



## محاسبه نظری نیروی لحظه‌ای چین خوردگی در ستونهای مربعی تک سلولی تحت بار محوری

عباس نیک‌نژاد<sup>۱</sup>، غلامحسین لیاقت<sup>۲\*</sup>، حسن مسلمی نائینی<sup>۳</sup>، امیرحسین بهروش<sup>۴</sup>

۱- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۳- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۴- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

\*تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵، [Ghlia530@modares.ac.ir](mailto:Ghlia530@modares.ac.ir)

**چکیده** - در این مقاله، رابطه‌ای برای محاسبه نیروی لحظه‌ای چین خوردگی برای ستون تک سلولی مربعی زیر بار محوری ارائه می‌شود. اساس این رابطه، تعریف و تحلیل «سازوکار اساسی چین خوردگی» و محاسبه نیروی متوسط چین خوردگی است. برای این منظور مجموع نرخ انرژیهای تلف شده بر اثر خمش حول مفصل‌های افقی و مورب و نیز نرخ انرژی تلف شده بر اثر تغییر شکلهای انبساطی، با نرخ کار خالص انجام شده توسط نیروی خارجی بر روی سازه برابر قرار داده می‌شود. رابطه به دست آمده می‌تواند نمودار نیروی لحظه‌ای چین خوردگی را بر حسب مسافت چین خوردگی و بر حسب زاویه چین خوردگی با دقت مناسبی پیش‌بینی کند و به جای مقدار میانگین نیروی چین خوردگی، مقدار نیرو را در هر لحظه تخمین می‌زند. نتایج به دست آمده با نتایج تجربی مقایسه و تطابق خوبی مشاهده شده است.

**کلیدواژگان:** نیروی لحظه‌ای، چین خوردگی، ستون مربعی تک سلولی، هانی کمب.

## Theoretical Calculation of the Instantaneous Folding Force in a Single-Cell Square Column under Axial Loading

A. Niknejad<sup>1</sup>, G. H. Liaghat<sup>2\*</sup>, H. Moslemi Naeini<sup>3</sup>, A. H. Behraves<sup>4</sup>

1- Ph.D student, Mechanical Engineering Department, Engineering faculty, Tarbiat Modares University

2- Professor, Mechanical Engineering Department, Engineering faculty, Tarbiat Modares University

3- Professor, Mechanical Engineering Department, Engineering faculty, Tarbiat Modares University

4- Associate Professor, Mechanical Engineering Department, Engineering faculty, Tarbiat Modares University

\*P.O.B. 14115-143, Tehran, Iran, [ghlia530@modares.ac.ir](mailto:ghlia530@modares.ac.ir)

**Abstract**- In this paper, a theoretical formula is derived to predict the instantaneous folding force of a single-cell square column under axial loading. Calculation is based on analysis of "Basic Folding Mechanism" introduced by Wierzbicki and Abramowicz to calculate the instantaneous folding force. For this purpose, three mechanisms of energy dissipation were assumed. The formula obtained in this paper, can predict the instantaneous folding force variations versus folding distance and versus folding angle with good precision and can predict folding force in each time instance instead of the average value. The results of theoretical formula were compared with experimental data and good agreement was observed.

**Keywords:** Instantaneous Force, Folding, Honeycomb, Square Column.

## ۱- مقدمه

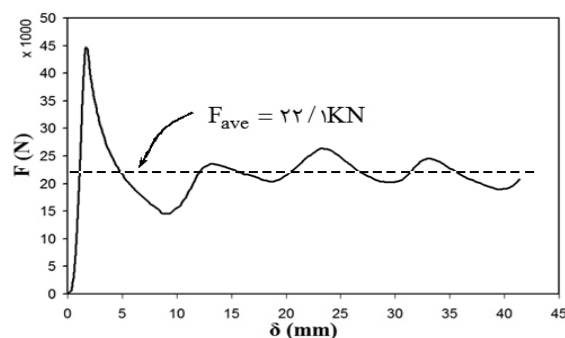
هانی کمب سازه‌ای جدار نازک است که به سبب برخورداری از ویژگیهای منحصر به فردی مانند خاصیت جذب انرژی زیاد، در مقیاس وسیعی به عنوان جاذب انرژی و ضربه‌گیر در برابر بارهای خارجی استفاده می‌شود. ورقهای ساندویچی با هسته هانی کمب به دلیل سفتی و استحکام مخصوص بالا، در صنایع حمل و نقل و هوا و فضا به کار می‌رود. در میان خواص هانی کمب، چین خوردگی آن بر اثر بارگذاری محوری از اهمیت بیشتری برخوردار است، زیرا بیشترین میزان جذب انرژی توسط هانی کمب از طریق این سازوکار صورت می‌گیرد.

