



## انتقال حرارت جابجایی طبیعی سیال فوق بحرانی در کانال عمودی دما ثابت

شهاب نوری فرد<sup>1</sup>، علیرضا تیمورتاش<sup>2\*</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد

2- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد

\*مشهد، صندوق پستی 91775-1111، teymourtash@ferdowsi.um.ac.ir

## اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 19 اسفند 1392

پذیرش: 06 خرداد 1393

ارائه در سایت: 28 مهر 1393

کلید واژگان:

جابجایی طبیعی

سیال فوق بحرانی

کانال عمودی

ضریب انبساط حرارتی

معادله حالت ردلیش کوانگ

## چکیده

اهمیت پژوهش پیرامون خصوصیات سیالات فوق بحرانی با در نظر گرفتن افزایش کاربرد آن‌ها در صنایع مختلف غذایی، شیمیایی، پلیمر، نفت و گاز بیش از پیش آشکار می‌گردد. یکی از مهم‌ترین خصوصیات این گونه سیالات، ضریب انبساط حرارتی ( $\beta$ ) می‌باشد. در اکثر فرایندهایی که این مولفه در آن‌ها کاربرد دارد، از فرض گاز ایده‌آل استفاده شده است. ضعف این مدل آن است که در محدوده نقطه بحرانی، قادر به پیش‌بینی صحیح ضریب انبساط حرارتی نمی‌باشد. به همین دلیل در پژوهش حاضر به منظور تعیین ضریب انبساط حرارتی، از معادله حالت ردلیش کوانگ استفاده گردیده و رابطه‌ای جدید که تابع دما، فشار و ضریب تراکم‌پذیری می‌باشد، استخراج شده است. مقایسه رفتار منحنی‌های حاصل از این رابطه با مقادیر تجربی مطابقت خوبی را نشان می‌دهد. علاوه بر این انتقال حرارت جابجایی طبیعی سیال فوق بحرانی در کانال عمودی با دیواره‌های دما ثابت به صورت عددی مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حاکم به روش حجم محدود و بر پایه الگوریتم سیمپل حل گردیده و پس از اعتبارسنجی با مطالعات پیشین، به مقایسه مشخصه‌های جریان و انتقال حرارت به ازای ضریب انبساط حرارتی مبتنی بر فرض گاز ایده‌آل و ضریب انبساط حرارتی حاصل از این تحقیق برای سیال فوق بحرانی پرداخته شده است. در انتها روند تغییرات ضریب انتقال حرارت با فاصله گرفتن سیال از نقطه بحرانی مورد مطالعه قرار گرفته است.

## Natural Convection Heat Transfer of a Supercritical Fluid in a Vertical channel with isothermal condition

Shahab NooriFard<sup>1</sup>, AliReza Teymourtash<sup>2\*</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

\*P.O.B. 91775-1111 Mashhad, Iran, teymourtash@ferdowsi.um.ac.ir

## ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 10 March 2014  
Accepted 27 May 2014  
Available Online 20 October 2014

## Keywords:

Natural Convection  
Supercritical Fluid  
Vertical channel  
Thermal expansion coefficient  
Redlich-Kwong equation of state

## ABSTRACT

The significance of research on the specifications of the supercritical fluids becomes more evident with respect to the increase of their application in different food, chemical, polymer, oil, and gas industries. One of the major specifications, is the coefficient of thermal expansion ( $\beta$ ) where the ideal gas model was used in most of the processes in which this component is applied; the weakness of this model is that it is unable to make an accurate prediction of this parameter within the range of critical point. For this reason, in this study, to determine the coefficient of thermal expansion, Redlich-Kwong equation of state is used and a new relation as a function of temperature, pressure, and compressibility is obtained. Comparing behavior of the curves obtained from this relation with experimental data, exhibits a favorable consistency. Moreover, natural convection heat transfer of the supercritical fluid in a vertical channel at constant temperature wall conditions was considered numerically. The governing equations were solved using the finite-volume method (FVM) and based on the SIMPLE Algorithm. After validation with earlier studies. Then, the flow and heat transfer characteristics based on the obtained coefficient of thermal expansion were compared with the ideal gas assumptions. Finally, the trend of change in heat transfer coefficient away from the critical point was studied.

## 1- مقدمه

حلال‌های مایع هستند که به جهت خواص منحصر به فرد کارکردهای گوناگونی در صنایع مختلف از جمله در صنایع نفت و پتروشیمی، صنایع پلیمر و نانو و صنایع غذایی می‌توان اشاره نمود [1]. کارهای تحلیلی زیادی به منظور بررسی انتقال حرارت در سیالات فوق بحرانی انجام شده است که اکثر این کارها در شرایط دمای ثابت دیواره بود

سیال فوق بحرانی ترکیبی است که در دما و فشار بالاتر از نقطه بحرانی خود قرار دارد. در نقطه بحرانی خصوصیات فاز مایع و بخار منحصر به فرد می‌شوند و قابل تشخیص از هم نیستند. سیالات فوق بحرانی از نظر خواص انتقالی، مانند گازها (نفوذ پذیری بالا و ویسکوزیته کم) و از نظر قدرت حلالیت، شبیه

می‌باشد و منتج به نیروی شناوری می‌شود، توسط تقریب بوزینسک اعمال می‌گردد. معادلات حاکم که شامل معادلات بقای جرم، مومنتوم و انرژی می‌باشد به صورت روابط (1)، (2)، (3) و (4) قابل عرضه است [11].

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho g \beta (T - T_{in}) \quad (3)$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

در روابط فوق  $u$  و  $v$  به ترتیب سرعت در راستای  $x$  و  $y$  و  $T_{in}$  دمای محیط می‌باشد. همچنین خواص برای سیال فوق بحرانی در نظر گرفته شده است که در ادامه به تفصیل بیان می‌گردد. برای جریان در کانال، عدد رایلی ( $Ra$ ) از رابطه (5) و عدد ناسلت متوسط ( $\overline{Nu}$ ) نیز از رابطه (6) محاسبه شده‌اند [12].

$$Ra = \frac{g \beta (T_H - T_{in}) D^3}{\nu \alpha} \quad (5)$$

$$\overline{Nu} = \left( \frac{q}{A} \right) \frac{D}{k} \quad (6)$$

همچنین عدد ناسلت محلی ( $Nu$ ) در طول کانال طبق رابطه (7) تعریف شده است [12].

$$Nu = \frac{D}{T_H - T_{in}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{wall} \quad (7)$$

### 3- شرایط مرزی

#### 3-1- شرط مرزی ورودی کانال:

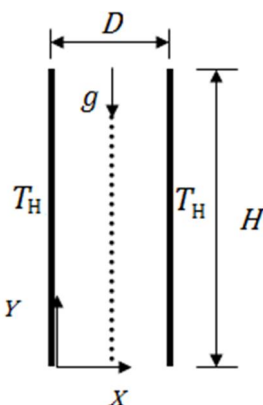
شرط مرزی ورودی کانال به صورت رابطه (8) می‌باشد:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_{in} \\ T(x, 0) = T_{in}, \quad 0 < x < D \end{aligned} \quad (8)$$

سرعت سیال در راستای  $x$  صفر و با سرعت  $v_{in}$  در راستای  $y$  وارد کانال می‌شود، که این سرعت ورودی در هر تکرار بر حسب جریان جرمی خروجی از تکرار قبل محاسبه می‌گردد. همچنین دمای ورودی سیال برابر با دمای محیط  $T_{in}$  است.

