مجله مهندسی مکانیک مدرس، مهر ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۷، ص‌ص ۶۱-۶۷

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

توزیع درجه‌حرارت در یک استوانه توخالی متشکل از مواد هدفمند با استفاده از مدل هدایت حرارتی غیرفوریه تأخیر زمان منفرد کسری

عزیز عظیمی[۱*]، شهاب غلامی[۲]

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات حفاری، دانشگاه شهید چمران اهواز

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، مرکز تحقیقات حفاری، دانشگاه شهید چمران اهواز

* اهواز، صندوق پستی ۱۵۷-۶۱۳۵۵، a.azimi@scu.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۱۹ آذر ۱۳۹۲
پذیرش: ۱۶ بهمن ۱۳۹۲
ارائه در سایت: ۰۷ مرداد ۱۳۹۳

کلید واژگان:
هدایت حرارتی
مدل غیرفوریه
مدل تأخیر فاز منفرد کسری
مدل تأخیر زمان دوگانه
مواد هدفمند

چکیده

در این مقاله، به بررسی حل عددی هدایت حرارتی غیرفوریه بر اساس مدل تأخیر زمان منفرد کسری در یک استوانه غیرهمگن توخالی ساخته‌شده از مواد هدفمند پرداخته شده است. برای این منظور، تمامی خواص ماده هدفمند به صورت کاملاً متغیر و براساس قانون توانی در نظر گرفته و تنها تأخیر زمانی و مرتبه کسری به صورت ثابت در نظر گرفته شده‌اند. استوانه به صورت یک‌بعدی و کاملاً متقارن و بدون حضور منبع گرمایی در نظر گرفته شده‌است. مسئله در یک الگوریتم سعی و خطا به منظور یافتن مقادیر تأخیر زمانی و مرتبه کسری با استفاده از یک روش عددی ضمنی حل گردیده است. جهت اعتبارسنجی مسئله، نتایج بدست آمده از حل عددی تأخیر زمان منفرد کسری و حل عددی تأخیر زمانی دوگانه با نتایج بدست آمده از روش نیمه تحلیلی تأخیر زمانی دوگانه مقایسه شده‌است. در ادامه تأثیر پارامترهای غیرهمگنی بر روی ماکسیمم دمای گذرا و سرعت موج گرمایی مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین توزیع دمایی در جسم از لحظه ایجاد موج تا لحظه رسیدن به دمای پایا مورد بررسی قرارگرفته و در آخر به بررسی تأثیر تغییر تأخیر زمانی و مرتبه کسری بر روی توزیع دما در جسم پرداخته شده‌است.

Temperature distribution in a hollow cylinder composed of functionally graded material using non-Fourier fractional single phase lag model

Aziz Azimi*, Shahab Gholami

Drilling Research Center, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran
* P.O.B. 61355-157, Ahvaz, Iran, a.azimi@scu.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 10 December 2013
Accepted 05 February 2014
Available Online 29 July 2014

Keywords:
Heat Conduction
Non-Fourier Model
Fractional Single Phase Lag
Double Phase Lag
Functionally Graded Material

ABSTRACT

In this study, numerical solution of non-Fourier heat conduction is discussed by a fractional single phase lag model in an inhomogeneous hollow cylinder made of a functionally graded material. For this purpose, all material properties of the media are assumed to vary continuously according to a power-law formulation except the phase lag and fractional order considered as constants. It is assumed that the cylinder is one-dimensional, symmetric and without any heat source. The governing equation has been solved numerically in a try and error algorithm to find the phase lag and the fractional order using an implicit numerical method. In order to validate the results, the numerical solutions of the fractional single phase lag model and the dual phase lag model are compared to the results of semi-analytical dual-phase lag. In the following the influence of non-homogeneity parameters is studied on the maximum transient temperature and thermal wave transmission speed. The temperature distribution is investigated from wave creation instance to steady state thermal distribution. Finally, the effect of different time delays and fraction orders on the temperature distribution is investigated.

۱- مقدمه

مواد هدفمند (FGM)[1] مواد کامپوزیت پیشرفته‌ای هستند که به علت تعداد فازهای مختلف دارای ساختار پیچیده‌ای می‌باشند. خواص گرمایی و مکانیکی کامپوزیت‌ها به ساختار مواد سازنده و نحوه قرار گرفتن مواد سازنده بستگی دارند. به طور کلی دو نوع ماده هدفمند وجود دارد: یکی با تغییرات پیوسته خواص مواد و دیگری با تغییرات گسسته خواص مواد به گونه‌ای که جسم از تعداد زیادی لایه تشکیل شده و خواص مواد در آن به آرامی تغییر می‌کند. همچنین مواد هدفمند، مواد کامپوزیتی با ساختار غیرهمگن هستند که به سبب مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا به طور گسترده در صنایع مدرن کاربرد دارند [۱]. در مواد هدفمند تغییرات پیوسته خواص باعث می‌شود تا اثراتی همچون لایه‌لایه شدن کامپوزیت‌ها مشاهده نشود. یکی از کاربردهای مواد هدفمند قابلیت استفاده آن‌ها به عنوان سپرهای حرارتی به علت مقاومت حرارتی بالای آن‌ها است. به همین دلیل، امروزه آنالیز حرارتی این مواد بسیار

1- Functionally graded material

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

A. Azimi, Sh. Gholami, Temperature distribution in a hollow cylinder composed of functionally graded material using non-Fourier fractional single phase lag model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 61-67, 2014 (In Persian)

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.19.0]

مورد توجه محققین قرار گرفته‌است [۲].

در راستای آنالیز حرارتی مواد، از مدل هدایت حرارتی فوریه به طور گسترده برای پیش‌بینی توزیع دمایی این‌گونه مواد استفاده می‌شود، این مدل بر سرعت موج گرمایی بی‌نهایت تاکید دارد. این فیزیک بدین معنی است که یک تغییر محلی دما هرچند کوچک سبب ایجاد اغتشاش دمایی در هر نقطه از محیط حتی در فواصل بسیار دور از تحریک اولیه می‌گردد. اگر چه سرعت بی‌نهایت موج گرمایی از نظر فیزیکی قابل‌قبول نیست ولی در بسیاری از کاربردهای مهندسی فرض قابل قبولی تلقی شده و استفاده از مدل فوریه به نتایج بسیار دقیقی منجر می‌شود؛ اما با پیشرفت صنعت و تکنولوژی ثابت شد که در شرایطی همچون حضور منابع حرارتی با شدت بالا و شرایط بسیار گذرا از قبیل مسائلی که در آن‌ها از لیزر برای ایجاد شار حرارتی استفاده می‌شود و همچنین انتقال‌حرارت در شرایط دمایی بسیار پایین، انتقال حرارت روی لایه‌های نازک فلزی، نیمه‌رساناها و ابررساناها و مواد با ساختار غیرهمگن و متخلخل، سرعت موج گرمایی می‌تواند محدود باشد. در نتیجه مدل فوریه قابلیت پاسخ به این شرایط را ندارد و این مسئله باعث ایجاد شاخه‌ای در علم انتقال‌حرارت شد که هدایت حرارتی غیرفوریه نامیده می‌شود.

