



## بررسی پسا کمانش ورق های کامپوزیتی مستطیلی به روش تجميع نقاط و توابع لژاندر

سید امیر مهدی قنادیپور<sup>1\*</sup>، محمدعلی مهرپویا<sup>2</sup>، پیام کیانی<sup>3</sup>

1- استادیار، مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی و فناوری های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

2- استادیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش

3- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

\*تهران، صندوق پستی 1983963113، a\_ghannadpour@sbu.ac.ir

### چکیده

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 27 دی 1394

پذیرش: 20 اسفند 1394

ارائه در سایت: 28 فروردین 1395

کلید واژگان:

پس از کمانش

تئوری کلاسیک صفحات کامپوزیتی

توابع لژاندر

روش بدون المان

تجميع نقاط

در این مقاله با استفاده از روش بدون المان تجميع نقاط به بررسی رفتار غیرخطی پس از کمانش صفحات کامپوزیتی پرداخته شده است. روش بدون المان یکی از روش های عددی مورد توجه در یکی دو دهه اخیر بوده است. در این روش دامنه مسئله با توزیع نقاط یکنواخت و یا غیریکنواخت نمایش داده می شود. ولیکن به دلیل نوسانات شدید در شرایط مرزی و وقوع پدیده رانگ در صورت استفاده از نقاط یکنواخت، در تحقیق حاضر دامنه مسئله با نقاط لژاندر-گائوس-لوباتو گسسته سازی شده است. در مقاله حاضر از شرایط مرزی خارج صفحه ای گوناگون با لایه چینی های متعام و زاویه ای پادمتقارن و همین طور تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک استفاده شده است. در روش مذکور، از سری لژاندر جهت گسسته سازی معادلات دیفرانسیلی و شرایط مرزی بمنظور میدان های جابجایی تخمینی استفاده می شود. به علت تغییر شکل های بزرگ و وجود ترم های غیرخطی در روابط کرنش-جابجایی و همچنین ترم های غیرخطی ناشی از ضرب میدان های جابجایی معادلات نهایی حاصل از گسسته سازی معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم، تشکیل یک دستگاه معادلات غیرخطی را می دهند که برای حل دستگاه معادلات غیرخطی از تکنیک نیوتن-رافسون استفاده شده است. در این روش همواره تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است و از آن جا که تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر می باشد از روش حداقل مربعات برای حل دستگاه معادلات استفاده خواهد شد. نتایج گوناگون تا حد امکان با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده اند.

## Post-buckling of laminated plates using collocation method and Legendre basis functions

Seyed Amir Mahdi Ghannadpour<sup>1\*</sup>, Mohammad Ali Mehrpouya<sup>2</sup>, Payam Kiani<sup>1</sup>

1-New Technologies and Engineering Department, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

2-Department of Mathematics, Tafresh University, Tafresh, Iran

\*P.O.B. 1983963113, Tehran, Iran, a\_ghannadpour@sbu.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 17 January 2016  
Accepted 10 March 2016  
Available Online 16 April 2016

**Keywords:**  
Post-buckling  
Classical laminated plate theory  
Legendre polynomials  
Mesh-free method  
Collocation

### ABSTRACT

In this paper, mesh-free method is used to analyze post-buckling behavior of laminated plates. One of the most common powerful numerical methods in recent decades is mesh-free collocation method. Due to sharp fluctuations in the boundary conditions and the occurrence of Runge phenomenon in the case of the uniform points, in the present study the issue is discretized with Legendre-gauss-lobatto nodes. In this paper, using classical laminated plate theory and different out-of-plane boundary conditions with anti-symmetric cross-ply and angle-ply laminates is investigated. Equations system is introduced by discretizing von-Karman's compatibility equations and boundary conditions with finite Legendre basis functions that are substituted into displacement fields. Because of large deformations and nonlinear terms in the strain - displacement relations and nonlinear terms by multiplying variables in the equilibrium equations, the nonlinear system of equations is solved by using Newton-Raphson technique. Since number of equations is always more than the number of unknown parameters, the least square technique is used to solve the system of equations. Some results are obtained and compared with those available in the literature.

### 1- مقدمه

برابر خوردگی، خواص عایق حرارتی خوب و هزینه کمتر و صرفه جویی اقتصادی از اهمیت ویژه ای برخوردارند. این سازه ها اغلب تحت نیروی فشاری درون صفحه ای قرار می گیرند. در بسیاری از موارد جهت بهینه سازی وزن، اجازه تحمل بارهای بیش تر از کمانش به سازه داده می شود. بنابراین تحلیل رفتار پس از کمانش سازه های کامپوزیتی اهمیت می یابد. تحلیل پس از کمانش صفحات سازه ای یک آنالیز غیرخطی محسوب می شود. ویژگی

استفاده از سازه های کامپوزیتی و ساندویچی به بخش قابل توجه و پرکاربردی در بسیاری از حوزه های مهندسی از جمله هوافضا، خودروسازی، زیردریایی ها و حتی در شاخه های نظامی و ورزشی تبدیل شده اند. امروزه سازه های کامپوزیتی به دلیل انعطاف پذیری در بهبود خواص مدنظر طراحان و همچنین ویژگی های مهمی از جمله استحکام بالا در کنار وزن پایین، مقاومت بالا در

Please cite this article using:

S. A. M. Ghannadpour, M. A. Mehrpouya, P. Kiani, Post-buckling of laminated plates using collocation method and Legendre basis functions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 213-220, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

S. A. M. Ghannadpour, M. A. Mehrpouya, P. Kiani, Post-buckling of laminated plates using collocation method and Legendre basis functions, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 4, pp. 213-220, 2016 (in Persian)

مجهول و حل دستگاه غیرخطی از تکنیک نیوتن رافسون<sup>8</sup> استفاده شده و از آنجا که تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است از روش حداقل مربعات<sup>9</sup> برای حل دستگاه استفاده خواهد شد. نتایج به دست آمده از این شیوه تا حد امکان با نتایج حاصل از روش های دیگر مقایسه شده است.