#### 3-2- شرط مرزی خروجی کانال:

شرایط مرزی در خروجی کانال به صورت رابطه (9) می‌باشد.



شکل 1 هندسه مساله

است [2]. نیشیکواوایتو [3] یک مدل برای بررسی پدیده جابجایی طبیعی سیالات فوق بحرانی بر روی یک دیواره عمودی دما ثابت براساس معادلات لایه مرزی و با احتساب خصوصیات فیزیکی متغیر سیال ارائه کرده‌اند، در مدل ارائه شده، اثر دما بر ضریب انبساط حرارتی نادیده گرفته شده است.

واریر و همکاران [4 و 5] انتقال حرارت جابجایی طبیعی بر روی سیم‌های افقی با قطرهای  $25/4 \mu\text{m}$  تا  $100 \mu\text{m}$  را در سیال دی‌اکسیدکربن در حوالی نقطه بحرانی به صورت آزمایشگاهی و عددی مورد مطالعه قرار دادند و یک رابطه تجربی برای ضریب انتقال حرارت برای سیال دی‌اکسیدکربن در دو حالت فوق و مادون بحرانی ارائه نمودند.

چن و ژانگ [6] با ساخت یک کلکتور خورشیدی در کشور چین از سیال دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی به عنوان سیال واسط برای گرمایش آب مصرفی بهره بردند. در نمونه آزمایشگاهی ساخته شده، دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی در دمای  $353 \text{ K}$  به عنوان یک منبع حرارتی پایدار استفاده گردید و با استفاده از انتقال حرارت جابجایی طبیعی، دمای آب را تا  $318 \text{ K}$  افزایش پیدا کرد.

یانگ و همکاران [7] انتقال حرارت جابجایی مختلط را در لوله‌های شیب‌دار به صورت عددی بررسی نمودند. آن‌ها به مطالعه تاثیر زاویه لوله‌ها در سرمایش دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی پرداخته و زاویه  $30$  درجه را به عنوان کارآمدترین زاویه انتقال حرارت جابجایی مختلط معرفی نمودند.

انتقال حرارت جابجایی طبیعی در یک محفظه مربعی حاوی آب در شرایط فوق بحرانی که از دیواره‌های جانبی تحت سرمایش و گرمایش واقع شده، توسط آرتموو و پولیاکو [8] به صورت عددی مورد بررسی قرار گرفته است.

تیمورتاش و ورکیانی [9] دریافته‌اند که ضریب انبساط حرارتی در سیالات فوق بحرانی ثابت نبوده و برای محاسبه ضریب انبساط حرارتی از مدل مبتنی بر معادله حالت اشمیت و ونسل استفاده کرده‌اند. آن‌ها همچنین اثر دمای متغیر یک دیواره را بر نرخ انتقال حرارت جابجایی طبیعی از دیوار در سیال فوق بحرانی بررسی کرده و مشاهده کردند که نرخ انتقال حرارت از سطح با افزایش شیب نمودار دمای افزایش یافته، افزایش می‌یابد.

در این تحقیق برای تعیین ضریب انبساط حرارتی ( $\beta$ ) معادله حالت ردلیش و همکاران [10] مورد استفاده قرار گرفته و بدین ترتیب رابطه‌ای جدید برای ضریب انبساط حرارتی سیال فوق بحرانی ایجاد شده است که تابع دما، فشار و ضریب تراکم پذیری می‌باشد. با توجه به اهمیت سیالات فوق بحرانی، انتقال حرارت جابجایی طبیعی در کانال عمودی با شرایط دما ثابت در نزدیکی نقطه بحرانی بصورت عددی مورد تحقیق قرار گرفت. در این پژوهش معادلات ناویر استوکس و انتقال گرما به روش حجم محدود بر پایه روش سیمپل حل گردیده و پس از اعتبارسنجی کد عددی تدوین شده، مشخصه‌های جریان و انتقال حرارت در سیال فوق بحرانی بدست آمده و در انتها به بررسی روند تغییرات این مؤلفه‌ها با فاصله گرفتن از نقطه بحرانی پرداخته شده است.

### 2- معادلات حاکم

هندسه مساله که یک کانال عمودی متشکل از دو صفحه موازی گرم با دما ثابت ( $T_H$ ) می‌باشد، همراه با دستگاه مختصات بکار رفته در شکل 1 نمایش داده شده است. به دلیل ایجاد جریان کاملاً توسعه یافته در خروجی کانال، ارتفاع کانال نسبت به عرض آن بزرگتر در نظر گرفته شده است ( $H/D \geq 15$ ).

جریانی پایا و آرام برای یک سیال نیوتنی تراکم ناپذیر با خواص ثابت در داخل کانال مفروض است. تنها تغییرات چگالی که به واسطه تغییرات دما

## 3-4- ضریب هدایت گرمایی

استیل و تودوس برای ضریب هدایت گرمایی رابطه (15) را ارائه نمودند که در تحقیق حاضر به کار گرفته شده است [14].

$$k = \begin{cases} k^0 + \frac{1.22 * 10^{-2} [\exp(0.535\rho_r) - 1]}{\Gamma Z_c^5}, & \rho_r < 0.5 \\ k^0 + \frac{1.14 * 10^{-2} [\exp(0.67\rho_r) - 1.069]}{\Gamma Z_c^5}, & 0.5 < \rho_r < 2 \\ k^0 + \frac{2.6 * 10^{-3} [\exp(1.155\rho_r) - 2.016]}{\Gamma Z_c^5}, & \rho_r > 2.0 \end{cases} \quad (15)$$

$\rho_r$  چگالی کاهش یافته و  $\Gamma$  پارامتری است که به صورت رابطه (16) و (17) محاسبه می شوند:

$$\rho_r = \frac{3 PT_c}{8 Z T_r P_c} \quad (16)$$

$$\Gamma = 210 \left[ \frac{T_c M^3}{P_c} \right]^{1/6} \quad (17)$$

در روابط (16) و (17)  $k^0$  ضریب هدایت گرمایی با فرض گاز ایده آل برحسب (W/m.K)،  $T_c$  برحسب (K)،  $P_c$  برحسب (bar) و  $M$  برحسب (gr/mol) می باشد.