بدین منظور کاتانئو و ورنات [۴،۳] اولین کسانی بودند که مدل هدایت حرارتی هایپربولیک را که بر سرعت موج گرمایی محدود اشاره داشت، معرفی کردند. سپس ژو [۵] مدل تأخیر زمانی دوگانه[1] (DPL) را ارائه داد که به دو مقدار تأخیر زمانی اشاره داشت: تأخیر زمان گرادیان دمایی مفسر تأخیر زمان به علت واکنش‌های میکروساختاری از قبیل فونون-الکترون یا پراکندگی فونون و همچنین تأخیر زمان شار گرمایی بیانگر زمان آسایش آثار گذرا همانند مدل کاتانئو ورنات بود. در چند سال اخیر مدل دیگری توسط قاضی‌زاده و همکارانش [۶] بر پایه حساب کسری با عنوان روش تأخیر زمانی منفرد کسری[2] (FSPL) ارائه شد. حساب کسری توانایی بالایی از خود در مدل‌کردن رفتارهای غیرعادی در فرآیندهای پیچیده نشان داده‌است. حساب کسری، مشتق و انتگرال از مرتبه غیرصحیح است و این ویژگی روش حساب کسری سبب می‌شود که توانایی بهتری در توصیف واکنش‌های میکروساختاری و اثرات گذرای زمانی در مقایسه با روش‌های قبلی در دسترس باشد.

تاکنون مقالات زیادی به بررسی انتقال‌حرارت غیرفوریه در مواد همگن و مواد کامپوزیتی پرداخته‌اند، از جمله این مقالات می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. فرانکل و همکارانش [۷] یک فرمولاسیون یک‌بعدی دما و شارحرارتی برای هدایت حرارت هذلولوی در یک جسم کامپوزیتی ارائه دادند. رونگ هو و همکارانش [۸] انتقال‌حرارت یک ساختار چندلایه را از طریق مدل هدایت حرارتی تأخیر زمانی دوگانه با استفاده از روش لاتیس بولتزمن مورد بررسی قرار دادند. سای و همکارانش [۹] اثرات غیرفوریه‌ای بر رفتار دینامیک گرمایی اجسام کروی و کامپوزیتی دو لایه ناشی از تغییرات ناگهانی دما را مطالعه کردند. رامادان [۱۰] یک حل نیمه تحلیلی برای هدایت حرارتی تأخیر زمانی دوگانه در جسم چندلایه ارائه داد. ژانگ شوان و همکارانش [۱۱] توزیع دمایی در مواد کامپوزیت چندلایه سرامیکی را با هدف استفاده از هدایت حرارتی غیرفوریه‌ای مورد بررسی قرار دادند و با توزیع دمایی بدست آمده از مدل هدایت حرارتی فوریه در ساختار پوشش سپرهای حرارتی مقایسه نمودند.

تا به امروز مقالات کمی در زمینه انتقال‌حرارت غیرفوریه در مواد غیرهمگن و مواد هدفمند ارائه شده‌است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. سوترادهر و همکارانش [۱۲] هدایت حرارتی گذرا در مواد همگن و غیرهمگن را با استفاده از تبدیل لاپلاس گالرکین و روش المان مرزی مورد مطالعه قرار دادند. سوترادهر و پائولینیو [۱۳] یک روش المان مرزی برای هدایت حرارتی گذرا در مواد هدفمند ارائه دادند. خسروی‌فرد و همکارانش [۱۴] با استفاده از روش بدون شبکه به بررسی هدایت حرارتی گذرا در مواد هدفمند پرداختند. بابایی و چن [۱۶،۱۵] هدایت حرارتی هذلولی غیرفوریه‌ای را در یک کره و استوانه توخالی غیرهمگن ساخته شده از مواد هدفمند مورد مطالعه قرار دادند. کلس و کانکر [۱۷] یک کره و استوانه توخالی ساخته شده از مواد هدفمند را از طریق هدایت حرارتی هذلولی مورد بررسی قرار دادند. رهیده و همکارانش [۱۸] هدایت حرارتی با سرعت موج محدود را در یک ماده هدفمند چندلایه که در معرض تولید حرارت بود شبیه‌سازی کردند. اکبرزاده و چن [۱۹] هدایت حرارتی یک‌بعدی مواد هدفمند را برای انواع مختصات و انواع شرایط مرزی بر اساس نظریه تأخیر زمانی دوگانه بررسی کردند. اکبرزاده و چن [۲۰] در بررسی دیگری هدایت حرارتی گذرا در یک صفحه استوانه‌ای از جنس مواد هدفمند بر اساس تئوری تأخیر زمانی دوگانه را مورد مطالعه قرار دادند. گلبهار حقیقی و همکارانش [۲۱] هدایت حرارتی گذرای معکوس را در یک ماده هدفمند استوانه‌ای چندلایه بررسی کردند. آن‌ها از روش انتقال حرارت غیرفوریه به منظور بالا بردن دقت استفاده کردند و همچنین بر اساس اندازه‌گیری دمای روی سطح خارجی استوانه، ضریب انتقال حرارت جابجایی و شارحرارتی صفحه داخلی استوانه را تخمین زدند.

در زمینه حساب کسری تاکنون کاری به صورت عددی و تحلیلی در مواد هدفمند انجام نشده‌است؛ اما در محیط‌های دیگر کارهایی صورت گرفته که می‌توان به بررسی‌های زیر اشاره کرد. باتاگلیا و همکارانش [۲۳،۲۲]، رفتار حرارتی گذرای یک سیستم را از طریق یک رابطه خطی مرتبه کسری بین دما و شار حرارتی مطالعه کردند. موریو [۲۴] مسئله معکوس معادله هدایت حرارتی کسری در یک قطعه محدود را بررسی کرد و یک روش عددی برای حل معادله حرارت کسری معرفی کرد. قاضی‌زاده و همکارانش [۲۵] به بررسی هدایت حرارتی در یک قطعه بافت زیستی با استفاده از روش تأخیر فاز منفرد کسری پرداختند. بدین منظور در مقاله حاضر از مزایای روش حساب کسری در جهت بررسی اثرات گذرای ناشی از شرط مرزی اعمال شده روی سطح یک ماده هدفمند استفاده شده‌است. اعمال شرط مرزی فوق، ایجاد یک رفتار شبه موجی در ماده هدفمند را ممکن ساخته که مطالعات محققان قبلی نشان از قابلیت و توانایی بکارگیری مدل غیرفوریه توأم با روش حساب کسری در قالب مدل FSPL در تسخیر این رفتار می‌دهند.