## 2- استخراج معادلات

شکل 1 یک صفحه مستطیلی بزرگ شده دلخواه را نشان می دهد که دستگاه مختصات روی مرکز و در صفحه میانی آن لحاظ شده است. با این فرض که نسبت ضخامت به طول اضلاع صفحه بسیار کوچک است، می توان از تنش-های برشی در جهت ضخامت صفحه صرف نظر کرد. با توجه به این فرض، برای استخراج معادلات تعادل صفحه می توان از تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک استفاده کرد.

با در نظر گرفتن فرضیات تنش صفحه ای، رابطه تنش- کرنش بر اساس تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک برای یک ماده کامپوزیتی متشکل از چندلایه به صورت رابطه (1) است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در آن  $\bar{Q}_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$  ضرایب سفتی انتقال یافته کاهش یافته<sup>10</sup> نامیده می شوند. با انتگرال گیری از تنش های معادله ی (1) در جهت ضخامت می توان نیرو و ممان های معادل را به ترتیب روابط (2) و (3) به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3)$$

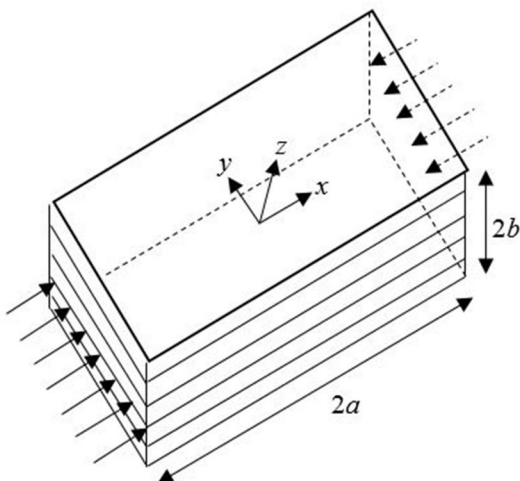


Fig. 1 A rectangular laminated plates

شکل 1 یک صفحه کامپوزیتی مستطیلی

غیرخطی، ناشی از تغییر شکل های بزرگ خارج صفحه ای می باشد که به عنوان ترم های غیرخطی در رابطه ی کرنش- جابجایی آورده می شود. لذا استفاده از روش های عددی به عنوان یکی از ابزارهای کارآمد در تحلیل این گونه سازه ها مورد توجه می باشد. استفاده از روش های عددی رایج مانند المان محدود<sup>1</sup> و تفاضل محدود<sup>2</sup> از جمله ی آنها می باشند. ولیکن به دلیل هزینه بر بودن این گونه روش ها در شبکه بندی مسئله و همین طور نیاز به شبکه بندی مجددی که در مسائلی مانند رشد ترک، با افزایش طول ترک و تغییر شرایط احساس می شود، توجه محققین به روش های بدون المان<sup>3</sup> معطوف شده است. مهم ترین ویژگی روش های بدون المان تقریب های حل عددی معادلات دیفرانسیل، نه با تعریف المان و روابط پیوستگی مربوط به آنها بلکه با عبور توابع پایه از میان نقاط یکنواخت یا غیر یکنواخت می باشد که این نقاط دامنه مسأله مورد نظر را شبیه سازی می کنند.

واضح است که صفحات بعد از نقطه ی کمانش ممکن است بارهای بالاتری را متحمل شوند و این مسئله توجه محققین را به بررسی رفتار پس از کمانش صفحات معطوف کرده است. در این مقاله روش بدون المان جهت بررسی صفحات کامپوزیتی با لایه چینی های متعامد و زاویه ای پادمتقارن تحت کوتاه شدگی انتهایی با شرایط مرزی گوناگون خارج صفحه ای و درون صفحه ای در نظر گرفته شده است. ساده ترین تئوری صفحات، تئوری کلاسیک<sup>4</sup> می باشد، که کرنش های برشی را در جهت ضخامت در نظر نمی گیرد، بنابراین روشی مطمئن برای پیش بینی رفتار صفحات نازک به حساب می آید. تعدادی از حل های پایه ای و ابتدایی برای خیزهای کوچک و بزرگ توسط ردی و چیا ارائه شده است [2,1]. روش المان محدود یکی از روش های بسیار پر کاربرد در حوزه مهندسی بوده است. تحقیقات زیادی در بررسی رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی با کمک روش المان محدود انجام شده است [3-7]. یکی دیگر از روش های عددی مورد توجه، روش نوار محدود<sup>5</sup> می باشد که قنادپور و اویسی جهت پیش بینی رفتار پس از کمانش صفحات ایزوتروپ و کامپوزیتی و همچنین سازه های صفحه ای به توسعه این روش در سال های اخیر پرداخته اند [8-10]. در تحقیقات دیگر آنها رفتار غیرخطی مقاطع C شکل و جعبه ای با افزودن ترم های هارمونیک متناظر با شکل موده های کمانش، مورد بررسی قرار گرفت [11,12]. روش مربع دیفرانسیلی<sup>6</sup> نیز یکی دیگر از روش های عددی است که با استفاده از گسسته سازی فرم قوی معادلات دیفرانسیلی به تحلیل غیرخطی مسائل پرداخته است [13-16]. روش بدون المان در سال های اخیر در حوزه مسائل سیالاتی و سازه ای بسیار پر کاربرد بوده است [17-20]. به طور کلی در بین تمام روش های بدون المان به کار رفته روش های مبتنی بر فرم ضعیف شده از دقت بالاتری برخوردارند. کانسا [21] به گسترش حل فرم قوی معادلات دیفرانسیلی جزیبی با استفاده از توابع پایه ای شعاعی و روش بدون المان تجميع نقاط<sup>7</sup> پرداخت. مرور کلی بر کارهای انجام شده در حوزه روش های بدون المان تا سال 2011 در مقاله لیو [23] مشاهده می شود.