## 4-4- ظرفیت گرمایی

در این تحقیق مقدار ظرفیت گرمایی از رابطه ای که توسط لی و کسلر [15] که بر اساس ظرفیت گرمایی گاز ایده آل  $C_p^0$  و باقیمانده ظرفیت گرمایی  $\Delta C_p$  پیشنهاد شده، محاسبه می گردد (رابطه (18)):

$$C_p = C_p^0 + \Delta C_p \quad (18)$$

## 4-5- ضریب انبساط حرارتی

ضریب انبساط حرارتی فشار ثابت (یا به اختصار ضریب انبساط حرارتی) به صورت (19) تعریف می گردد:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (19)$$

در حالیکه  $\rho$  از رابطه (20) بدست می آید:

$$\rho = \frac{\rho^*}{Z} \quad (20)$$

بطوریکه  $\rho^*$  چگالی سیال به عنوان گاز کامل در فشار  $P$  و دمای  $T$ ،  $\rho$  چگالی واقعی سیال در  $(P, T)$  و  $Z$  ضریب تراکم پذیری می باشد. مشتق رابطه (20) نسبت به دما، در فشار ثابت برابر رابطه (21) است:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = \left( \frac{\partial (\rho^* Z^{-1})}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial \rho^*}{\partial T} \right)_P - \frac{\rho^*}{Z^2} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_P \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (21) در معادله (19) خواهیم داشت:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = -\frac{Z}{\rho^*} \left[ \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial \rho^*}{\partial T} \right)_P - \frac{\rho^*}{Z^2} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_P \right] = -\frac{1}{\rho^*} \left( \frac{\partial \rho^*}{\partial T} \right)_P + \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_P = \beta_i + \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T} + \frac{1}{Z} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right)_P \quad (22)$$

در معادله (22)  $\beta_i$  ضریب انبساط حرارتی گاز ایده آل است و برابر با  $\frac{1}{T}$  می باشد. معادله (22) کاملاً عمومی است و می تواند برای هر ماده ای به ویژه سیالات چگال بکار گرفته شود. این معادله زمانی قابل استفاده است که رابطه ضریب تراکم پذیری به صورت معادله (23) باشد.

$$Z = Z(P, T) \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, H) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, H) = 0, \quad 0 < x < D \quad (9)$$

برای هر سه پارامتر در خروجی کانال شرط گرادیان صفر برقرار است.

## 3-3- شرط مرزی دیواره کانال:

شرایط مرزی در دیواره کانال به صورت رابطه (10) و (11) می باشد.

$$u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = 0$$

$$T(0, y) = T_H, \quad 0 < y < H \quad (10)$$

$$u(D, y) = 0, \quad v(D, y) = 0$$

$$T(D, y) = T_H, \quad 0 < y < H \quad (11)$$

سرعت سیال روی دیواره ها صفر می باشد، در راستای  $y$  تنش برشی ایجاد شده نیز لحاظ گردیده است. همچنین شرط مرزی دما ثابت روی دیواره های کانال اعمال می شود.

## 4- خصوصیات سیال فوق بحرانی

## 4-1- دما و فشار کاهش یافته

در جدول 1 خصوصیات بحرانی چند ترکیب که بیشتر در صنعت به عنوان حلال فوق بحرانی مورد استفاده قرار می گیرند، ذکر شده است. در بیشتر اوقات دی اکسید کربن فوق بحرانی به سیالات فوق بحرانی دیگر ترجیح داده می شود، چون دمای بحرانی آن پایین بوده و گازدی اکسید کربن غیر سمی و غیر قابل اشتعال است.

در این تحقیق از دی اکسید کربن بعنوان سیال فوق بحرانی استفاده گردیده است. دما و فشار کاهش یافته معیاری برای بیان خصوصیات سیال نسبت به نقطه بحرانی می باشد، که به صورت نسبت دما و فشار به دما و فشار بحرانی آن سیال و توسط روابط (12) و (13) تعریف شده است.

$$T_r = \frac{T}{T_c} \quad (12)$$

$$P_r = \frac{P}{P_c} \quad (13)$$

## 4-2- ویسکوزیته

پولینگ [13] تحقیقات گسترده ای در زمینه ویسکوزیته سیال فوق بحرانی انجام داده و مقادیر ویسکوزیته را بر اساس دمای کاهش یافته  $T_r$  و پارامتر  $\xi$  گزارش نموده، که در تحقیق حاضر استفاده شده است. مقدار پارامتر  $\xi$  از رابطه (14) حاصل می گردد:

$$\xi = 0.176 \left( \frac{T_c}{M^3 P_c^4} \right)^{1/6} \quad (14)$$

در رابطه (14) که دمای بحرانی برحسب (K)، فشار برحسب (bar) و  $M$  جرم مولکولی برحسب (gr/mol) می باشد.

جدول 1 خصوصیات بحرانی چند سیال

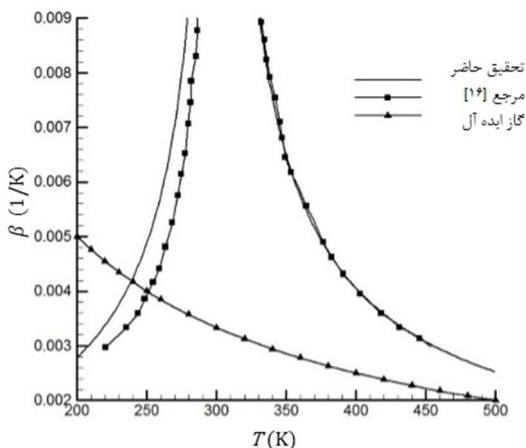
سیال	دمای بحرانی (K)	فشار بحرانی (MPa)
آمونیاک	405/50	11/35
بوتان	425/16	3/80
دی اکسید کربن	304/10	7/38
پروپان	369/80	4/25
آب	647/30	22/09

دوم با قرار دادن در رابطه (36) مقدار ضریب انبساط حرارتی ( $\beta$ ) محاسبه می‌گردد.

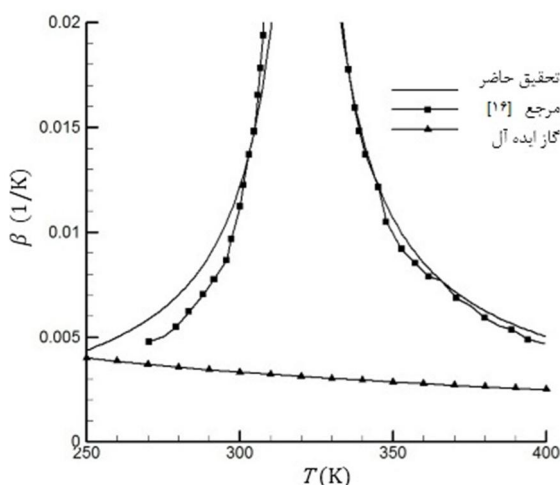
## 5- نتایج

### 5-1- نتایج رابطه جدید ضریب انبساط حرارتی

در کد عددی اصلی تدوین شده برای حل معادلات حاکم، یک زیرشاخه برای محاسبه ضریب انبساط حرارتی سیال فوق بحرانی براساس رابطه جدید بدست آمده بر پایه معادله حالت ردلیش کوانگ نیز جای گرفته است. مقادیر بدست آمده برای ضریب انبساط حرارتی توسط تحقیق حاضر با مقادیر تجربی و نیز آنچه که با فرض گاز ایده آل حاصل شده، برای سه حالت مختلف از فشار و دما که دربرگیرنده شرایط فوق بحرانی برای دی اکسیدکربن می‌باشد، بر روی نمودار ترسیم و مقایسه شده است و نتایج در شکل‌های 2 تا 4 ارائه شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر ( $\beta$ ) براساس معادله حالت ردلیش کوانگ که در این تحقیق حاصل شده است، درمقایسه با مقادیر تجربی مرجع [16] تطابق خوبی را نشان می‌دهد. همچنین نتایج گویای این مطلب است که سیال دردمای کمتر از دمای بحرانی رفتاری شبیه مایعات دارد و با افزایش دما ضریب انبساط حرارتی افزایش می‌یابد و با گذر از دمای بحرانی همانند گازها با افزایش دما ضریب انبساط حرارتی روندی نزولی پیدا کرده و در دماهای خیلی زیاد با مقادیر حاصل از فرض گاز ایده آل تطابق می‌یابد.



