



## بررسی عددی تأثیر دمش بر رفتار هیدرودینامیکی جریان‌های کاویتاسیونی عبوری از هیدروفویل‌ها با استفاده از روش پیش شرط توانی

پوریا اکبرزاده<sup>۱\*</sup>، ابراهیم اکبرزاده<sup>۲</sup>

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

۲- کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

\* akbarzad@ut.ac.ir، ۳۶۱۹۹۹۵۱۶۱ صندوق پستی

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۹ دی ۱۳۹۲

پذیرش: ۰۳ اسفند ۱۳۹۲

ارائه در سایت: ۰۸ شهریور ۱۳۹۳

کلید واژگان:

دمش

روش پیش شرط توانی

جریان کاویتاسیونی

مدل باروتروپیک

ضرایب برآ و پسای فشاری

### چکیده

تحلیل و شبیه‌سازی عددی جریان‌های کاویتاسیون به دلیل ظهور و کاربرد آن در صنایع دریایی، توربوماشین‌های آبی، هیدروفویل‌ها، اجسام زیرسطحی و غیره از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. به همین دلیل در این تحقیق اثر دمش بر رفتار هیدرودینامیکی جریان‌های کاویتاسیونی عبوری از هیدروفویل‌ها بررسی شده است. روش حجم محدود جیمسون و روش پیش شرط توانی به همراه مدل تک‌فازی کاویتاسیون (مدل باروتروپیک) برای تحلیل جریان کاویتاسیونی استفاده شده است. پایداری حل به کمک جملات اتلافی مرتبه دوم و چهارم به دست آمده است. برای رسیدن به حالت دائم از روش چهار مرحله‌ای صریح رانگ-کوتا استفاده شده است. با توجه به این که غالباً کاویتاسیون در اعداد رینولدز بالا رخ می‌دهد، جهت سهولت در شبیه‌سازی، معادلات جریان غیرلزج در نظر گرفته شده، برای اعمال دمش از سطح هیدروفویل، یک جت در سطح فوقانی هیدروفویل قرار داده شده است. پارامترهای محل جت، نسبت سرعت دمش، زاویه دمش و پهنای جت متغیرهای مورد بررسی است. شبیه‌سازی در دو عدد کاویتاسیون متفاوت صورت گرفته است. نتایج عددی نشان می‌دهد روش پیش شرط توانی سرعت همگرایی را تا حد زیادی افزایش می‌دهد. دمش سبب کاهش ضرایب برآ و پسای فشاری و طول کاویتا نسبت به حالت بدون دمش می‌شود. همچنین افزایش نسبت سرعت دمش، زاویه دمش و پهنای جت موجب کاهش طول کاویتا و ضرایب برآ و پسای فشاری می‌شود.

## Numerical investigation of blowing effect on hydrodynamic behavior of cavitating flows over hydrofoils using power law preconditioning method

Pooria Akbarzadeh<sup>1\*</sup>, Ebrahim Akbarzadeh<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

\* P.O.B. 3619995161 Shahrood, Iran, akbarzad@ut.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 19 January 2014  
Accepted 22 February 2014  
Available Online 30 August 2014

#### Keywords:

Blowing  
Power-Law Preconditioning Method  
Cavitating Flow  
Barotropic Model  
Lift and Pressure Drag Coefficients

### ABSTRACT

Numerical analysis and simulation of cavitating flows due to appearance and its application in the maritime industry, water turbomachinery, hydrofoils, underwater vehicles, etc. have specific importance. For this reason in this research, the effect of blowing on hydrodynamic behavior of cavitating flows over hydrofoils has been investigated. Jameson's finite volume method and power-law preconditioning method with single-phase cavitation model (Barotropic model) have been used to the analyzing of cavitating flow. The stabilization of solution has been achieved with help of the second and fourth-order dissipation term. Explicit four step Runge-Kutta method has been used to achieve the steady state condition. As regards the cavitation often occurs at high Reynolds number, to facilitate the simulation the inviscid flow equations are considered. For apply the blowing from hydrofoil surface, a jet has been placed on hydrofoil's upper surface. The parameters of jet location, blowing velocity ratio, blowing angle and width of jet are investigated and simulation has been performed for two different cavitation numbers. The numerical results show that the power-law preconditioning increases the convergence speed significantly. Blowing reduces the cavity length, lift and pressure drag coefficients compared to no blowing case. Also the increase of blowing velocity ratio, blowing angle and width of jet, decrease the cavity length, lift and pressure drag coefficients.