در دهه‌های اخیر پژوهشگران به بررسی رفتار هانی کمبها برای بارگذاریهای مختلف پرداخته‌اند. محاسبه نیروی متوسط چین خوردگی به روش تحلیلی برای «سازوکار اساسی چین خوردگی» در سال ۱۹۸۳ توسط ویرزیکی و آبراموویچ [۱] انجام شده. در همان سال ویرزیکی و هیدوک [۲] به بررسی مدهای چین خوردگی انبساطی در المان زاویه‌ای پرداخته‌اند و آبراموویچ [۳] محاسبه مسافت چین خوردگی مؤثر را در ستونهای جدار نازک انجام داد. سپس چین خوردگی دینامیکی ستونهای مربعی به روش تجربی توسط آبراموویچ و جونز [۴] مطالعه شد. در سال ۱۹۸۸ ویرزیکی و آبراموویچ [۵] چین خوردگی ستونهای مربعی را در حالتی که درون ستون از فوم پلی‌اورتان پر شده، به روش تجربی و نظری بررسی کردند. سپس ویرزیکی و آبراموویچ [۶] با معرفی المان گوشه با زاویه دلخواه، نیروی متوسط چین خوردگی را به روش تحلیلی برای ستونهایی با مقاطع مربعی و شش گوش به دست آوردند. لیاقت و همکاران صحت روابط به دست آمده را از طریق آزمونهای تجربی بررسی کرده [۷] تا [۹] و به بررسی عددی و نظری مساله پرداخته‌اند [۱۰] تا [۱۳]. اثر پرکننده‌های فلزی مانند فوم آلومینیم درون ستونهای مربعی و رفتار این ستونها در بارگذاری خمشی [۱۴] و نیز نحوه چین خوردگی [۱۵] توسط سانتوسا و ویرزیکی ب روشهای تجربی و عددی مطالعه شده است.

نیک‌نژاد و همکاران [۱۶] به کمک تحلیل‌های نظری، سینگلاریتی نیروی لحظه‌ای چین خوردگی را در آغاز تشکیل این پدیده در ستونهای چهارگوش بررسی کرده‌اند. چن و همکاران [۱۷] نیروی متوسط چین خوردگی ستونهای چند سلولی مربعی را به روش تحلیلی به دست آورده‌اند. زانگ و همکاران براساس نظریه المان سوپرفولدینگ، نیروی متوسط چین خوردگی ستونهای چند سلولی مربعی را به روش نظری محاسبه کرده‌اند [۱۸].

با مرور برخی مقالات در زمینه چین خوردگی ستونها و هانی کمبها مشخص می‌شود که نیروی متوسط چین خوردگی در ستونهای تک‌سلولی و چند سلولی‌ها به روشهای نظری محاسبه شده است. در این مقاله نیروی لحظه‌ای چین خوردگی در سازوکار اساسی چین خوردگی به روش نظری و سپس نیروی لحظه‌ای چین خوردگی برای ستون مربعی محاسبه می‌شود.

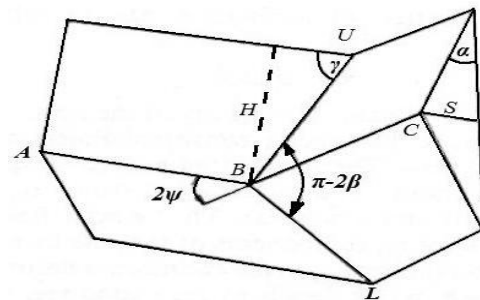
به بیانی دیگر در این مقاله به جای محاسبه مقدار متوسط نیروی چین خوردگی - که موضوع تحقیقات قبلی در این زمینه بوده - (و با خط چین در شکل (۱) نشان داده شده)، به محاسبه نیروی لحظه‌ای چین خوردگی ستون مربعی - که مدل کوچکی از هانی کمب با سلولهای مربعی است (و با خط ممتد در شکل (۱) نشان داده شده)، برحسب مسافت چین خوردگی، به روش نظری پرداخته می‌شود.



شکل ۱ نمودار نیروی لحظه‌ای چین خوردگی و نیروی متوسط چین خوردگی در ستون مربعی آلومینیمی.

## ۲- محاسبات نظری ویرزیکی [۱]

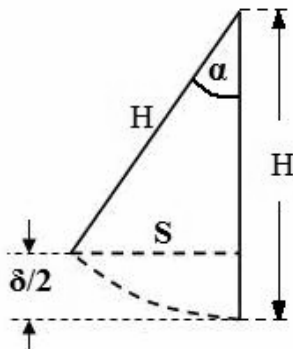
اساس محاسبات نظری ویرزیکی و آبراموویچ مفهوم کار و انرژی است. برای این منظور «سازوکار اساسی چین خوردگی» تعریف شده و نرخ انرژیهای تلف شده توسط این سازوکار محاسبه شده است.