شکل 2 ضریب انبساط حرارتی دی‌اکسیدکربن برای حالت فرض گاز ایده آل، تحقیق حاضر و مقادیر تجربی [16] در فشار  $P=7\text{MPa}$



شکل 3 ضریب انبساط حرارتی دی‌اکسیدکربن برای حالت فرض گاز ایده آل، تحقیق حاضر و مقادیر تجربی [16] در فشار  $P=10\text{MPa}$

نظر به آنکه رفتار سیال فوق بحرانی نسبت به گاز ایده آل انحراف دارد، در ادامه معادله حالت ردلیش کوانگ را به خدمت گرفته و به کمک آن اقدام به تعیین معادله‌ای برای بیان ضریب تراکم پذیری ( $Z$ )، شده است. سپس از مقادیر  $Z$  برای تعیین ضریب انبساط حرارتی در سیال فوق بحرانی استفاده می‌گردد. فرم کلی معادله ردلیش کوانگ برای گازها در شرایط مختلف فشار و دما به صورت معادله (24) و (25) است:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{\sqrt{T}(V(V+b))} \quad (24)$$

و یا:

$$PV(V^2 - b^2)\sqrt{T} - RTV(V+b)\sqrt{T} + a(V-b) = 0 \quad (25)$$

برای بیان رابطه (25) بر حسب ضریب تراکم پذیری ( $Z$ ) روابط (26)، (27) و (28) بکار گرفته شده است:

$$Z = \frac{PV}{RT} \quad (26)$$

$$A = \frac{aP}{\sqrt{T}(RT)^2} \quad (27)$$

$$B = \frac{bP}{RT} \quad (28)$$

در معادلات (27) و (28)  $a$  و  $b$  ثابت‌های معادله حالت هستند که در شرایط عادی از خواص بحرانی بدست می‌آیند و در مرجع [10] به تفصیل به آن اشاره شده است. با جایگذاری معادلات (26)، (27) و (28) در معادله (25) و مرتب کردن جملات فرم تراکم پذیر معادله ردلیش کوانگ بصورت (29) بدست می‌آید:

$$Z^3 - Z^2 + (A - B^2 - B)Z - AB = 0 \quad (29)$$

ثابت‌های  $A$  و  $B$  طبق روابط (30) و (31) عبارتند از:

$$A = 0.42748 \left(\frac{P}{P_c}\right) \left(\frac{T_c}{T}\right)^{2.5} \quad (30)$$

$$B = 0.08662 \left(\frac{P}{P_c}\right) \left(\frac{T_c}{T}\right) \quad (31)$$

معادلات (22) و (29) مبنای به دست آوردن یک رابطه برای ضریب انبساط حرارتی ( $\beta$ ) به صورت تابعی از فشار و دما است. مشتق ضمنی معادله (29) نسبت به دما در فشار ثابت به صورت رابطه (32) حاصل می‌شود:

$$(3Z^2 - 2Z - B - B^2 + A) \left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_P - (Z + 2BZ + A) \left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_P + (Z - B) \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_P = 0 \quad (32)$$

با توجه به معادلات (30) و (31) روابط (33) و (34) را خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_P = \frac{-2.5A}{T} \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_P = \frac{-B}{T} \quad (34)$$

با جایگذاری معادلات (33) و (34) در عبارت (32) رابطه (35) حاصل می‌گردد:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T} \left( \frac{2.5AZ - 2ZB^2 - BZ - 3.5AB}{3Z^2 - 2Z - B - B^2 + A} \right) \quad (35)$$

سپس با توجه به رابطه (22) رابطه ضریب انبساط حرارتی ( $\beta$ ) به صورت تابعی از ضریب تراکم پذیری، فشار و دما به صورت رابطه (36) بدست آمده است:

$$\beta = \frac{1}{T} \left[ 1 - \left( \frac{3.5AB + 2ZB^2 + BZ - 2.5AZ}{3Z^3 - 2Z^2 + Z(A - B) - B^2Z} \right) \right] \quad (36)$$

برای محاسبه مقدار ضریب انبساط حرارتی ( $\beta$ ) در گام اول باید ضریب تراکم پذیری ( $Z$ ) که یک ریشه مناسب معادله (29) است، پیدا نمود و در گام

( $\theta$ ) در حالت شرط مرزی دیواره‌های دما ثابت برحسب دمای محیط ( $T_{in}$ ) و دمای دیوار کانال ( $T_H$ ) به صورت رابطه (37) بیان می‌شود [12].

$$\theta = \frac{T - T_{in}}{T_H - T_{in}} \quad (37)$$

با توجه به اینکه نتایج دو شبکه‌بندی  $120 \times 600$  و  $180 \times 900$  بر هم منطبق می‌باشد، بدلیل ملاحظات زمانی و سخت افزاری شبکه‌بندی  $600 \times 120$  برای بحث و بررسی انتخاب گردیده است.

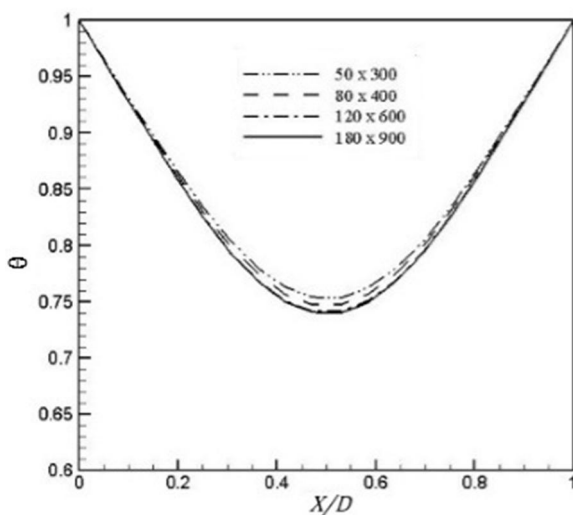
### 3-5- اعتبارسنجی نتایج

برای اطمینان از صحت حل عددی ارائه شده، نتایج برای جابجایی طبیعی در داخل یک کانال عمودی دما ثابت برای سیالی در شرایط غیر بحرانی استخراج و با نتایج گزارش شده توسط بارکوهن و روسنوف [17] و النباس [18] مقایسه گردیده است. جدول 3 نمونه‌ای از این مقایسه را نشان می‌دهد، که در آن مقدار ناسلت متوسط به‌ازای اعداد ریلی متفاوت آورده شده است. با توجه به جدول 3 مشاهده می‌شود که نتایج بدست آمده با نتایج دیگر پژوهش‌ها به خوبی مطابقت دارد.

### 4-5- نتایج جریان در کانال عمودی

با ایجاد جریان در کانال عمودی، لایه‌های مرزی سرعتی و گرمایی به صورت جداگانه بر روی دیواره‌های کانال شکل می‌گیرند، سپس با بزرگتر شدن این لایه‌ها، با یکدیگر ترکیب می‌شوند و یک جریان شناور بین دو دیواره به سمت بالا ایجاد می‌گردد. برای درک هرچه بهتر این فرآیند در شکل 6 توزیع دما و سرعت عمودی آورده شده است.