در مقاله حاضر به بررسی حل عددی هدایت حرارتی غیرفوریه در یک ماده هدفمند یک‌بعدی استوانه‌ای با استفاده از مدل تأخیر زمانی منفرد کسری پرداخته شده‌است. مسئله با استفاده از روش ضمنی گسسته‌سازی شده‌است. خواص مواد به طور پیوسته تغییر می‌کنند که این تغییر بر اساس قانون توانی در نظر گرفته می‌شود. در این مطالعه با استفاده از حل نیمه تحلیلی روش تأخیر زمانی دوگانه [۱۹]، نتایج حاصل از حل روش‌های عددی تأخیر زمانی دوگانه و تأخیر زمانی منفرد کسری اعتبارسنجی شده و سپس به بررسی تأثیر پارامترهای غیرهمگنی، تأخیر زمانی، مرتبه کسری و تاریخچه دمایی تا رسیدن به دمای پایا پرداخته می‌شود.

۲- معادلات حاکم

در این تحقیق، هدایت حرارتی مواد هدفمند بر اساس مدل‌های غیرفوریه‌ای مورد بررسی قرار گرفته‌است. از جمله مدل‌های استفاده شده در این بررسی می‌توان به مدل‌های تأخیر زمانی دوگانه و تأخیر زمانی منفرد کسری اشاره کرد.

1- Dual Phase Lag
2- Fractional Single Phase Lag

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.19.0]

۲-۱- مدل تأخیر زمانی دوگانه

مدل تأخیر زمانی دوگانه نخستین بار توسط ژو [۵] و با در نظر گرفتن دو تأخیر زمانی ارائه شد. به طور کلی این مدل را برای اجسام جامد می‌توان به صورت معادله (۱) بیان کرد:

$$q\left(r,t+\tau_q\right)=-K\nabla T\left(r,t+\tau_T\right) \qquad (۱)$$

در این مدل، با فرض کوچک بودن هر دو تأخیر زمانی، معادله (۱) با استفاده از بسط تیلور، بسط داده شده و با صرف‌نظر از جمله‌های مرتبه دوم و بالاتر، شکل خطی معادله تأخیر زمانی دوگانه به صورت معادله (۲) بدست می‌آید:

$$\left(1+\tau_q\frac{\partial}{\partial t}\right)q\left(r,t\right)=-K\left(1+\tau_T\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla T\left(r,t\right) \qquad (۲)$$

با تعریف معادله بالانس انرژی به صورت معادله (۳):

$$-(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r})q\left(r,t\right)=\rho C_P\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (۳)$$

و ترکیب معادله (۲) با معادله بالانس انرژی، معادله (۳)، معادله هدایت حرارتی تأخیر زمانی دوگانه به صورت معادله (۴) بدست می‌آید:

$$(1+\tau_q\frac{\partial}{\partial t})(\rho C_P\frac{\partial T}{\partial t})=(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r})(k(1+\tau_T\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial T}{\partial r}) \qquad (۴)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در مدل تأخیر زمانی دوگانه در صورتی که از تأخیر زمان گرادیان دمایی صرف‌نظر شود، معادله (۴) به معادله تأخیر زمان منفرد یا کاتانئو-ورنات کاهش داده می‌شود و در صورتی که از هر دو تأخیر زمان گرادیان دمایی و تأخیر زمان شار گرمایی صرف‌نظر شود، معادله تأخیر زمانی دوگانه به معادله کلاسیک فوریه کاهش داده می‌شود. همچنین قابل ذکر است که برای مواد با $\tau_T<\tau_q$، شار حرارتی به سبب وجود گرادیان دمایی است و همچنین برای موادی با $\tau_q<\tau_T$، وجود گرادیان دمایی به سبب وجود شار حرارتی است. به گونه‌ای که هنگامی که $\tau_q<\tau_T$ باشد، ترم مشتق ترکیبی، اثرات ترم موجی را از بین می‌برد و معادله در این حالت سهموی می‌شود و هدایت حرارتی را غیرموجی پیش‌بینی می‌کند؛ اما این رفتار متفاوت از نفوذ عادی است که توسط معادله‌ی هدایت حرارتی سهموی کلاسیک فوریه بیان می‌شود. خواص مواد هدفمند یک‌بعدی، بر اساس قانون توانی در نظر گرفته می‌شوند. طبق رابطه (۵) داریم:

$$k(\eta)=k_0\eta^{n_1}\,,\quad \rho(\eta)=\rho_0\eta^{n_2}\,,\quad C_P(\eta)=C_{P0}\eta^{n_3} \qquad (۵)$$

در رابطه (۵)، C_{p0}، ρ_0 و k_0 مقادیر ثابتی هستند که خواص جسم بر روی سطح خارجی آن را نشان می‌دهند و همچنین n_1، n_2 و n_3 پارامترهای غیرهمگنی هستند که خواص جسم را نشان می‌دهند. به گونه‌ای که پارامترهای غیرهمگنی همان الگوی تغییر خواص در ماده است. در واقع با تغییر مقادیر پارامترهای غیرهمگنی می‌توان خواص متفاوتی برای ماده هدفمند بدست آورد که باعث تغییر رفتار این ماده در مقابل انتقال‌حرارت هدایتی می‌شوند. در نهایت با استفاده از پارامترهای معادله (۶) به بی‌بعدسازی معادلات پرداخته می‌شود:

$$\psi=\frac{k_0}{\rho_0C_{p0}},\quad \zeta=\frac{\psi t}{r_0^2},\quad \varepsilon=\frac{\psi\tau_q}{r_0^2},\quad \delta=\frac{\psi\tau_T}{r_0^2},$$
$$\theta=\frac{T-T_\infty}{T_\infty},\quad \theta_{wi}=\frac{T_{wi}-T_\infty}{T_\infty},\quad \theta_{wo}=\frac{T_{wo}-T_\infty}{T_\infty},$$
$$r_\gamma=(\frac{r_i}{r_0}),\quad Q_r=\frac{r_0q_r}{k_0T_\infty},\quad \eta=(\frac{r}{r_0}) \qquad (۶)$$

جایی‌که T_{wi} و T_{wo} دماهای سطح درونی و بیرونی جسم می‌باشند و در نهایت با استفاده از پارامترهای بی‌بعد ارائه شده در معادله ۶، معادله بی‌بعد مدل تأخیر زمانی دوگانه به صورت معادله (۷) بدست می‌آید:

$$\eta^{n_2+n_3}(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\zeta})\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}=(1+\delta\frac{\partial}{\partial\zeta})\times\left[(n_1+1)\eta^{n_1-1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}+\eta^{n_1}\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}\right] \qquad (۷)$$

۲-۲- مدل تأخیر زمانی منفرد کسری

مدل غیرفوریه تأخیر زمانی منفرد کسری با در نظر گرفتن رابطه‌ی تأخیر زمانی منفرد به صورت معادله (۸):

$$q\left(r,t+\tau_q\right)=-K\nabla T\left(r,t\right) \qquad (۸)$$

و با بسط دادن ترم شارحرارتی به وسیله‌ی بسط تیلور کسری که توسط ادیبات و شوافه [۲۶] ارائه شده‌است برای اطلاعات بیشتر به مطالعه قاضی زاده و همکاران مراجعه شود [۶]. همچنین با صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه دوم و بالاتر در معادله (۸)، به صورت معادله (۹) بدست می‌آید:

$$\left(1+\tau_q^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right)q\left(r,t\right)=-K\nabla T\left(r,t\right) \qquad (۹)$$

