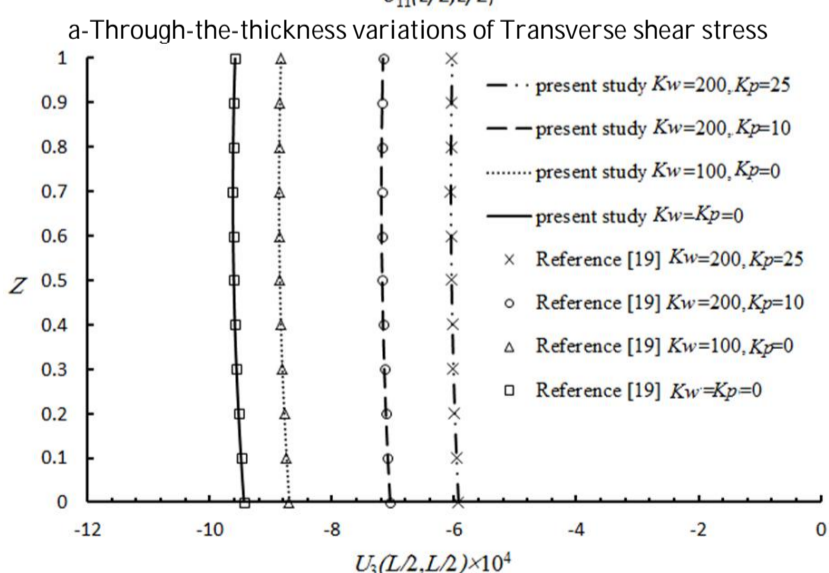
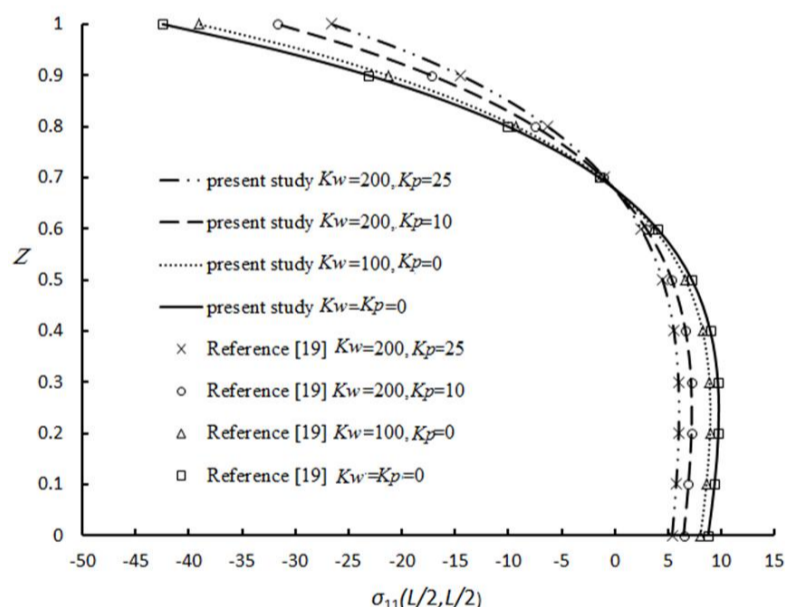


Fig. 2 Comparison of present study graphs with reference [19]

شکل 2 نمودارهای مقایسه نتایج منبع [19] با نتایج مطالعه حاضر

در این معادله $\delta^{(k)}$ یک بردار 1×10 ، از ثابت‌های مجهول است. برای لایه‌های FGMEE که دارای ویژگی تغییرات خواص تحت تابع اختیاری است، مؤلفه‌های ماتریس $A^{(k)}$ در معادله (14) ثابت نیست. بدیهی است که آن‌ها تحت تابعی از مختصات ضخامت (z) تغییر می‌کنند. در این صورت استفاده از معادله (16) برای حل معادله (14) خیلی مناسب نیست. با استفاده از ریاضیات و مکانیک رسانه‌های غیرهمگن استفاده از رابطه (17)، برای حل معادله (14) مناسب است.

$$X^{(k)} = W^{(k)}(z) \delta^{(k)} \quad (17)$$

که در این معادله $W^{(k)}(z) = \text{Ord} \exp[\int_0^z A^{(k)}(x) dx]$ ماتریس گسترش‌یافته نامیده می‌شود، که می‌توان آن را به صورت عبارت پیانو¹ در رابطه (18) بیان کرد [22,21].

$$W^{(k)}(z) = I + \int_0^z A^{(k)}(x) dx + \int_0^z A^{(k)}(x) \int_0^x A^{(k)}(y_1) dy_1 dx + \int_0^z A^{(k)}(x) \int_0^x A^{(k)}(y_1) \int_0^{y_1} A^{(k)}(y_2) dy_2 dy_1 dx + \dots \quad (18)$$

4- بحث و بررسی نتایج

در این بخش نتایج تحلیل استاتیکی را با مثال‌های عددی مورد بررسی قرار می‌دهیم، چند صفحه FG و FGMEE را که دارای لغزش بین لایه‌ای بوده و بر بستر ارتجاعی دارای دو پارامتر سختی قرار گرفته است، با استفاده از روش حل دقیق سه بعدی ارائه شده در این مقاله، مورد تحلیل قرار داده شده است. در ابتدا دو مثال برای ارزیابی صحت نتایج به‌دست آمده از روش حل دقیق ارائه شده در این مقاله، با نتایج حاصل شده در مراجع آورده شده است [19,9]. در مثال سوم نتایج جدید به‌دست آمده از این روش حل دقیق سه بعدی ارائه شده است.

4-1- مثال 1

در این مثال یک صفحه FG مربعی نازک، که به صورت ساده در چهار لبه خود مقید شده و با ابعاد $h/L_x = h/L_y = 0$ در نظر می‌گیریم. مدول یانگ در سطح پایین و بالای صفحه FG به ترتیب E و $10E$ و نسبت پواسون برابر با 0.3 فرض شده است. صفحه مورد مطالعه بر بستر ارتجاعی با سختی‌های مختلف قرار گرفته و بار سینوسی برابر با رابطه (19) است.

$$\sigma_{33}(x, y, h) = q_0 \sin(\pi x/L_x) \sin(\pi y/L_y) \quad (19)$$

که $q_0 = E/10^5$ بر سطح بالایی صفحه اعمال شده است. این مثال با شرایطی که یاد شده است، توسط هوانگ و همکارانش مورد مطالعه قرار گرفته است [19].

نمودارهای توزیع مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی صفحه FG به ازای سختی‌های متفاوت بستر ارتجاعی که صفحه روی آن قرار گرفته، در شکل 2 نشان داده شده است. در این شکل‌ها مقادیر سختی بستر ارتجاعی به صورت بدون بعد در رابطه (20) آورده شده است:

$$K_w = \frac{k_w L^4}{D}, \quad K_p = \frac{k_p L^4}{D} \quad (20)$$

در این رابطه مقدار $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ ، مطابق با قرارداد مرجع [19] در نظر گرفته شده است. با توجه به نمودارهای شکل 2، می‌توان تطابق خیلی خوب در نتایج ارائه شده توسط روش حل پیشنهاد شده در این مقاله با استفاده از سری پیانو، با روش حل ارائه شده توسط هوانگ و همکاران [19] را مشاهده کرد.

1- Peano expansio

از نمودارهای شکل 4، در نقطه ثابت $(x,y)=(0.75L_x, 0.25L_y)$ از صفحه به دست آمده است. همان‌طور که از نمودارهای شکل 4 مشخص است، تطابق خیلی خوبی از مقایسه نتایج به دست آمده از روش حل دقیق سه بعدی ارائه شده در این مقاله با نتایج به دست توسط پان و هان [9] حاصل شده است. در واقع می‌توان گفت حل تحلیلی ارائه شده در مرجع [9] حالت خاصی از فرمولاسیون پیشنهادی در این مقاله است.

4-2-2- بارگذاری الکتریکی

در این قسمت یک پتانسیل الکتریکی سینوسی که بیشینه دامنه آن واحد است را بر سطح بالایی از صفحه سه لایه FGMEE اعمال شده است. در این حالت سطح بالایی و پایینی صفحه خالی از تنش است. سطح پایینی صفحه از نظر الکتریکی به زمین متصل شده است (یعنی بدون پتانسیل الکتریکی است). نتایج عددی برای میدان جابه‌جایی، تنش و پتانسیل مغناطیسی در نمودارهای شکل 5 نشان داده شده است. در این نمودارها تطابق خیلی خوب نتایج به دست آمده از روش حل دقیق ارائه شده در فضای حالت، با نتایج حاصل شده توسط پان و هان قابل مشاهده است [9].

