مجله مهندسی مکانیک مدرس، تیر 1394، دوره 15، شماره 4، ص‌ص 167-176

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

حل تحلیلی فرآیند پخش عرضی در جریان‌های ترکیبی الکترواسموتیک و پوازی سیالات نیوتنی در میکرومیکسرهای مستطیلی تحت شمول لایه دوگانه الکتریکی

میلاد رشادی[1]، محمدحسن سعیدی[2*]

1- دانشجوی کارشناسی‌ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

2- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران

*تهران، صندوق‌پستی 11155-9567، saman@sharif.edu

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 09 آذر 1393

پذیرش: 15 دی 1393

ارائه در سایت: 06 اسفند 1393

کلید واژگان:

الکتروسینتیک

میکرومیکسر

شدت اختلاط

آنالیز مقیاسی

انتقال جرم

چکیده

در سنجش و تحلیل پزشکی در زمینه سیستم‌های میکرو جریانی، انتشار و پخش ذرات تحت جریان‌های آرام نقش اساسی در تحلیل سیالات بیولوژیکی ایفا کرده و به‌عنوان عامل اصلی در آماده‌سازی نمونه به‌شمار می‌رود. با توجه به رشد تکنیک‌های ساخت آزمایشگاه‌های روی تراشه، امکان تولید میکروکانال‌های مستطیلی با نسبت هندسه معین و با ابعاد میکرون و زیرمیکرونی فراهم گشته که در نتیجه آن سبب بزرگنمایی اثر پدیده‌های انتقال به‌وسیله الکتروسینتیک بر توزیع و پخش محلول در این تجهیزات خواهد شد. از آن‌جایی که در مطالعات اخیر این‌گونه اثرات مورد چشم‌پوشی قرار گرفته؛ بنابراین در این تحقیق براساس روش تحلیلی، اثر پارامتر دبای- هاکل در ناحیه لایه دوگانه الکتریکی بر پدیده پخش عرضی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. نوع جریان مسأله به‌صورت تلفیق نیروی الکترواسموتیک همراه با گرادیان فشار درنظر گرفته شده و نتایج بررسی در سه سناریوی جریان با گرادیان فشار مساعد، صفر و مخالف مورد مطالعه قرار می‌گیرند. نتایج تحقیق بیانگر افزایش عرض ناحیه پخشی در پروفیل‌های پروانه‌ای و دوکی شکل کانتورهای غلظت با افزایش طول دبای است. همچنین نتایج حاصل از آنالیز مقیاسی براساس معیار شدت اختلاط نیز نشان‌دهنده کاهش این کمیت در اثر افزایش عدد پکله براساس سرعت هلمهولتز- اسملوکوفسکی و پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل می‌باشد. توان متوسط محوری معیار اخیر نیز رفتاری کاهشی نسبت به افزایش ضخامت لایه دوگانه‌ی الکتریکی خواهد داشت.

Analytical study of cross stream diffusion for combined electroosmotic and Poiseuille flows in rectangular microchannels: inclusion of EDL effect

Milad Reshadi, Mohammad Hassan Saidi*

Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
*P.O.B. 11155-9567 Tehran, Iran,saman@sharif.edu

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 30 November 2014
Accepted 05 January 2014
Available Online 25 February 2015

Keywords:
Electrokinetics
Micromixer
Mixing Intensity
Scaling Analysis
Mass Transfer

ABSTRACT

Dissemination of an analyte under the laminar flows plays a major role in measuring and assessment of biological fluids such as sample preparation in the context of microfluidic systems. Due to the development of manufacturing technology in the Lab-on-a-chip devices, the production of rectangular microchannels with finite aspect ratios and micron and submicron sizes has been provided by which the effect of electrokinetic phenomena on concentration distribution will be magnified in these systems. Since the recent researches in this field have overlooked such effects, the present work will be conducted analytically to study the effect of electric double layer on cross stream diffusion of the analyte in the combined electroosmotic and pressure driven flows. Three flow scenarios, the favorable, adverse and zero pressure gradients are analyzed. The results demonstrate that the width of the diffusion region near the top and bottom walls of the microchannel becomes broader with the increase in the Debye length. Also, the results of the scaling analysis reveal the decrease in mixing intensity with increasing the Péclet number based onHelmholtz-Smoluchowski velocity and dimensionless Debye–Hückel parameter. As well, the average scaling exponent of this criterion is a descending function with respect to the thickness of the electric double layer.

1- مقدمه

پدیده اختلاط و پخش عرضی ذرات تحت جریان‌های آرام در سیستم‌های میکروجریانی، به‌عنوان عامل اصلی در آماده‌سازی نمونه و ایجاد برهم‌کنش‌های مولکولی [1] برای تحلیل‌های شیمیایی و سنجش‌های بیولوژیکی به‌شمار می‌رود. در این تجهیزات از روش‌های مختلفی برای پمپاژ جریان استفاده می‌شود که در سیستم‌های اولیه از مکانیزم‌های ایجاد گرادیان فشار هیدرودینامیکی برای تحریک جریان استفاده شده، که به دلیل نیاز به تکنیک‌های ساخت این‌گونه پمپ‌ها در مقیاس میکرو، از جمله روش‌های

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Please cite this article using:
M. Reshadi, M. H. Saidi, Analytical study of cross stream diffusion for combined electroosmotic and Poiseuille flows in rectangular microchannels: inclusion of EDL effect, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 167-176, 2015 (In Persian)

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]

پرهزینه برای ایجاد جریان محسوب می‌شود. در این میان، پمپ‌های الکترواسموتیک به دلیل ایجاد جریان‌های آرام، بدون پالس، دوسویه و بدون استفاده از قطعات متحرک به‌عنوان مکانیزم غالب تولید جریان در سیالات قطبی در آزمایشگاه‌های روی تراشه مورد استفاده قرار می‌گیرند [2].

الکترواسموزیس[1] به‌عنوان یکی از مکانیزم‌های اصلی در پدیده‌های انتقال به وسیله الکتروسینتیک محسوب شده که براساس بار القایی در فاز سیال در اثر تماس با سطح دی‌الکتریک عمل می‌کند [3]. از آن‌جایی که چنین اثرات سطحی با کوچک‌ترشدن هندسه تا مقیاس‌های میکرومتری روی مشخصه‌های جریان تشدید می‌یابند؛ بنابراین پدیده‌های الکتروسینتیک، امروزه به‌عنوان ابزاری کارآمد برای کنترل جریان در تجهیزات میکروجریانی استفاده می‌شوند [4]. این در حالی است که استفاده از این روش برای پمپاژ جریان تحت عوامل مختلفی مانند تلفیق دیگر مکانیزم‌های فشاری برای تحریک سیال، اختلاف هد فشاری میان منابع ابتدایی و انتهایی و تلفات اصطکاکی [5]، همراه با گرادیان فشار محوری مساعد یا مخالف می‌باشد.

در زمینه پدیده‌های انتقال الکتروسینتیک در مباحث توزیع پتانسیل و مومنتوم، مطالعات تحلیلی به روش‌های مختلف انجام شده است [6,7]. نتایج بیانگر توزیع سرعت وابسته پارامترهای الکتروسینتیک و گرادیان فشار در جریان‌های ترکیبی ناشی از نیروی الکترواسموتیک و پوازی بوده که سبب ایجاد پروفیل سرعت غیریکنواختی در مقطع عرضی میکروکانال خواهند شد و درنتیجه با تغییر در زمان ماند[2] جز محلول در سیال جاری برای نقاط مختلف در مقطع عرضی میکروکانال، سبب ایجاد پدیده انتشار عرضی غیرهمگن و وابسته به مکان می‌شوند. برای اندازه‌گیری نحوه اختلاط در سیستم‌های در ابعاد میکرو، بررسی‌های آزمایشگاهی و تحلیلی فراوانی صورت گرفته است. کامهولز و همکاران[3][8] برای نخستین بار به بررسی پروفیل غلظت پروانه‌ای شکل در مقطع عرضی میکروکانال پرداختند. در ادامه کار پیشین، کامهولز و یاگر[4][9,10] با استفاده از اندازه‌گیری‌های اپتیکی و تحلیل‌های تئوری، مقیاس طولی متفاوتی را برای ناحیه پخش مولکولی در صفحه میانی و مجاور دیواره‌ها به‌دست آوردند. چن و همکاران[5][11] با استفاده از میکروسکوپ‌های معمولی به اندازه‌گیری راندمان اختلاط براساس مقیاس قانون توانی با نسبت فاصله‌ی بدون‌بعد محوری به سرعت میانگین سیال پرداختند. سولیوان و همکاران[6][12] به‌وسیله روش تصویربرداری با استفاده از رزونانس مغناطیسی، پروفیل سرعت و غلظت محلول را به‌صورت تصویری نشان داده و به بررسی اثر پروانه‌ای در پروفیل غلظت پرداختند.