در معادله بالا α مرتبه مشتق کسری است و مقدار آن $0<\alpha<1$ است. همچنین قابل ذکر است که $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ مشتق زمانی مرتبه کسری، بر اساس تعریف کاپوتو است که برای اطلاع بیشتر در مورد چگونگی رفتار حساب کسری می‌توان به کتاب معادلات دیفرانسیل کسری نوشته پودلونی [۲۷] مراجعه شود. با ترکیب معادله (۹) با معادله بالانس انرژی در نهایت معادله (۱۰) مربوط به تأخیر زمانی منفرد کسری بدست می‌آید:

$$(1+\tau_q^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha})(\rho C_P\frac{\partial T}{\partial t})=(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r})(k\frac{\partial T}{\partial r})\qquad 0<\alpha<1 \qquad (۱۰)$$

در معادله (۱۰)، α مرتبه کسری است و می‌تواند مقادیر $0<\alpha<1$ را داشته باشد، به گونه‌ای که با در نظر گرفتن $\alpha=0$ و یا $\tau_q=0$، معادله تأخیر زمان منفرد کسری به معادله فوریه تبدیل می‌شود و توزیع دما رفتار پخشی را از خود نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن $\alpha=1$، معادله فوق به معادله تأخیر زمانی منفرد یا هایپربولیک تبدیل می‌شود و توزیع دما یک رفتار موجی را نشان می‌دهد. همچنین با قراردادن مقادیر بین صفر و یک برای مرتبه کسری در معادله (۱۰) می‌توان رفتار پخشی- موجی فرآیند انتقال‌حرارت را تسخیر نمود.

در نهایت با استفاده از پارامترهای بی‌بعد ارائه شده معادله (۶)، معادله بی‌بعد تأخیر زمانی منفرد کسری به صورت معادله (۱۱) بدست می‌آید:

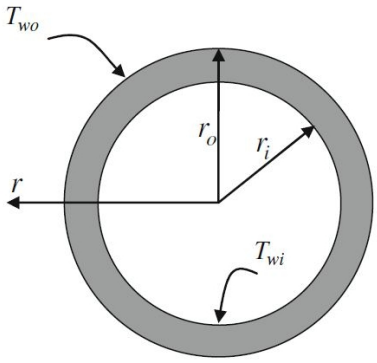
$$\eta^{n_2+n_3}(1+\varepsilon^\alpha\frac{\partial^\alpha}{\partial\zeta^\alpha})\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}=\left[(n_1+1)\eta^{n_1-1}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}+\eta^{n_1}\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}\right]\qquad 0<\alpha<1 \qquad (۱۱)$$

مدل‌های بر اساس حساب کسری تاکنون بیشتر از جنبه ریاضی مورد بررسی قرارگرفته‌اند ولی به دلیل توانایی بالای آن‌ها در مدل کردن رفتار گرمایی مواد به تازگی از نقطه نظر جنبه‌های فیزیکی نیز مورد توجه قرارگرفته‌اند.

۳- گسسته‌سازی معادله هدایت حرارتی تأخیر زمان منفرد کسری

همان طور که ملاحظه می‌شود معادله (۱۱) شامل ترمی با مشتق غیرصحیح است. قاضی‌زاده و همکارانش [۶] یک روش برای بدست آوردن مقدار مشتق غیرصحیح ارائه داده‌اند.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.19.0]



شکل ۱ جسم مورد بررسی

آن‌ها با تقریب عددی مشتق کسری بر پایه تعریف کاپوتو توانستند مقدار مشتق غیرصحیح را بدست آورند. با در نظر گرفتن تقریب عددی مشتق کسری، معادله (۱۱) به صورت معادله (۱۲) گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{\partial^{1+\alpha}\theta}{\partial\zeta^{1+\alpha}}=\sigma_{1+\alpha}\sum_{j=1}^{k}\omega_j^{1+\alpha}\left(\theta_i^{k-j+1}-2\theta_i^{k-j}+\theta_i^{k-j-1}\right),$$
$$\sigma_{1+\alpha}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{\Delta\zeta^{1+\alpha}},$$
$$\omega_j^{1+\alpha}=j^{1-\alpha}-(j-1)^{1-\alpha} \qquad (۱۲)$$

و همچنین گسسته‌سازی عبارات شامل مشتق صحیح به صورت معادله (۱۳) می‌باشد:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}=\frac{3\theta_i^k-4\theta_i^{k-1}+\theta_i^{k-2}}{2\Delta\zeta},$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}=\frac{\theta_{i-1}^k-2\theta_i^k+\theta_{i+1}^k}{\Delta\eta^2},$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\frac{\theta_{i+1}^k-\theta_{i-1}^k}{2\Delta\eta} \qquad (۱۳)$$

۴- تعریف مسئله

مسئله مورد بررسی، هدایت حرارتی در یک ماده هدفمند استوانه‌ای است که در ابتدا در دمای ۳۰۰ درجه کلوین قرار داشته و سپس سطح خارجی آن به طور ناگهانی تحت تأثیر تغییرات ناگهانی دما به اندازه ۶۰۰ درجه کلوین قرار می‌گیرد. در این مسئله، همان طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود مشابه با پژوهش انجام‌گرفته توسط اکبرزاده و چن [۱۹] استوانه مورد بررسی، استوانه‌ای با شعاع‌های r_i=۰/۶ m و r_o=۱ m است.

این مسئله به صورت نیمه تحلیلی با استفاده از مدل‌های فوریه، هدایت حرارتی هایپربولیک و تأخیر زمانی دوگانه توسط اکبرزاده و چن [۱۹] حل شده‌است. ولی با استفاده از مدل تأخیر زمان منفرد کسری در هیچ مرجعی بررسی نشده‌است. در تحقیق حاضر، مسئله به صورت عددی و با استفاده از روش‌های تأخیر زمانی دوگانه و تأخیر زمانی منفرد کسری مورد مطالعه قرار گرفته‌است.

با در نظر گرفتن معادلات به صورت بی‌بعد شده، شرایط مرزی و اولیه بی‌بعد برای جسم به صورت معادله (۱۴) تعریف می‌شوند:

$$\theta(0,\eta)=0.0,\qquad \theta(\zeta,0)=0.0,$$
$$\theta(\zeta,1)=1.0,\qquad Q(0,\eta)=0.0 \qquad (۱۴)$$

برای حل این مسئله، از روش عددی ضمنی جهت گسسته‌سازی معادله حاکم به دلیل پایداری مناسب این روش، استفاده شده‌است. مقدار پارامترهای غیرهمگنی در این تحلیل به جز برای شکل‌های ۵ و ۶ به صورت $n_1=n_2=n_3$=۱ در نظر گرفته شده‌اند.