4-3-3- مثال 3

در این مثال یک صفحه FGMEE سه لایه که به صورت ساده در چهار لایه خود مقید شده و بر بستر ارتجاعی وینکلر-پاسترناک قرار گرفته، با استفاده از روش حل دقیق ارائه شده، مورد تحلیل قرار داده شده است. در این قسمت تأثیر لغزش بین لایه‌ای نیز لحاظ شده و پارامترهای هندسی، ترتیب قرارگیری لایه‌ها، شرایط بارگذاری و خواص مواد مشابه مثال 2 در نظر گرفته شده است. ضریب سختی بستر ارتجاعی و ضریب سختی الاستیک بین لایه‌ای به صورت روابط (23) نرمال شده است.

$$\begin{aligned} K_w &= \frac{K_w}{C_{44}^B} \\ K_p &= \frac{K_p}{C_{44}^B} \\ R_i^{(k)} &= \bar{R}_i^{(k)} C_{44}^B \\ R_4^{(k)} &= \bar{R}_4^{(k)} x_{33}^B \\ R_5^{(k)} &= \bar{R}_5^{(k)} p_{33}^B \end{aligned} \quad (23)$$

در این جا بالا نویس B نشان‌دهنده BaTiO₃ است و $i = 1, 2, 3$ بیانگر راستای ضریب سختی تعمیم‌یافته بین لایه‌ای در سه جهت است، که برای سادگی به شکل رابطه (24) فرض شده است.

$$R_1^{(k)} = R_2^{(k)} = R_4^{(k)} = R_5^{(k)} = R \quad (24)$$

برای جلوگیری از پدیده توی هم رفتگی لایه‌ها مقدار $R_3^{(k)} = 0$ فرض می‌شود. نتایج عددی حاصل شده به‌ازای تغییرات در راستای ضخامت $(h \geq x_3 \geq 0)$ و در نقطه ثابت $(x,y)=(0.75L_x, 0.25L_y)$ است. در این مثال در سه قسمت تأثیر عوامل، سختی بستر ارتجاعی که صفحه روی آن قرار گرفته، لغزش بین لایه‌ای و شاخص درجه تغییرات خواص مواد، بر پاسخ صفحه سه لایه FGMEE مورد بررسی قرار داده شده است.

4-3-3-1- بررسی تأثیرات سختی بستر ارتجاعی بر پاسخ صفحه FGMEE سه لایه

در این قسمت تأثیر سختی بستر ارتجاعی بر پاسخ صفحه مورد نظر را مورد مطالعه قرار داده شده است. صفحه سه لایه FGMEE با استفاده از روش حل دقیق ارائه شده در این مقاله، به‌ازای مقادیر مختلف سختی بستر ارتجاعی، تحلیل شده است.

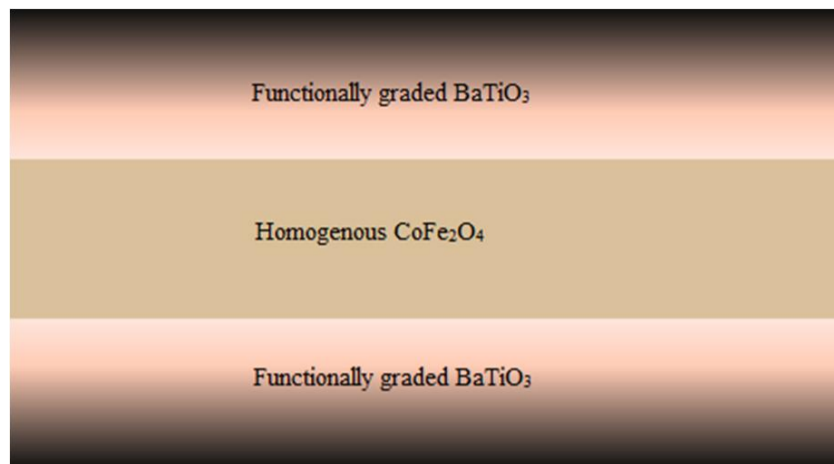


Fig. 3 The stacking sequence of the layered FGMEE plate in the example 2

شکل 3 نوع چینش لایه‌های صفحه FGMEE مورد مطالعه در مثال 2

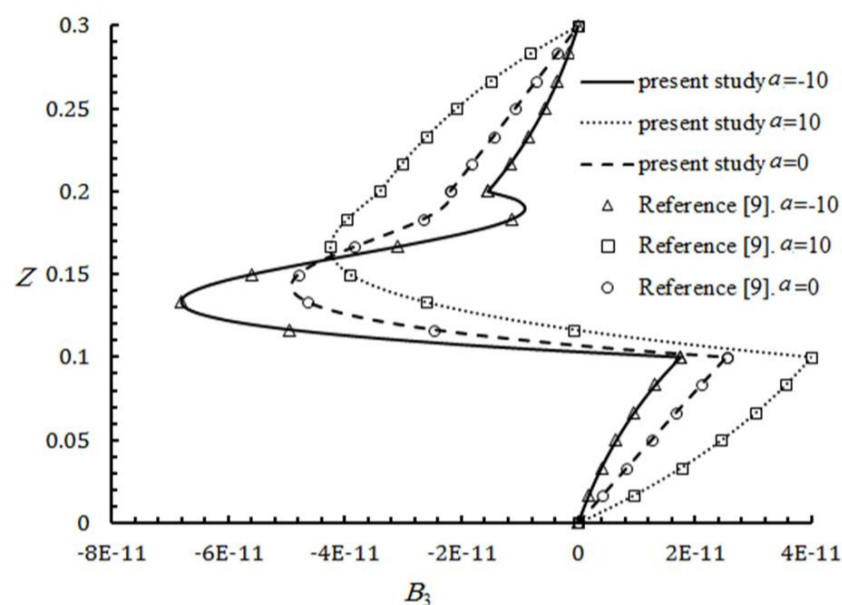


Fig. 4 Comparison of present study graphs with reference [9] under mechanical load: Through-the thickness variation of Transverse magnet displacement

شکل 4 نمودارهای مقایسه نتایج منبع [9] با نتایج مطالعه حاضر تحت بارگذاری مکانیکی: تغییرات جابه‌جایی عرضی مغناطیسی

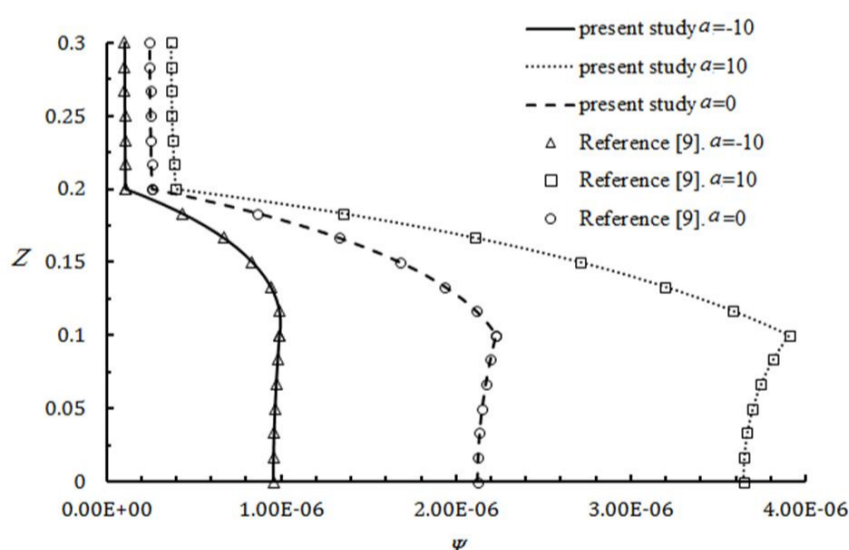


Fig. 5 Comparison of present study graphs with reference [9] under electrical load: Through-the-thickness variations of Induced magnetic potential

شکل 5 نمودارهای مقایسه نتایج مرجع [9] با نتایج مطالعه حاضر تحت بارگذاری الکتریکی

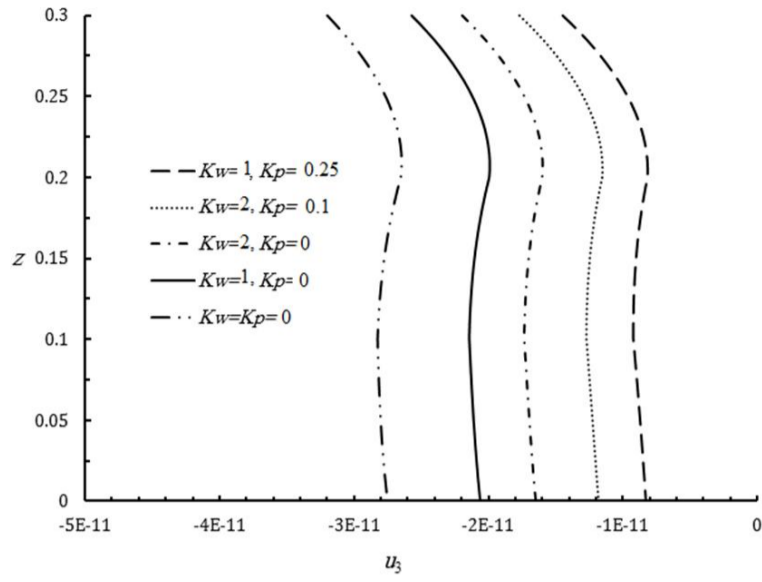
تحلیل استاتیکی صفحه سه لایه FGMEE در دو قسمت، تحت عنوان بارگذاری مکانیکی و بارگذاری الکتریکی به شرح زیر انجام شده است.