در تازه‌ترین تحقیقات صورت گرفته در زمینه فرآیند اختلاط در میکرومیکسرهای Y شکل با مقطع مستطیلی، چن و همکاران [11] به‌صورت نیمه تحلیلی به بررسی این فرآیند برای جریان داخل میکروکانال‌های مستطیلی تحت گرادیان فشار خالص پرداختند. سپس سانگ و همکاران[7][13] بررسی اخیر را با ارائه حل کاملاً تحلیلی بهبود داده و میزان خطای روش به‌کار گرفته‌شده برای حل معادله انتقال جرم در جریان تحت گرادیان فشار خالص را با سه مدل از تحقیقات دیگر مورد مقایسه قرار دادند. در ادامه آن‌ها با در نظر گرفتن سرعت هلمهولتز- اسملوکوفسکی[8] در سطح توانستند با ارائه تحلیل دقیق فرآیند اختلاط در میکرومیکسرهای Y شکل، اثر جریان الکترواسموتیک با ضخامت قابل صرف‌نظر لایه دوگانه‌ی الکتریکی را نیز با برهم‌نهی به جریان تحت گرادیان فشار در این سنسورها با روش آنالیز مقیاسی مورد مطالعه قرار دهند [14]؛ بنابراین از این سری تحقیقات می‌توان دریافت که تاکنون مطالعاتی در زمینه‌ی جریان ترکیبی الکترواسموتیک و گرادیان فشار با شمول اثر لایه دوگانه‌ی الکتریکی[9] بر سرعت محوری انجام نشده‌است. اثرات الکتروسینتیک ناشی از لایه دوگانه‌ی الکتریکی برای طول دبای تا مرتبه‌ی بزرگ‌نمایی 0/1 برابر مقطع عرضی میکروکانال بسیار چشم‌گیر است. این پدیده در حالت کم بودن غلظت یونی محلول قطبی یا کوچک بودن ابعاد عرضی هندسه جریان تا محدوده بیان شده نسبت به ضخامت لایه دوگانه الکتریکی، انحراف قابل ملاحظه‌ای نسبت به فرض سرعت لغزشی هلمهولتز- اسملوکوفسکی به دینامیک جریان خواهد داد. از طرفی با تکنیک ساخت میکروکانال‌ها با ابعاد عرضی کمتر از 10μm بسط مطالعات فوق در تحلیل توزیع عرضی و محوری غلظت بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

بنابر مطالب یادشده بحث حاضر سعی در ارائه روشی کاملاً تحلیلی در بررسی فرآیند انتقال جرم سیالات نیوتنی تحت جریان ترکیبی نیروی الکترواسموتیک و گرادیان فشار داشته که می‌توان از نتایج آن به‌عنوان ابزاری در صحت‌سنجی نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی استفاده کرد. در ادامه مدل‌سازی مسأله همراه با اعتبارسنجی روش تحلیلی با مطالعات انجام‌شده توسط سانگ و همکاران [14] صورت گرفته و نتایج حاصل از تحلیل به‌ازای مقادیر مختلفی از ضخامت لایه دوگانه الکتریکی و عدد پکله تحت سه سناریوی جریان با گرادیان فشارهای مختلف ارائه خواهد شد.

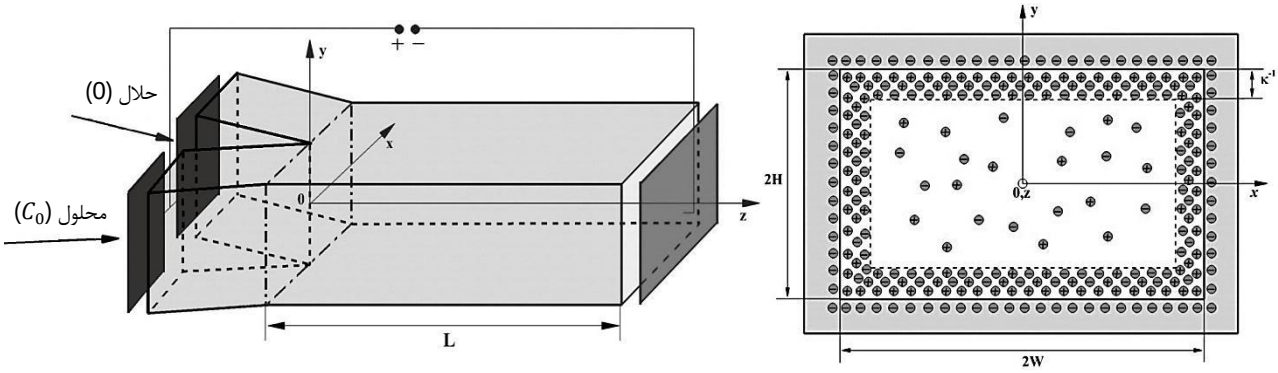
2- مدل‌سازی مسأله

شماتیک جریان سیال نیوتنی تحت نیروی الکترواسموتیک و گرادیان فشار در میکرومیکسر Y شکل با سطح مقطع مستطیلی در شکل1-الف نشان داده‌شده است. میکروکانال شامل دو ورودی و قسمت اصلی برای پخش عرضی غلظت است. در ورودی سمت راست محلول با غلظت C_0 وارد بخش اصلی میکروکانال شده و تحت اختلاط با حلال وارد شده از ورودی سمت چپ با غلظت صفر قرار می‌گیرد. همچنین کاتد به رنگ خاکستری کم‌رنگ و آند به رنگ خاکستری تیره با اعمال میدان الکتریکی خارجی به محیط سیال به‌عنوان الکترودهای مولد جریان الکترواسموتیک در دو انتهای میکروکانال مورد استفاده قرار می‌گیرند. همان‌طور که در شکل1-ب نیز مشخص است، به‌ازای مقدار منفی برای پتانسیل‌های زتای دیواره‌ها، یون‌های با بار مثبت در مجاورت سطوح دی‌الکتریک، جذب‌شده و بنابر مقدار جاذبه الکترواستاتیکی، لایه غیرمتحرک (لایه استرن) و متحرک (لایه دیفیوز) از این نوع یون‌ها تشکیل شده که با اعمال میدان الکتریکی و حرکت یون‌ها در لایه‌ی دوم نیروی درگ مولد جریان الکترواسموتیک را فراهم می‌آورند. در حالت گرادیان فشار مطلوب[10]، جریان سیال همواره از سمت چپ به راست میکروکانال بوده در صورتی که به‌ازای مقادیر گرادیان فشار مخالف[11] امکان برگشت جریان وجود خواهد داشت؛ بنابراین برای جلوگیری از بروز این پدیده، در پیوست محاسبات لازم برای محدوده نسبت گرادیان فشار به نیروی الکترواسموتیک در عدم بازگشت جریان انجام شده است. همچنین در مدل‌سازی مسأله از فرضیات زیر استفاده می‌شود:

1. جریان پایا، توسعه‌یافته، تراکم‌ناپذیر و آرام با $Re < 1$ است.

1- Electro-osmosis
2- Residence time
3- A.E. Kamholz et al.
4- A.E. Kamholz, P.Yager
5- J.M. Chen et al.
6- S.P. Sullivan et al.
7- H. Song et al.
8- Helmholtz–Smoluchowski velocity
9- Electric Double Layer
10- Favorable Pressure Gradient
11- Adverse Pressure Gradient

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]



الف ب

شکل 1 شماتیک میکرو میکسر مستطیلی Y شکل تحت نیروی الکترو اسموتیک و گرادیان فشار
الف- محور طولی شامل دو جریان حلال و محلول ب- مقطع عرضی میکروکانال مستطیلی با لایه دوگانه الکتریکی تشکیل‌شده

2. حد غلظت یونی محلول الکترولیت به اندازه‌ای بوده که بتوان از هم‌پوشانی لایه‌های دوگانه الکتریکی در مرکز صرف‌نظر کرد.
3. پتانسیل زتای دیواره‌های میکروکانال کمتر از 25mV بوده به‌طوری‌که تقریب دبای- هاکل در دمای کاری سیال (298-300K) معتبر باشد.
4. طول محوری میکروکانال بسیار بیشتر از ابعاد عرضی بوده $(L \gg H, W)$ و از طول توسعه‌یافتگی سرعت صرف‌نظر می‌شود.
5. دو سیال ورودی از نظر شیمیایی خنثی در نظر گرفته‌شده به‌گونه‌ای که تولید یا اضمحلال جزء محلول در زمان اختلاط صورت نگیرد.
6. خواص ترموفیزیکی، پارامترهای الکتروسینتیک، پارامترهای جریانی و انتقال جرم ثابت و مستقل از دما در نظر گرفته می‌شود.

2-1- معادله پتانسیل الکتریکی

با اعمال میدان الکتریکی خارجی $E_z = -\nabla\phi$ (با پارامتر ϕ به‌عنوان پتانسیل الکتریکی اعمالی در جهت جریان) نیروی کولمبی وارد شده بر یون‌های موجود در لایه دیفیوز $(F_z = \rho_e E_z)$ منجر به حرکت آن‌ها می‌شود. در این رابطه، ρ_e چگالی خالص بار الکتریکی بوده که برای یافتن آن می‌توان از توزیع بولتزمن با والانس متقارن $\mathbb{z}^- - \mathbb{z}^+$ به‌عنوان مدل ساده‌شده معادله نرنست- پلانک[1] به‌صورت رابطه (1) استفاده کرد:

$$\rho_e = -2n_0 e\mathbb{z} \sinh\left(\frac{e\mathbb{z}\psi}{k_B T}\right) \tag{1}$$

در رابطه بالا، n_0 غلظت توده‌ای یونی، e بار پایه‌ی الکترون، $\mathbb{z}$ والانس یونی، k_B ثابت بولتزمن، T دمای مطلق سیال و میانگین سیال و ψ پتانسیل الکتریکی لایه دوگانه است. در مدل‌سازی مسأله، از اثر گرادیان میدان الکتریکی اعمال شده $(\nabla\phi)$ در مقایسه با گرادیان پتانسیل لایه دوگانه الکتریکی در توزیع یون‌ها صرف‌نظر می‌شود؛ بنابراین توزیع پتانسیل را می‌توان از تلفیق معادله دیفرانسیل پواسون $(\nabla^2\psi = -\rho_e/\epsilon)$ و توزیع بولتزمن به‌صورت رابطه (2) بیان کرد:

$$\nabla^2\psi = \frac{2e\mathbb{z}n_0}{\epsilon}\sinh\left(\frac{e\mathbb{z}\psi}{k_B T}\right) \tag{2}$$

در معادله (2) ϵ ثابت دی الکتریک محلول بوده و ثابت فرض می‌شود. همچنین با استفاده از مدل الکتروسینتیک استاندارد شرایط مرزی و تقارن به‌صورت رابطه (3) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\psi|_{x=\pm W} = \psi_0 \ , \ \psi|_{y=\pm H} = \psi_0$$
$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \ , \ \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \tag{3}$$

که در این روابط، ψ_0 پتانسیل زتای دیواره‌های میکروکانال است. سپس برای عمومیت دادن به مسأله و با توجه به پارامترهای به‌کار رفته در هندسه، کمیات مشخصه برای بی‌بعدسازی معادله‌ی پواسون- بولتزمن به صورت رابطه (4) بیان می‌شوند:

$$\bar{x} = \frac{x}{H}, \ \bar{y} = \frac{y}{H}, \ \alpha = \frac{W}{H}, \ \bar{\psi} = \frac{e\mathbb{z}\psi}{k_B T}, \ K = \kappa H \tag{4}$$