در تحقیق حاضر معادلات نهایی حاصل از گسسته سازی معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم، تشکیل یک دستگاه معادلات غیرخطی را می دهند که همواره در آن تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است. جهت تحصیل ضرایب

- 1- Finite element method
- 2- Finite difference method
- 3- Mesh-free methods
- 4- CPT
- 5- Finite strip method
- 6- Differential quadrature method
- 7- Collocation

8- Newton-Raphson

9- Least-squares method

10- Transformed reduced stiffness coefficients

میدان های جابجایی تعریف شده در معادلات با استفاده از توابع پایه لژاندر تخمین زده می شوند. سری لژاندر یکی از سری های قدرتمند ریاضیاتی است. به منظور حل معادلات تعادل با شرایط مرزی انتخاب شده ابتدا این معادلات با استفاده از توابع پایه گسسته سازی می شوند. رابطه بازگشتی لژاندر برای یک بعد و در جهت  $x$  به صورت زیر نوشته می شود و برای جهت  $y$  نیز به صورت مشابه به دست می آید:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x \quad (7)$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (8)$$

به منظور استفاده از توابع لژاندر در بازه  $x \in [-a, a]$  باید  $x$  به فرم بی بعد  $\frac{x}{a}$  تغییر داده شود بنابراین  $P(x)$  به صورت زیر نمایش داده می شود

$$P_i(x) \rightarrow P_i\left(\frac{x}{a}\right) \quad (9)$$

با توجه به مطالب فوق می توان میدان های جابجایی را به صورت زیر تعریف نمود:

$$u_0 = -\varepsilon x + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^u \alpha_j^u P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (10)$$

$$v_0 = \varepsilon \alpha y + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^v \alpha_j^v P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (11)$$

$$w_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^w \alpha_j^w P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \quad (12)$$

که  $\varepsilon$  کوتاه شدگی انتهایی وارد بر لبه های صفحه می باشد و  $\alpha$  پارامتری است که اثرات ضریب پواسن در آن مشاهده می شود.  $\alpha^u, \alpha^v, \alpha^w$  ضرایب مجهول میدان های جابجایی می باشند که از حل دستگاه معادلات به دست می آیند [24,8]. به عنوان نمونه اولین معادله تعادل که در رابطه (5) نیز آورده شده است، با استفاده از میدان های جابجایی دوباره بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^u \alpha_j^u \left( A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & \quad \left. + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^v \alpha_j^v \left( A_{12} \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & \quad \left. + A_{66} \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i'=1}^{n'} \sum_{j'=1}^{m'} \alpha_i^w \alpha_j^w \alpha_{i'}^w \alpha_{j'}^w \\ & \left( A_{11} \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{i'-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) P_{j'-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & + A_{12} \frac{\partial}{\partial x} P_{i'-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j'-1}\left(\frac{y}{b}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \\ & + A_{66} \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j'-1}\left(\frac{y}{b}\right) \frac{\partial}{\partial x} P_{i'-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \\ & + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P_{j'-1}\left(\frac{y}{b}\right) \frac{\partial}{\partial x} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{i'-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \left. \right) \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i^w \alpha_j^w \left( B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & \quad \left. + 3B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\partial}{\partial y} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) \right. \\ & \quad \left. + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} P_{j-1}\left(\frac{y}{b}\right) P_{i-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

میدان های جابجایی در کل صفحه با در نظر گرفتن تئوری صفحات کامپوزیتی کلاسیک و فرضیات فن-کارمن، به کار گرفته شده اند. بدین ترتیب معادلات تعادل یک صفحه به صورت زیر به دست می آید [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ &+ 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

در معادلات بالا  $M$  و  $N$  به ترتیب نشان دهنده ی ممان ها و نیروهای منته می باشند که پیش تر در روابط (2) و (3) تعریف شدند.

بنابراین می توان معادلات حاکم را به فرم های ساده تری نوشت که در این مقاله معادله اول بر حسب میدان های جابجایی نمایش داده شده است و معادلات دوم و سوم نیز به همین صورت به دست می آیند.

$$\begin{aligned} A_{11} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right) \\ + A_{12} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\ + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \\ + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ - B_{11} \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \\ - 3B_{16} \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\ - B_{26} \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

مولفه های ماتریس های  $B, D, A$  که به ترتیب ماتریس سفتی محوری، ماتریس سفتی خمشی و ماتریس کوپلینگ سفتی محوری-خمشی نامیده می شوند، به صورت رابطه (6) به دست می آیند:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{aligned} \quad (6)$$

به دلیل لایه چینی صفحات کامپوزیتی به صورت متعامد و زاویه ای پادمتقارن بجز ترم های  $B_{16}, B_{26}, B_{11}, B_{22}$  دیگر ترم های ماتریس کوپلینگ سفتی محوری-خمشی صفر می باشند. همچنین ترم های معادلات نیز حذف شده اند.

### 3- فرآیند حل معادلات حاکم

تابع درونیاب در مسائل مقدارمرزی در نزدیکی مرزها دارای نوسانات شدیدی می شود و همین مسئله دقت و همگرایی مسئله را دچار مشکل می کند. به بیان دیگر اگر درونیابی لژاندر برای نقاط با فواصل یکسان انجام شود این مسئله به ذهن می آید که آیا مقدار باقیمانده  $E_N(x) = f(x) - P_N(x)$  در شرایطی که  $N$  افزایش می یابد به سمت صفر میل می کند؟ ( $N$  تعداد ترم های چندجمله ای لژاندر می باشد)، باید گفت برای توابعی نظیر  $\sin(x)$  یا  $\exp(x)$  که همه مشتقات دارای مقدار ثابتی از کران می باشد جواب سوال مثبت است ولی در کل جواب سوال خیر است چرا که به عنوان مثال درخصوص تابعی مانند  $f(x) = 1/1 + x^2$  ماکزیمم مقدار باقیمانده هنگامی که تعداد جملات افزایش می یابد، بزرگ می شود که به این پدیده رانگ<sup>2</sup> گفته می شود. به طوری که اگر چندجمله ای های لژاندر از درجه 10 باشد و از نقاط با فواصل یکنواخت عبور کند دارای نوسانات بزرگی در انتهای بازها می شود و هرچه تعداد نقاط افزایش یابد این نوسانات شدیدتر خواهد شد حال اگر از نقاط چپیشو یا لژاندر برای درونیابی استفاده شود دیگر این نوسانات به وجود نخواهد آمد و با افزایش تعداد جملات و نقاط مقدار باقیمانده به سمت صفر میل می کند.