4-2-1- بارگذاری مکانیکی

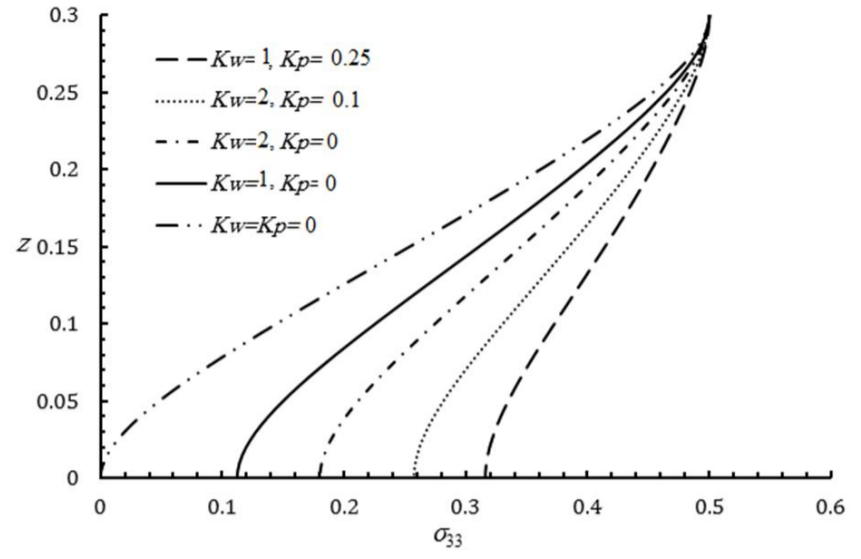
در این قسمت یک بار مکانیکی سینوسی به شکل رابطه (22) بر سطح بالایی صفحه سه لایه FGMEE اعمال کرده و پاسخ صفحه را به دست می‌آوریم.

$$\sigma_{33}(x, y, h) = \sin(\pi x/L_x) \sin(\pi y/L_y) \quad (22)$$

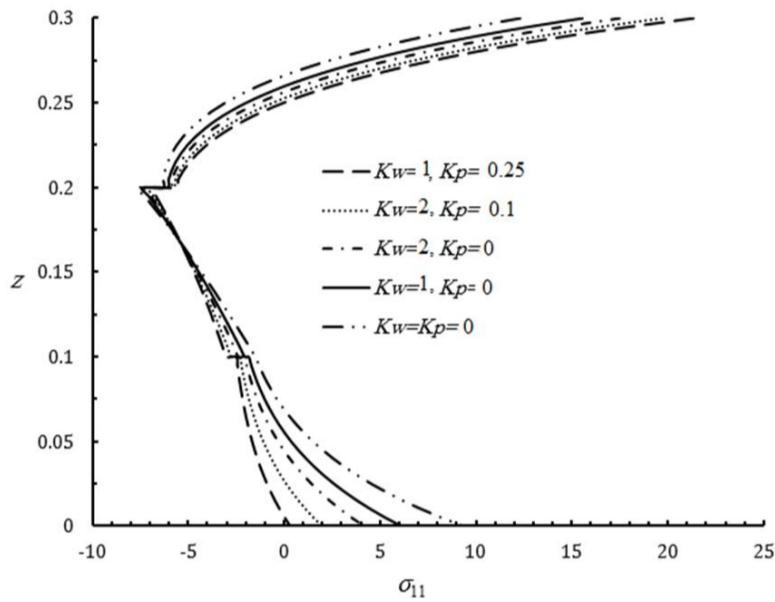
تغییرات جابه‌جایی عرضی مغناطیسی نسبت به مختصات ضخامت (z) در شکل 4 نشان داده شده است. نمودار شکل 4، در نقطه ثابت



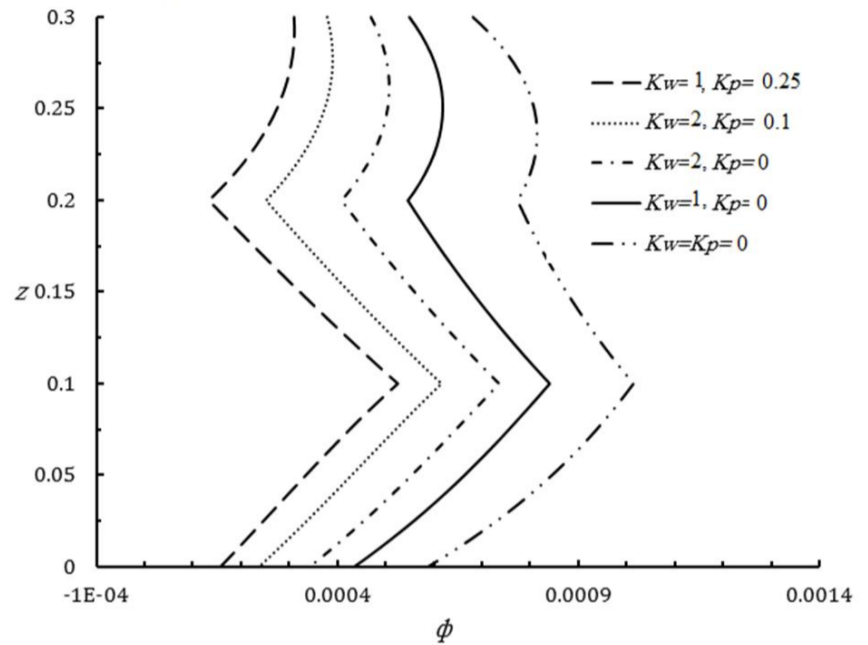
a- Through-the-thickness variations of Transverse displacement



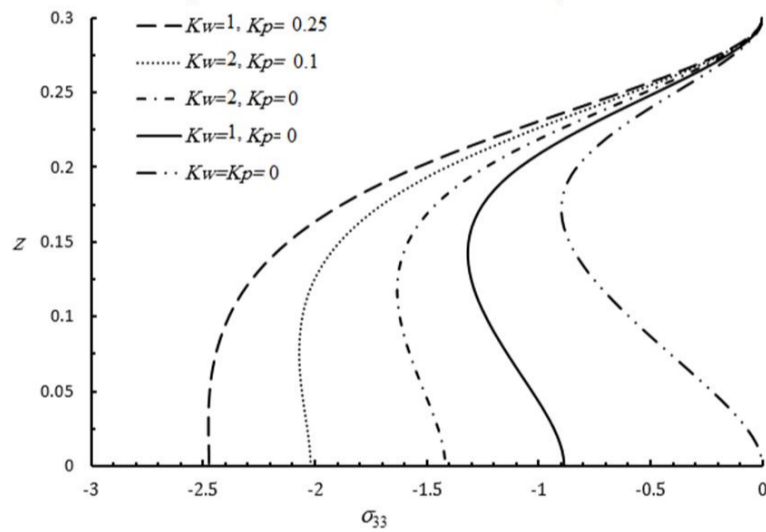
a- Through-the-thickness variations of Transverse normal stress