### ۱- مقدمه

صدا، نوسان و کاهش بازده پمپ‌های هیدرولیکی می‌شود؛ با این وجود کاربردهای مفید و مطلوبی نظیر کاهش نیروی پسا در اجسام زیر سطحی دارد؛ بنابراین با توجه به اهمیت پدیده کاویتاسیون، مطالعات بسیاری توسط محققان انجام گرفته است. گرسنت [۱] در سال ۱۹۵۹ کاویتاسیون حول هیدروفویل در

مطالعه و بررسی جریان‌های کاویتاسیونی موضوع مهمی در طراحی و عملکرد دستگاه‌های مهندسی از جمله هیدروفویل‌ها، اجسام زیرسطحی و توربو ماشین‌هاست. جریان کاویتاسیونی اغلب سبب مشکلات نامطلوب مانند ایجاد

### Please cite this article using:

P. Akbarzadeh, E. Akbarzadeh, Numerical investigation of blowing effect on hydrodynamic behavior of cavitating flows over hydrofoils using power law preconditioning method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 8, pp. 59-67, 2014 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

محدود جیمسون برای تحلیل جریان‌های غیرلزج کاویتاسیونی به‌کار گرفته؛ همچنین از روش پیش‌شرط توانی معرفی شده توسط اصفهانیان و اکبرزاده [۲۱] جهت تسریع در روند همگرایی استفاده شده است. پایداری حل به‌کمک جملات اتلافی مرتبه دوم و چهارم به‌دست آمده است. برای پیمایش در زمان و رسیدن به حالت دائم از الگوریتم چهار مرحله‌ای رانگ-کوتا<sup>۵</sup> استفاده شده؛ در این مطالعه برای شبیه‌سازی جریان‌های کاویتاسیونی از مدل باروتروپیک معرفی شده توسط دلتوی [۲۳] استفاده شده است. برای اعمال دمش از سطح هیدروفویل، یک جت در سطح فوقانی هیدروفویل قرار داده شده؛ کمیت‌های محل جت، سرعت دمش، زاویه دمش و پهنای جت متغیر است. مطالعه بر هیدروفویل‌های NACA16009 و NACA66(MOD) در جریان کاویتاسیونی برای دو عدد کاویتاسیون متفاوت صورت گرفته شده است. باتوجه به این‌که اغلب کاویتاسیون در رینولدزهای زیاد رخ می‌دهد جهت سهولت در شبیه‌سازی، معادلات جریان غیر لزج در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که دمش سبب کاهش طول کاویتی و ضرایب برآ و پسای فشاری نسبت به حالت بدون جت می‌شود و با افزایش نسبت سرعت دمش، طول کاویتی و ضرایب برآ و پسای فشاری کاهش می‌یابد. افزایش زاویه دمش و پهنای جت، طول کاویتی و ضرایب برآ و پسای فشاری را کاهش می‌دهد.

## ۲- معادلات حاکم پیش‌شرط شده

معادله پیش‌شرط‌سازی شده غیرلزج دوبعدی تراکم‌ناپذیر در شکل بقای برداری به‌صورت رابطه (۱) نوشته می‌شود:

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

در رابطه بالا  $\Gamma$  ماتریس پیش‌شرط،  $\vec{Q}$  بردار متغیرهای اولیه و  $\vec{F}$  بردارهای شار عددی بوده و مطابق معادله (۲) نمایش داده می‌شود.