نمودار دمای بی بعد در راستای عرض کانال در چهار ارتفاع مختلف که گویای ناحیه ورودی کانال، ناحیه در حال توسعه، ناحیه توسعه یافته و خروجی کانال می‌باشد، در شکل 7 آورده شده است.



شکل 5 نمودار دمای بی بعد برحسب عرض کانال در  $Y=H/2$  به ازای شبکه‌بندی مختلف

### جدول 3 مقایسه ناسلت متوسط بازای اعداد ریلی مختلف با دیگر پژوهش‌ها

Ra	بارکوهن	النباس	تحقیق حاضر
$5 \times 10^2$	1/25	1/24	1/18
$10^3$	1/70	1/66	1/58
$5 \times 10^3$	2/77	2/76	2/81
$10^4$	3/31	3/32	3/39

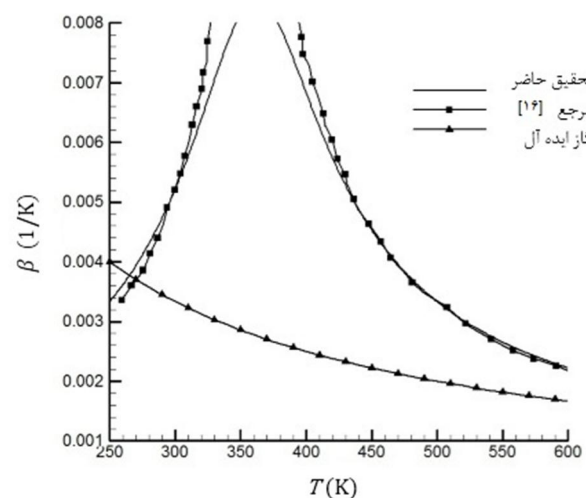
نمودار ضریب انبساط حرارتی بر حسب دما در نزدیکی نقطه بحرانی دچار واگرایی می‌گردد. مقادیر ضریب انبساط حرارتی مبتنی بر فرض گاز ایده آل بصورت عکس دمای میانگین سیال محاسبه می‌گردد، همانطور که از نمودارها دریافت می‌گردد، این فرض برای تمام بازه دمایی مناسب نمی‌باشد و تنها در دماهای خیلی زیاد با مقادیر تجربی تطابق دارد.

### 2-5- استقلال نتایج از شبکه

همانطور که در مقدمه اشاره شد، برای حل عددی دستگاه معادلات حاکم، یک روش حجم محدود بکارگرفته شده و از الگوریتم سیمپل برای ارتباط فشار - سرعت استفاده شده است. همچنین گسسته‌سازی عبارت‌های جابجایی و نفوذ به ترتیب با استفاده از طرح توانی و اختلاف مرکزی انجام شده است.

برای بررسی جریان جابجایی طبیعی در داخل کانال مورد نظر، حوزه حل که متشکل از یک مستطیل می‌باشد، بطور غیریکنواخت شبکه‌بندی شده است که با توجه به اهمیت نواحی نزدیک دیواره‌ها و همچنین ورودی کانال شبکه بندی ریزتر می‌گردد. برای اطمینان از استقلال نتایج نسبت به شبکه بندی برای یک هندسه معین، مقادیر ناسلت متوسط به ازای چهار شبکه بندی مختلف و همچنین زمان اجرای برنامه با سیستمی با مشخصات هفت هسته‌ای 1/73 گیگا هرتز، با پارامتر همگرایی  $10^{-6}$  در جدول 2 آورده شده است. تغییرات ناچیز در مقادیر ناسلت متوسط بیانگر این حقیقت است که نتایج مستقل از شبکه بندی می‌باشد.

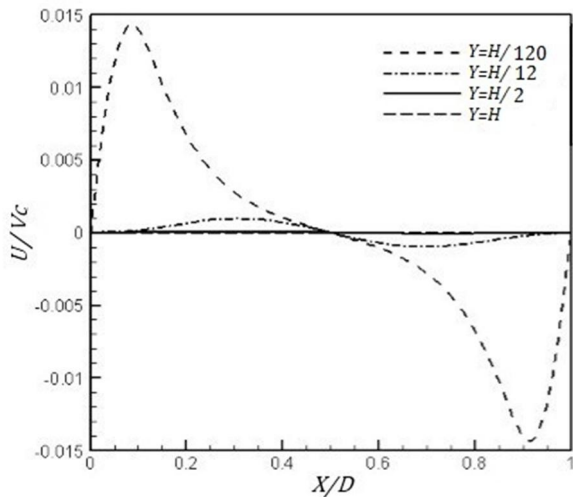
همچنین نمودار دمای بی بعد در ارتفاع میانی کانال در راستای عرض کانال به ازای همان شبکه بندی‌ها در شکل 5 گزارش شده است. دمای بی بعد



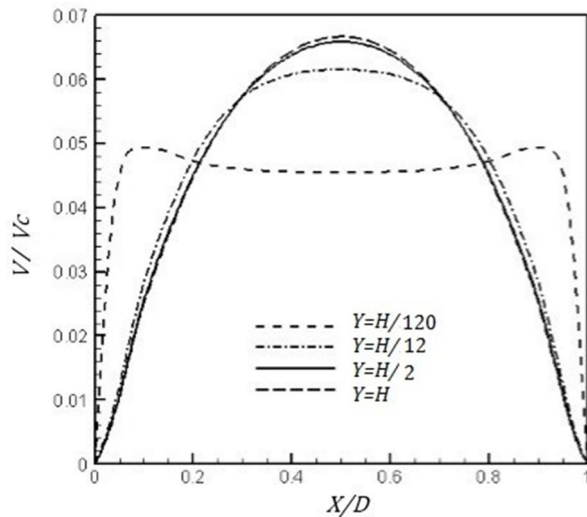
شکل 4 ضریب انبساط حرارتی دی‌اکسیدکربن برای حالت فرض گاز ایده آل، تحقیق حاضر و مقادیر تجربی [16] در فشار  $P=20$  MPa

### جدول 2 مقادیر زمان اجرا و ناسلت متوسط به ازای چهار شبکه بندی مختلف

شبکه بندی	زمان اجرا (ثانیه)	ناسلت متوسط ( $Nu$ )
$50 \times 300$	8500	3/07
$80 \times 400$	10600	3/12
$120 \times 600$	12800	3/32
$180 \times 900$	14400	3/39



شکل 8 نمودار سرعت افقی بی بعد بر حسب عرض کانال در چهار ارتفاع مختلف برای دی اکسید کربن فوق بحرانی در  $Tr=1/1$  و  $Pr=1/1$

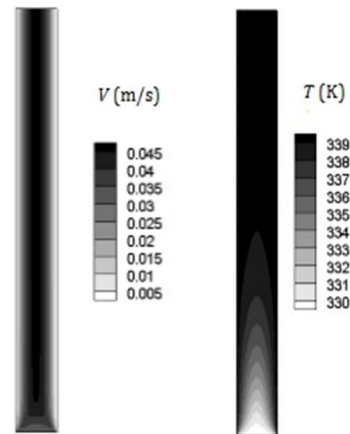


شکل 9 نمودار سرعت عمودی بی بعد بر حسب عرض کانال در چهار ارتفاع مختلف برای دی اکسید کربن فوق بحرانی در  $Tr=1/1$  و  $Pr=1/1$