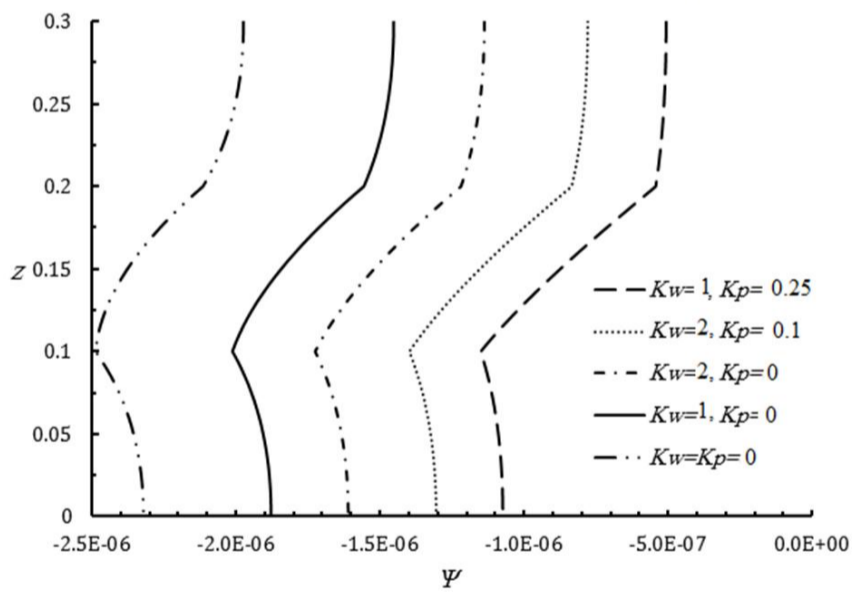
b - Through-the-thickness variations of in plane stress



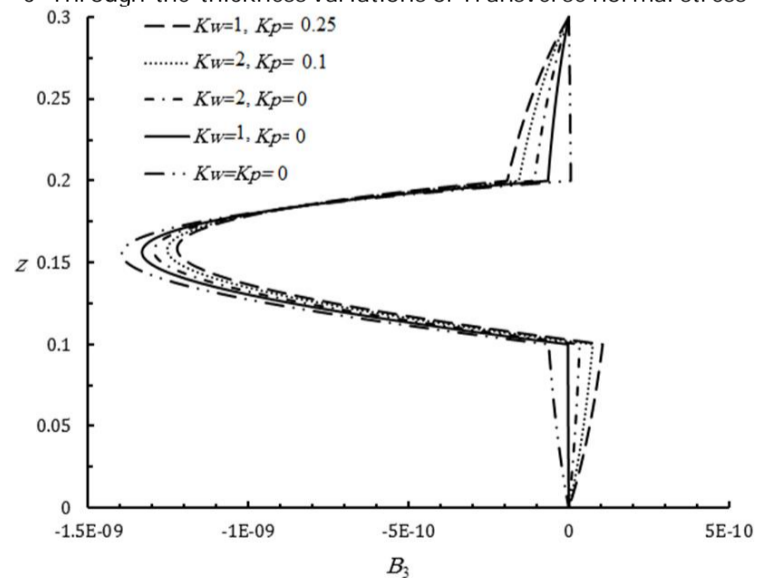
b- Through-the-thickness variations of Induced electric potential



c- Through-the-thickness variations of Transverse normal stress



c- Through-the-thickness variations of Induced magnetic potential



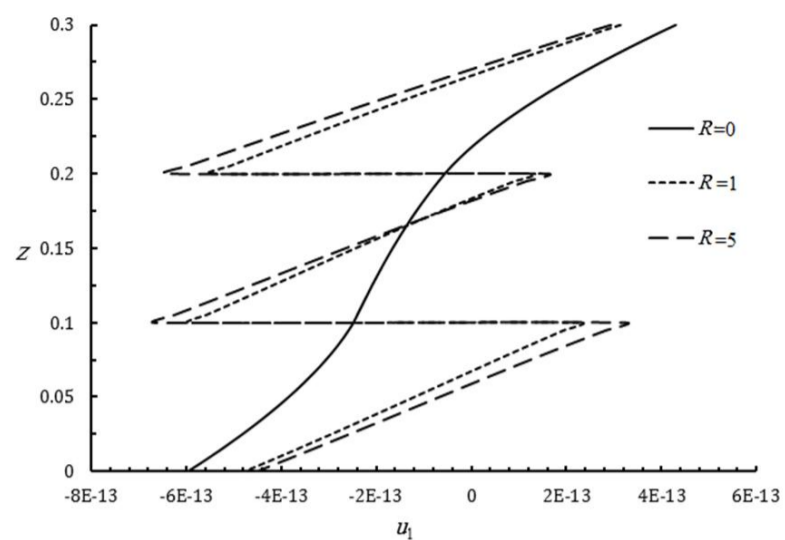
d- Through-the-thickness variations of Transverse magnetic displacement
Fig. 7 The effect of foundation stiffness on the response of FGMEE plate; under electrical load ($R=0$, $a=10$)

شکل 7 تأثیر سختی بستر ارتجاعی بر پاسخ صفحه FGMEE تحت بارگذاری الکتریکی ($R=0$, $a=10$).

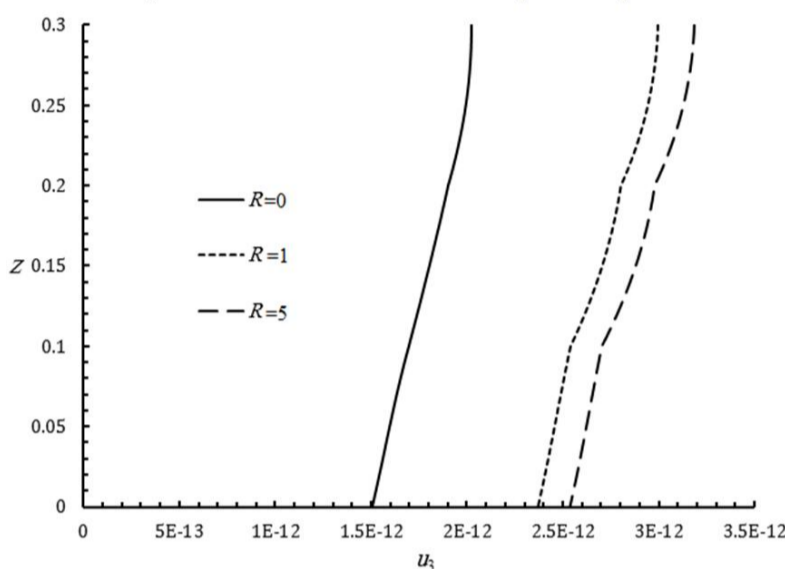
Fig. 6 The effect of foundation stiffness on the response of FGMEE plate; under mechanical load

شکل 6 تأثیر سختی بستر ارتجاعی بر پاسخ صفحه FGMEE تحت بارگذاری مکانیکی در شکل 6، تغییرات متغیرهای میدانی تحت بارگذاری مکانیکی به‌ازای ضریب لغزشی بین لایه‌ای صفر ($R = 0$) و شاخص درجه تغییرات خواص مواد 10 ($a = 10$) نشان داده شده است.

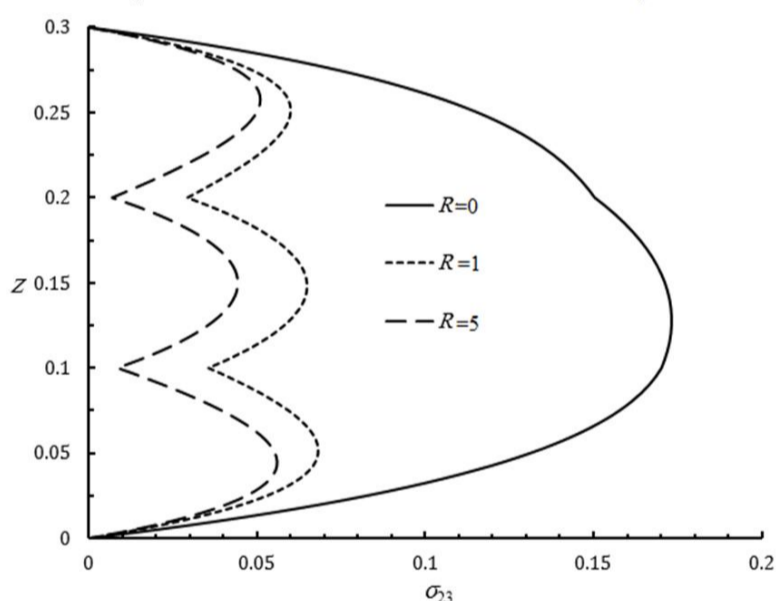
در شکل 6، اهمیت تأثیر سختی بستر ارتجاعی بر پاسخ صفحه را می‌توان مشاهده کرد. به غیر از تنش عرضی قائم (σ_{33})، تمام متغیرهای مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی از صفحه FGMEE با افزایش K_w یا K_p به تدریج کاهش می‌یابد، دلیل در این است که با افزایش K_w یا K_p ، سختی خمشی صفحه افزایش و در نتیجه تغییر شکل آن کاهش می‌یابد. کاهش تغییر شکل مکانیکی ورق نیز خود سبب تبدیل کمتر انرژی مکانیکی به الکتریکی و مغناطیسی و در نتیجه کاهش مقادیر متغیرهای نظیر آن میدان‌ها می‌شود.