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ -\sigma u/\rho & 1/\rho & 0 \\ -\sigma v/\rho & 0 & 1/\rho \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \end{pmatrix}, \vec{E} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \end{pmatrix}$$

که در آن  $u = \bar{u}/U_\infty$  و  $v = \bar{v}/U_\infty$  به‌ترتیب سرعت در جهت  $x$  و  $y$ ،  $\beta = \bar{p}/\rho_\infty U_\infty^2$  و  $\sigma = \bar{p}/\rho_\infty U_\infty^2$  مختصات کارتزین،  $t = \bar{t} U_\infty/L$  و  $L$  طول مرجع و  $U_\infty$  سرعت مرجع است.  $\bar{\rho}$  چگالی نسبی است. همچنین  $\bar{t} U_\infty/L$  طول مرجع و  $U_\infty$  سرعت مرجع است.  $\bar{\rho}$  کمیت با بعد  $\varphi$  نشان می‌دهد.  $\beta$  ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی می‌باشد که مطابق مرجع [۲۰] استخراج شده،  $\sigma$  ضریب پیش‌شرط بوده که در روش پیش‌شرط توانی اصفهانیان و اکبرزاده [۲۱] برای جریان غیرلزج به‌صورت رابطه (۳) تعریف شده است:

$$\sigma = (1 - A_u)^m \quad (3)$$

که در آن  $m$  عدد صحیح مثبت و  $A_u$  یک حسگر سرعت است.

$$A_u = \lim_{x \rightarrow x_m} \frac{|\nabla u(x_m) - \nabla u(x)|}{|\nabla u(x_m)| + |\nabla u(x)|} \quad (4)$$

$\nabla u(x_m)$  گرادیان سرعت در  $x = x_m$  است و از رابطه (۵) به‌دست می‌آید:

$$\nabla u(x_m) = \lim_{x \rightarrow x_m} \frac{u(x) - u(x_m)}{x - x_m} \quad (5)$$

شایان یاد است اگر  $\sigma = 0$  و  $\sigma = 1$  انتخاب شود به‌ترتیب معادل روش پیش‌شرط ترکل و روش تراکم‌پذیری مصنوعی کورین خواهد بود.

## ۳- مدل کاویتاسیون باروتروپیک

در کنار اهمیت شبیه‌سازی جریان‌های غیر کاویتاسیونی، شبیه‌سازی و تحلیل

عدد کاویتاسیون محدود را با استفاده از تئوری خطی پیش‌بینی کرد و بعدها روش خود را برای کاویتاسیون گسترده تعمیم داد. در سال ۱۹۸۷ اهلمن [۲] روش توزیع گردابه را برای حل جریان کاویتاسیون جزئی حول هیدروفویل دو بعدی به‌کار گرفت. فاین و کینانس [۳، ۴] روش توزیع چشمه و دابلت را برای حل جریان کاویتاسیون جزئی حول هیدروفویل دو بعدی معرفی کردند. دولار و همکارانش [۵] در سال ۲۰۰۵ شبیه‌سازی عددی حول هیدروفویل را انجام دادند. پسندیده‌فرد و همکارانش از روش توزیع گردابه در مرزهای هیدروفویل و گردابه برای تحلیل کاویتاسیون جزئی و گسترده استفاده کردند [۶]. در سال ۲۰۰۹ هجرانفر و همکارانش [۷] جریان دو بعدی کاویتاسیونی آشفته حول هیدروفویل NACA0012 و NACA66(MOD) را شبیه‌سازی کردند. سروشان و همکارانش جریان کاویتاسیونی غیردائم را مدل‌سازی کردند [۸]. لی و همکارانش [۹] جریان کاویتاسیون در عدد کاویتاسیون ۱ را حول هیدروفویل NACA0015 حل کردند. کریم و همکارش [۱۰] در سال ۲۰۱۲ به مطالعه و پیش‌بینی کاویتاسیون حول هیدروفویل NACA0012 پرداختند. بهبهانی‌نژاد و همکارانش [۱۱] مدل رتبه کاسته را برای شبیه‌سازی جریان غیردائم کاویتاسیون جزئی ارائه کردند. آن‌ها نشان دادند که این مدل از لحاظ زمان محاسباتی بهینه‌تر از روش‌های متداول در تحلیل جریان غیردائم کاویتاسیون جزئی حول هیدروفویل عمل می‌کند. روحی و همکارانش [۱۲] جریان کاویتاسیونی را با استفاده از مدل LES شبیه‌سازی کردند. سلیم و همکارانش [۱۳] روش المان مرزی را برای پیش‌بینی کاویتاسیون به‌کار گرفتند.