در رابطه‌های بالا α نسبت عرض به ارتفاع و K پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل بوده که براساس پارامتر مشخصه $\kappa^2 = 2n_0 e^2\mathbb{z}^2/\epsilon k_B T$ بیان می‌شود. در این تعریف $\xi = 1/\kappa$ معرف طول دبای است؛ بنابراین فرم بی‌بعد معادله (2) همراه با شرایط مرزی مربوطه به صورت رابطه (5) بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{y}^2} = K^2\sinh\bar{\psi} \\ \left.\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} = \left.\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{y}}\right|_{\bar{y}=0} = 0 \ , \ \bar{\psi}|_{\bar{x}=\alpha} = \bar{\psi}|_{\bar{y}=1} = \bar{\psi}_0 \end{cases} \tag{5}$$

در رابطه بالا $\bar{\psi}_0 = e\mathbb{z}\psi_0/k_B T$ پتانسیل زتای بی‌بعد خواهد بود. با توجه به فرض 3، در حالتی که مقدار $\bar{\psi}_0 \leq 1$ باشد، می‌توان با استفاده از تقریب دبای- هاکل از تقریب $\sinh\bar{\psi} \approx \bar{\psi}$ استفاده کرد؛ بنابراین با استفاده از این نوع خطی‌سازی، امکان یافتن حل تحلیلی برای دستگاه فوق میسر می‌شود. از طرفی، با توجه به غیرهمگن بودن شرایط مرزی از جداسازی متغیرها به‌صورت رابطه (6) استفاده می‌شود:

$$\bar{\psi}(\bar{x},\bar{y}) = \bar{\psi}_1(\bar{x},\bar{y}) + \bar{\psi}_2(\bar{y}) \tag{6}$$

بنابراین با استفاده از فرم خطی‌شده عبارت هایپربولیکی و رابطه فوق، دستگاه معادلات (5) همراه با شرایط مرزی نسبت به متغیر اول $(\bar{\psi}_1)$ به‌صورت رابطه (7) بیان خواهند شد.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial\bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2\bar{\psi}_1}{\partial\bar{y}^2} = K^2\bar{\psi}_1 \\ \left.\dfrac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} = \left.\dfrac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial\bar{y}}\right|_{\bar{y}=0} = 0 \ , \bar{\psi}_1|_{\bar{x}=\alpha} = \bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_1|_{\bar{y}=1} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

معادله (5) نیز نسبت به متغیر دوم به صورت رابطه (8) بازنویسی می‌شود:

1- Nernst-Planck

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{\psi}_2}{\partial \bar{y}^2} = K^2 \bar{\psi}_2 \\ \left.\dfrac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} = 0 \,, \left.\bar{\psi}_2\right|_{\bar{y}=1} = \bar{\psi}_0 \end{cases} \tag{8}$$

تحلیل دستگاه فوق به سادگی با استفاده از انتگرال‌گیری مستقیم و به‌کار بردن شرایط مرزی معرفی‌شده امکان‌پذیر است؛ بنابراین پاسخ دستگاه اخیر به فرم رابطه (9) بیان می‌شود.

$$\bar{\psi}_2 = \bar{\psi}_0 \frac{\cosh(K\bar{y})}{\cosh(K)} \tag{9}$$

بنابر رابطه (9) مد پاسخ نسبت به متغیر $\bar{y}$ به‌صورت تابع هایپربولیکی هماهنگ با متغیر $\bar{\psi}_2$ در نظر گرفته می‌شود. پایه دیگر جواب دستگاه (7) را می‌توان از دستگاه کمکی اشتورم- لیوویل با مقادیر شرایط مرزی یکسان به فرم کسینوسی استخراج کرد؛ بنابراین می‌توان پاسخ دستگاه (7) را با توجه به پایه‌های برداری به‌دست آمده به صورت رابطه (10) معرفی کرد:

$$\bar{\psi}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cosh(\beta_n \bar{x}) \cos(\gamma_n \bar{y}) \tag{10}$$

که در این رابطه a_n ضرایب سری فوریه در نظر گرفته شده برای توابع ویژه هایپربولیکی و کسینوسی با مقادیر ویژه به‌ترتیب برابر β_n و γ_n است. با جای‌گذاری رابطه بالا در معادله دیفرانسیل دستگاه (7) رابطه میان مقادیر ویژه به‌صورت $\beta_n^2 = K^2 + \gamma_n^2$ حاصل خواهد شد. با استفاده از شرط مرزی در $\bar{y} = 1$ نیز مقدار ویژه تابع کسینوسی به‌صورت $\gamma_n = (2n+1)\pi/2$ به‌دست می‌آید. همچنین با اعمال شرط مرزی در $\bar{x} = \alpha$ پس از جایگزینی مقدار $\bar{\psi}_2$ از رابطه (9) معادله اخیر به صورت رابطه (11) تبدیل خواهد شد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cosh(\beta_n \bar{x}) \cos(\gamma_n \bar{y}) = \bar{\psi}_0 - \bar{\psi}_0 \frac{\cosh(K\bar{y})}{\cosh K} \tag{11}$$

با ضرب اپراتور $\int_0^1 \cos(\gamma_j \bar{y})\, d\bar{y}$ در دو طرف معادله اخیر و با استفاده از خاصیت تعامد مدهای برداری، مقدار ضریب سری فوریه (a_n) به صورت رابطه (12) حاصل می‌شود:

$$a_n = \frac{2\bar{\psi}_0 K^2 (-1)^n}{\gamma_n \beta_n^2 \cosh(\beta_n \alpha)} \tag{12}$$

با ترکیب روابط (6،9،10،12) توزیع پتانسیل الکتریکی در مقطع عرضی میکروکانال به صورت نرمال‌شده رابطه (13) نسبت به پتانسیل زتای دیواره‌ها به‌دست می‌آید:

$$\frac{\bar{\psi}}{\bar{\psi}_0} = \frac{\cosh(K\bar{y})}{\cosh K} + 2K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cosh(\beta_n \bar{x}) \cos(\gamma_n \bar{y})}{\gamma_n \beta_n^2 \cosh(\beta_n \alpha)} \tag{13}$$

همان‌گونه که از معادله بالا ملاحظه می‌شود، پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل در توزیع پتانسیل الکتریکی در مقطع عرضی میکروکانال وارد شده و اثر این پارامتر را می‌توان در معادلات انتقال بعدی لحاظ کرد.

2-2- معادلات پیوستگی و مومنتوم

سیالات نیوتنی عموماً به‌صورت مایعاتی تراکم‌ناپذیر بوده که می‌توان معادله پیوستگی را با صرف‌نظر از اثرات جزئی تراکم‌پذیری در حدود پایین سرعت به‌صورت $\nabla . \boldsymbol{u} = 0$ در نظرگرفت؛ بنابراین بردار سرعت برای هندسه جریان به‌صورت رابطه (14) است.

$$\boldsymbol{u} = [0, 0, u(x, y)] \tag{14}$$

معادلات مومنتوم با استفاده از تحلیل نیروهای سطحی و حجمی روی المانی از سیال در حالت کلی به‌صورت برداری (15) بیان می‌شوند:

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + F_z \tag{15}$$

در رابطه بالا، p فشار هیدرودینامیکی سیال، F_z بردار نیروی محوری ناشی از میدان الکتریکی خارجی بر واحد حجم سیال، ρ چگالی و μ ویسکوزیته دینامیکی سیال است. با توجه به پایا بودن جریان، مشتق مادی صفر بوده و معادله مومنتوم در جهت محوری z در مختصات کارتزین به‌صورت رابطه (16) ساده می‌شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho_e E_z}{\mu} \tag{16}$$

مقدار ρ_e را نیز می‌توان از معادله(1) پس از حل توزیع پتانسیل الکتریکی به‌دست آورد. شرایط مرزی عدم‌لغزش نیز برای حل معادله مومنتوم به‌صورت رابطه (17) درنظر گرفته می‌شود.

$$u|_{x=\pm W} = 0 \;\;,\;\; u|_{y=\pm H} = 0 \tag{17}$$

در این مرحله برای تعمیم تحلیل انجام‌شده برای مسأله، کمیات بدون بعد به صورت (18) معرفی می‌شوند:

$$u_{HS} = -\frac{\epsilon \psi_0 E_z}{\mu}, \;\; \bar{u} = \frac{u}{u_{HS}} \;\;, \Gamma = -\frac{3u_{PD}}{u_{HS}} \tag{18}$$

در روابط بالا u_{HS} سرعت هلمهولتز- اسملوکوفسکی برای جریان خالص الکترواسموتیک [15]، $u_{PD} = -H^2 p_{,z}/3\mu$ سرعت میانگین سیال در جریان خالص پوازی و Γ متناسب با نسبت سرعت در حالت خالص پوازی به سرعت هلمهولتز- اسملوکوفسکی است؛ بنابراین معادله مومنتوم همراه با شرایط مرزی عدم‌لغزش و تقارن به‌صورت رابطه (19) بدون‌بعد خواهد شد.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \Gamma - K^2 \dfrac{\bar{\psi}}{\bar{\psi}_0} \\ \left.\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} = \left.\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right|_{\bar{y}=0} = 0 \;\;,\;\; \bar{u}|_{\bar{x}=\alpha} = \bar{u}|_{\bar{y}=1} = 0 \end{cases} \tag{19}$$

معادله دیفرانسیل بالا را می‌توان با استفاده از جداسازی متغیرها تحلیل کرد. روش نخست در تحلیل معادله دیفرانسیل بالا، جای‌گذاری معادل $\bar{\psi}/\bar{\psi}_0$ داده‌شده در رابطه (13) است. روش دوم تحلیل، استفاده از معادله دیفرانسیل معادل با عبارت $K^2\bar{\psi}$ داده‌شده در رابطه (5) پس از استفاده از تقریب دبای- هاکل، سپس ادغام معادلات دیفرانسیل و جای‌گذاری پاسخ به‌دست آمده برای $\bar{\psi}/\bar{\psi}_0$ در جواب نهایی خواهد بود. با توجه به سادگی تحلیل در روش دوم و حذف عبارت منبع متغیر در معادله مومنتوم، از این شیوه استفاده می‌شود؛ بنابراین فرم ادغام شده معادله مومنتوم به‌صورت رابطه (20) تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{u}_+}{\partial \bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}_+}{\partial \bar{y}^2} = \Gamma \\ \left.\dfrac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} = \left.\dfrac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{y}}\right|_{\bar{y}=0} = 0 \;\;,\;\; \bar{u}_+|_{\bar{x}=\alpha} = \bar{u}_+|_{\bar{y}=1} = 1 \end{cases} \tag{20}$$