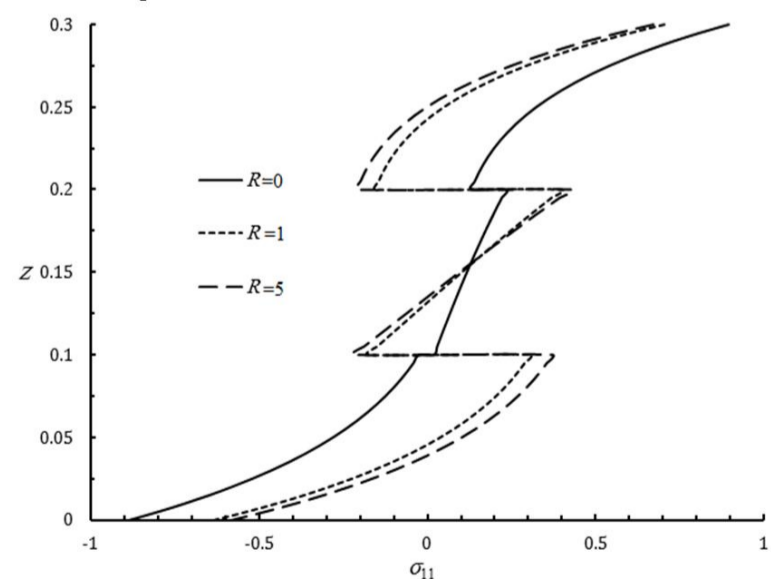
a- Through-the-thickness variations of In-plane displacement



b- Through-the-thickness variations of Transverse displacement



c- Through-the-thickness variations of Transverse shear stress



d- Through-the-thickness variations of in plane stress

Fig. 8 Through-the-thickness distributions of field variables of FGMEE plate with imperfect interfacial bonding; under mechanical load ($K_w = 2, K_p = 0.1, a=10$)

شکل 8 توزیع متغیرهای میدانی از صفحه سه لایه FGMEE به‌ازای مقادیر مختلف لغزش بین لایه‌ای تحت بارگذاری مکانیکی ($K_w = 2, K_p = 0.1, a=10$)

در شکل 7، توزیع متغیرهای میدانی از صفحه FGMEE نسبت به راستای ضخامت، تحت بارگذاری الکتریکی نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل 7 مشاهده می‌شود با افزایش سختی بستر ارتجاعی، تنش برشی قائم صفحه افزایش می‌یابد.

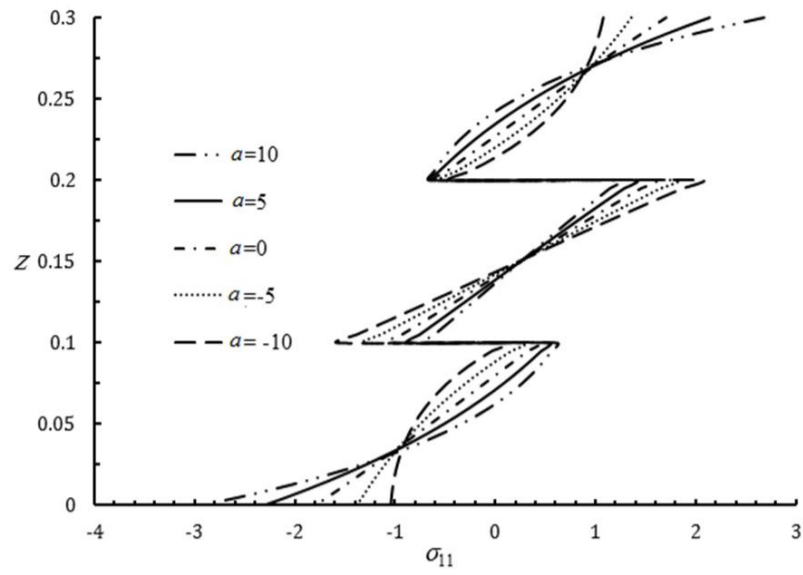
همان‌طور که در شکل 7 مشاهده می‌شود، مشابه با حالت بارگذاری مکانیکی جابه‌جایی عرضی قائم (u_3) صفحه FGMEE با افزایش هر یک از مقادیر K_w یا K_p ، کاهش می‌یابد. در ناحیه نزدیک به سطحی از صفحه که بر بستر ارتجاعی قرار دارد، همه متغیرهای میدانی تنش و جابه‌جایی به جز تنش عرضی قائم و جابه‌جایی عرضی، با افزایش ضریب سختی کاهش می‌یابد. با دور شدن از سطحی که بر بستر قرار دارد این نتیجه برعکس می‌شود. تغییرات جابه‌جایی مغناطیسی عرضی در لایه بالایی و پایینی به صورت قرینه بوده و در لایه همگن با افزایش سختی بستر ارتجاعی کاهش یافته است. با افزایش هر یک از مقادیر K_w یا K_p ، سختی خمشی عرضی صفحه FGMEE افزایش و رفتاری مطابق اشکال رسم شده در شکل 7 قابل انتظار است.

4-3-2- تأثیر لغزش بین لایه‌ای بر پاسخ صفحه سه لایه FGMEE

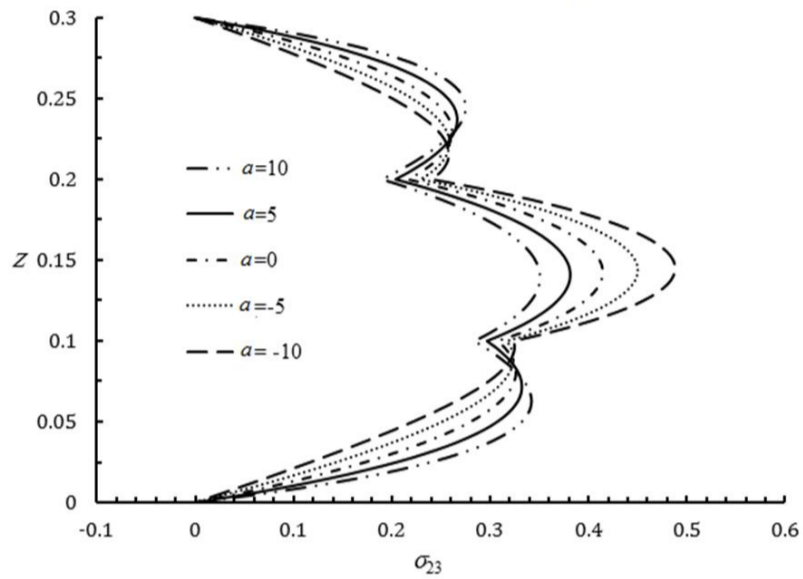
تأثیر لغزش بین لایه‌ای بر پاسخ صفحه سه لایه FGMEE نیز در این قسمت از مقاله مورد بررسی قرار داده شده است. صفحه FGMEE سه لایه به ازای مقادیر $R = 0, 1, 5$ از ضریب لغزش بین لایه‌ای، با استفاده از روش حل دقیق سه بعدی در فضای حالت، تحلیل شده است. ضریب سختی بستر ارتجاعی نیز به صورت $K_w = 2$ و $K_p = 0$ و شاخص تغییرات خواص مواد برابر با 10 ($a = 10$) در نظر گرفته شده است. تغییرات متغیرهای میدانی به‌ازای تغییرات در ضخامت از صفحه FGMEE تحت بارگذاری مکانیکی در شکل 8، نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل 8 مشاهده می‌شود، مقادیر لغزش بین لایه‌ای تأثیر مهمی بر مؤلفه‌های جابه‌جایی و تنش دارد. لغزش بین لایه‌ای سبب ناپیوسته شدن مؤلفه‌های جابه‌جایی ورق در سطوح تماس لایه‌ها می‌گردد. در واقع با کاهش چسبندگی بین لایه‌ها، دو لایه مجاور از یکدیگر مستقل عمل کرده و سبب می‌شود که دو مقدار متفاوت برای مقادیر مؤلفه‌های جابه‌جایی در سطوح تماس بین لایه‌ها ایجاد گردد. با کاهش سختی بین لایه‌ای (با افزایش ضریب لغزش بین لایه‌ای) جابه‌جایی صفحه FGMEE افزایش می‌یابد. برای $R=5$ مقدار مطلق ماکزیمم u_3 برابر بزرگ‌تر از حالت $R=0$ است. با افزایش ضریب لغزش بین لایه‌ای سختی کلی ورق چندلایه کاهش می‌یابد. توجه به شکل 8 همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش ضریب لغزش بین لایه‌ای، مؤلفه‌های تنش درون صفحه‌ای در بین لایه‌ها بیش از 50 درصد افزایش می‌یابد، در حالی که مؤلفه‌های تنش برشی قائم بیش از 60 درصد کاهش می‌یابد.