در سال‌های اخیر برنامه‌های محاسباتی برای رفع مشکلاتی مانند پایداری و زمان‌بر بودن شبیه‌سازی‌های عددی بهبود داده شده‌اند. روش پیش‌شرط‌سازی<sup>۱</sup> نیز سعی بر رفع این مشکلات دارد. روش تراکم‌پذیری مصنوعی استاندارد<sup>۲</sup> (SAC) که توسط کورین [۱۴] و برای حل معادلات تراکم‌ناپذیر معرفی شد را می‌توان از اولین روش‌های پیش‌شرط قلمداد کرد. سپس ترکل [۱۵] برای افزایش سرعت همگرایی روشی را معرفی کرد که به روش پیش‌شرط استاندارد<sup>۳</sup> (SPM) معروف شد. پس از کورین و ترکل، محققانی مانند چوی و مرکل [۱۶]، زاکانتی [۱۷] و ملان و همکارانش [۱۸] مطالعات تکمیلی در زمینه پیش‌شرط‌سازی را برای جریان‌های تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر، لزج و غیرلزج، پایا و ناپایا انجام دادند. یک تحقیق جامع در موضوع پیش‌شرط‌سازی به‌وسیله ون لیر و همکارانش [۱۹] صورت گرفت. آن‌ها ماتریس بهینه پیش‌شرط‌سازی را به‌دست آوردند. در سال ۲۰۰۲ ملان و همکاران [۲۰] روش پیش‌شرط‌سازی تعمیم یافته را برای تحلیل جریان‌های تراکم‌ناپذیر پایا و ناپایا معرفی کردند. در سال ۲۰۱۰ اصفهانیان و اکبرزاده [۲۱، ۲۲] روش پیش‌شرط‌سازی توانی<sup>۴</sup> را ارائه دادند. در پیش‌شرط‌سازی توانی، ماتریس پیش‌شرط به‌وسیله یک رابطه توانی و به‌کمک سرعت یا فشار محلی در هر گام زمانی تصحیح می‌شود.

با توجه به موارد یاد شده ملاحظه می‌شود که تحقیقات صورت گرفته در حوزه کاویتاسیون و جریان‌های کاویتاسیونی عمدتاً شامل مدل‌سازی جریان کاویتاسیونی و تأثیر پدیده کاویتاسیون بر رفتار آئرو‌دینامیکی اجسام غوطه‌ور است و تاکنون تأثیر تریق سیال بر جریان کاویتاسیون و آثار آئرو‌دینامیکی آن مورد مطالعه جدی قرار نگرفته است؛ بنابراین در تحقیق حاضر به بررسی اثر دمش سیال از سطح هیدروفویل بر ضرایب آئرو‌دینامیکی برآ و پسا به‌طور کمی و تأثیر آن بر طول کاویتی به‌طور کیفی پرداخته شده است. روش حجم

1- Preconditioning method  
2- Standard Artificial Compressibility  
3- Standard Preconditioning Method  
4- Power-Law Preconditioning Method

عبارت اتلاف مصنوعی  $D_{i,j,k}$  متشکل از دو عبارت مرتبه دوم و چهارم برای بار اول توسط جیمسون [۳۵] پیشنهاد شد. برای حل معادلات بالا از روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای مطابق رابطه (۱۰) استفاده شده است [۳۴، ۳۳] (که ۴ و ۳، ۲، ۱ و  $k$  و ضرایب  $\alpha_k$ ، به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۱ انتخاب شده‌اند):

$$\begin{aligned} Q_{i,j,k}^{(0)} &= Q_{i,j,k}^{(n)} \\ Q_{i,j,k}^{(k)} &= Q_{i,j,k}^{(0)} - \frac{\Delta t}{\alpha_k A_{i,j}} (Q_{i,j,k}^{(k-1)} - Q_{i,j,k}^{(0)}) \\ Q_{i,j,k}^{(n+1)} &= Q_{i,j,k}^{(4)} \end{aligned} \quad (11)$$

#### ۵- شرایط مرزی

برای مرز دیواره، در جریان غیرلزج، فشار و سرعت‌ها از روش سلول مجاری محاسبه می‌شود. در مرز ورودی، اندازه مؤلفه‌های سرعت ثابت و برابر مقدار آنها در جریان آزاد قرار داده می‌شوند و فشار از داخل میدان جریان برون‌یابی می‌شود. در مرز خروجی، فشار برابر با فشار جریان آزاد و مؤلفه‌های سرعت با استفاده از برون‌یابی از داخل میدان تعیین می‌شود. در مرز جت دمش، اندازه مؤلفه‌های سرعت ثابت و برابر مقدار سرعت دمش است و فشار از داخل میدان برون‌یابی می‌شود.