شکل ۲ یک سازوکار اساسی چین خوردگی

تشکیل می شود.  $2H$  را طول موج چین خوردگی می نامند. چنانچه از رابطه بالا نسبت به زمان مشتق گیری شود، رابطه زیر به دست می آید:

$$\dot{\delta} = 2H \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \quad (3)$$



شکل ۳ نصف طول موج چین خوردگی

## ۲-۱- سازوکار چین خوردگی اساسی

ویرزیکی و آبراموویچ [۱] سازوکار اساسی چین خوردگی را مطابق شکل (۲) تعریف کرده که در لحظه شروع چین خوردگی  $\alpha = 0$  و  $\gamma = 90^\circ$ . با آغاز چین خوردگی به طور پیوسته زاویه  $\alpha$  بزرگ و زاویه  $\gamma$  کوچک می شود. در حین چین خوردگی زوایای  $\beta$  و  $\gamma$  بر حسب  $\psi_0$  و  $\alpha$  به صورت زیر بدست می آیند [۱]:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \psi_0}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sin \psi_0} \quad (1)$$

از طرفی مسافت چین خوردگی در هر لحظه که با  $\delta$  نشان داده می شود، کاهش فاصله بین لبه بالایی و لبه پایینی سازوکار اساسی چین خوردگی را نشان می دهد و مطابق شکل (۳) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\delta = 2H \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (2)$$

$2H$ ، طول بخشی از ستون یا بخشی از سازوکار اساسی چین خوردگی است که در آن یک چین کامل

## ۲-۲- نرخ انرژی تلف شده

نرخ انرژی تلف شده در فرایند چین خوردگی، از روی حوزه های سرعت پیوسته و ناپیوسته که در [۱] آورده شده، به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{E}_{\text{int}} = \int_S (M^{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta} \dot{\lambda}_{\alpha\beta}) \cdot dS + \int_L M_o \dot{\theta} \cdot dl \quad (4)$$

که در این رابطه  $N^{\alpha\beta}$  متجه های تنش،  $M^{\alpha\beta}$  کوپل های تنش،  $\dot{\kappa}_{\alpha\beta}$  نرخ انحنا و  $\dot{\lambda}_{\alpha\beta}$  نرخ انبساط است. انتگرال اول رابطه بالا، انرژی تلف شده ناشی از تغییر شکل های انبساطی را روی سطح کوچکی که سطح تروئیدی نامیده می شود، محاسبه می کند و انتگرال دوم انرژی تلف شده ناشی از تغییر شکل های غیرانبساطی یا انرژی تلف شده ناشی از خمش حول مفصل ها را محاسبه می کند.

با محاسبه انتگرال اول رابطه (۴) که جزئیات آن در [۱] آمده و نشان دادن آن با  $\dot{E}_1$ ، رابطه زیر حاصل می شود:

مورب UB و BL است که نرخ انرژی تلف شده مربوط به آنها به ترتیب با  $\dot{E}_\gamma$  و  $\dot{E}_\beta$  نشان داده می‌شود. بنابر [۱]، نرخ انرژی تلف شده ناشی از خمش حول خطوط مفصل افقی ثابت AB و BC که با  $\dot{E}_\gamma$  نشان داده می‌شود، برابر است با:

$$\dot{E}_\gamma = 2M_0 C \dot{\theta} = 2M_0 C \dot{\alpha} \quad (6)$$

که C طول هر یک از لبه‌های سازوکار اساسی چین خوردگی است. نرخ انرژی تلف شده ناشی از خمش حول خطوط مفصل مورب UB و BL برابر است با [۱]:

$$\dot{E}_\beta = 2M_0 L \dot{\theta} = 4M_0 \cdot \frac{H^2}{b} \cdot \frac{1}{\text{tg} \psi_0} \cdot \frac{\text{Cos} \alpha}{\text{Sin} \gamma} \cdot \dot{\alpha} \quad (7)$$

### ۳- محاسبه نیروی لحظه‌ای چین خوردگی در سازوکار اساسی چین خوردگی

برای محاسبه نیروی لحظه‌ای چین خوردگی، ابتدا مجموع نرخ انرژیهای تلف شده داخلی در سازوکار اساسی چین خوردگی که به صورت رابطه اولیه (۴) به دست آمده بود، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\dot{E}_{\text{int}} = \dot{E}_\alpha + \dot{E}_\gamma + \dot{E}_\beta \quad (8)$$

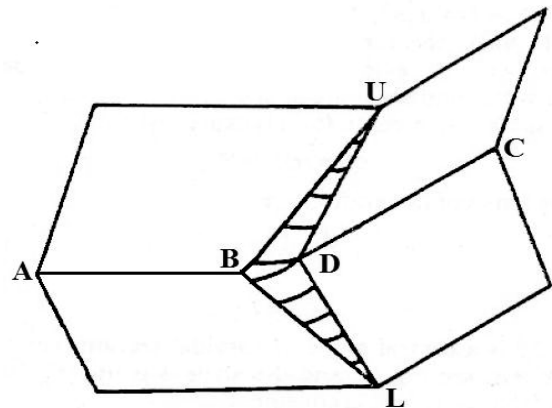
که  $\dot{E}_\alpha$ ،  $\dot{E}_\gamma$  و  $\dot{E}_\beta$ ، به ترتیب همان روابط (۵)، (۶) و (۷) هستند.