در صورتی که معادلات و شرایط مرزی با استفاده از چندجمله ای های لژاندر گسسته سازی شوند، یک دستگاه معادلات غیرخطی ایجاد می شود که ترم های غیرخطی در نتیجه ضرب متغیرها، در معادلات تعادل حاکم بر صفحه به وجود می آیند. برای حل دستگاه معادلات غیرخطی، از تکنیک نیوتن-رافسون استفاده می شود.

دستگاه غیرخطی مذکور توسط تکنیک نیوتن-رافسون به یک دستگاه خطی به شکل  $Ax = b$  تبدیل می گردد که برای یافتن پاسخی با دقت مناسب لازم است تا از یک تکنیک تکرارشونده استفاده گردد. باید توجه داشت که در این دستگاه تعداد معادلات از مجهولات بیشتر است، در این حالت دستگاه دارای پاسخ یکتا نیست. لذا، به منظور یافتن یک پاسخ سازگار با دستگاه از تکنیک حداقل مربعات استفاده شده است. روند تکراری تا زمانی که حد خطای در نظر گرفته شده برای روابط (17) و (18) اقلان شود، ادامه پیدا می کند.

$$\sqrt{\frac{\sum \Delta d_i^2}{\sum d_{i+1}^2}} < 5 \times 10^{-4} \quad (17)$$

$$F(d_i) \leq 5 \times 10^{-4} \quad (18)$$

رابطه (17) مربوط به اقلان حد خطای درجات آزادی مسئله می باشد و رابطه (18) مربوط به اقلان حد خطای معادلات گسسته سازی شده در نقاط درون دامنه و روی مرز می باشد.

به منظور محاسبه میانگین نیروی طولی، لازم است تا انتگرال تنش منتجه غشایی وارد بر کل صفحه محاسبه شود:

$$N_{av} = \frac{\int_{-a}^a \int_{-b}^b N_{xx}(x, y) dx dy}{2a} \quad (19)$$

برای به دست آوردن نیرو و ممان های منتجه لازم است تا دو دسته کمیت تعیین شود. دسته اول کمیت های مربوط به ماده است که از اطلاعات صفحات کامپوزیتی به دست می آید. دومین دسته کمیت های مورد نیاز کرنش در هر نقطه است. به منظور محاسبه کرنش ها در هر نقطه لازم است تا میدان های جابجایی تعیین گردند.

دیگر معادلات دیفرانسیلی حاکم و معادلات شرایط مرزی نیز به همین صورت گسسته سازی می شوند. در کنار ترم های سری لژاندر برای گسسته سازی معادلات حاکم بر صفحه از آن جا که روش حل بر پایه روش تجمیع نقاط می باشد باید معادلات گسسته سازی شده در نقاط توزیع شده در دامنه و معادلات شرایط مرزی هم در نقاط مرزی قرار داده شوند. در نهایت به صورت یک دستگاه معادلات به شکل زیر بیان می شوند:

$$Lu(x_i) = f_i \quad i = 1: N_D \quad (14)$$

$$Bu(x_i) = 0 \quad i = 1: N_B \quad (15)$$

که در این جا  $L$  و  $B$  عملگرهای دیفرانسیلی می باشند،  $u$  متغیری است که با توابع پایه لژاندر جایگزین شده است،  $x_i$  ها مختصات نقاط مورد نظر هستند،  $f$  مقادیر سمت راست معادله و  $N_D$  و  $N_B$  نیز به ترتیب تعداد نقاط درون دامنه و روی مرز می باشند.

برای توزیع نقاط دامنه از نقاط لژاندر-گوس-لوباتو استفاده شده است. نمایش این نقاط به عنوان نمونه در شکل 2 برای حالت  $(8 \times 8) = (n \times m)$  (8 نقطه نشان داده شده است. که  $n$  تعداد نقاط در جهت طولی و  $m$  در جهت عرضی است. مختصات این نقاط در روش لژاندر  $x_i (i = 1, \dots, N_B + N_D)$   $(x_p, y_q) | \begin{matrix} p = 1, \dots, n \\ q = 1, \dots, m \end{matrix}$  می باشند که از حل معادلات (16) بدست می آیند.

$$\begin{cases} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \frac{d}{dx} P_p\left(\frac{x}{a}\right) = 0; & p = 1, \dots, n \\ \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \frac{d}{dy} P_q\left(\frac{y}{b}\right) = 0; & q = 1, \dots, m \end{cases} \quad (16)$$

لازم به ذکر است در این تحقیق همواره تعداد ترم و تعداد نقاط در هر ضلع برابر در نظر گرفته شده است، یعنی  $n^2 = m^2 = N_B + N_D$ . انتخاب نقاط و نحوه توزیع آن ها در دامنه از اهمیت ویژه ای برخوردار است. چرا که انتخاب درست نقاط باعث افزایش دقت و سرعت همگرایی در مسئله می شود. لازم به ذکر است، چنانچه برای گسسته سازی دامنه از نقاط یکنواخت استفاده شود نسبت به زمانی که از نقاط لژاندر-گوس-لوباتو استفاده می شود