۵- نتایج

در این قسمت قبل از هر چیز لازم است که به اعتبارسنجی مسئله پرداخته شود ولی قبل از اعتبارسنجی به منظور بدست آوردن توزیع دما در جسم با استفاده از روش عددی، می‌بایست استقلال شبکه مورد استفاده جهت حل عددی با انتخاب صحیح مقادیر گام‌های زمانی و مکانی مورد بررسی قرارگرفته و مقادیر مناسبی برای آن‌ها بدست آورده شود. شکل ۲ توزیع دمای جسم برای گام‌های زمانی و مکانی مختلف را برای مدل تأخیر زمانی دوگانه نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود برای گام زمانی $\Delta\zeta$=۰/۰۰۴ و گام مکانی $\Delta\eta$=۰/۰۰۱ مقدار خطا زیاد است. با کوچک کردن گام‌های زمانی و مکانی، مقدار گام زمانی و مکانی مناسب حل عددی مشخص خواهد شد. همان‌گونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود با انتخاب مقادیر گام زمانی $\Delta\zeta$=۰/۰۰۰۰۸ و گام مکانی $\Delta\eta$=۰/۰۰۱ می‌توان به طور نسبی مطمئن شد که شبکه مناسب و معقولی برای استفاده در حل عددی بدست آورده شده‌است. با کوچک‌تر کردن گام‌های زمانی و مکانی، نوسان در پاسخ دمایی حاصل‌شده و تغییری در دقت حل عددی به وجود نمی‌آید، لذا مابقی نتایج با در نظر گرفتن مقادیر $\Delta\zeta$=۰/۰۰۰۰۸ و $\Delta\eta$=۰/۰۰۱ ارائه شده‌اند.

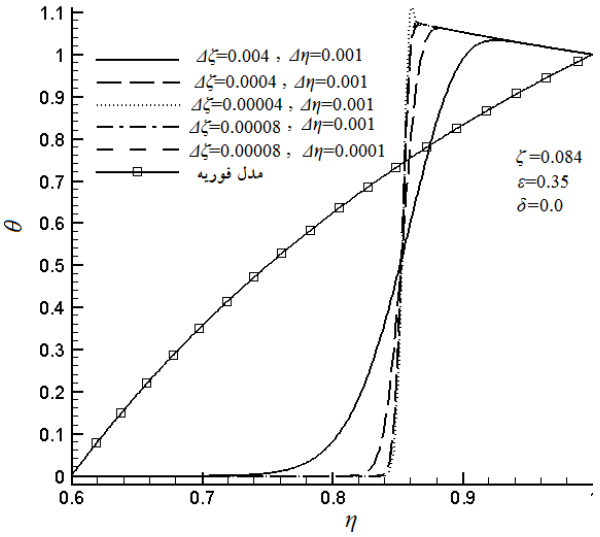
در شکل ۲، همان طور که مشاهده می‌شود مقدار ماکسیمم درجه حرارت از مقدار ماکسیمم درجه حرارت روی مرزها بیشتر شده‌است که این به علت فیزیک حاکم بر مسئله بوده و ناشی از انباشت انرژی در درون جسم به علت وجود غیرهمگنی در جسم است. به گونه‌ای که هرچه از سطح بیرونی به سمت داخلی حرکت شود، خواص جسم کاهش می‌یابد؛ بنابراین جسم به زمان بیشتری نیاز دارچد تا انرژی را منتقل کند و این باعث انباشت انرژی می‌شود. این موضوع سبب می‌شود هرچه موج به سطح درونی نزدیک شود مقدار دمای آن افزایش یابد.

جهت اعتبارسنجی، نتایج حاصل از حل عددی مدل DPL با نتایج حاصل از حل نیمه تحلیلی انجام شده توسط اکبرزاده و چن [۱۹] در شکل ۳ مقایسه شده‌اند. در مدل تأخیر زمانی دوگانه هر چه مقادیر تأخیر زمان گرادیان دمایی و تأخیر زمان شار گرمایی به هم نزدیک باشند پاسخ دمایی حاصل شده به مدل فوریه نزدیک می‌شود. لذا در شکل ۳ نموداری که مربوط به دو مقدار تأخیر زمانی نزدیک به هم هستند، دارای پاسخ دمایی مشابه با مدل فوریه است. برای اطمینان از صحت حل عددی علاوه بر مقایسه نتایج مربوط به پاسخ دمایی در حالت δ=۰/۲۵، نتایج حل عددی تحقیق حاضر با نتایج حل نیمه تحلیلی برای حالت δ=۰ نیز با هم مقایسه شده‌اند. همان‌گونه که در شکل ۳ مشاهده می‌شود نمودارهای حل عددی و نیمه تحلیلی به خوبی همپوشانی دارند و گویای این مطلب است که حل عددی توانسته به خوبی حل نیمه تحلیلی انجام شده توسط اکبرزاده و چن [۱۹] را مدل کند.

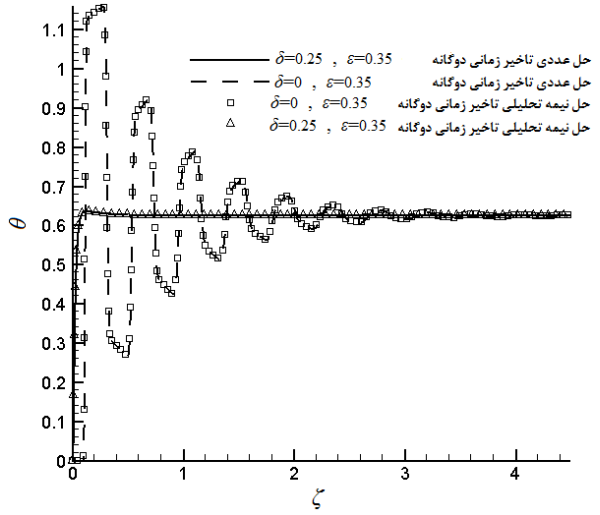
پس از اعتبارسنجی حل عددی معادله تأخیر زمانی دوگانه با حل نیمه تحلیلی، نتایج حاصل از حل‌های عددی DPL و FSPL مربوط به جسم FGM استوانه‌ای یک‌بعدی با فرض اینکه مقدار تأخیر زمان بی‌بعد شارگرمایی برابر با ε=۰/۳۵ و تأخیر زمان بی‌بعد گرادیان دمایی برابر δ=۰/۰۰۱ باشند، با یکدیگر مقایسه شده‌اند که پاسخ مربوط به این حالت، در شکل ۴ نشان داده شده‌است.

در این مقایسه برای استفاده از روش تأخیر زمانی منفرد کسری لازم است که مقادیر مربوط به ε و α بدست آیند. با چندین بار سعی و خطا مقادیر ε=۰/۳۴۶ و α=۰/۹۹۸ بدست می‌آیند که با توجه به فیزیک موجی بودن مسئله مورد بررسی و نزدیکی مقادیر بدست آمده به مقادیر مدل DPL و همپوشانی نمودارها نشان از صحت نتایج مدل FSPL در تسخیر رفتار شبه موجی مسئله مورد بررسی دارد.