در رابطه بالا $\bar{u}_+ = \bar{u} + \bar{\psi}/\bar{\psi}_0$ است. مشابه با تحلیل انجام‌شده برای توزیع پتانسیل الکتریکی، متغیر $\bar{u}_+(\bar{x}, \bar{y})$ قابل تفکیک به دو تابع بوده که یکی از آن‌ها تابع دو متغیر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ و دیگری صرفاً متغیر $\bar{y}$ است؛ بنابراین با استفاده از این رویه، معادله دیفرانسیل بالا با شرایط مرزی غیرهمگن، تبدیل به دو دستگاه مجزا شده که دستگاه دو متغیره دارای شرایط مرزی همگن است. با استفاده از معادلات کمکی اشتورم- لیوویل و تحلیل انجام شده بر دستگاه تک متغیره، پاسخ دستگاه اخیر به‌صورت ترکیبی از پایه‌های برداری هایپربولیکی و کسینوسی به‌دست خواهد آمد؛ بنابراین برای عدم‌تکرار محاسبات مشابه با توزیع پتانسیل الکتریکی، پاسخ نهایی دستگاه معادله

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]

دیفرانسیل بالا برای توزیع سرعت به صورت رابطه (21) بیان می‌شود.

$$\bar{u} = 1 - \frac{\Gamma}{2}(1-\bar{y}^2) - \frac{\cosh(K\bar{y})}{\cosh K} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos(\gamma_n\bar{y}) \times \left\{\frac{K^2\cosh(\beta_n\bar{x})}{\gamma_n\beta_n^2\cosh(\beta_n\alpha)} - \frac{\Gamma\cosh(\gamma_n\bar{x})}{\gamma_n^3\cosh(\gamma_n\alpha)}\right\} \quad (21)$$

در رابطه بالا مقادیر ویژه γ_n و β_n، در بخش پیشین معرفی شده؛ بنابراین با استفاده از معادله (12) توزیع سرعت محوری در میکروکانال به‌دست می‌آید.

3-2- معادله انتقال جرم

براساس فرم کلی معادلات دیفرانسیل انتقال کمیات اسکالر، معادله انتقال جرم به صورت رابطه (22) قابل بیان است.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla\bullet(D\nabla c) - \nabla\bullet(uc) + R \quad (21)$$

در رابطه بالا c غلظت جزء محلول در سیال، u سرعت محلی جریان، D ضریب نفوذ جرمی و R نرخ تولید یا اضمحلال جز محلول در سیال در اثر واکنش شیمیایی خواهد بود. با توجه به فرض 1 و 5 و ضریب نفوذ جرمی ثابت می‌توان معادله بالا را در مختصات مسأله به‌صورت رابطه (23) بیان کرد:

$$u(x,y)\frac{\partial c}{\partial z} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) \quad (22)$$

همان‌طور که در مطالعات اخیر نیز اثبات شده است عبارت دیفیوژن محوری، نسبت به دیفیوژن‌های عرضی قابل صرف نظر است [13,14]. همچنین دیواره‌ها نیز به‌صورت نفوذناپذیر جرمی درنظر گرفته شده؛ بنابراین گرادیان غلظت در سطوح برابر صفر خواهد شد. در ابتدای میکروکانال، غلظت برابر باشرایط ورودی در مسأله گرفته شده و در انتهای میکروکانال نیز از گرادیان محوری صفر غلظت به‌عنوان معیاری برای اشباع شدن انتقال جرم در این راستا استفاده می‌شود [13]؛ بنابراین شرایط مرزی برای معادله (23) به صورت رابطه (24) در نظر گرفته می‌شود.

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{x=\pm W} = 0 \;,\; \left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{y=\pm H} = 0$$
$$\left.\frac{\partial c}{\partial z}\right|_{z=L} = 0 \;,\; c|_{z=0} = \begin{cases} C_0 & ; -W \le x < 0 \\ 0 & ; 0 \le x \le W \end{cases} \quad (23)$$

در رابطه فوق، C_0 غلظت ورودی به میکروکانال اصلی از ورودی سمت راست در مقطع $z = 0$ است. در ادامه با تعریف پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (25) حالت کلی معادله انتقال جرم مورد تحلیل قرار خواهد گرفت.

$$z = \frac{z}{L} \;,\; \delta = \frac{L}{H} \;,\; \bar{c} = \frac{c}{C_0} \;,\; \mathrm{Pe} = \frac{u_{HS}H}{D} \quad (24)$$

در رابطه بالا δ نسبت طول محوری به نصف ارتفاع میکروکانال و Pe عدد پکله جریان براساس u_{HS} است؛ بنابراین شکل بی‌بعد معادله انتقال جرم همراه با شرایط مرزی مربوطه به‌صورت رابطه (26) قابل بیان است.

$$\begin{cases} \bar{u}(\bar{x},\bar{y})\dfrac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\delta}{\mathrm{Pe}}\left(\dfrac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \bar{c}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\ \left.\dfrac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{x}}\right|_{\bar{x}=\pm\alpha} = 0 \;,\; \left.\dfrac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{y}}\right|_{\bar{y}=\pm 1} = 0 \\ \bar{c}|_{\substack{\bar{z}=0 \\ -\alpha\le\bar{x}<0}} = 1 \;,\; \bar{c}|_{\substack{\bar{z}=0 \\ 0\le\bar{x}\le\alpha}} = 0 \;,\; \left.\dfrac{\partial \bar{c}}{\partial \bar{z}}\right|_{\bar{z}=1} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود برخلاف معادلات دیفرانسیل حاکم بر توزیع پتانسیل الکتریکی و سرعت محوری، معادله بالا دارای ضریب متغیر بوده؛ بنابراین برای تحلیل دستگاه بالا بایستی با انتقال مسأله به فضای انتگرالی اثر ضریب متغیر موجود در معادله را به‌صورت انتگرال دوگانه از متغیرهای مستقل $\bar{x}$ و $\bar{y}$ بیان کرد. در ابتدا مطابق با روش جداسازی متغیرها، پاسخ مسأله برای متغیر $\bar{c}$ توسط بسط فوریه از توابع ویژه $X_m(\bar{x})$ و $Y_n(\bar{y})$ به‌صورت رابطه (27) در نظر گرفته می‌شود:

$$c(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} K_{mn}(\bar{z})X_m(\bar{x})Y_n(\bar{y}) \quad (26)$$

در رابطه بالا $K_{mn}(\bar{z})$ ضرایب سری فوریه وابسته به متغیر $\bar{z}$ است. همچنین توابع ویژه و مقادیر ویژه متناظر با این توابع را می‌توان با استفاده از معادلات کمکی اشتورم- لیوویل و شرایط مرزی متناظر با جهات عرضی به‌دست آورد؛ بنابراین با به‌کارگیری این روش برای هر یک از توابع ویژه در توزیع غلظت، دستگاه معادلات (28) حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X_m}{d\bar{x}^2} + \nu_m^2 X_m = 0 \\ \left.\dfrac{dX_m}{d\bar{x}}\right|_{\bar{x}=\pm\alpha} = 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} \dfrac{d^2Y_n}{d\bar{y}^2} + \sigma_n^2 Y_n = 0 \\ \left.\dfrac{dY_n}{d\bar{y}}\right|_{\bar{y}=\pm 1} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

پاسخ معادلات بالا را می‌توان به صورت تحلیلی به‌دست آورده و به صورت رابطه (29) بیان کرد.

$$\begin{cases} X_m(\bar{x}) = \cos\big(\nu_m(\bar{x}+\alpha)\big)/\sqrt{J_m} \;;\; m = 0,1,2,\ldots \\ Y_n(\bar{y}) = \cos\big(\sigma_n(\bar{y}+1)\big)/\sqrt{L_n} \;;\; n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \quad (28)$$

در این روابط، $J_m = \int_{-1}^{1} X_m^2(\bar{x})d\bar{x}$ و $L_n = \int_{-1}^{1} Y_n^2(\bar{y})d\bar{y}$ بوده و همچنین $\nu_m = m\pi/2\alpha$ و $\sigma_n = n\pi/2$ مقادیر ویژه توابع متناظر می‌باشند. اکنون با جای‌گذاری رابطه (26) در معادله دیفرانسیل (24)، سپس با اعمال انتگرال دوگانه $\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{-1}^{+1} X_i(\bar{x})Y_j(\bar{y})d\bar{x}d\bar{y}$ و همچنین با بهره‌گیری از خاصیت تعامد توابع ویژه، می‌توان اثر ضریب متغیر $\bar{u}(\bar{x},\bar{y})$ را به شکل انتگرال معین تبدیل کرده و معادله دیفرانسیل انتقال جرم را به‌صورت دستگاه نامتناهی برحسب $K_{mn}(\bar{z})$ به‌صورت رابطه (30) به‌دست آورد.

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dK_{mn}(\bar{z})}{d\bar{z}}M_{mnij} = R_{ij}K_{ij}(\bar{z}) \;;\; i,j = 0,1,2,\ldots \quad (29)$$

که دستگاه ضرایب تبدیل M_{mnij} و R_{ij} به‌صورت روابط (32.31) تعریف می‌شوند.

$$M_{mnij} = \int_{-1}^{+1}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\bar{u}(\bar{x},\bar{y})X_m(\bar{x})X_i(\bar{x})Y_n(\bar{y})Y_j(\bar{y})d\bar{x}d\bar{y} \quad (30)$$

$$R_{ij} = -\frac{\delta}{\mathrm{Pe}}\left(\nu_i^2 + \sigma_j^2\right) \quad (31)$$

اکنون برای سادگی در روند محاسبات، معادله (29) را می‌توان با جای‌گذاری p به‌جای m و n همچنین قرار دادن q به‌جای i و j این معادله را به‌صورت سری یگانه به شکل رابطه (33) تبدیل کرد:

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{dK_p(\bar{z})}{d\bar{z}}M_{pq} = R_q K_q(\bar{z}) \;;\; q = 0,1,2,\ldots \quad (32)$$

بیان ماتریسی رابطه اخیر را می‌توان به‌صورت رابطه (34) نیز تعریف کرد.

$$[K'(\bar{z})] = [Q][K(\bar{z})] \quad (33)$$

در رابطه بالا $[Q] = [M]^{-1}[R]$ خواهد بود. دسته معادلات دیفرانسیل در رابطه بالا از مرتبه اول بوده؛ بنابراین می‌توان به‌صورت هم‌زمان حل تحلیلی فرم ماتریسی معادلات دیفرانسیل بالا را به‌صورت رابطه (35) ارائه کرد.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]

$$[K(\bar{z})] = [K(0)] \bullet e^{[Q]\bar{z}} \tag{34}$$

در رابطه بالا، ماتریس $[K(0)]$ به‌وسیله تبدیل انتگرالی بر غلظت ورودی در میکروکانال به‌دست خواهد آمد. حل تحلیلی به‌دست آمده برای ضرایب سری فوریه، نیاز به محاسبه توان نمایی ماتریس $[Q]$ داشته؛ بنابراین با تجزیه آن به‌صورت $[Q] = [V]^{-1}[D][V]$ عملیات محاسباتی برای یافتن پاسخ نهایی میسر می‌شود. در این رابطه، $[V]$ ماتریس بردارهای ویژه و $[D]$ ماتریس قطری مقادیر ویژه معادل با فرم جردن ماتریس $[Q]$ خواهند بود؛ بنابراین می‌توان با استفاده از حل تحلیلی به‌دست آمده در معادله بالا، میدان غلظت برای دو جریان ورودی را در میکرومیکسرهای Y شکل محاسبه کرد.