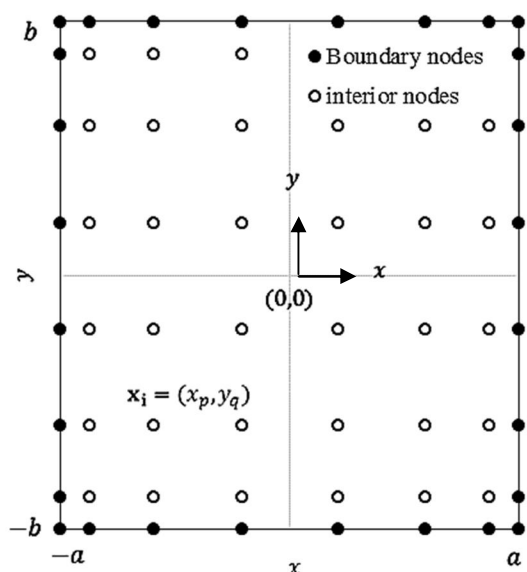


Fig. 2 Scattered Legendre-gauss-lobatto nodes

شکل 2 توزیع نقاط لژاندر-گوس-لوباتو

1- Residual  
2- Runge phenomenon

4- نتایج و تحلیل

در مقاله‌ی حاضر، حل معادلات پس از کمانش تحت کوتاه‌شدگی انتهایی و شرایط مرزی گوناگون خارج‌صفحه‌ای و درون‌صفحه‌ای برای صفحات کامپوزیتی توسط چندجمله‌ای‌های لژاندر بررسی شده است. به‌منظور بررسی دقت و کاربرد روش حاضر چندین مثال جهت مقایسه با نتایج موجود آورده شده است. مشخصات ماده انتخابی، شرایط مرزی و هندسه در نظر گرفته شده در تحقیق به‌صورتی که در زیر آمده است می‌باشد:

$$a = b; \frac{2a}{h} = 100; \frac{E_1}{E_2} = 40; G_{12} = 0.5E_2; \nu_{12} = 0.25 \quad (20)$$

مدل ریاضی مربوط به شرایط مرزی خارج صفحه‌ای ساده و گیردار به‌ترتیب زیر ارائه شده‌اند:

$$\begin{aligned} x = \mp a; w_0 = M_{xx} = 0 \\ y = \mp b; w_0 = M_{yy} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x = \mp a; w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \\ y = \mp b; w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

همچنین مدل ریاضی مربوط به شرایط مرزی درون‌صفحه‌ای مقید و آزاد نیز به‌مانند رابطه (23) و (24) می‌باشند:

$$\begin{aligned} x = \mp a; u_0 = \pm \varepsilon a; v_0 = 0 \\ y = \mp b; u_0; v_0 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x = \mp a; u_0 = \pm \varepsilon a; N_{xy} = 0 \\ y = \mp b; N_{xy} = N_y = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

کمیت نیروی بی‌بعد شده نیز از رابطه  $F = 2N_{av}a/100E_2h^3$  محاسبه می‌شود. در جدول 1 نحوه همگرایی روش حاضر برای رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی متعامد و پادمتقارن .../0/90/0/90 برای لایه‌چینی‌های 4، 8 و بی‌نهایت و در کرنش  $\varepsilon/1000 = 4 \times 10^{-4}$  بررسی شده است. همان‌طور که از جدول 1 مشخص می‌باشد با افزایش ترم و نقاط، از ترم 10 جواب‌ها به همگرایی رسیده‌اند ولی جهت اطمینان از صحت نتایج و افزایش دقت در جواب‌ها کلیه نتایج برای تعداد 11 ترم و  $11 \times 11$  نقطه گرفته شده‌اند. در شکل 3 رفتار پس از کمانش صفحات کامپوزیتی متعامد و پادمتقارن .../0/90/0/90 تحت کوتاه‌شدگی انتهایی، برای شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای ساده و درون‌صفحه‌ای آزاد، نشان داده شده است. نمودار شکل 3 برحسب کرنش بی‌بعد  $1000\varepsilon$  و نیروی بی‌بعد محوری ترسیم شده است. در لایه‌چینی‌های 4 و 8 لایه به‌علت وجود ترم‌های  $B_{11}, B_{22}$  کوپلینگ خارج‌صفحه‌ای و درون‌صفحه‌ای ایجاد می‌شود، بنابراین رفتار پس از کمانش این دو لایه‌چینی بدون داشتن نقطه کمانش انجام می‌پذیرد ولی در لایه‌چینی با تعداد لایه‌های بی‌نهایت اثرات ترم‌های  $B_{11}, B_{22}$  از بین می‌روند و صفحه کامپوزیتی دچار کمانش می‌شود. منظور از لایه‌چینی بی‌نهایت یعنی صفحه

جدول 1 نحوه همگرایی روش حاضر

Table 1 Convergence study for present method

تعداد ترم	تعداد نقاط	کمیت نیروی بی‌بعد $F$		
		چهار لایه	هشت لایه	بی‌نهایت
7	7×7	0.406	0.533	0.693
9	9×9	0.411	0.469	0.536
10	10×10	0.415	0.472	0.534
11	11×11	0.415	0.472	0.524

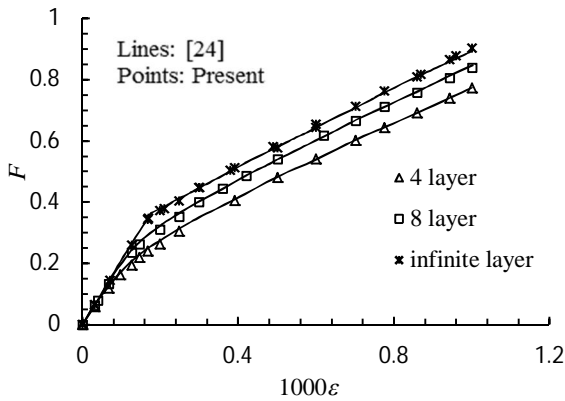


Fig. 3 Longitudinal force-end shortening behavior for anti-symmetric cross-ply plates

شکل 3 منحنی نیرو برحسب کرنش صفحات متعامد پادمتقارن

کامپوزیتی که از تعداد لایه‌های زیاد ( $\geq 50$ ) تشکیل شده است. نتایج روش مذکور با مرجع [24] که روش نوآر محدود می‌باشد مقایسه شده‌اند. نتایج با تعداد 11 ترم و  $11 \times 11$  نقطه برای رسیدن به جواب مناسب گرفته شده‌اند.