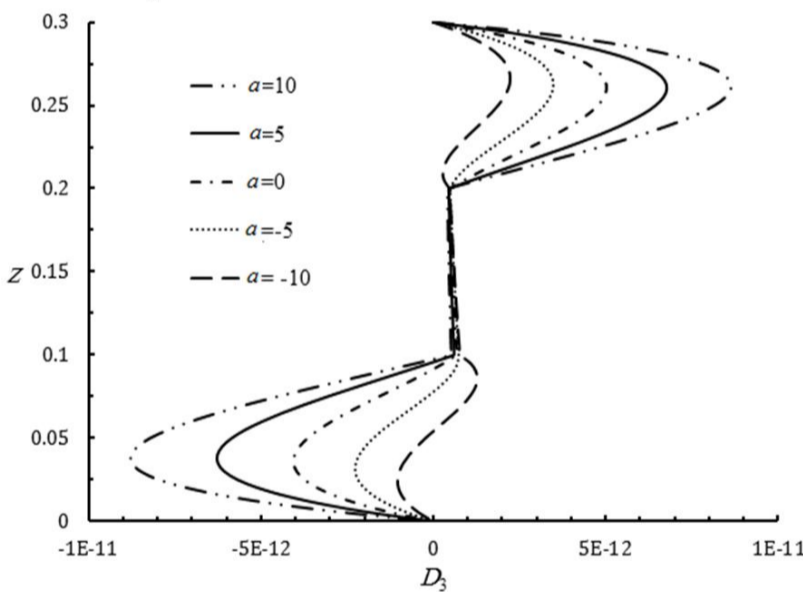
نتایج عددی برای تحلیل خمشی صفحه FGMEE، تحت بارگذاری الکتریکی نیز در جدول 1، آمده است. همان‌طور که از نتایج عددی جدول 1 مشاهده می‌شود، تحت بارگذاری الکتریکی، قدر مطلق مقادیر متغیرهای جابه‌جایی، تنش‌های درون صفحه‌ای، پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی با افزایش ضریب لغزش بین لایه‌ای افزایش یافته است، در صورتی که مقادیر جابه‌جایی عرضی نرمال، تنش عرضی قائم، پتانسیل مغناطیسی و جابه‌جایی مغناطیسی با افزایش ضریب لغزش بین لایه‌ای کاهش یافته است. برای $R=5$ مقدار تنش درون صفحه‌ای، برابر بزرگ‌تر از حالت $R=0$ است. این در حالی است که برای $R=5$ مقدار جابه‌جایی عرضی u_3 تقریباً 50% کمتر از حالتی است که $R=0$ است.



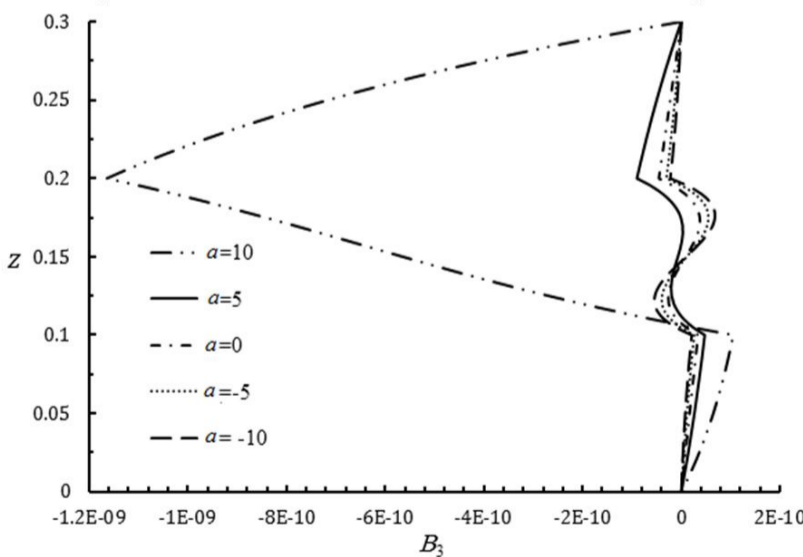
b- Through-the-thickness variations of in plane stress



c- Through-the-thickness variations of Transverse shear stress



d- Through-the-thickness variations of Transverse electric displacement



e- Through-the-thickness variations of Transverse magnetic displacement
Fig. 9 The effects of different gradient indexes on the response of FGMEE plate under mechanical loading

شکل 9 تأثیر مقادیر مختلف شاخص تغییرات خواص مواد بر پاسخ صفحه FGMEE تحت بارگذاری مکانیکی

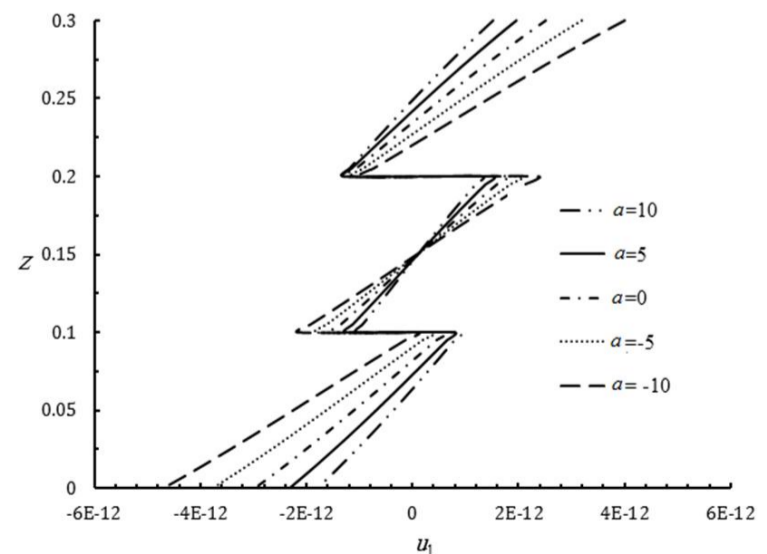
جدول 1 نتایج عددی برای تحلیل خمشی صفحه FGMEE به‌ازای مقادیر متفاوت لغزش بین لایه‌ای، تحت بارگذاری الکتریکی ($K_w=2, K_p=0.1, \alpha=10$)

Table 1 Bending results for the imperfect three layered FGMEE plate under electrical loading ($K_w=2, K_p=0.1, \alpha=10$)

R			متغیرها
5	1	0	
14.6209-	13.8073-	8.0699-	$u_1(0.75,0.25,0.2^+) \times 10^{12}$
5.2058-	5.8990-	11.5449-	$u_3(0.75,0.25,0.2^+) \times 10^{12}$
10.0363-	9.1247-	85.8208-	$\sigma_{11}(0.75,0.25,0.2^+)$
0.6915-	0.9050-	2.0196-	$\sigma_{33}(0.75,0.25,0)$
1.7070	1.9051	2.7943	$\sigma_{23}(0.75,0.25,0.25)$
4.0880-	3.8606-	2.2564-	$\sigma_{12}(0.75,0.25,0.2^+)$
0.8735	0.5081	0.4700	$\varphi(0.75,0.25,0.2^-)$
0.7208-	2.1675-	9.6711-	$\psi(0.75,0.25,0.2^-) \times 10^6$
10.3005-	5.1496-	4.6088-	$D_3(0.75,0.25,0.2^+) \times 10^{10}$
0.5502	1.8073-	12.2252-	$B_3(0.75,0.25,0.15) \times 10^{10}$

افزایش لغزش بین لایه‌ای سبب کاهش سختی کل ورق چندلایه FGMEE می‌گردد که خود دلیلی بر افزایش مقادیر مؤلفه‌های صفحه‌ای جابه‌جایی و تنش است. افزایش تغییر شکل‌های مکانیکی ورق سبب تبدیل بیشتر انرژی مکانیکی به الکتریکی و در نتیجه مقادیر پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی ورق FGMEE با افزایش ضریب لغزش بین لایه‌ای افزایش می‌یابد. از سوی دیگر با افزایش ضریب لغزش بین لایه‌ای کوپلینگ میان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در ورق کاهش و در نتیجه مقادیر پتانسیل مغناطیسی و جابه‌جایی مغناطیسی در ورق FGMEE کاهش می‌یابد. این نتایج به‌دست‌آمده، قابل استفاده برای طراحی‌های کاربردی و فرایندهای کنترل سازه‌های ساخته شده از مواد مرکب هوشمند خواهد بود.