3- اعتبارسنجی روش حل

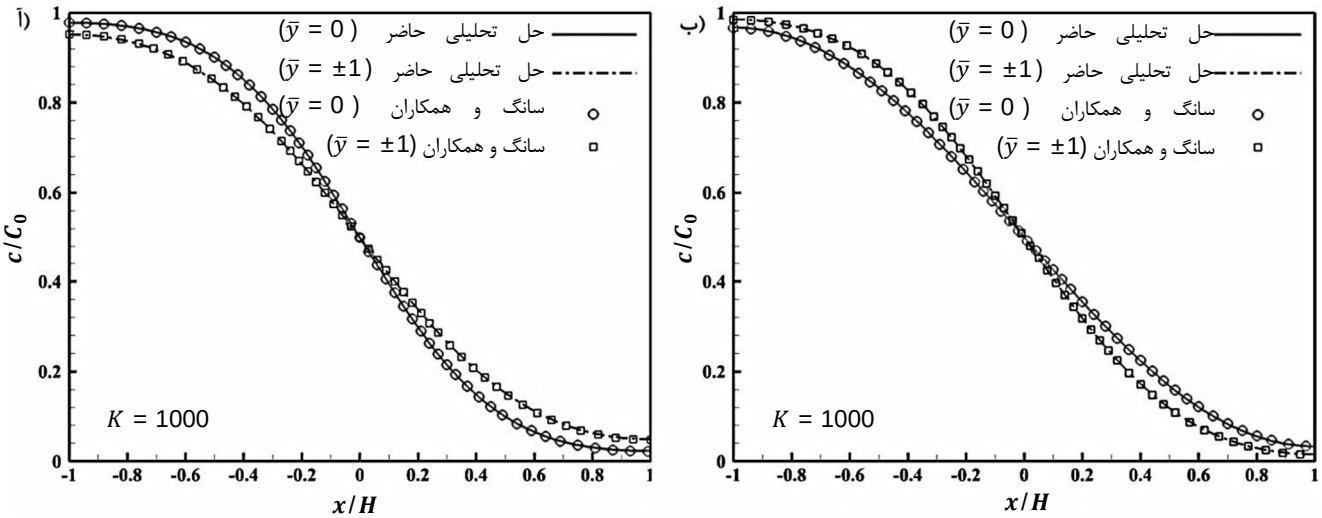
در این قسمت نتایج حاصل از روش تئوری حاضر با حل تحلیلی انجام شده توسط سانگ و همکاران [14] در غیاب اثرات الکتروسینتیک لایه دوگانه الکتریکی اعتبارسنجی خواهد شد. برای انطباق نتایج، نیاز به استفاده از پارامترهای هم‌ارز با بررسی یادشده بوده؛ بنابراین مقادیر $2H = 2W =$ 100 μm برای اندازه مقطع عرضی (معادل با $\alpha = 1$) و $\mu = 0.001$ kg/ms برای ویسکوزیته دینامیکی و در حالت سناریوی جریان ترکیبی هم‌جهت، گرادیان فشار مساعد برابر با نسبت $P_z = \Delta P/L = 2{,}845$ Pa/m در مقدار سرعت هلمهولتز- اسملوکوفسکی $u_{HS} = 1$ mm/s اخذ می‌شود. مقادیر بیان‌شده برابر با $\Gamma = -7.11$ بوده و به‌طور مشابه در حالت گرادیان فشار مخالف نیز $\Gamma = 2.37$ متناظر با نسبت گرادیان فشار 0/33- در تحلیل اخیر اعمال می‌شود. با توجه به شکل2، پروفیل غلظت در مقطع میانی و مجاور دیواره فوقانی میکروکانال با نتایج حل تحلیلی اخیر انطباق کامل داشته؛ بنابراین می‌توان از بسط نتایج تحلیل تئوری حاضر برای مقادیر قابل توجه از ضخامت لایه دوگانه الکتریکی در بررسی انتقال جرم غیرهمگن در میکروکانال استفاده کرد.

4- بررسی و تحلیل نتایج

در این قسمت برای نمایش کمی نحوه پخش عرضی جزء محلول، پروفیل غلظت برای مقطع مجاور دیواره‌های میکروکانال در طول محوری $\bar{z} = 1$ و به‌ازای مقادیر مختلف عدد پکله و پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل در شکل3 نشان داده شده است. دلیل استفاده از این مقطع برای بررسی اختلاط، اثر چشم‌گیر لایه دوگانه الکتریکی در مناطق مجاور دیواره‌ها نسبت به نواحی با فواصل دورتر است. در قسمت الف سناریوی جریان تحت گرادیان فشار مساعد مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش عدد پکله از 400 به 600 و در نهایت 1000 و درنتیجه افزایش اثر همرفت جریان بر دیفیوژن جرمی، میزان گرادیان غلظت در خروجی میکروکانال افزایش یافته و مقدار راندمان اختلاط کاهش خواهد یافت. به‌عنوان نمونه مقدار غلظت در مقطع عرضی $\bar{x} = -1$ به‌ازای مقدار $K = 10$ برای اعداد پکله بیان شده در بالا به‌ترتیب به‌صورت 0/814، 0/887 و 0/951 روند صعودی خواهد داشت. همچنین با توجه به تغییرات عدد پکله می‌توان مشاهده کرد که نرخ کاهش راندمان اختلاط برای تغییر Pe در مقادیر پایین‌تر بیشتر خواهد بود.

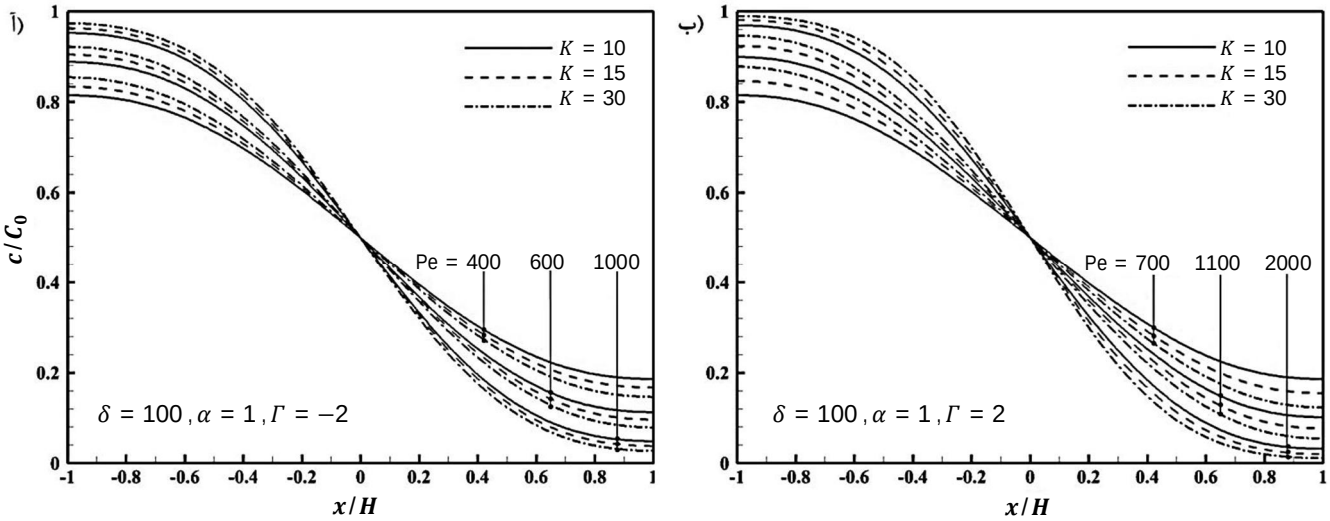
همچنین می‌توان اثر تغییرات پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل را بر توزیع غلظت عرضی درشکل 3 مشاهده نمود؛ همان‌طور که در قسمت 2-1 نیز بیان گردید پارامتر K معرف میزان ضخامت لایه دوگانه الکتریکی بوده که با افزایش این پارامتر از 10 به 15 و 30 به‌طور معکوس مقدار طول دبای کاهش یافته؛ بنابراین با تمرکز نیروی الکترواسموتیک در ناحیه کوچک‌تری از سیال، گرادیان سرعت در مجاورت دیواره افزایش خواهد یافت. در نتیجه این عامل سبب کاهش زمان ماند جزء محلول در سیال نزدیک سطح گشته که میزان اختلاط عرضی را در این نواحی کاهش می‌دهد. همچنین به صورت کمی می‌توان مقدار افزایش غلظت در مقطع عرضی $\bar{x} = -1$ به‌ازای Pe = 400 را به صورت روند صعودی 0/814، 0/833 و 0/854 به‌ترتیب برای مقادیر $K = 10, 15, 30$ از نمودار استخراج کرد. شایان توجه است که مقادیر متناظر با غلظت‌های بالا در مقطع $\bar{x} = 1$ به $\bar{x} = -1$ بنابر تقارن در اختلاط متقابل اجزاء حلال و محلول نسبت به 1 مکمل یکدیگر است.