در ادامه در شکل 4 منحنی پس از کمانش خیز وسط صفحات کامپوزیتی متعامد پادمتقارن برحسب نیرو ترسیم شده‌اند. همان‌طور که از شکل 4 مشخص است در لایه‌چینی‌های 4 و 8 به‌دلیل عدم کمانش منحنی پس از کمانش از مبدأ مختصات آغاز می‌شود ولی در لایه‌چینی بی‌نهایت به‌علت وجود کمانش، خیز وسط صفحه کامپوزیتی تا رسیدن به نیروی بحرانی صفر می‌باشد و بعد از آن صفحه شروع به بلند شدن می‌کند. همان‌طور که در شکل 4 مشخص می‌باشد با افزایش تعداد لایه‌ها نیروی محوری افزایش می‌یابد. نتایج با مرجع [24] مقایسه شده و نشان دهنده دقت مناسب روش حاضر می‌باشند.

نتایج پس از کمانش کرنش-نیرو، برای صفحات کامپوزیتی چهار لایه  $[0/90]_2$  با شرایط مرزی خارج‌صفحه‌ای ترکیبی و داخل‌صفحه‌ای آزاد در شکل 5 آورده شده است. همان‌طور که از شکل 5 مشخص است با افزایش شرایط مرزی گیردار در لبه‌های بدون بارگذاری، نیروی محوری لازم جهت بلند شدن صفحه افزایش یافته است. به‌دلیل پادمتقارن بودن لایه‌چینی‌ها نقطه کمانشی ایجاد نمی‌شود. نتایج با تعداد 11 ترم و  $11 \times 11$  نقطه به‌دست آمده است.

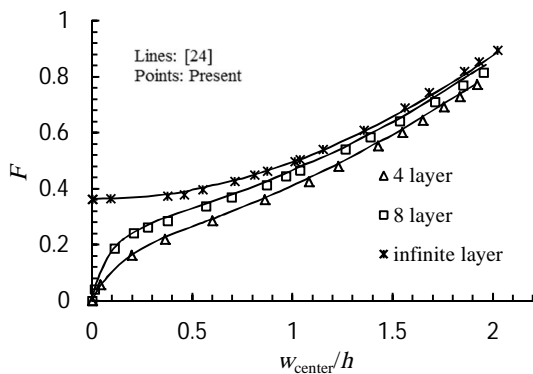


Fig. 4 Longitudinal force-central deflection for anti-symmetric cross-ply laminates

شکل 4 منحنی نیرو - خیز وسط صفحات متعامد پادمتقارن

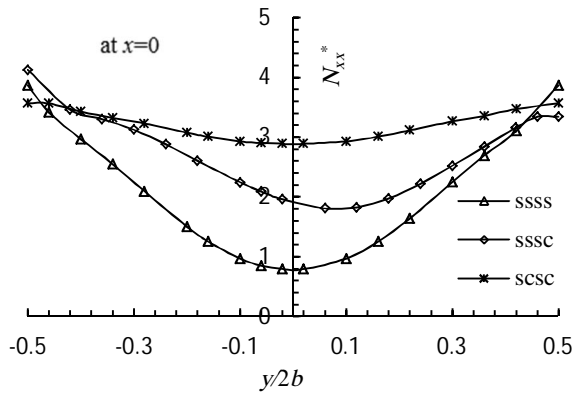


Fig. 7 Non-dimensional longitudinal resultant force distribution across the plate at  $\epsilon = 3 \times 10^{-4}$

شکل 7 منحنی نیروی محوری بی بعد برای  $\epsilon = 3 \times 10^{-4}$  و در وسط صفحه

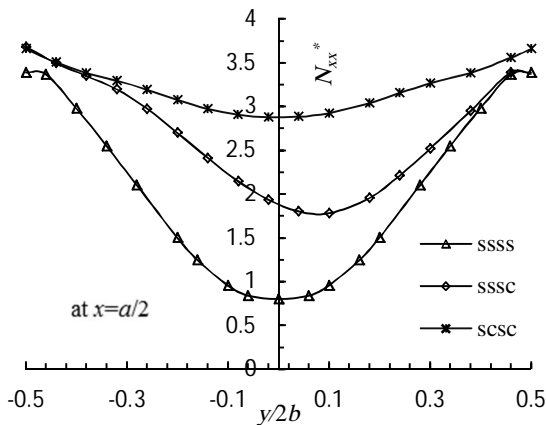


Fig. 8 Non-dimensional longitudinal resultant force distribution across the plate at  $\epsilon = 0.0003$

شکل 8 منحنی نیروی محوری بی بعد برای  $\epsilon = 0.0003$  و در مقطع یک چهارم صفحه

نتایج صفحات کامپوزیتی زاویه‌ای پادمتقارن برای شرایط مرزی خارج صفحه‌ای ساده و داخل صفحه‌ای مقید در تمامی لبه‌ها نیز ارائه شده‌اند. لایه‌چینی صفحات به صورت  $30/-30/30/-30$  در نظر گرفته شده‌اند. به دلیل پادمتقارن بودن لایه‌چینی‌ها ترم‌های  $B_{16}, B_{26}$  از ماتریس کوپلینگ سفتی خمشی - محوری غیرصفر می‌باشند. همان‌طور که از شکل 9 مشخص است با وجود غیرصفر بودن ترم‌های  $B_{16}, B_{26}$ ، به دلیل شرایط مرزی خاص حاکم بر مسئله در رفتار پس از کمانش این صفحات نقطه کمانش مشاهده می‌شود. با افزایش تعداد لایه‌ها نیروی کمانش لازم جهت بلند کردن صفحه افزایش می‌یابد. نتایج با تعداد 11 ترم و  $11 \times 11$  نقطه به دست آمده است و تطابق خوبی با مرجع [24] دارد.

در شکل 10 نیز منحنی پس از کمانش صفحات کامپوزیتی و زاویه‌ای پادمتقارن برای جابجایی خارج صفحه ارائه شده است. همان‌گونه که از این شکل مشخص است برای یک خیز یکسان با افزایش تعداد لایه‌ها نیروی بیشتری جهت بلند شدن به صفحه لازم است.