نرخ کار انجام شده توسط نیروی خارجی P برای فشرده ساختن سازوکار اساسی چین خوردگی برابر است با:

$$\dot{E}_{\text{ext}} = P \times \dot{\delta} = P \times 2H \times \sin \alpha \times \dot{\alpha} \quad (9)$$

$$\dot{E}_\alpha = \frac{\epsilon N_0 b H \pi}{(\pi - 2\psi_0) \times \text{tg} \psi_0} \times \text{Cos} \alpha \times \left\{ \begin{array}{l} \text{Sin} \psi_0 \times \text{Sin} \left( \frac{\pi - 2\psi_0}{\pi} \times \beta \right) \\ + \text{Cos} \psi_0 \left[ 1 - \text{Cos} \left( \frac{\pi - 2\psi_0}{\pi} \times \beta \right) \right] \end{array} \right\} \times \dot{\alpha} \quad (5)$$

در این رابطه، b شعاع کوچک سطح توروئیدی است، که در شکل ۴ با BUDL نامگذاری شده. این، همان سطحی است که دچار تغییر شکل انبساطی می‌شود.



شکل ۴ سطح توروئیدی در سازوکار اساسی چین خوردگی

همچنان که گفته شد، نرخ انرژی به دست آمده از رابطه بالا مربوط به انرژی تلف شده ناشی از تغییر شکل‌های انبساطی در سطح توروئیدی یعنی همان مقدار انتگرال اول در معادله (۴) است.

برای محاسبه انتگرال دوم معادله (۴)، این انتگرال به طور جداگانه نخست برای خطوط مفصل افقی ثابت و سپس برای خطوط مفصل مورب محاسبه می‌شود. به بیانی دیگر انتگرال دوم معادله (۴) - که بیانگر تغییر شکل‌های غیرانبساطی است - شامل خمش حول خطوط مفصل افقی ثابت AB و BC و نیز خمش حول خطوط مفصل

بنابراین با توجه به این رابطه:

$$\frac{P}{M_o} = A_1 \frac{b}{h} + A_r \frac{C}{H} + A_r \frac{H}{b} \quad (15)$$

که در آن:

$$A_1 = \frac{\lambda\pi}{(\pi - \gamma\psi_o)} \cdot \frac{\text{Cotg}\alpha}{\text{tg}\psi_o} \cdot \left\{ \text{Sin}\psi_o \cdot \text{Sin}\left(\frac{\pi - \gamma\psi_o}{\pi} \cdot \beta\right) + \text{Cos}\psi_o \left[ 1 - \text{Cos}\left(\frac{\pi - \gamma\psi_o}{\pi} \cdot \beta\right) \right] \right\} \quad (16)$$

$$A_r = \frac{1}{\text{Sin}\alpha}$$

$$A_r = \frac{\text{Cotg}\alpha}{\text{tg}\psi_o} \cdot \frac{\gamma}{\text{Sin}\gamma}$$

این رابطه بسیار شبیه به رابطه به دست آمده توسط آبراموویچ و ویرزبکی برای محاسبه نیروی متوسط چین خوردگی در [۱] بوده و تنها تفاوت در مقادیر ضرایب  $A_1$ ،  $A_r$  و  $A_r$  است.

با توجه به این که به طور طبیعی، تمایل به چین خوردگی در مسیری است که منجر به مصرف حداقل نیروی لحظه‌ای چین خوردگی شود، دو شرط زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial P}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial b} = 0 \quad (17)$$

دو رابطه (۱۷)، دستگاه دو معادله و دو مجهولی را تشکیل می‌دهند که به کمک آنها می‌توان دو پارامتر مجهول رابطه (۱۵)، یعنی  $H$  و  $b$  را که به ترتیب نصف طول موج چین خوردگی و شعاع کوچک سطح توروئیدی هستند محاسبه کرد. این دو پارامتر به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$b = \sqrt[3]{A_r A_r / A_1^2} \cdot \sqrt[3]{Ch^2} \quad (18)$$

$$H = \sqrt[3]{A_r^2 / A_1 A_r} \cdot \sqrt[3]{C^2 h}$$

با قرار دادن معادلات (۱۸) در معادله (۱۵) رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{P}{M_o} = 3 \sqrt[3]{A_1 A_r A_r} \times \sqrt[3]{C/h} \quad (19)$$

$$\dot{E}_{ext} = \dot{E}_{int} \quad (10)$$

که می‌گوید نرخ کار خارجی انجام شده برای فشرده ساختن سازوکار اساسی چین خوردگی برابر است با نرخ انرژی تلف شده داخلی، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$P \cdot \gamma H \cdot \text{Sin}\alpha \cdot \dot{\alpha} = \dot{E}_1 + \dot{E}_r + \dot{E}_p \quad (11)$$

چنانچه (۵)، (۶) و (۷) در (۱۱) قرار داده شود، و دو طرف رابطه بر  $\gamma H \dot{\alpha} \cdot \text{Sin}\alpha$  تقسیم شود، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$P = \gamma M_o \times \frac{H}{b} \times \frac{\text{cotg}\alpha}{\text{tg}\psi_o} \times \frac{1}{\text{sin}\gamma} + \frac{M_o}{\text{sin}\alpha} \times \frac{C}{H} + \frac{\gamma N_o b \pi}{(\pi - \gamma\psi_o)} \times \frac{\text{cotg}\alpha}{\text{tg}\psi_o} \times \left\{ \text{sin}\psi_o \times \text{sin}\left(\frac{\pi - \gamma\psi_o}{\pi} \times \beta\right) + \text{cos}\psi_o \left[ 1 - \text{cos}\left(\frac{\pi - \gamma\psi_o}{\pi} \times \beta\right) \right] \right\} \quad (12)$$