در قسمت ب از شکل3 توزیع غلظت برای حالت سناریوی جریان با گرادیان فشار مخالف ($\Gamma = 2$) نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود به‌ازای نمودارهای غلظت مشابه با حالت گرادیان فشار مساعد، میزان عدد پکله جریان تا مقادیر نزدیک به دو برابر افزایش یافته است که این امر بیانگر اثر گرادیان فشار مخالف در میزان بهبود فرآیند اختلاط در عدد پکله ثابت خواهد بود. به‌طور مشابه با حالت پیشین، اثر افزایش ضخامت لایه دوگانه الکتریکی با کاهش میزان گرادیان سرعت و درنتیجه افزایش زمان ماند جز محلول در نزدیکی دیواره موجب کاهش گرادیان غلظت می‌شود.



شکل 2 مقایسه پروفیل غلظت در ضخامت ناچیز لایه دوگانه الکتریکی میان روش تئوری حاضر و تحلیل سانگ و همکاران [14] تحت گرادیان فشار الف- مساعد و ب- مخالف

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]



شکل 3 پروفیل غلظت در مقطع مجاور دیواره‌های بالایی/ پایینی میکروکانال در اعداد پکله و پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل مختلف تحت گرادیان فشار الف- مساعد و ب-مخالف

شکل4 کانتور دوبعدی غلظت در طول محوری $\bar{z}$ = 1 و در شرایط مختلف الکتروسینتیک و هیدرودینامیک جریان را نشان می‌دهد. در این بررسی عدد پکله برابر مقدار ثابت Pe = 1000 در نظر گرفته شده است. خطوط ممتد نشان‌داده شده در کانتورهای غلظت نیز مکان هندسی نقاط با غلظت 0/2 و 0/8 ماکزیمم غلظت ورودی در ابتدای میکروکانال است. از معیار 0/8-0/2 به‌عنوان لایه مرزی غلظت ناحیه پخشی، به‌صورت متداول در مطالعات اخیر [14،13،11] استفاده شده؛ بنابراین در این بحث نیز برای کمی شدن نمودارهای توزیع غلظت عرضی به‌صورت هم‌زمان با کانتورهای متناظر استفاده شده است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود به‌ازای تمامی مقادیر پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل، پروفیل غلظت تحت سناریوی گرادیان فشار مساعد ($\Gamma = -2$) دارای توزیع به اصطلاح پروانه‌ای شکل(10) در مقطع عرضی میکروکانال بوده که این امر به دلیل توزیع غیریکنواخت سرعت در نواحی مختلف می‌باشد؛ به‌گونه‌ای که از سمت مناطق مجاور دیواره تا مرکز میکروکانال، سرعت محوری به‌صورت صعودی افزایش یافته و بنابراین با کاهش زمان ماند جزء محلول، به همان صورت عرض ناحیه پخش نیز کاهش خواهد یافت. این در حالی است که در سناریوی جریان خالص الکترواسموتیک ($\Gamma = 0$) سرعت در نواحی مرکزی میکروکانال یکنواخت گشته و به دلیل برابر بودن زمان ماند جزء محلول در این مناطق، پروفیل غلظت به حالت ستونی نزدیک خواهد شد. تحت سناریوی گرادیان مخالف ($\Gamma = 2$) با غلبه نیروی ناشی از گرادیان فشار به نیروی الکترواسموتیک در نواحی مرکزی، سرعت محوری کاهش یافته و بنابراین همان‌طور که از کانتورهای شکل4 نیز ملاحظه می‌شود، عرض ناحیه پخش گسترده‌تر می‌شود.

در بررسی ستونی کانتورهای غلظت در شکل4 در هر گرادیان فشار، اثر افزایش پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل و به تناسب آن کاهش ضخامت لایه دوگانه الکتریکی نشان داده شده است. نتایج حاصل از این بررسی، بیانگر اثر یکسان این پارامتر بر پروفیل غلظت در سناریوهای مختلف جریان است؛ به‌گونه‌ای که در هر مقدار از Γ، با کاهش طول دبای و افزایش تمرکز نیروی الکترواسموتیک در نواحی مجاور دیواره، گرادیان سرعت محوری در این مناطق افزایش یافته و بنابراین میزان عرض ناحیه پخش کمتر می‌شود. با افزایش این پارامتر، کانتور غلظت به حالات پروفیل پروانه‌ای شکل خالص، ستونی و دوکی شکل به‌ترتیب تحت گرادیان فشار مساعد، صفر و مخالف نزدیک خواهد شد به‌طوری‌که در مقادیر بیشتر از پارامتر K و با صرف نظر کردن از ضخامت لایه دوگانه الکتریکی نتایج تحقیقات سانگ و همکاران [14] بازیابی می‌شود.

4-1- اندیس شدت اختلاط

عموماً برای تعیین کمی میزان پخش عرضی در هر موقعیت محوری، از نسبت انتگرال غلظت در راستای محور اصلی پخش جرمی به حالت تکمیل فرآیند اختلاط استفاده شده و به‌عنوان معیار شدت اختلاط (I_{mix}) مورد استفاده قرار خواهد گرفت [11]. با توجه به تعریف یاد شده می‌توان این کمیت را به‌صورت رابطه (36) تعریف کرد.

$$I_{\text{mix}} = \frac{c_{m,x}}{c_0/2} = \frac{2}{\alpha}\int_0^1 \bar{c}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,d\bar{x} \qquad (35)$$

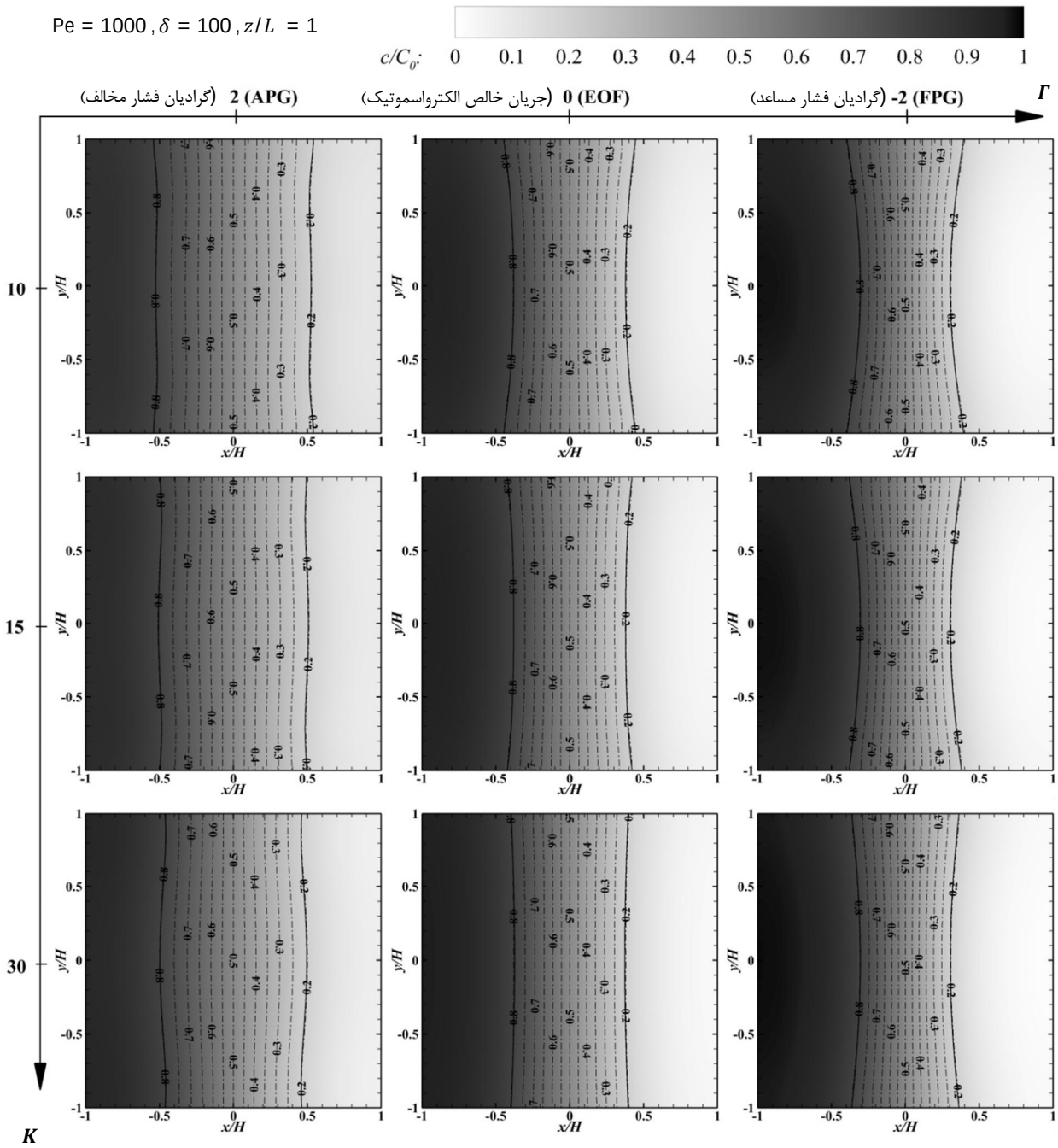
که در رابطه بالا $c_{m,x}$ غلظت میانگین جزء محلول در راستای محور x و c_0 بیانگر غلظت حالت تکمیل فرآیند اختلاط است. در این مرحله با توجه به این‌که مقدار غلظت $\bar{c}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ به‌صورت تحلیلی محاسبه شده است، می‌توان کمیت بالا را برای تمامی طول‌های محوری محاسبه کرد.