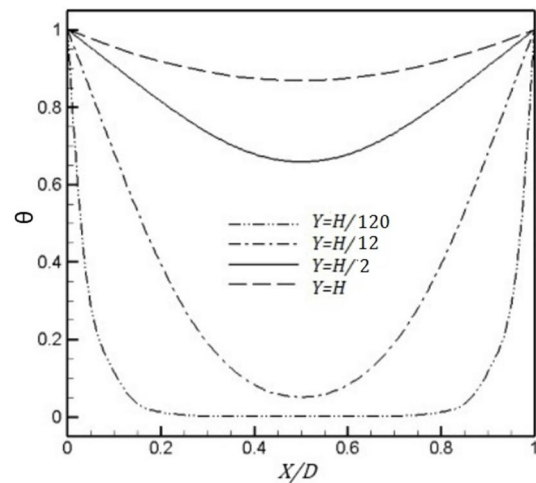
### 5-5- بررسی نتایج جریان با احتساب فرض گاز ایده آل برای ضریب انبساط حرارتی در مقایسه با رابطه ارائه شده

برای بررسی کامل تر تأثیر ضریب انبساط حرارتی در جریان سیال فوق بحرانی پروفیل های سرعت عمودی و دما در ارتفاع های مختلف کانال در شکل های 10 و 11 آورده شده است. با فرض یکسان بودن تمامی شرایط، تنها ضریب انبساط حرارتی با استفاده از دو روش فرض گاز ایده آل و دیگری مبتنی بر رابطه جدید ارائه شده، حاصل از معادله حالت ردلیش کوانگ می باشد. شکل 10 بیانگر این نتیجه است که در حالت استفاده از معادله حالت ردلیش کوانگ سرعت عمودی بیشینه، بیشتر از حالت فرض گاز ایده آل می باشد در صورتیکه شکل کلی پروفیل سرعت یکسان می باشد. همچنین شکل 11 گویای این مطلب است که در حالت فرض گاز ایده آل لایه مرزی حرارتی شکل گرفته روی دیواره ها ضعیف تر از حالت رابطه جدید است که این روند در ارتفاع های مختلف تکرار شده است.

با توجه به ضخامت بیشتر لایه مرزی حرارتی، پیش بینی می گردد که ناسلت محلی نیز در این حالت کمتر باشد که به این منظور در شکل 12



شکل 6 به ترتیب از راست توزیع دما و سرعت عمودی دی اکسید کربن فوق بحرانی به ازای  $Tr=1/1$  و  $Pr=1/1$  در کانال دما ثابت



شکل 7 نمودار دمای بی بعد بر حسب عرض کانال در چهار ارتفاع مختلف برای دی اکسید کربن فوق بحرانی به ازای  $Tr=1/1$  و  $Pr=1/1$

در شکل 8 نیز به بررسی سرعت افقی در کانال پرداخته شده است که به این منظور پارامتر سرعت بی بعد افقی بر حسب عرض کانال در چهار ارتفاع رسم گردیده است. سرعت بی بعد افقی به صورت نسبت سرعت افقی به سرعت مشخصه بیان شده است، که سرعت مشخصه طبق رابطه (38) تعریف می گردد [12].

$$V_c = \frac{g\beta(T_H - T_{in})D^2}{\nu} \quad (38)$$

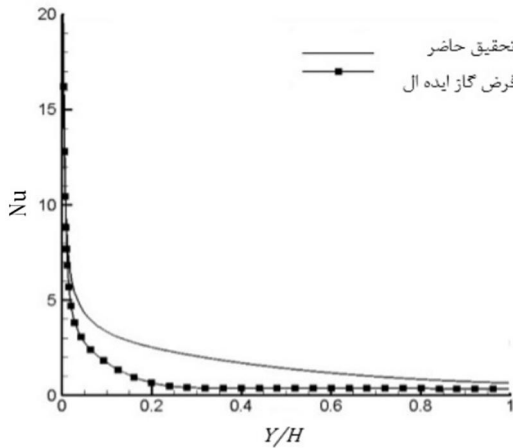
در بازه ورودی کانال به دلیل شکل گیری لایه مرزی سرعتی و انحراف جریان از دیواره ها، این متغیر بیشترین مقدار خود را داراست که با توجه به تشکیل دو لایه مرزی متقارن، این تقارن در نمودار نیز ظاهر گردیده است. با افزایش ارتفاع و شکل گیری جریان عمودی از مقدار این پارامتر کاسته شده تا به کلی حذف گردد و جریان کاملاً توسعه یافته عمودی تا انتهای کانال باقی خواهد ماند.

در شکل 9 تشکیل لایه مرزی سرعت و تغییر پروفیل سرعت عمودی بی بعد از حالت یکنواخت به حالت سهموی توسعه یافته نمایش داده شده است. انطباق دو پروفیل سرعت در ارتفاع میانی و پایانی کانال بیانگر این مطلب است که جریان خروجی کانال کاملاً توسعه یافته می باشد.

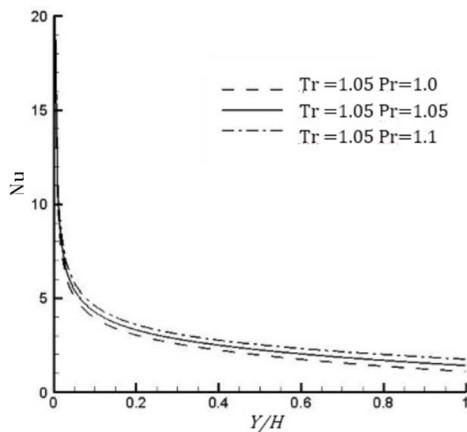


در شکل 14 بیان شده است، که نتیجه‌ای مشابه را گزارش می‌دهد که تغییرات فشار تأثیر چندانی بر مقادیر ناسلت محلی ندارد و فقط با افزایش فشار، بصورت جزئی افزایش می‌یابد.