از طرفی، براساس محاسبات مربوط به لنگر خمشی مومسان یا ممان خمشی پلاستیک کامل در تیر با مقطع مستطیلی، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$M_o = \frac{\sigma_o h^3}{4} = \sigma_o h \cdot \left(\frac{h}{4}\right) = N_o \left(\frac{h}{4}\right) \Rightarrow N_o = \frac{4M_o}{h} \quad (13)$$

که  $h$  ضخامت ورقی است که سازوکار اساسی چین خوردگی با آن ساخته شده بنابراین:

$$P = \gamma M_o \times \frac{H}{b} \times \frac{\text{Cotg}\alpha}{\text{tg}\psi_o} \times \frac{1}{\text{Sin}\gamma} + \frac{M_o}{\text{Sin}\alpha} \times \frac{C}{H} + \frac{\lambda M_o b \pi}{(\pi - \gamma\psi_o) h} \times \frac{\text{Cotg}\alpha}{\text{tg}\psi_o} \times \left\{ \text{Sin}\psi_o \times \text{Sin}\left(\frac{\pi - \gamma\psi_o}{\pi} \times \beta\right) + \text{Cos}\psi_o \left[ 1 - \text{Cos}\left(\frac{\pi - \gamma\psi_o}{\pi} \times \beta\right) \right] \right\} \quad (14)$$

رابطه (۱۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

از طرفی  $\dot{E}_p$  محاسبه شده در رابطه (۶) خمش حول مفصل‌های ساکن افقی، در حالتی است که لبه‌های هر سازوکار اساسی چین خوردگی، تکیه‌گاه ساده باشند. اما در عمل برای ستون مربعی، این لبه‌های افقی، گیردار هستند. بنابراین باید انرژی  $\dot{E}_p$  دو برابر در نظر گرفته شود. در نتیجه رابطه (۲۰) به صورت زیر تصحیح می‌شود:

$$P \cdot 2H \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} = \varepsilon \dot{E}_1 + 8\dot{E}_p + \varepsilon \dot{E}_r \quad (21)$$

از طرفی با توجه به هندسه ستون مربعی، زاویه خارجی  $\psi_0 = 90^\circ$  و در نتیجه  $\psi_0 = 45^\circ$ . با قرار دادن  $\dot{E}_1$ ،  $\dot{E}_p$  و  $\dot{E}_r$  از (۵) و (۶) و (۷) در (۲۱) و انجام محاسبات و قرار دادن  $\psi_0 = 45^\circ$ ، رابطه زیر برای محاسبه نیروی لحظه‌ای چین خوردگی ستون مربعی حاصل می‌شود.

$$\frac{P}{M_o} = A_1 \frac{b}{h} + A_r \frac{C}{H} + A_p \frac{H}{b} \quad (22)$$

که در آن.

$$A_1 = 32\sqrt{2} \cdot \cot \alpha \cdot \left[ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1 \right] \quad (23)$$

$$A_p = \frac{\wedge}{\sin \alpha}$$

$$A_r = \frac{\wedge \cot \alpha}{\sin \gamma}$$

اکنون با اعمال شرایط حداقل (۱۷) برای روابط ستون مربعی، رابطه‌ای مشابه (۱۹) به دست می‌آید که در این حالت تنها تفاوت آن است که  $A_1$ ،  $A_p$  و  $A_r$  در این رابطه، ضرایب موجود در معادله (۲۲) هستند. اکنون حاصل ضرب این سه ضریب محاسبه می‌شود.

$$A_1 A_p A_r = \frac{2048\sqrt{2} \cdot \cot \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \gamma} \cdot \left[ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + 1 \right] \quad (24)$$

با قرار دادن (۱۸) در (۱۵)، رابطه نیروی لحظه‌ای چین خوردگی به صورت مجموع سه جمله یکسان، که هر یک برابر یک سوم طرف دوم رابطه (۱۹) است، به دست می‌آید. از جمع این سه جمله یکسان، رابطه (۱۹) حاصل می‌شود. بنابراین هر سه سازوکار اصلی تلف‌کننده انرژی در سازوکار اساسی چین خوردگی، سهم یکسانی در کل انرژی تلف شده دارند. به بیانی دیگر سهم انرژی تلف شده ناشی از تغییر شکلهای انبساطی ( $\dot{E}_1$ ) و سهم انرژی تلف شده ناشی از خمش حول محورهای افقی ثابت ( $\dot{E}_p$ ) و سهم انرژی تلف شده ناشی از خمش حول محورهای مورب ( $\dot{E}_r$ ) همگی با یکدیگر برابرند. بنابراین با توجه به این که  $\dot{E}_1$  ناشی از تغییر شکلهای انبساطی و  $\dot{E}_p$  و  $\dot{E}_r$  ناشی از تغییر شکلهای غیر انبساطی است، بنابراین این نتیجه مهم از رابطه (۱۹) حاصل می‌شود که دو سوم کل انرژی، توسط تغییر شکلهای غیر انبساطی (توسط خمش در مفاصل) و یک سوم باقیمانده، توسط تغییر شکلهای انبساطی (در سطح توروئیدی) تلف می‌شود.