3-3-4- تأثیر شاخص تغییرات خواص مواد در پاسخ صفحه سه لایه FGMEE در این قسمت تأثیر مقادیر مختلف شاخص تغییرات خواص مواد بر رفتار صفحه FGMEE سه لایه مورد بررسی قرار گرفته است. تغییرات متغیرهای میدانی مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی در راستای ضخامت در شکل 9 ارائه شده است. در این نمودارها ضریب لغزش بین لایه‌ای به صورت $R_i^{(2)} = R_i^{(1)} = R = 0.6$ در نظر گرفته شده و با این فرض که صفحه سه لایه FGMEE بر بستر ارتجاعی با ضرایب سختی $K_w = K_p = 0$ قرار دارد. همان‌طور که از نمودارهای شکل 9 مشاهده می‌شود، تغییرات شاخص تغییرات خواص مواد بر نمودارهای توزیع میدان تنش، جابه‌جایی، جابه‌جایی الکتریکی، جابه‌جایی مغناطیسی و پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی مؤثر است.



a- Through-the-thickness variations of In-plane displacement

- جهت نیل به کوپلینگ کامل و ایده‌آل در سازه‌های چند لایه مگنتو-الکترو-الاستیک، تأمین پیوستگی کامل بین لایه‌ها امری ضروری است.
 - با افزایش شاخص تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت، تغییر شکل‌های مکانیکی ورق FGMEE کاهش می‌یابد. با افزایش شاخص درجه تغییرات خواص مواد از $\alpha = -10$ به $\alpha = 10$ ، جابه‌جایی عرضی ورق بیش از 70% کاهش می‌یابد.
 - با کاهش شاخص تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت، اختلاف پتانسیل الکتریکی ایجاد شده بر سطوح بالا و پایین ورق FGMEE افزایش می‌یابد.
- علاوه بر موارد یادشده، نتایج عددی به‌دست‌آمده در مقاله را می‌توان برای ارزیابی صحت تئوری‌های مختلف صفحات FGMEE، که در آینده ارائه می‌شود به کار برد.

6- پیوست‌ها

6-1- پیوست (a)

ماتریس مؤلفه‌های معادله (1) به صورت زیر است.

$$C^{(k)} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(k)}(z) & c_{12}^{(k)}(z) & c_{13}^{(k)}(z) & 0 & 0 & 0 \\ c_{21}^{(k)}(z) & c_{22}^{(k)}(z) & c_{23}^{(k)}(z) & 0 & 0 & 0 \\ c_{31}^{(k)}(z) & c_{32}^{(k)}(z) & c_{33}^{(k)}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(k)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^{(k)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(k)}(z) \end{bmatrix}$$

$$e^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(k)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24}^{(k)}(z) & 0 & 0 \\ e_{31}^{(k)}(z) & e_{32}^{(k)}(z) & e_{33}^{(k)}(z) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d^{(k)} = \begin{bmatrix} d_{11}^{(k)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & d_{22}^{(k)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^{(k)}(z) \end{bmatrix}$$

$$q^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q_{15}^{(k)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{24}^{(k)}(z) & 0 & 0 \\ q_{31}^{(k)}(z) & q_{32}^{(k)}(z) & q_{33}^{(k)}(z) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_{11}^{(k)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & x_{22}^{(k)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & x_{33}^{(k)}(z) \end{bmatrix}$$

$$p^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(k)}(z) & 0 & 0 \\ 0 & p_{22}^{(k)}(z) & 0 \\ 0 & 0 & p_{33}^{(k)}(z) \end{bmatrix}$$

6-2- پیوست (b)

ماتریس‌های $K^{(k)}$ و $B^{(k)}$ در معادله (14) به شکل زیر است.

$$K^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{5 \times 5} & 0_{5 \times 5} \\ 0_{5 \times 5} & k_{5 \times 5} \end{bmatrix}_{10 \times 10}$$

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} & 0_{5 \times 3} & B_{5 \times 2}^{13} & B_{5 \times 3}^{14} \\ B_{5 \times 2}^{21} & B_{5 \times 3}^{22} & B_{5 \times 2}^{23} & B_{5 \times 3}^{24} \end{bmatrix} \quad (b-1)$$

که در معادله (b-1) داریم:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} c_{55}^{(k)}(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^{(k)}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{(k)}(z) & e_{33}^{(k)}(z) & q_{33}^{(k)}(z) \\ 0 & 0 & e_{33}^{(k)}(z) & -x_{33}^{(k)}(z) & -d_{33}^{(k)}(z) \\ 0 & 0 & q_{33}^{(k)}(z) & -d_{33}^{(k)}(z) & -p_{33}^{(k)}(z) \end{bmatrix}$$

همان‌طور که در شکل 9 نشان داده شده است، بیشتر بودن تغییرشکل مکانیکی از صفحه FGMEE ساخته شده از مواد نرم نسبت به صفحه FGMEE ساخته شده از مواد سخت قابل مشاهده است. علت این امر نیز بیشتر بودن سختی مگنتو-الکترو-الاستیک صفحه FG ساخته شده از مواد MEE سخت نسبت به صفحه MEE نرم است، به همین دلیل این رفتار از صفحه مورد مطالعه قابل پیش‌بینی بود. با افزایش مقدار شاخص تغییرات خواص مواد، در نمودارها مشاهده می‌شود که مؤلفه‌های تنش، جابه‌جایی الکتریکی و جابه‌جایی مغناطیسی در لایه‌های FG افزایش می‌یابد، در حالی که در لایه‌های همگن این مقادیر کاهش می‌یابد. برای $\alpha = 10$ مقدار مطلق بیشینه جابه‌جایی الکتریکی انتقالی در لایه‌های FG در حدود 4 برابر بیشتر از مقدار بیشینه مطلق جابه‌جایی الکتریکی انتقالی به‌ازای $\alpha = -10$ است. این نسبت برای جابه‌جایی مغناطیسی در حدود 50 است.

در شکل 9 مشاهده می‌شود که اختلاف پتانسیل الکتریکی ایجاد شده بین سطح بالایی و سطح پایینی از صفحه MEE ساخته شده از مواد مدرج هدفمند (FG) نرم حدود 30 برابر بیشتر از این اختلاف در صفحه MEE ساخته‌شده از مواد مدرج هدفمند سخت است. تحت بارگذاری مکانیکی صفحه MEE نرم متحمل تغییر شکل مکانیکی بیشتری می‌شود و در نتیجه قابلیت بیشتری در تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی دارد.

5- نتیجه‌گیری

برای نخستین بار، تحلیل خمشی استاتیکی از یک صفحه چند لایه FGMEE، که بر بستر ارتجاعی قرار گرفته و با لحاظ لغزش بین لایه‌های مورد بررسی قرار گرفته شده است. با استفاده از روش فضای حالت، معادلات دیفرانسیلی جزئی حاکم بر صفحه‌ی FGMEE حل شده است. صحت روش حل دقیق معرفی شده در این مقاله با استفاده از مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج حاصل شده از مقالات منتشر شده و در دسترس ارزیابی شده است. در بخش نتایج عددی تأثیر پارامترهای مؤثر بر پاسخ استاتیکی صفحه FGMEE سه لایه، مورد بررسی قرار گرفته شده است. نتایج حاصل شده در بخش نتایج عددی نشان داد سختی بستر ارتجاعی تأثیر قابل توجهی بر پاسخ استاتیکی صفحه FGMEE داشته است. همچنین با بررسی نتایج حاصل شده، اهمیت تأثیر مقادیر ضریب لغزش بین لایه‌ای، بر باز توزیع متغیرهای میدانی مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی در راستای ضخامت، قابل مشاهده بوده است. نتایج کاربردی مهم به‌دست‌آمده از این تحقیق در زیر به‌طور خلاصه یاد شده‌اند:

- نقص در اتصال بین لایه‌ها سبب می‌شود نمودار تغییرات مؤلفه‌های جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و مغناطیسی در راستای ضخامت ورق در سطوح تماس بین لایه‌ها ناپیوسته گردد.
- با افزایش مقادیر ضریب لغزش بین لایه‌ای، بزرگای تمامی مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه FGMEE افزایش می‌یابد.
- با افزایش مقادیر ضریب لغزش بین لایه‌ای، مقادیر مؤلفه‌های صفحه‌ای تنش ورق FGMEE در سطوح تماس بین لایه‌ها افزایش می‌یابد. جابه‌جایی عرضی یک ورق FGMEE با نقص لایه‌ای، 1.5 برابر بزرگ‌تر از یک ورق مشابه عاری از نقص است.
- با افزایش مقادیر ضریب لغزش بین لایه‌ای، مقادیر مؤلفه‌های عرضی تنش برشی ورق FGMEE در سطوح تماس بین لایه‌ها بیش از 60% کاهش می‌یابد.
- اختلاف پتانسیل مغناطیسی بین سطوح بالا و پایین ورق FGMEE با کاهش مقادیر ضریب لغزش بین لایه‌ای کاهش می‌یابد.