با توجه به اثر چشم‌گیر لایه دوگانه الکتریکی در مجاورت دیواره‌های میکروکانال، تحلیل معیار بالا در مقطع $\bar{y} = \pm 1$ برای کل طول محوری در شکل5 انجام شده است. در تحقیقات اخیر [14,16] رفتار توانی معیار ضخامت لایه مرزی غلظت نسبت به طول محوری میکروکانال به اثبات رسیده است. به‌گونه‌ای که برای مناطق مرکزی، توان تغییرات کمیت یاد نسبت به محور عمدتاً 0/5 و برای مقاطع نزدیک دیواره برابر 0/33 محاسبه شده است. همان‌طور که در شکل5-الف مشاهده می‌شود، معیار I_{mix} نیز در حالت گرادیان فشار مساعد ($\Gamma = -2$) به‌صورت توانی در مقطع مجاور دیواره تغییر می‌کند به‌گونه‌ای که در Pe = 300 و K = 50، توان تغییرات در نمودار لگاریتمی نشان داده شده تقریباً برابر 0/472 خواهد بود. با افزایش طول دبای و متعاقباً کاهش پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل، میزان اختلاط افزایش یافته، اما توان تغییرات این کمیت مقدار پایین‌تر 0/451 را خواهد داشت. با افزایش عدد پکله جریان نیز میزان اختلاط کاهش یافته و همان‌طور که از شکل5-الف نیز مشاهده می‌شود، توان تغییرات به‌ازای کلیه مقادیر متناظر K، کاهش خواهد یافت. به‌طوری‌که محدوده تغییرات در این مقدار از عدد پکله در بازه استفاده شده برای K حدوداً برابر 0/417 تا 0/461 است. در قسمت ب از

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]

شکل5 نیز تحلیل مشابهی برای سناریوی گرادیان فشار مخالف ($\Gamma = 2$) و در مقادیر اعداد Pe و K یکسان انجام شده است. روند تغییرات در این مورد نیز مشابه با حالت قبل بوده با این تفاوت که مقدار I_{mix} بنا بر دلایل یادشده در شکل4 افزایش خواهد یافت. همچنین توان تغییرات کمیت مذکور نیز در هر طول محوری نسبت به حالت قبل به‌طور فزاینده‌ای تغییر می‌کند، به‌گونه‌ای که به‌عنوان نمونه در مقدار Pe = 300 و $K = 15$، توان نمایی از مقدار تقریبی 0/451 به 0/483 افزایش می‌یابد.

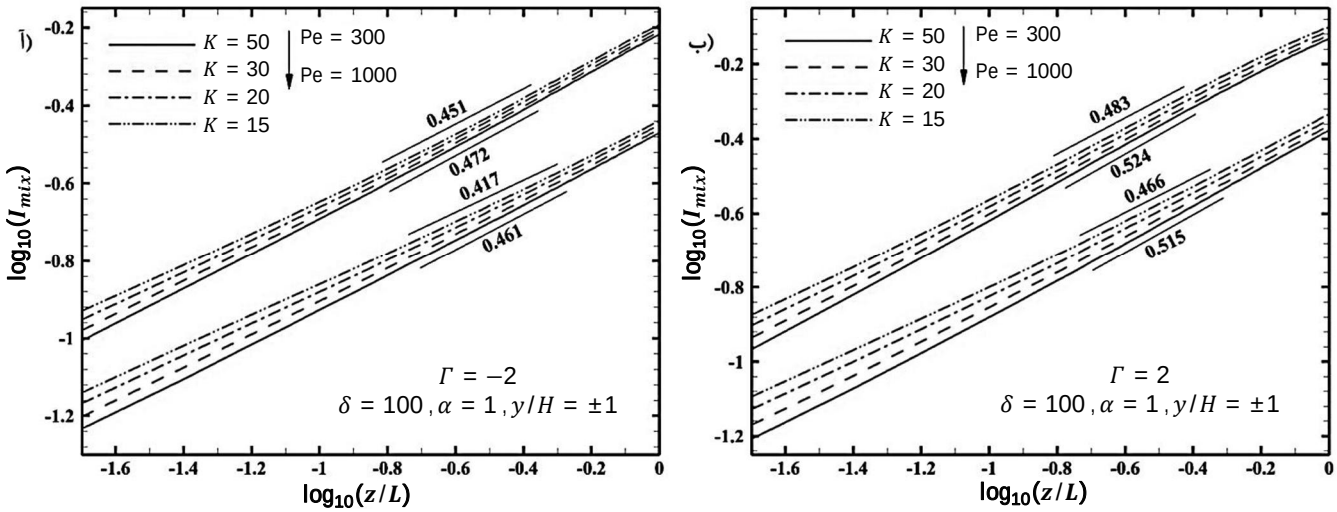
اکنون می‌توان از مشاهدات انجام شده برای روند تغییرات معیار I_{mix}، مشابه با معیار ضخامت لایه مرزی غلظت، از تعریف $I_{\text{mix}} = \bar{z}^{\lambda(\bar{y},\bar{z})}$ با توان $\lambda(\bar{y},\bar{z})$ برای بیان توانی تغییرات استفاده کرد [11]. مقدار این توان در شکل 5و در بازه تقریبی $\log_{10}\bar{z} = -0.8 : -0.2$ محاسبه شده است. در این مرحله برای بررسی کلی انتقال جرم در محدوده سراسری از طول محوری میکروکانال، توان تغییرات معیار شدت اختلاط به‌صورت شیب کمی $\lambda(\bar{y},\bar{z}) \sim \log\bar{z} / \log I_{\text{mix}}$ محاسبه شده و مقدار متوسط آن در راستای $\bar{z}$ به فرم انتگرالی $\lambda_m(\bar{y}) = \int_0^1 \lambda(\bar{y},\bar{z})d\bar{z} \,/\, \int_0^1 d\bar{z}$ تعیین می‌شود. نتایج حاصل از محاسبات مذکور برای توان متوسط تغییرات شدت اختلاط در شکل6 و در دو نوع گرادیان فشار مختلف نشان داده شده است. همان‌طور که در قسمت الف قابل ملاحظه است به ازای گرادیان فشار مساعد ($\Gamma = -2$) متوسط توان در دیواره‌ها از مرکز میکروکانال کمتر بوده و کل مقادیر متوسط توانی در مقاطع عرضی مختلف با کاهش پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل از 50 به 15 کاهش خواهند یافت. همچنین تحلیلی مشابه نیز در قسمت ب از شکل6 برای سناریوی جریان با گرادیان فشار مخالف ($\Gamma = 2$) انجام شده است که



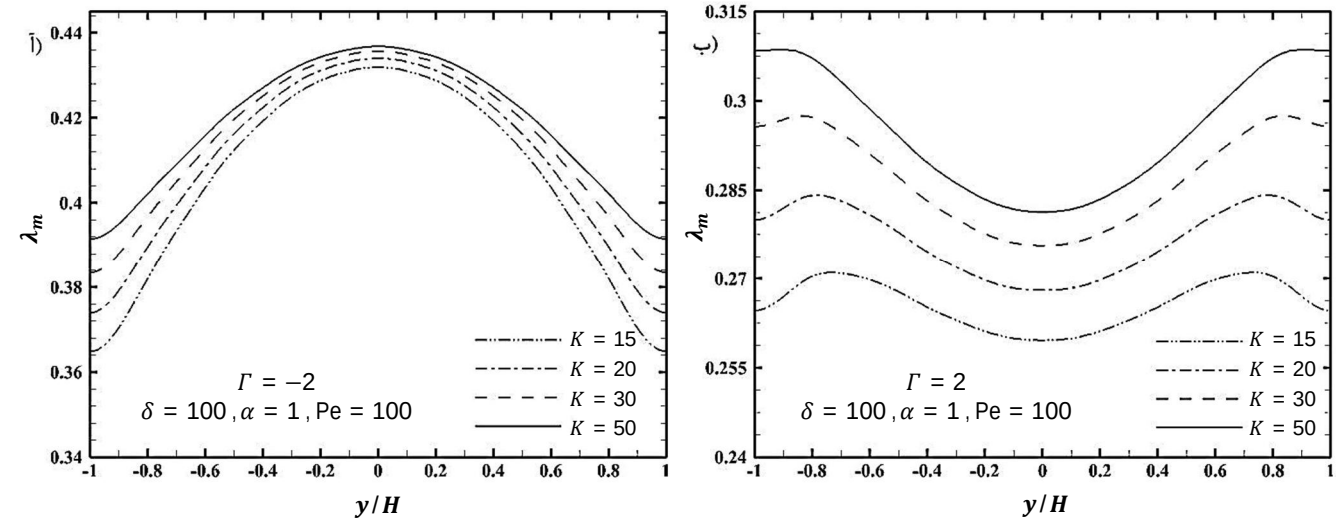
شکل4 پروفیل غلظت در مقطع عرضی واقع در خروجی میکروکانال تحت سه نوع گرادیان فشار محوری و در مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل همراه با خطوط ممتد بیانگر لایه مرزی غلظت در معیار 0/2-0/8

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]



شکل 5 نمودار لگاریتمی تغییرات معیار شدت اختلاط نسبت به طول محوری میکروکانال در حالت الف- گرادیان فشار مساعد و ب- گرادیان فشار مخالف



شکل 6 تغییرات توان مقیاسی متوسط شدت اختلاط در کل مقطع عرضی میکروکانال و در مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل و در گرادیان فشار الف- مساعد و ب- مخالف

نتایج حاصل نشان‌دهنده عدم روند یکنواخت در تغییر λ_m نسبت به مقاطع، مختلف بوده به‌گونه‌ای که در طول عرضی دبای، این کمیت ماکزیمم گشته و با دور شدن از این مقطع مقدار آن کاهش خواهد یافت. همچنین با کاهش K نیز توان متوسط در تمامی مقاطع کاهش می‌یابد.

5- نتیجه‌گیری

تحقیق حاضر به وسیله روش تحلیلی، به بررسی انتقال جرم غیرهمگن جزء محلول در میکرومیکسرهای Y شکل با مقطع مستطیلی و جریان حاصل از نیروی الکتروواسموتیک و پوازی سیالات نیوتنی می‌پردازد. در تمایز با تحقیقات قبلی، با به‌کارگیری سری فوریه حاصل از جداسازی متغیرها برای معادله‌ی پواسون- بولتزمن و معادله دیفرانسیل نویر- استوکس و در نهایت تبدیل دوگانه‌ی انتگرالی برای معادله انتقال جرم، اثر لایه دوگانه الکتریکی بر پدیده پخش و اختلاط بررسی شده است. همچنین اعتبارسنجی انجام شده با نتایج تحقیقات سانگ و همکاران [14] بیانگر صحت لازم و دقت بالای روش به‌کار گرفته شده است. در ادامه با در نظر گرفتن سه سناریوی گرادیان فشار مخالف، صفر و مساعد پروفیل عرضی غلظت در پارامترهای بی‌بعد دبای- هاکل مختلف ارائه شده است.