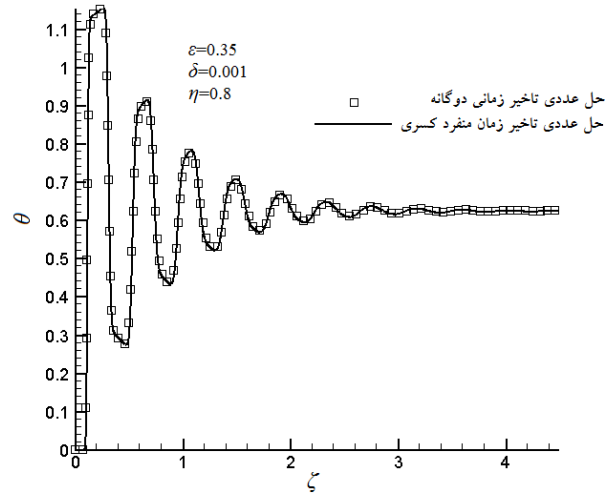
[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.19.0]



شکل ۲ توزیع دما به ازای گام‌های مختلف در زمان بی‌بعد ζ=۰/۰۸۴

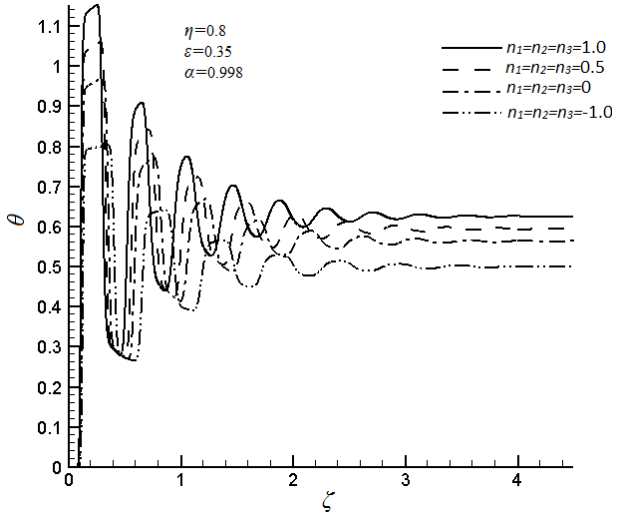


شکل ۳ مقایسه حل نیمه تحلیلی با حل عددی تأخیر زمانی دوگانه

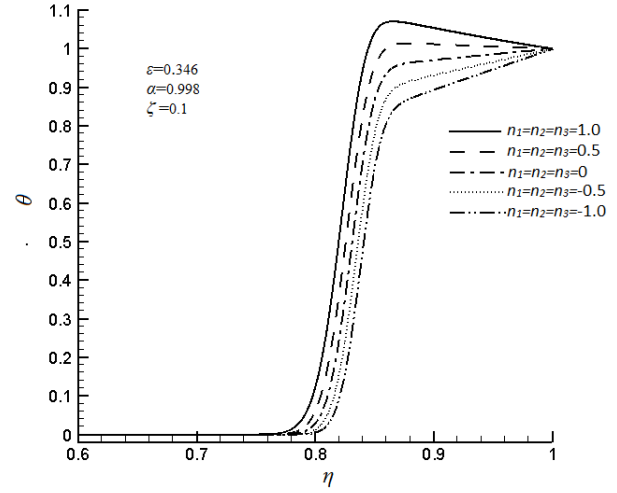


شکل ۴ مقایسه حل عددی تأخیر زمانی منفرد کسری با تأخیر زمانی دوگانه

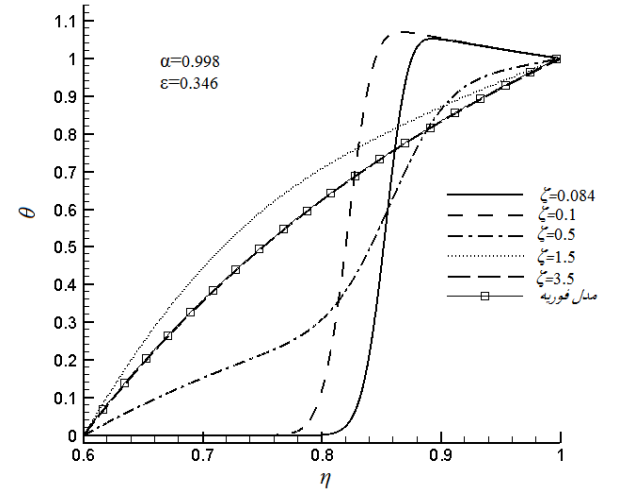
پس از اعتبارسنجی مربوط به تحلیل عددی به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف در جسم FGM یک بعدی با استفاده از روش عددی تأخیر فاز منفرد کسری پرداخته‌شده است. شکل‌های ۵ و ۶ تأثیر پارامترهای غیرهمگنی را نشان می‌دهند.



شکل ۵ اثر پارامتر غیرهمگنی در تاریخچه دمایی در مکان بی‌بعد η=۰/۸

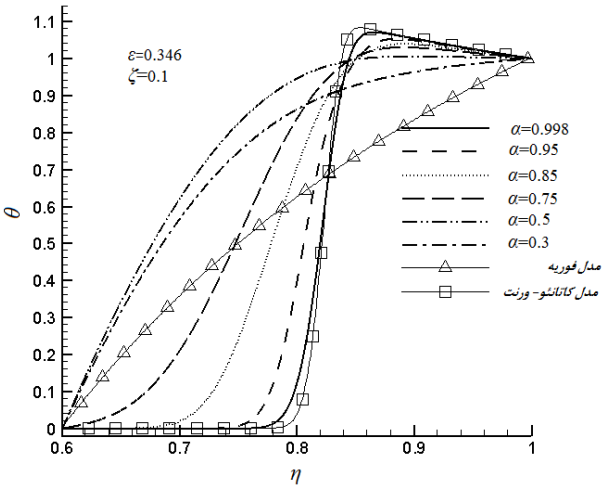


شکل ۶ تأثیر پارامتر غیرهمگنی بر توزیع دما در جسم در زمان بی‌بعد ζ=۰/۱

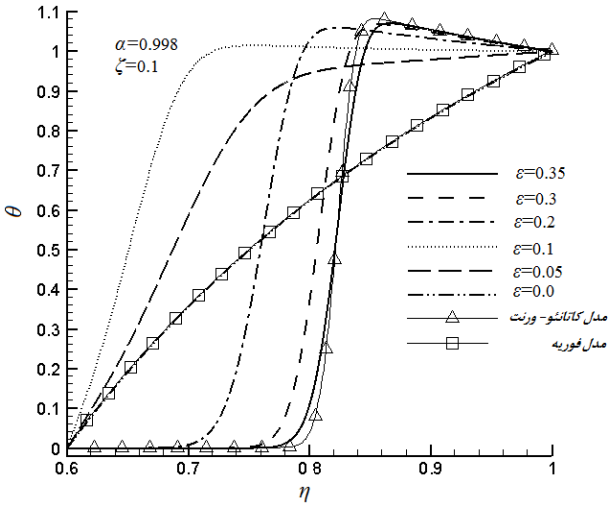


شکل ۷ توزیع دما در جسم در زمان‌های بی‌بعد مختلف

شکل ۵ تأثیر پارامتر غیرهمگنی را در زمان‌های مختلف و مکان بی‌بعد η=۰/۸ بر تاریخچه دمایی نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود هرچه مقدار پارامترهای غیرهمگنی در جسم بیشتر باشد به سبب انباشت انرژی در جسم ماکسیمم دمای گذرا در جسم بیشتر شده و مقدار دمای پایای جسم بالاتر می‌رود.