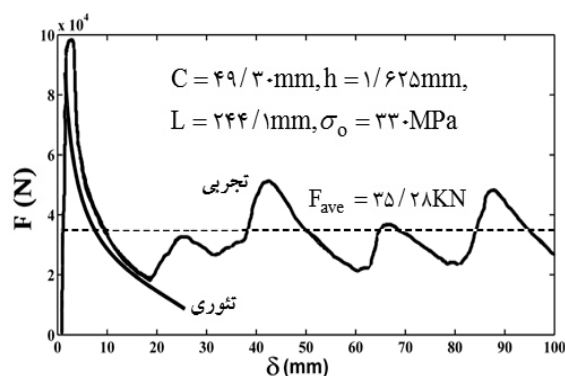
#### ۴- نیروی چین خوردگی لحظه‌ای ستون مربعی تک‌سلولی

ستون با مقطع مربعی، مدل کوچکی از هانی‌کامب‌ها با سلول‌های مربعی است. این ستون را می‌توان از اتصال چهار «سازوکار اساسی چین خوردگی» که در شکل (۲) معرفی شد، ایجاد کرد. در این حالت طول هر ضلع مربع برابر  $2C$  است.

بنابراین برای ستون مربعی، طرف دوم رابطه (۱۱) باید در عدد چهار ضرب شود، یعنی برای ستون مربعی رابطه اولیه زیر را می‌توان نوشت:

$$P \cdot 2H \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} = \varepsilon \dot{E}_1 + \varepsilon \dot{E}_p + \varepsilon \dot{E}_r \quad (20)$$

ستون مربعی فولادی با طول  $L=244/1mm$ ، ضخامت ورقه  $h=1/625mm$  و نصف طول ضلع  $C=49/30mm$  نشان می‌دهد. یکی از این نمودارها که در شکل (۵) مشخص شده، از آزمایش استاتیکی [۴] استخراج شده و مربوط به تشکیل چینهای متعدد در ستون مربعی فولادی است. همان‌طور که در این منحنی مشاهده می‌شود و از فیزیک مسأله نیز انتظار داریم، نیروی چین خوردگی با آغاز ایجاد هر چین، ابتدا از مقداری حداقل شروع به افزایش کرده و سپس روند کاهشی را دنبال می‌کند و با تشکیل کامل هر چین، به مقدار حداقل نسبی خود می‌رسد. سپس با شروع چین بعدی، دوباره افزایش و در ادامه کاهش مشاهده می‌شود. برای ستون مربعی با مشخصات  $L=244/1mm$ ،  $C=49/30mm$  و  $h=1/625mm$  از رابطه (۲۸)، نمودار تئوری نیروی لحظه‌ای چین خوردگی این ستون نیز برحسب مسافت چین خوردگی ( $\delta$ ) در شکل (۵) نشان داده شده است. از مقایسه نمودارهای این شکل مشاهده می‌شود که رابطه نظری به دست آمده در این مقاله، مقدار اولین بیشینه نیرو را در منحنی نیروی چین خوردگی واقعی - که مربوط به ایجاد اولین چین است - برحسب مسافت چین خوردگی با دقت مناسبی پیش بینی می‌کند.



شکل ۵ نمودار نیروی لحظه‌ای چین خوردگی برحسب مسافت چین خوردگی از روشهای تجربی [۴] و نظری.

از آنجا که هدف، به دست آوردن نیروی لحظه‌ای چین خوردگی بر حسب مقدار زاویه  $\alpha$  یا مسافت چین خوردگی  $\delta$  در هر لحظه است، بنابراین باید توابع مثلثاتی مربوط به زوایای  $\beta$  و  $\gamma$  در رابطه (۲۴) را به صورت تابعی از زاویه  $\alpha$  به دست آوریم.

از رابطه (۱) و با توجه به اینکه در ستون مربعی  $\psi_0 = 45^\circ$ ، رابطه زیر بین  $\alpha$  و  $\gamma$  به دست می‌آید.

$$\frac{1}{\sin \gamma} = \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \quad (25)$$

و از (۱) و اتحادهای مثلثاتی، روابط زیر بین  $\beta$  و  $\alpha$ ، به دست می‌آید.