### 5- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی رفتار پس از کمانش صفحات متعامد و زاویه‌ای

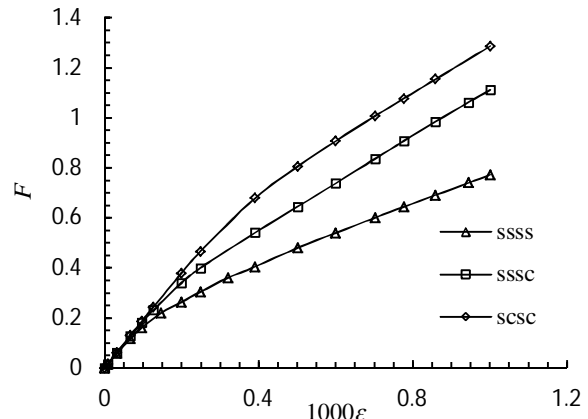


Fig. 5 Longitudinal force - end shortening behavior for different boundary conditions

شکل 5 منحنی کرنش - نیرو برای انواع شرایط مرزی خارج صفحه‌ای

در شکل 6 منحنی رفتار پس از کمانش خیز وسط صفحه بر حسب نیروی بی بعد محوری ارائه شده است. منحنی‌ها به دلیل عدم وجود کمانش از همان مبدأ دارای جابجایی خارج از صفحه می‌باشند. با افزایش سفتی صفحه کامپوزیتی در اثر افزایش شرایط مرزی گیردار خیز وسط صفحه کمتری به دست آمده است. نتایج با تعداد 11 ترم و  $11 \times 11$  نقطه به دست آمده است.

نتایج توزیع نیروی بی بعد محوری را برای هر سه نمونه فوق در جهت  $y$  می‌توان در شکل 7 مشاهده نمود. این نتایج در کوتاه شدگی انتهای مرزی خارج صفحه‌ای چهار طرف ساده و یا برای شرایطی که دو لبه تحت کوتاه شدگی انتهای ساده و دو لبه بدون گیردار باشند منحنی توزیع نیرو دارای تقارن می‌باشد، در حالی که برای شرایط مرزی خارج صفحه‌ای نامتقارن توزیع نیرو نیز به صورت غیرمتقارن به دست آمده است. نیروی بی بعد محوری توسط رابطه  $N_{xx}^* = N_{xx}(2b)^2 / \pi^2 D_{22}$  به دست می‌آید.

در ادامه به ارائه توزیع نیروی بی بعد محوری در یک چهارم صفحه و در جهت  $y$  پرداخته شده است. همان‌طور که از شکل 8 مشخص است با سفت تر شدن شرایط مرزی خارج صفحه‌ای در لبه‌های بدون بارگذاری نیروی محوری بیشتری جهت بلند شدن صفحه لازم است.

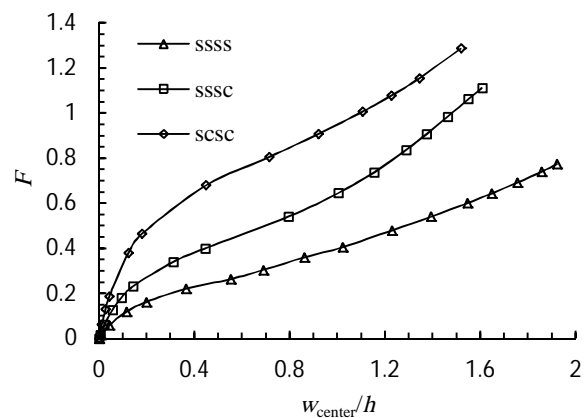


Fig. 6 Longitudinal force - central deflection for different boundary conditions

شکل 6 منحنی نیرو - خیز وسط برای انواع شرایط مرزی خارج صفحه‌ای

- 2004.
- [2] C. Y. Chia, *Nonlinear analysis of plates*, pp.151-185, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [3] E. Carrera, M. Villani, Large deflection and stability FEM analysis of shear deformable compressed anisotropic flat panels, *Composite structures*, Vol. 29, pp. 433-444, 1999.
- [4] E. Carrera, M. Villani, Effect of boundary conditions on post-buckling of compressed, symmetrically laminated thick plates, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 33, pp. 1543-1546, 1995.
- [5] P. Sundaresan, G. Singh, V. Rao, Buckling and post-buckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates, *Computers & Structures*, Vol. 61, pp. 79-86, 1996.
- [6] K. D. Kim, Buckling behavior of composite panels using the finite element method, *Composite Structures*, Vol. 36, pp. 33-43, 1996.
- [7] M. Ganapathi, M. Touratier, A study on thermal post-buckling behavior of laminated composite plates using a shear flexible finite element, *Finite element Analysis & Design*, Vol. 28, pp. 115-135, 1997.
- [8] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, M. Nasirinia, Nonlinear post-buckling analysis of isotropic plates using finite strip method, *Journal of Aerospace Science and Technology*, Vol. 8, No. 1, pp. 11-19, 2011.
- [9] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, E. Zia-Dehkordi, An exact finite strip for the calculation of initial post-buckling stiffness of shear-deformable composite laminated plates, *Composite Structures*, Vol. 108, No. 1, pp. 504-513, 2014.
- [10] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, An exact finite strip for the calculation of relative post-buckling stiffness of I-section struts, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 50, pp. 1354-1364, 2008.
- [11] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, M. Nasirian, High accuracy post-buckling analysis of box section struts, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 92, No. 8, pp 668-680, 2012.
- [12] S. A. M Ghannadpour, H. R. Ovesy, High accuracy post-buckling analysis of channel section struts, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 47, No. 9, pp 967-984, 2012.
- [13] K. M. Liew, J. Yang, S. Kitipornchai, Post-buckling of piezoelectric FGM plates subjected to thermo-electro-mechanical loading, *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 40, pp. 3869-3892, 2003.
- [14] K. M. Liew, J. Yang, S. Kitipornchai, Thermal post-buckling of laminated plates comprising FGM with temperature-dependent properties, *Transactions ASME. Journal of Applied Mechanics*, Vol. 71, pp. 839-850, 2004.
- [15] H. S. Shen, K. M. Liew, Post-buckling of axial loading functionally graded cylindrical panels with piezoelectric actuators in thermal environments, *Journal of Engineering Mechanics. ASCE*, Vol. 130, pp. 982-995, 2004.
- [16] F. Taheri, S. Moradi, A robust methodology for the simulation of post-buckling response of composite plates, *Computational Mechanics*, Vol 26, pp. 295-301, 2000.
- [17] K. M. Liew, Y. Q. Huang, Bending and buckling of thick symmetric rectangular laminates using the moving least-squares differential quadrature method, *International Journal of Mechanics Sciences*, Vol 45, pp. 95-114, 2003.
- [18] K. M. Liew, Y. Q. Huang, J. N. Reddy, Moving least-squares differential quadrature method and its application to the analysis of shear deformable plates, *International Journal. For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, pp. 2331-2351, 2003.
- [19] K. M. Liew, Y. Q. Huang, J. N. Reddy, Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least-squares based on differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 192, pp. 2203-2222, 2003.
- [20] K. M. Liew, Y. Q. Huang, J. N. Reddy, Analysis of general shaped thin plates by the moving least-squares differential quadrature method, *Finite Element in Analysis & Design*, Vol. 40, pp. 1453-1474, 2004.
- [21] E. J. Kansa, Multiquadrics a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics,