شکل ۸ اثر تغییرات مرتبه کسری در تاریخچه دمایی در زمان بی‌بعد ζ=۰/۱



شکل ۹ اثر تغییرات تأخیر فاز در تاریخچه دمایی در زمان بی‌بعد ζ=۰/۱

دمای پایا، دمایی است که با گذشت زمان در آن تغییری مشاهده نشود. شکل ۶ تأثیر پارامتر غیرهمگنی را در زمان بی‌بعد ζ=۰/۱ بر توزیع دما در طول جسم نشان می‌دهد.

این شکل به خوبی تأثیر پارامتر غیرهمگنی را در ایجاد موج شکل‌گرفته شده نشان می‌دهد. به گونه‌ای که موج ایجادشده با غیرهمگنی بالاتر دارای مقدار ماکسیمم دمایی بالاتری است. ماکسیمم دمایی بالاتر به سبب وجود ترم‌های غیرهمگنی که با تغییر پیوسته خواص مواد در جسم وجود دارد، است، به گونه‌ای که هر چه مقدار غیرهمگنی بالاتر باشد تجمع انرژی به سبب کاهش ضریب هدایت حرارتی افزایش می‌یابد؛ بنابراین هر چه موج به سمت شعاع داخلی استوانه حرکت کند تجمع انرژی در جسم باعث بالاتر رفتن ماکسیمم دمایی می‌شود. همچنین قابل ذکر است که هرچه غیرهمگنی جسم بیشتر باشد سرعت موج گرمایی در جسم بیشتر خواهد بود.

شکل ۷ توزیع دما در جسم را در زمان‌های بی‌بعد مختلف به ازای مقادیر ε=۰/۳۴۶ و α=۰/۹۹۸ برای جسم FGM با استفاده از مدل تأخیر زمانی منفرد کسری نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در لحظه ζ=۰/۱ موج ایجاد شده از سطح بیرونی جسم در حال حرکت به سمت سطح درونی جسم است و پس از رسیدن به سطح درونی، به سمت سطح بیرونی منعکس می‌شود. توزیع دما در زمان بی‌بعد ζ=۰/۵ موج منعکس شده به سطح بیرونی جسم را نشان می‌دهد. پس از رسیدن به سطح بیرونی جسم دوباره به سمت سطح درونی انعکاس می‌یابد. رفت و برگشت موج تا جایی که دیگر در جسم تغییر دمایی مشاهده نشود ادامه خواهد داشت که به این حالت دمای پایای جسم گفته می‌شود. در لحظه‌ای که جسم از نظر دمایی به حالت پایا می‌رسد توزیع دمای آن مشابه توزیع دمای مدل فوریه است.

شکل ۸ توزیع دمای جسم را در زمان بی‌بعد ζ=۰/۱ به ازای مقادیر مختلف مرتبه کسری نشان می‌دهد. در این شکل مقدار تأخیر زمان بی‌بعد ε=۰/۳۴۶ در نظر گرفته شده‌است.

همان‌گونه که در شکل ۸ مشخص است مقادیر مرتبه کسری نزدیک به یک، ماهیت موجی مسئله را نشان می‌دهد به گونه‌ای که هر چه مقدار α به یک نزدیک باشد رفتار گرمایی جسم مشابه رفتار گرمایی مدل کاتانئو-ورنات است. با کاهش مقدار مرتبه کسری ماهیت موجی جسم به حالت پخشی-موجی می‌رسد که رفتار گرمایی جسم نه به صورت پخشی و نه به صورت موجی است و رفتار گرمایی جسم بین حالت پخشی و موجی قرار دارد. با کاهش بیشتر مقدار مرتبه کسری و برای مقادیر نزدیک به صفر، رفتار گرمایی جسم به حالت پخشی نزدیک می‌شود.

شکل ۹ توزیع دما در جسم را در زمان بی‌بعد ζ=۰/۱ به ازای مقادیر مختلف تأخیر زمانی برای مدل تأخیر زمانی منفرد کسری نشان می‌دهد. در این شکل مقدار مرتبه کسری برابر α=۰/۹۹۸ در نظر گرفته شده‌است. شکل ۹ تأثیر تغییرات مقدار تأخیر زمانی منفرد کسری را در توزیع دمای جسم نشان می‌دهد، به گونه‌ای که هر چه مقدار تأخیر زمان بیشتر باشد موج ایجاد شده دارای سرعت کمتری بوده و هرچه مقدار تأخیر زمانی کمتر باشد موج گرمایی ایجاد شده دارای سرعت بیشتری می‌شود. برای مقدار تأخیر زمانی صفر رفتار گرمایی جسم کاملاً پخشی بوده و سرعت موج گرمایی بی‌نهایت است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مطالعه به بررسی انتقال حرارت غیرفوریه بر اساس مدل تأخیر زمانی منفرد کسری در یک استوانه توخالی ساخته شده از مواد هدفمند پرداخته شد. تمامی خواص جسم به صورت پیوسته و براساس قانون توانی در نظر گرفته شدند ولی تأخیر زمانی و مرتبه کسری برای سادگی به صورت ثابت مورد استفاده قرار گرفتند.

مسئله به صورت عددی و با استفاده از روش ضمنی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین مسئله با حل نیمه‌تحلیلی تأخیر زمان دوگانه اعتبارسنجی شد که حکایت از دقت بسیار بالای مدل FSPL دارد. در این بررسی به تأثیر پارامترهای غیرهمگنی و تأثیر تغییرات مرتبه کسری و تأخیر زمانی و همچنین تاریخچه دمایی جسم تا لحظه رسیدن به توزیع دمای پایا پرداخته شد که می‌توان نتایج مورد بررسی را به طور خلاصه به صورت زیر بیان کرد:

۱) سرعت موج گرمایی به پارامترهای غیرهمگنی خواص جسم وابسته است به گونه‌ای که هر چه مقدار پارامترهای غیرهمگنی در جسم بیشتر باشد سرعت موج گرمایی بیشتری را نتیجه می‌دهد.

۲) برای پارامترهای غیرهمگنی بالاتر مقدار دمای پایای بیشتری نتیجه می‌شود.

۳) با گذشت زمان و رسیدن به دمای پایا، توزیع دمای جسم مشابه مدل فوریه می‌گردد.

۴) هرچه مرتبه کسری به یک نزدیک باشد ماهیت رفتار گرمایی جسم، مشابه رفتار کاملاً موجی خواهد شد. با کاهش مقدار مرتبه کسری، ماهیت رفتار گرمایی جسم به حالت پخشی-موجی می‌رسد و برای مرتبه کسری نزدیک به

صفر رفتار گرمایی جسم کاملاً پخشی خواهد شد.

۵) هرچه مقدار تأخیر زمانی بیشتر باشد، موج ایجاد شده دارای سرعت کمتری است و برعکس.