از نتایج بررسی تحلیلی اختلاط عرضی سیالات نیوتنی مشاهده می‌شود که عرض ناحیه پخشی در پروفیل غلظت به فرم دوکی و پروانه‌ای شکل به‌ترتیب در دو حالت گرادیان فشار مخالف و مساعد در مقاطع مجاور دیواره افزایش خواهد یافت. همچنین کانتورهای حاصل از تحلیل حاضر به‌صورت کمی و به شیوه‌ای تحلیلی اثرات الکتروسینتیک ناشی از لایه دوگانه الکتریکی با ضخامت غیرقابل صرف‌نظر را نشان می‌دهند. برای کمی‌سازی میزان پیشرفت پخش عرضی نیز با تعریف اندیس شدت اختلاط، آنالیز مقیاسی مرتبط با این پارامتر در اعداد پکله و پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل مختلف انجام شده است.

نتایج آنالیز مقیاسی بیانگر کاهش اندیس شدت اختلاط با افزایش عدد پکله در هر دو سناریوی جریان با گرادیان فشار مساعد و مخالف است؛ همچنین با افزایش پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل و متعاقباً کاهش طول دبای، توان لگاریتمی شدت اختلاط افزایش خواهد یافت. از طرفی با کاهش گرادیان فشار مساعد، میزان توان لگاریتمی افزایش یافته و محدوده تغییرات توانی نیز هم‌زمان با کاهش گرادیان فشار مساعد افزایش خواهد یافت. نتایج تحلیل روی متوسط توان محوری شدت اختلاط نیز بیانگر مقدار بیشینه این کمیت در مناطق مرکزی و طول عرضی دبای به‌ترتیب در حالات گرادیان فشار مساعد و مخالف می‌باشد. همچنین نتایج نشان‌دهنده کاهش توان متوسط با افزایش پارامتر دبای- هاکل است.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]
[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]

6- فهرست علائم

A	پارامتر معادل در مقدار بحرانی نسبت گرادیان فشار
c, C_0	غلظت محلی و ماکزیمم غلظت ورودی ($kg.m^{-3}$)
D	ضریب نفوذ مولکولی ($m^2.s^{-1}$)
e	بار پایه ($1.6 \times 10^{-19}C$)
E_z	میدان الکتریکی ($V.m^{-1}$)
F_z	بردار نیروی الکترواسموتیک (N)
I_{mix}	اندیس شدت اختلاط
K	پارامتر بی‌بعد دبای- هاکل
k_B	ثابت بولتزمن ($1.38 \times 10^{-23}J.K^{-1}$)
L, H, W	عرض، ارتفاع، طول (m)
n_0	غلظت یونی توده‌ای (m^{-3})
p	فشار (Pa)
Pe	عدد پکله
R	نرخ تولید جرمی ($kg.m^{-3}.s^{-1}$)
Re	عدد رینولدز جریان
T	دمای مطلق میانگین سیال (K)
$\boldsymbol{u}, u$	بردار سرعت کل و محوری سیال ($m.s^{-1}$)
u_{PD}, u_{HS}	سرعت پوازی و هلمهولتز- اسملوکوفسکی ($m.s^{-1}$)
x, y, z	جهات عرضی، طولی و محوری

علائم یونانی

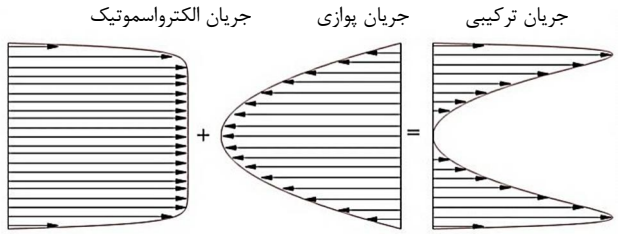
α	نسبت عرض به ارتفاع میکروکانال
δ	نسبت طول محوری به نصف ارتفاع میکروکانال
ϵ	ثابت دی‌الکتریک محلول
ϕ	پتانسیل الکتریکی (V)
Γ	نسبت نیروی فشاری به الکترواسموتیک
κ	پارامتر دبای- هاکل (m^{-1})
λ	توان تغییرات معیار شدت اختلاط
ξ	طول دبای (m)
ρ	چگالی سیال ($kg.m^{-3}$)
ρ_e	چگالی خالص بار الکتریکی ($C.m^{-3}$)
ψ, ψ_0	میدان پتانسیل و پتانسیل زتای دیواره (V)
$z^{\pm}$	والانس یون‌های مثبت و منفی

بالانویس‌ها

$\bar{\ }$	پارامترهای بی‌بعد

7- پیوست

با توجه به این‌که به‌ازای جریان برگشتی از سیال نیوتنی داخل میکرومیکسر، پاسخ معینی برای توزیع غلظت عرضی وجود ندارد بایستی محدوده معین برای نسبت نیروی گرادیان فشار به نیروی الکترواسموتیک محاسبه گردد. از آن‌جایی که جریان الکترواسموتیک همواره مثبت بوده و امکان برهم‌نهی اجزاء سرعت محوری در حالت سیال نیوتنی وجود دارد ($u = u_{PDF} + u_{EOF}$) می‌توان نتیجه گرفت که نقطه برگشت جریان در نقطه ماکزیمم قدرمطلق سرعت ناشی از گرادیان فشار وقوع می‌دهد؛ بنابراین در حالت بحرانی، محاسبات برای سرعت در مرکز میکروکانال به‌صورت رابطه (37) انجام خواهد شد.



شکل 7 پروفیل سرعت در مقطع میانی میکروکانال در حالت بحرانی جریان بازگشتی

$$\bar{u}(0,0) = 1 - \frac{\Gamma}{2} - \frac{\bar{\psi}}{\bar{\psi}_0} + 2\Gamma A \geq 0 \qquad (37)$$

که در رابطه اخیر $A = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/\gamma_n^3 \cosh(\gamma_n \alpha)$ است؛ بنابراین محدوده مجاز برای نسبت نیروی گرادیان فشار به نیروی الکترواسموتیک در برقراری جریان یک‌طرفه در میکروکانال به‌صورت رابطه (38) خواهد بود.

$$\Gamma \leq \frac{2}{(1-4A)}\left\{1 - \frac{1}{\cosh K} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2K^2(-1)^n}{\gamma_n \beta_n^2 \cosh(\beta_n \alpha)}\right\} \qquad (38)$$

پروفیل سرعت در مقطع میانی میکروکانال نیز در حالت بحرانی برای مقدار حاصل از رابطه بالا برابر $\Gamma_{\mathrm{crit}} = 3.414$ به‌ازای $\alpha = 1$ و $K = 20$ در شکل 7 نشان داده شده است.

8- مراجع

[1] A. Hatch, E. Garcia, P. Yager, Diffusion-based analysis of molecular interactions in microfluidic devices, *Proceedings of the IEEE,* Vol. 92, No. 1, pp. 126-139, 2004.

[2] D. Maynes, B. Webb, Fully developed electro-osmotic heat transfer in microchannels, *International journal of heat and mass transfer,* Vol. 46, No. 8, pp. 1359-1369, 2003.

[3] J. H. Masliyah, S. Bhattacharjee, *Electrokinetic and colloid transport phenomena: John Wiley & Sons,* 2006.

[4] H. A. Stone, A. D. Stroock, A. Ajdari, Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip, *Annu. Rev. Fluid Mech.,* Vol. 36, pp. 381-411, 2004.

[5] K. Horiuchi, P. Dutta, Heat transfer characteristics of mixed electroosmotic and pressure driven micro-flows, *JSME International Journal-Series B-Fluids and Thermal Engineering,* Vol. 49, No. 3, pp. 812-819, 2006.

[6] M. Mala, C. Yang, D. Li, Electrical double layer potential distribution in a rectangular microchannel, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* ,Vol. 135, No. 1, pp. 109-116, 1998.

[7] D. Y. Yang, Analytical solution of mixed electroosmotic and pressure-driven flow in rectangular microchannels, *Key Engineering Materials,* Vol. 483, pp. 679-683, 2011.

[8] A. E. Kamholz, B. H. Weigl, B. A. Finlayson, P. Yager, Quantitative analysis of molecular interaction in a microfluidic channel: the T-sensor, *Analytical Chemistry,* Vol. 71, No. 23, pp. 5340-5347, 1999.

[9] A. E. Kamholz, P. Yager, Theoretical analysis of molecular diffusion in pressure-driven laminar flow in microfluidic channels, *Biophysical Journal,* Vol. 80, No. 1, pp. 155-160, 2001.

[10] A. E. Kamholz, P. Yager, Molecular diffusive scaling laws in pressure-driven microfluidic channels: deviation from one-dimensional Einstein approximations ,*Sensors and Actuators B: Chemical,* Vol. 82, No. 1, pp. 117-121, 2002.

[11] J. M. Chen, T.-L. Horng, W. Y. Tan, Analysis and measurements of mixing in pressure-driven microchannel flow, *Microfluidics and Nanofluidics,* Vol. 2, No. 6, pp. 455-469, 2006.

[12] S. Sullivan, B. Akpa, S. Matthews, A. Fisher, L. Gladden, M. Johns, Simulation of miscible diffusive mixing in microchannels, *Sensors and Actuators B: Chemical,* Vol. 123, No. 2, pp. 1142-1152, 2007 .

[13] H. Song, Y. Wang, K. Pant, Cross-stream diffusion under pressure-driven flow in microchannels with arbitrary aspect ratios: a phase diagram study using a three-dimensional analytical model, *Microfluidics and nanofluidics,* Vol. 12, No. 1-4, pp. 265-277, 2012.

[14] H. Song, Y. Wang, K. Pant, Scaling law for cross-stream diffusion in microchannels under combined electroosmotic and pressure driven flow, *Microfluidics and nanofluidics,* Vol. 14, No. 1-2, pp. 371-382, 2013.

[15] H. Park, W. Lee, Helmholtz–Smoluchowski velocity for viscoelastic electroosmotic flows, *Journal of colloid and interface science,* Vol. 317, No. 2, pp. 631-636, 2008.

[16] R. F. Ismagilov, A. D. Stroock, P. J. Kenis, G. Whitesides, H. A. Stone, Experimental and theoretical scaling laws for transverse diffusive broadening in two-phase laminar flows in microchannels, *AppliedPhysics Letters,* Vol. 76, No. 17, pp. 2376-2378, 2000.

[Downloaded from mme.modares.ac.ir on 2024-10-12]

[DOR: 20.1001.1.10275940.1394.15.4.40.2]