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2 + \sin^2 \alpha} - \sin \alpha}{2\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}}} \quad (26)$$

و

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2 + \sin^2 \alpha} + \sin \alpha}{2\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}}} \quad (27)$$

بنابراین با قرار دادن معادلات (۲۵)، (۲۶) و (۲۷) در معادله (۲۴)، رابطه نهایی زیر برای نیروی لحظه‌ای چین خوردگی ستون مربعی به دست می‌آید.

$$\frac{P}{M_0} = 3\sqrt{A_1 A_2 A_3} \cdot \sqrt{C/h} \quad (28)$$

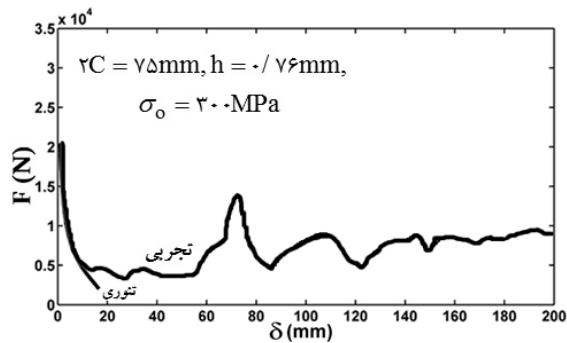
که:

$$A_1 A_2 A_3 = \frac{2.048\sqrt{2} \cdot \cot \alpha \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \cdot \left[ \sqrt{\frac{\sqrt{2 + \sin^2 \alpha} - \sin \alpha}{2\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2 + \sin^2 \alpha} + \sin \alpha}{2\sqrt{2 + \sin^2 \alpha}}} + 1 \right] \quad (29)$$

## ۵- نتایج و بحث

شکل (۵) نمودارهای تجربی و نظری نیروی لحظه‌ای چین خوردگی را برحسب مسافت چین خوردگی برای

منطبق هستند و این دقت و صحت رابطه به دست آمده در این مقاله را نشان می‌دهد.



شکل ۶ نیروی لحظه‌ای چین خوردگی برحسب مسافت چین خوردگی از روشهای تجربی [۱۹] و نظری

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، نیروی لحظه‌ای چین خوردگی برای ستون مربعی و نحوه تغییر آن بر حسب زاویه  $\alpha$  یا مسافت چین خوردگی  $\delta$ ، به روش نظری محاسبه شده است. رابطه به دست آمده بیشینه مقدار نیروی لحظه‌ای چین خوردگی به ازای چین اول بادقت مناسبی پیش‌بینی کرده و می‌تواند نحوه تغییر نیروی لحظه‌ای چین خوردگی را برحسب مسافت چین خوردگی، با دقت بسیار خوبی پیش‌بینی کند. نتایج محاسبات نظری یعنی رابطه (۲۸)، با نتایج دو آزمایش بر روی ستونهای مربعی - که توسط آبراموویچ و جونز [۴] و نیز توسط رید و همکاران [۱۸] تهیه شده - مقایسه و مشاهده شد که رابطه به دست آمده برای محاسبه نیروی لحظه‌ای چین خوردگی، هم از نظر مقادیر بیشینه نیروی چین خوردگی و هم از نظر توصیف تغییرات این نیرو برحسب مسافت چین خوردگی، مطابقت خوبی با نتایج تجربی دارد.

هم‌چنانکه مشاهده می‌شود این رابطه نظری، تغییر نیروی چین خوردگی ناشی از چین اول را برحسب مسافت چین خوردگی با دقت بسیار خوبی به دست می‌آورد، که این از مقایسه شیب دو نمودار در نواحی مختلف نتیجه‌گیری می‌شود.

کمتر بودن مقدار نیروی پیش‌بینی شده از رابطه نظری نسبت به مقادیر تجربی متناظر آن در هر لحظه را می‌توان به این دلیل دانست که در محاسبه رابطه (۲۸) فرض شده سازوکارهایی که باعث تلف شدن انرژی در درون ستون می‌شوند فقط شامل یک تغییر شکل انبساطی و دو تغییر شکل خمشی هستند. از طرفی با توجه به نزدیک بودن دو جواب، علی‌رغم اختلاف کم آنها، می‌توان سازوکارهای تغییر شکل فرض شده در محاسبات را معقول و مناسب دانست.

برای حصول اطمینان بیشتر از محاسبات انجام شده در این مقاله و رابطه نهایی، شکل (۶) نمودارهای تجربی و نظری نیروی لحظه‌ای چین خوردگی را برای ستون مربعی با طول ضلع  $2C = 75mm$  و ضخامت ورقه  $h = 0/76mm$  یکی از نمودارهای ترسیم شده در شکل (۶)، نموداری تجربی است که توسط رید و همکاران [۱۹] تهیه شده است. نمودار دیگر در شکل ۶، نیروی لحظه‌ای چین خوردگی برای این ستون با مشخصات داده شده است که از رابطه نظری (۲۸) به دست آمده. با مقایسه نمودارهای شکل (۶) نتیجه می‌شود که رابطه به دست آمده در این مقاله، مقدار بیشینه نیروی محوری لازم برای ایجاد اولین چین در ستون مربعی را بادقت قابل قبولی پیش‌بینی می‌کند. این رابطه همچنین نحوه تغییر نیروی لحظه‌ای چین خوردگی ستون مربعی و نیز نحوه تغییر مسافت چین خوردگی این ستون ( $\delta$ ) را با دقت بسیار خوبی پیش‌بینی می‌کند. نمودارهای شکل (۶) نشان می‌دهد که دو نمودار بادقت بسیار زیادی بر یکدیگر