۷- فهرست علائم

k_0	ضریب هدایت حرارتی سطح خارجی ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$)
c	ظرفیت گرمایی در فشار ثابت ($J\ kg^{-1}\ K$)
c_{p_0}	ظرفیت گرمایی در فشار ثابت برای سطح خارجی ($J\ kg^{-1}\ K$)
k	ضریب هدایت حرارتی ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$)
n	پارامتر غیرهمگنی
q	شار گرمایی ($W\ m^{-2}$)
Q	شار گرمایی بی‌بعد
r	موقعیت بردار(m)
r_i	شعاع سطح داخلی جسم (m)
r_o	شعاع سطح خارجی جسم (m)
t	زمان (s)
T	دما (K)
T_{wi}	دمای سطح داخلی (K)
T_{wo}	دمای سطح خارجی (K)
T_∞	دمای محیط (K)
r_λ	ضخامت جسم (m)

علائم یونانی

α	مرتبه کسری
ε	تأخیر زمان شار گرمایی بی‌بعد
δ	تأخیر زمان گرادیان بی‌بعد
ς	زمان بی‌بعد
η	مکان بی‌بعد
θ	دمای بی‌بعد
ρ	چگالی ($kg\ m^{-3}$)
ρ_0	چگالی سطح خارجی ($kg\ m^{-3}$)
τ_q	تأخیر زمان شار گرمایی (s)
τ_T	تأخیر زمان گرادیان دمایی (s)
ψ	نفوذ گرمایی ($m^2\ s^{-1}$)

۸- مراجع

[1] J. Rohde, S. Schmauder, G. Bao, Mesoscopic modelling of gradient zones in hardmetals, *Journal of Computational Materials Science*, Vol. 7 , No. 1, pp. 63–67, 1996.

[2] M. Koizumi, The Concept of FGM, ceramic transactions, functionally Gradient Materials, American Ceramic Society, *Westerville, OH*, Vol. 34, No. 1, pp. 3–10, 1993.

[3] P. Vernotte, Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur, *comptes rendus de l'Academie bulgare des sciences*, Vol. 246, pp. 3154–3155, 1958.

[4] C. Cattaneo, Sulla conduzione del calore, Atti del seminario matematico e fisico dell, *Universita di Modena*, Vol. 3, pp. 83–101, 1948.

[5] D.Y. Tzou , A unified field approach for heat conduction from macro- to micro-scale, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 117, No. 1, pp. 8–16, 1995.

[6] H.R. Ghazizadeh, M. Maerefat, A. Azimi, Explicit and implicit finite difference schemes for fractional Cattaneo equation, *Journal of Computational Physics*, Vol. 229, No. 19, pp. 7042–7057, 2010.

[7] J. I. Frankel , Brian Vick, M. N. Ozisik., General formulation and analysis of hyperbolic heat conduction in composite media, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 30, No. 7, pp. 1293-1305, 1987.

[8] J. Rong Ho, C. Pao Kuo, W. Shu Jiaung, Study of heat transfer in multilayered structure within the framework of dual-phase-lag heat conduction model using lattice Boltzmann method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 1, pp. 55–69, 2003.

[9] C.S. Tsai, Y.C. Lin, C.I. Hung.. A study on the non-Fourier effects in spherical media due to sudden temperature changes on the surfaces, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 41, No. 8, pp. 709-716, 2005.

[10] K. Ramadan, On the analysis of short-pulse laser heating of metals using the dual phase lag heat conduction model, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 131, No. 11, pp. 111301–111307, 2009.

[11] Z.H. shiyuanl, Z.H. bailin, H. Pengfi, Numerical analysis laminated ceramic composite by non fourier heat conduction, *Journal of Fujian University of Technology*, 2009.

[12] A. Sutradhar, G.H. Paulino, L.J. Gray, Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the Laplace transform Galerkin boundary element method, *Journal of Engineering Analysis With Boundary Element* ,Vol. 16, No. 6, pp. 65–70, 1996.

[13] A. Sutradhar, G.H. Paulino, The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials, *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 42-44, pp. 4511–4539, 2004.

[14] A. Khosravifard, M.R. Hematiyan, L. Marin, Nonlinear transient heat conduction analysis of functionally graded materials in the presence of heat sourcesusing an improved meshless radial point interpolation method, *Journal of Applied Mathematical Modelling,* Vol. 35, No. 9, pp. 4157–4174, 2011.

[15] M.H. Babaei, Z.T. Chen, Hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow sphere, *International Joural of Thermophysics,* Vol. 29, No. 3, pp. 1457–1469, 2008.

[16] M.H. Babaei, Z.T. Chen, Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder, *Journal of Thermophysics Heat Transfer*, Vol. 24, No. 2, pp. 325–330, 2010.

[17] I. Keles, C. Conker, Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties, *European Journal of Mechanics A/Solids* , Vol. 30, No. 3, pp. 449-455, 2011.

[18] H. Rahideh, P. Malekzadeh, M.R. Golbahar Haghighi, Heat conduction analysis of multi-layered FGMs considering the finite heat wave speed, *Journal of Energy Conversion Management*, Vol. 55, pp. 14–19, 2012.

[19] A.H. Akbarzadeh, Z.T. Chen, Heat conduction in one-dimensional functionally graded media based on the dual-phase-lag theory, Proc IMechE Part C*: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 0, No. 6, pp. 1–16, 2012.

[20] A.H. Akbarzadeh, Z.T. Chen, Transient Heat Conduction in a Functionally Graded Cylindrical Panel Based on the Dual Phase Lag Theory, *International Joural of Thermophysics,* Vol. 33, No. 6, pp. 1100–1125, 2012.

[21] M.R. Golbahar Haghighi, P. Malekzadeh, H. Rahideh, M. Vaghefi, Inverse transient heat conduction problems of a multilayered functionally graded cylender, *Journal of Numerical Heat Transfer*, Vol. 61, No. 9, pp. 717–733, 2012.

[22] L. Battaglia, O. Cois, L. Puigsegur, A. Oustaloup Utilisation de modèles d'identification non entiers pour la résolution de problèmes inverses en conduction, *International Journal of Thermal Science*, Vol. 39, No. 3, pp. 374-389, 2000.

[23] J.L. Battaglia, O. Cois, L. Puigsegur, A. Oustaloup, Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, No. 14, pp. 2671–2680, 2001.

[24] D.A. Murio, Time fractional IHCP with Caputo fractional derivatives, *Journal of Computers and Mathematics With Applications*, vol. 56, No. 9, pp. 2371–2381, 2008.

[25] H.R. Ghazizadeh , A. Azimi , M. Maerefat, An inverse problem to estimate relaxation parameter and order of fractionality in fractional single-phase-lag heat equation, *International Journal of Heat and Mass Transfer* ,Vol. 55 , No. 7-8, pp. 2095–2101, 2012.

[26] Z.M. Odibat, N.T. Shawagfeh, Generalized Taylor's formula, *Journal of Applied Mathematics and Computation*. Vol. 186, No. 1, pp. 286–293, 2007.

[27] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, *Academic Press*, New York, 1999.

[DOR: 20.1001.1.10275940.1393.14.7.19.0]