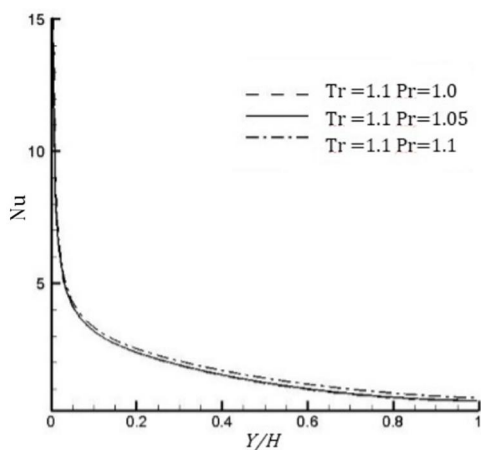
به منظور بررسی تأثیر دما بر فرآیند انتقال حرارت، مقادیر ناسلت محلی برای دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی در فشار کاهش یافته  $Pr=1/05$  و دماهای کاهش یافته  $Tr=1/05, 1/1$  در شکل 15 و مشابه آن بازای فشار کاهش یافته



شکل 12 نمودار ناسلت محلی در طول کانال برای دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی در  $Pr=1/1$  و  $Tr=1/1$  به‌ازای ضریب انبساط حرارتی با فرض گاز ایده‌آل و مدل ارائه شده مبتنی بر معادله ردلیش کوانگ



شکل 13 نمودار تغییرات ناسلت محلی در طول کانال برای دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی در  $Tr=1/05$  ثابت و  $Pr=1/0, 1/05, 1/1$

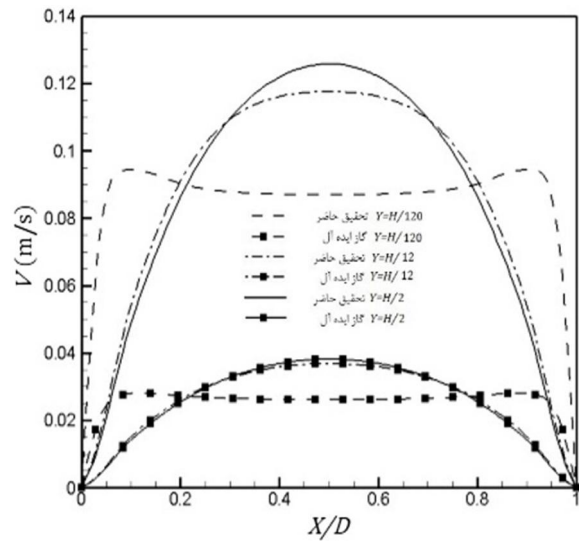


شکل 14 نمودار تغییرات ناسلت محلی در طول کانال برای دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی در  $Tr=1/1$  ثابت و  $Pr=1/0, 1/05, 1/1$

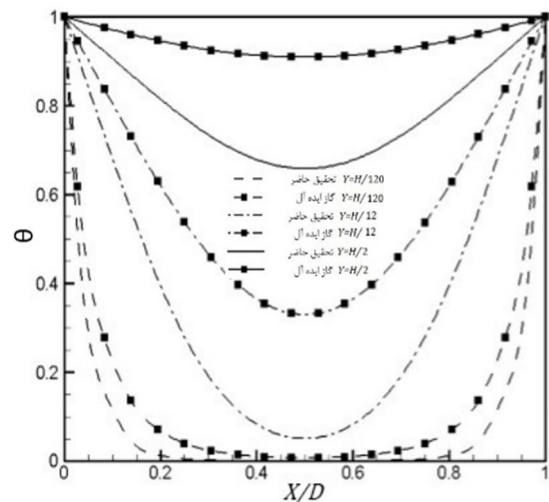
نمودار ناسلت محلی در طول کانال رسم گردیده است که صحت پیش بینی را تأیید می‌کند.

#### 5-6- بررسی نقش دو پارامتر فشار و دما بر ضریب انتقال حرارت

برای بررسی تأثیر دو پارامتر فشار و دما بر انتقال حرارت جابجایی طبیعی سیال فوق بحرانی، روند تغییرات عدد ناسلت محلی در امتداد طول کانال برحسب تغییرات دما و فشار را گزارش می‌شود. در شکل 13 مقادیر ناسلت محلی برای دی‌اکسید کربن فوق بحرانی در دما کاهش یافته  $Tr=1/05$  و فشارهای کاهش یافته  $Pr=1/0, 1/05, 1/1$  ترسیم شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود با افزایش فشار در دمای ثابت مقادیر ناسلت محلی به مقدار ناچیزی افزایش می‌یابد. برای اطمینان بیشتر همین روند را برای دما کاهش یافته  $Tr=1/1$  و فشارهای کاهش یافته  $Pr=1/0, 1/05, 1/1$  تکرار و نتایج آن



شکل 10 نمودار سرعت عمودی برحسب عرض کانال برای دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی در  $Pr=1/1$  و  $Tr=1/1$  به‌ازای ضریب انبساط حرارتی با فرض گاز ایده‌آل و مدل ارائه شده مبتنی بر معادله ردلیش کوانگ



شکل 11 نمودار دمای بی بعد برحسب عرض کانال برای دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی در  $Pr=1/1$  و  $Tr=1/1$  به‌ازای ضریب انبساط حرارتی با فرض گاز ایده‌آل و مدل ارائه شده مبتنی بر معادله ردلیش کوانگ

است، که در نزدیکی نقطه بحرانی این فرض صحیح نمی‌باشد. رابطه جدید ارائه شده در این پژوهش تطابق خوبی با نتایج تجربی گزارش شده در محدوده نقطه بحرانی دارد. در ادامه به بررسی انتقال حرارت دی اکسید کربن فوق بحرانی در کانال عمودی دما ثابت براساس ضریب انبساط حرارتی متغیر پرداخته شده است و نتایج با فرض گاز ایده‌آل برای ضریب انبساط حرارتی مقایسه گردید و نتایج بیانگر این مطلب بود که فرض گاز ایده‌آل برای ضریب انبساط حرارتی، ضریب انتقال حرارت را کم‌ترپیش بینی می‌کند. همچنین به بررسی نقش دو پارامتر فشار و دما بر انتقال حرارت سیال فوق بحرانی پرداخته شد. در شرایط فوق بحرانی در حالتی که دما ثابت باشد، تغییرات فشار تأثیر اندکی بر ضریب انتقال حرارت داشته و برعکس در حالتی که فشار ثابت باشد تغییر دما تأثیر محسوسی بر ضریب انتقال حرارت دارد. با افزایش دما از دمای نقطه بحرانی ضریب انتقال حرارت کاهش می‌یابد.

#### 7- فهرست علائم

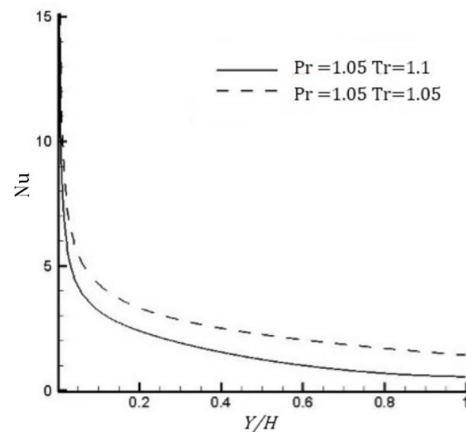
ثابت‌های معادله حالت ( $\text{Nm}^4/\text{mol}^2$ )	a, b
پارامترهای بی بعد معادلات حالت	A, B
ظرفیت گرمایی ( $\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K}$ )	$C_p$
ظرفیت گرمایی گاز ایده‌آل ( $\text{J}/\text{kg} \cdot \text{K}$ )	$C_p^0$
عرض کانال (m)	D
شتاب گرانشی ( $\text{m}/\text{s}^2$ )	g
ارتفاع کانال (m)	H
ضریب هدایت گرمایی ( $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ )	k
ضریب هدایت گرمایی گاز ایده‌آل ( $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ )	$k^0$
جرم ملکولی سیال (gr/mol)	M
عدد ناسلت محلی	Nu
عدد ناسلت متوسط	$\bar{Nu}$
فشار و فشار بحرانی (MPa)	$P_c, P$
فشار کاهش یافته	$P_r$
ثابت گازها ( $\text{J}/\text{mol} \cdot \text{K}$ )	R
عدد ریلی	Ra
دما و دما بحرانی (K)	$T_c, T$
دما کاهش یافته	$T_r$
دمای دیواره (K)	$T_H$
دمای محیط (ورودی) (K)	$T_{in}$
مولفه های سرعت جهت های $y, x$ ( $\text{m}/\text{s}$ )	$v, u$
حجم مولی ( $\text{m}^3/\text{mol}$ )	V
سرعت مشخصه (m/s)	$V_c$
مختصات کارتزین (m)	$y, x$
ضریب تراکم پذیری	Z
<b>علائم یونانی</b>	
ضریب پخش گرمایی ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	$\alpha$
ضریب انبساط حرارتی ( $1/\text{K}$ )	$\beta$
معکوس هدایت گرمایی ( $\text{m} \cdot \text{K}/\text{W}$ )	$\Gamma$
دمای بی بعد	$\theta$
ویسکوزیته سینماتیکی ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	$\nu$
معکوس ویسکوزیته ( $\text{m}^2/\text{N} \cdot \text{s}$ )	$\xi$
چگالی ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	$\rho$