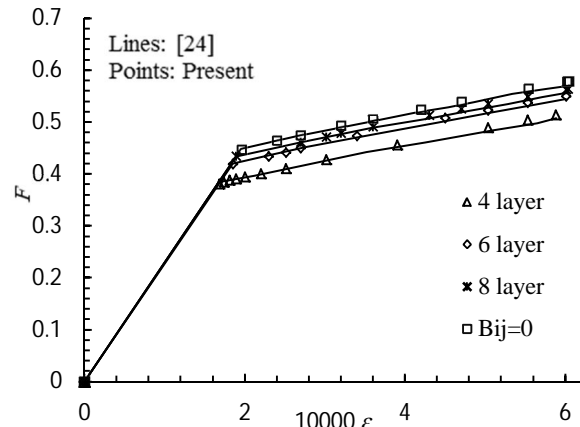


Fig. 9 Longitudinal force-end shortening behavior for anti-symmetric angle-ply plates

شکل 9 منحنی نیرو بر حسب کرنش صفحات زاویه‌ای پادمتقارن

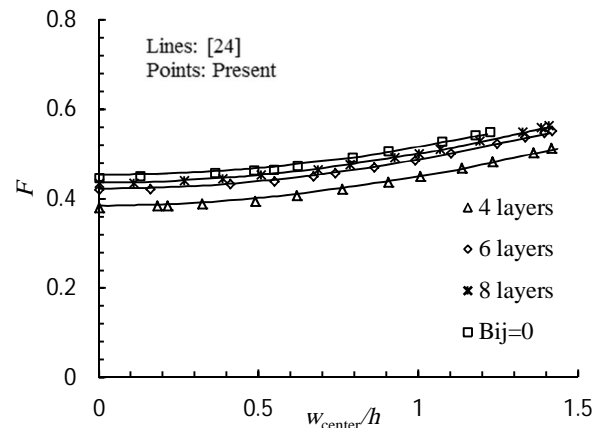


Fig. 10 Longitudinal force-central deflection for anti-symmetric angle-ply laminates

شکل 10 منحنی نیرو-خیز وسط صفحات زاویه‌ای و پادمتقارن کامپوزیتی

پادمتقارن پرداخته شد. روش به کار گرفته شده در تحقیق حاضر روش بدون المان با استفاده از توابع پایه‌ای لژاندر بوده است. دامنه مسئله با نقاط لژاندر-گائوس-لوباتو گسسته‌سازی شد و نتایج به دست آمده با تعداد 11 ترم و 11×11 نقطه استخراج شدند. مزیت این روش، حل معادلات دیفرانسیلی خطی و غیرخطی بدون نیاز به تعریف المان می‌باشد. در این مقاله به دلیل استفاده از لایه‌چینی پادمتقارن، کوپلینگ خارج‌صفحه‌ای و درون‌صفحه‌ای ایجاد می‌شود، لذا در لایه‌چینی‌های متعامد 4 و 8 لایه، منحنی پاسخ غیرخطی آن‌ها بدون داشتن نقطه کمانش بدست آمد ولی با افزایش تعداد لایه‌ها و رسیدن به تعداد بی‌نهایت لایه از اثرات ترم‌های  $B_{11}$ ,  $B_{22}$  کاسته شد و بنابراین صفحه دچار کمانش گردید. اما در لایه‌چینی‌های زاویه‌ای، به دلیل شرایط مرزی خاص حاکم بر مسئله، با وجود اثر کوپلینگ خارج‌صفحه‌ای و درون‌صفحه‌ای هر سه ورق کامپوزیتی با تعداد لایه 4، 8 و بی‌نهایت دچار کمانش شدند و تا قبل از بار کمانش هیچ تغییر شکل خارج‌صفحه‌ای در این ورق‌ها مشاهده نشد.

## 6-مراجع

- [1] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*, CRC. PRESS, Second edition, pp. 109-161, Boca Raton. London. New York. Washington. D.C.,

- Meshless Method for Laminated and Functionally Graded Plates and Shells, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 8, pp. 2031-2041, 2011.
- [24] D. J. Dawe, S. S. E. Lam, Nonlinear finite strip analysis of rectangular laminates under end-shortening, using classical plate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 1087-1110, 1992.
- Surface approximation and partial derivatives estimates, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 19, Issue. 8/9, pp. 127-145, 1990.
- [22] K. M. Liew, T. Y. Ng, X. Zhao, J. N. Reddy, Harmonic reproducing kernel particle method for free vibration analysis of rotating cylindrical shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 4141-4157, 2002.
- [23] K. M. Liew, Xin Zhao, J. M. Antonio, Ferrira, A Review of