[3] D. J. Huang, H. J. Ding, W. Q. Chen, Static analysis of anisotropic functionally graded magneto-electro-elastic beams subjected to arbitrary loading, *Mechanics A/Solids*, Vol. 29, No. 3, pp. 356–369, 2010.

[4] M. J. S. Moita, C. M. M. Soares, C. A. M. Soares, Analyses of magneto-electro-elastic plates using a higher order finite element model, *Composite Structures*, Vol. 91, No. 4, pp. 421–426, 2009.

[5] S. S. Phoenix, S. K. Satsangi, B. N. Singh, Layer-wise modelling of magneto-electro-elastic plates, *Sound and Vibration*, Vol. 324, No. 3-5, pp. 798–815, 2009.

[6] Z. Yifeng, C. Lei, W. Yu, Z. Xiaopin, Z. Liangliang, Asymptotical construction of a Reissner-like model for multilayer functionally graded magneto-electro-elastic plates, *Composite Structures*, Vol. 96, No. 1, pp. 786–798, 2013.

[7] E. Pan, P. R. Heyliger, Exact solutions for magneto-electro-elastic laminates in cylindrical bending, *Solids and Structures*, Vol. 40, No. 24, pp. 6859–6876, 2003.

[8] E. Pan, Exact Solution for Simply Supported and Multilayered Magneto-Electro-Elastic Plates, *Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, Vol. 68, No. 4, pp. 608-618, 2001.

[9] E. Pan, F. Han, Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates, *Engineering Science*, Vol. 43, No. 3-4, pp. 321–339, 2005.

[10] X. Y. Li, H. J. Ding, W. Q. Chen, Three-dimensional analytical solution for functionally graded magneto-electro-elastic circular plates subjected to uniform load, *Composite Structures*, Vol. 83, No. 4, pp. 381–390, 2008.

[11] L. Zhao, W. Q. Chen, Plane analysis for functionally graded magneto-electro-elastic materials via the symplectic framework, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 7, pp. 1753–1761, 2010.

[12] W. Q. Chen, K. Y. Lee, Three-dimensional exact analysis of angle-ply laminates in cylindrical bending with interfacial damage via state-space method, *Composite Structures*, Vol. 64, No. 3-4, pp. 275–283, 2004.

[13] W. Q. Chen, Y. F. Wang, J. B. Cai, G. R. Ye, Three-dimensional analysis of cross ply laminated cylindrical panels with weak interfaces, *Solids and Structures*, Vol. 41, No. 9-10, pp. 2429–2446, 2004.

[14] W. Q. Chen, Y. Y. Zhou, C. F. Lü, H. J. Ding, Bending of multiferroic laminated rectangular plates with imperfect interlaminar bonding, *Mechanics A/Solids*, Vol. 28, No. 4, pp. 720–727, 2009.

[15] D. Li, Y. Liu, Three-dimensional semi-analytical model for the static response and sensitivity analysis of the composite stiffened laminated plate with interfacial imperfections, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 6, pp. 1943–1958, 2012.

[16] Y. Y. Zhou, W. Q. Chen, C. F. Lü, Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 4, pp. 1009–1018, 2010.

[17] Z. Q. Cheng, A. K. Jemah, F. W. Williams, Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, No. 4, pp. 1019–1026, 1996.

[18] M. D. Sciuva, Geometrically nonlinear theory of multilayered plates with interlayer slips, *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 11, pp. 1753–1759, 1997.

[19] Z. Y. Huang, C. F. Lu, W. Q. Chen, Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations, *Composite Structures*, Vol. 85, No. 2, pp. 95–104, 2008.

[20] M. Lezgy-Nazargah, A three-dimensional exact state-space solution for cylindrical bending of continuously non-homogenous piezoelectric laminated plates with arbitrary gradient composition, *Archives of Mechanics*, Vol. 67, No. 1, pp. 25-51, 2015.

[21] F. R. Gantmakher, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, pp. 215-239, 1959.

[22] M. C. Pease, *Methods of Matrix Algebra*, Academic Press, New York, pp. 177-182, 1965.

$$\begin{aligned}
 B^{13} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & B^{14} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 B^{21} &= \begin{bmatrix} -(m^2 C_{11}(z) + n^2 C_{66}(z)) & -nm(C_{12}(z) + C_{66}(z)) \\ -nm(C_{12}(z) + C_{66}(z)) & -(n^2 C_{22}(z) + m^2 C_{66}(z)) \\ -m \frac{\partial C_{13}(z)}{\partial z} & -n \frac{\partial C_{32}(z)}{\partial z} \\ -m \frac{\partial e_{31}(z)}{\partial z} & -n \frac{\partial e_{32}(z)}{\partial z} \\ -m \frac{\partial q_{31}(z)}{\partial z} & -n \frac{\partial q_{32}(z)}{\partial z} \\ m \frac{\partial C_{55}(z)}{\partial z} & m \frac{\partial e_{15}(z)}{\partial z} \\ n \frac{\partial C_{44}(z)}{\partial z} & n \frac{\partial e_{24}(z)}{\partial z} \\ -(m^2 C_{55}(z) - n^2 C_{44}(z)) & -(m^2 e_{15}(z) + n^2 e_{24}(z)) \\ -m^2 e_{15}(z) - n^2 e_{24}(z) & m^2 x_{11}(z) + n^2 x_{22}(z) \\ -m^2 q_{15}(z) - n^2 q_{24}(z) & m^2 d_{11}(z) + n^2 d_{22}(z) \\ m \frac{\partial q_{15}(z)}{\partial z} & \\ n \frac{\partial q_{24}(z)}{\partial z} & \\ -(m^2 q_{15}(z) + n^2 q_{24}(z)) & \\ m^2 d_{11}(z) + n^2 d_{22}(z) & \\ m^2 p_{11}(z) + n^2 p_{22}(z) & \end{bmatrix} \\
 B^{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m(C_{55}(z) + C_{13}(z)) & -n(C_{32}(z) + C_{44}(z)) \\ -m(e_{15}(z) + e_{31}(z)) & -n(e_{24}(z) + e_{32}(z)) \\ -m(q_{15}(z) + q_{31}(z)) & -n(q_{24}(z) + q_{32}(z)) \\ m(C_{13}(z) + C_{55}(z)) & m(e_{15}(z) + e_{31}(z)) \\ n(C_{23}(z) + C_{44}(z)) & n(e_{32}(z) + e_{24}(z)) \\ \frac{\partial C_{33}(z)}{\partial z} & \frac{\partial e_{33}(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial e_{33}(z)}{\partial z} & \frac{\partial x_{33}(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial q_{33}(z)}{\partial z} & \frac{\partial d_{33}(z)}{\partial z} \\ m(q_{31}(z) + q_{15}(z)) & \\ n(q_{32}(z) + q_{24}(z)) & \\ \frac{\partial q_{33}(z)}{\partial z} & \\ \frac{\partial d_{33}(z)}{\partial z} & \\ \frac{\partial p_{33}(z)}{\partial z} & \end{bmatrix} \\
 B^{24} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m(C_{55}(z) + C_{13}(z)) & -n(C_{32}(z) + C_{44}(z)) \\ -m(e_{15}(z) + e_{31}(z)) & -n(e_{24}(z) + e_{32}(z)) \\ -m(q_{15}(z) + q_{31}(z)) & -n(q_{24}(z) + q_{32}(z)) \\ m(C_{13}(z) + C_{55}(z)) & m(e_{15}(z) + e_{31}(z)) \\ n(C_{23}(z) + C_{44}(z)) & n(e_{32}(z) + e_{24}(z)) \\ \frac{\partial C_{33}(z)}{\partial z} & \frac{\partial e_{33}(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial e_{33}(z)}{\partial z} & \frac{\partial x_{33}(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial q_{33}(z)}{\partial z} & \frac{\partial d_{33}(z)}{\partial z} \\ m(q_{31}(z) + q_{15}(z)) & \\ n(q_{32}(z) + q_{24}(z)) & \\ \frac{\partial q_{33}(z)}{\partial z} & \\ \frac{\partial d_{33}(z)}{\partial z} & \\ \frac{\partial p_{33}(z)}{\partial z} & \end{bmatrix} \tag{b-2}
 \end{aligned}$$

7- مراجع

[1] A. Milazzo, C. Orlando, A beam finite element for magneto-electro-elastic multilayered composite structures, *Composite Structures*, Vol. 94, No. 12, pp. 3710–3721, 2012.

[2] D. J. Huang, H. J. Ding, W. Q. Chen, Analytical solution for functionally graded magneto-electro-elastic plane beams, *Engineering Science*, Vol. 45, No. 2-8, pp. 467–485, 2007.