Pr=1/1 و دماهای کاهش یافته  $Tr=1/05, 1/1$  در شکل 16 ترسیم شده است. نتایج گویای این امر است که با افزایش دما در یک فشار ثابت مقادیر ناسلت محلی به طور محسوس کاهش می‌یابد.

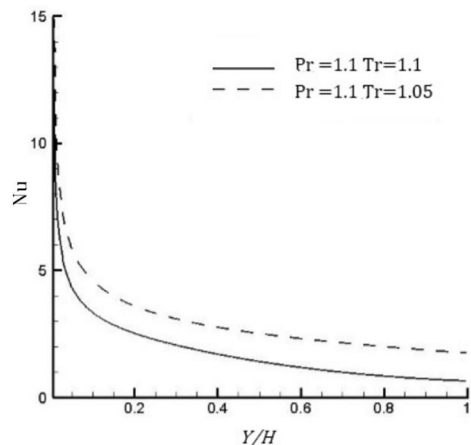
به موجب بررسی روند تغییرات ضریب انتقال حرارت سیال فوق بحرانی با فاصله گرفتن از نقطه بحرانی، مقادیر ناسلت متوسط ( $\bar{Nu}$ ) به‌زای شرایط دما و فشار مختلف طبق جدول 4 گزارش شده است. نتایج گویای تأثیر بیشتر دما نسبت به فشار بر مقدار ضریب انتقال حرارت می‌باشد و با فاصله گرفتن از دمای نقطه بحرانی، انتقال حرارت کاهش می‌یابد.

#### 6- بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک رابطه جدید بر اساس معادله حالت ردلیش کوانگ جهت محاسبه ضریب انبساط حرارتی سیالات فوق بحرانی ارائه گردید. در اکثر مطالعاتی که به بررسی فرآیند انتقال حرارت جابجایی طبیعی انجام شده، ضریب انبساط حرارتی ثابت و مبتنی بر معادله حالت گاز ایده‌آل فرض شده



شکل 15 نمودار تغییرات ناسلت محلی در طول کانال برای دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی در  $Pr=1/05$  ثابت و  $Tr=1/05, 1/1$



شکل 16 نمودار تغییرات ناسلت محلی در طول کانال برای دی‌اکسیدکربن فوق بحرانی در  $Pr=1/1$  ثابت و  $Tr=1/05, 1/1$

جدول 4 مقادیر ناسلت متوسط با‌زای شرایط دما و فشار فوق بحرانی

	Pr=1/00	Pr=1/05	Pr=1/10
Tr=1/05	2/47	2/77	3/07
Tr=1/10	1/75	1/78	1/93



## 8- مراجع

- [8] V.I.Artemov, A.F. Polyakov, Free convection and heat transfer in anear supercritical fluid in a horizontal square cavity with lateral heating, *High Temperature*, Vol. 51, pp. 652-664, 2013.
- [9] A. R. Teymourtash, M. Ebrahimi Warkiani, Natural convection over an anisothermal vertical flat plate in supercritical fluids, *Scientia Iranica*, Vol. 16, No. 5, pp. 470-478, 2009.
- [10] R. E. Sonntag, C. Borgnakke, G. J. Van Wylen, S. Van Wyk, *Fundamentals of thermodynamics*, New York: Wiley, 1998.
- [11] G. A. Sheikhzadeh, H. Ehteram, A. Aghtaei, Numerical study of natural convection in a nanofluid filled enclosure with central heat source and presenting correlation for Nusselt number, *Modares Mechanical engineering*, Vol. 13, No. 10, pp. 62-74, 2013. (In Persian)
- [12] J. Hernandez, B. Zamora, Effects of variable properties and non-uniform heating on natural convection flows in vertical channels, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 793-807, 2005.
- [13] B. E. Poling, *The properties of gases and liquids*, McGraw-Hill, 2001. [14] L. I. Stiel, G. Thodos, Natural convection in a thermally stratified fluid, *AIChE*, Vol. 10, pp. 26-37, 1964.
- [15] B. Lee, M. Kesler, A theoretical analysis of laminar natural convection heat transfer to non-Newtonian liquids, *J. of AIChE*, pp. 510, 1975.
- [16] A. Armstrong, B. Reuck, *International Thermodynamic Tables of the Fluid State Carbon Dioxide*, Pergamon Press, 1984.
- [17] A. Bar-Cohen, W. Rohsenow, Thermally optimum spacing of vertical, natural convection cooled, parallel plates. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 106, No. 1, pp. 116-123, 1984.
- [18] W. Elenbaas, Heat dissipation of parallel plates by free convection *Physica*, Vol. 9, No. 1, pp. 1-28, 1942.
- [1] Y. Arari, T. Sako, Y. Takebayashi, *Supercritical fluids: molecular interactions, physical properties, and new applications*. Springer, 2002.
- [2] J. Parker, T. Mullin, Paper 1: Natural convection in the supercritical region, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 182, No. 9, pp. 1-5, 1967.
- [3] K. Nishikawa, T. Ito, An analysis of free-convective heat transfer from an isothermal vertical plate to supercritical fluids, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 12, No. 11, pp. 1449-1463, 1969.
- [4] Y. Rousselet, G. R. Warrier, V. K. Dhir, Natural convection from horizontal cylinders at near-critical pressures—part I: experimental study, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 135, pp. 87-96, 2012.
- [5] G. R. Warrier, Y. Rousselet, V. K. Dhir, Natural convection from horizontal cylinders at near-critical pressures—part II: numerical simulations, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 135, pp. 97-106, 2012.
- [6] L. Chena, X. R. Zhang, Experimental analysis on a novel solar collectors system achieved by supercritical CO<sub>2</sub> natural convection, *Energy Conversion and Management*, Vol. 77, pp. 173-182, 2014.
- [7] Ch. Yang, J. Xu, X. Wang, W. Zhang, Mixed convective flow and heat transfer of supercritical CO<sub>2</sub> in circular tubes at various inclination angles, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 64, pp. 212-223, 2013.