## ۷- منابع

- [۱۰] زمانی جمال، سلیمانی مجید، درویزه ابوالفضل، لیاقت غلامحسین؛ «آنالیز عددی مچالگی کامل سازه‌های جداره نازک با مقطع مربع به کمک نرم‌افزار LS-DYNA»؛ چهارمین کنفرانس سالانه و بین‌المللی مهندسی مکانیک؛ ۱۳۸۵.
- [۱۱] علوی‌نیا علی، لیاقت غلامحسین؛ «بررسی ویژگی‌ها و تحلیل شبه استاتیکی هانی‌کمب‌ها»؛ دوازدهمین کنفرانس سالانه و بین‌المللی مهندسی مکانیک؛ اردیبهشت ۱۳۸۳.
- [۱۲] علوی‌نیا علی، لیاقت غلامحسین؛ «له شدن دینامیکی ستون‌های جدار نازک در اثر برخورد پرتابه»؛ دوازدهمین کنفرانس سالانه و بین‌المللی مهندسی مکانیک؛ اردیبهشت ۱۳۸۳.
- [۱۳] زمانی جمال، لیاقت غلامحسین؛ «تاثیر عوامل مهم هانی‌کمب در مقابل بارهای ضربه‌ای»؛ دومین کنفرانس بین‌المللی مهندسی مکانیک؛ ۱۳۸۱؛ ص ۶۸۹-۶۸۷.
- [14] Santosa S., Wierzbicki T.; "Effect of Ultralight Metal Filler on the Bending Collapse Behavior of Thin-Walled Prismatic Columns", International Journal of Mechanical Sciences; Vol. 41, 1999, pp 995-1019.
- [15] Santosa S., Wierzbicki T., Hanssen A. G., Langseth M.; "Experimental and Numerical Studies of Foam-Filled Sections", International Journal of Impact Engineering; Vol. 24, 2000, pp 509-534.
- [16] Niknejad A., Liaghat G. H., Behraves H. H., Moslemi Naeni H.; "Theoretical investigation of the instantaneous folding force during the first fold creation in a square column", International Conference on Applied Mechanics and Mechanical Engineering; Bangkok, Thailand, 2008.
- [17] Chen W., Wierzbicki T.; "Relative Merits of Single-Cell, Multi-Cell and Foam-Filled Thin-Walled Structures in Energy
- [1] Wierzbicki T., Abramowicz W.; "On the Crushing Mechanics of Thin-Walled Structures", Journal of Applied Mechanics; Vol. 50, 1983, pp 727-734.
- [2] Hayduk R. J., Wierzbicki T.; "Extensional Collapse Modes of Structural Members", Computers and Structures; Vol. 18, 1984, pp 447-458.
- [3] Abramowicz W.; "The Effective Crushing Distance in Axially Compressed Thin-Walled Metal Columns", International Journal of Impact Engineering; Vol.1, No.3, 1983, pp 309-317.
- [4] Abramowicz W., Jones N.; "Dynamic Axial Crushing of Square Tubes", International Journal of Impact Engineering; Vol. 2, No. 2, 1984, pp 179-208.
- [5] Abramowicz W., Wierzbicki T.; "Axial Crushing of Foam-Filled Columns", International Journal of Mechanical Sciences; Vol. 30, No. 3/4, 1988, pp 263-271.
- [6] Abramowicz W., Wierzbicki T.; "Axial Crushing of Multicorner Sheet Metal Columns", Journal of Applied Mechanics; Vol. 56, 1989, pp 113-120.
- [7] Liaghat G. H., Alavinia A.; "A Comment on the Axial Crush of Metallic Honeycombs by Wu and Jiang", International Journal of Impact Engineering; Vol. 28, 2003, pp 1143-1146.
- [۸] لیاقت غلامحسین، داغیانی ح. ر.، صدیقی م.، علوی‌نیا علی؛ «کراشینگ دینامیکی پانل‌های هانی‌کمب در اثر برخورد پرتابه‌های استوانه‌ای»؛ نشریه امیرکبیر؛ سال چهاردهم؛ شماره ۵۳؛ ۱۳۸۱؛ ص ص ۷۹-۶۸.
- [۹] لیاقت غلامحسین، صدیقی م.، داغیانی ح. ر.، علوی‌نیا علی؛ «خرد شدن سازه‌های هانی‌کمب فلزی تحت بارهای شبه استاتیکی»؛ نشریه دانشکده فنی دانشگاه تهران؛ جلد ۳۷؛ شماره ۱؛ ۱۳۸۲؛ ص ص ۱۵۶-۱۴۵.

- [19] Reid S. R., Reddy T. Y., Gray M. D.; "Static and Dynamic Axial Crushing of Foam-Filled Sheet Metal Tubes", International Journal of Mechanical Sciences; Vol. 28, No.5, 1986, pp 295-322.
- Absorption", Thin-Walled Structures; Vol. 39, 2001, pp 287-306.
- [18] Zhang Xiong, Cheng G., Zhang Hui; "Theoretical Prediction and Numerical Simulation of Multi-Cell Square Thin-Walled Structures", Thin-Walled Structures; Vol. 44, 2006, pp 1185-1191.