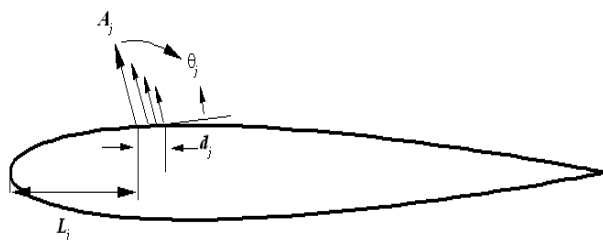
#### ۶- کمیت‌های دمش

چهار کمیت در شبیه‌سازی عددی کنترل دمش مطابق شکل ۱ مورد استفاده قرار گرفته است. این کمیت‌ها پهنای جت،  $d_j$ ، محل جت،  $L_j$ ، نسبت سرعت جت،  $A_j$  و زاویه دمش،  $\theta_j$  هستند.  $A_j$  برابر نسبت سرعت جت به سرعت جریان آزاد  $(V_j/U_\infty)$  تعریف می‌شود. یک جت در سطح فوقانی هیدروفویل قرار داده و شبیه‌سازی برای مقادیر مختلف پهنای جت،  $d_j$  (۲/۵ الی ۱۰ درصد طول وتر)، موقعیت جت،  $L_j$  (۰/۳ الی ۰/۹ طول وتر)، نسبت سرعت دمش،  $A_j$  (۰/۱ الی ۰/۱) و زاویه جت دمش،  $\theta_j$  (۳۰ الی ۹۰ درجه) انجام پذیرفته است.

#### ۷- نتایج

برای ارزیابی روش مورد استفاده در شبیه‌سازی، تعداد زیادی شبکه با اندازه‌های مختلف در نظر گرفته شد که محاصل آن انتخاب شبکه‌ای با ابعاد  $150 \times 64$  برای هیدروفویل NACA16009 و  $180 \times 64$  برای هیدروفویل NACA66(MOD) از نوع دایروی [۲۲] بود. نمونه‌ای از شبکه مورد استفاده برای هیدروفویل‌های NACA16009 و NACA66(MOD) در شکل ۲ نشان داده شده است.

در این بخش جریان تراکم‌ناپذیر کائیتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA16009 در زاویه حمله ۳ درجه و عدد کائیتاسیون  $s=0.66$  و هیدروفویل NACA66(MOD) در زاویه حمله ۴ درجه و عدد کائیتاسیون  $s=0.84$  به کمک روش پیش شرط توانی شبیه‌سازی شده است. جهت اعتبارسنجی حل عددی، توزیع فشار روی دیواره،  $C_p$ ، برای هیدروفویل NACA16009 بدون اعمال دمش، با نتایج عددی کریشناسوامی [۳۶] مقایسه شده است.



شکل ۱ کمیت‌های کنترل دمش

پدیده کائیتاسیون و جریان‌های کائیتاسیونی نیز به دلیل تأثیر مستقیم آن در عملکرد تجهیزاتی نظیر توربوماشین‌های آبی، هیدروفویل‌ها، انژکتورهای سوختی، پره‌های پروانه‌ای زیردریایی‌ها، اجسام زیر سطحی و غیره مورد توجه محققان قرار گرفته است. طبق تعریف، کائیتاسیون در یک سیال و در نقاطی که فشار محلی کمتر از فشار بخار می‌شود می‌تواند رخ دهد. اصلی‌ترین مشکل شبیه‌سازی عددی پدیده کائیتاسیون وجود هم‌زمان دو نوع سیال با خواص به نسبت متفاوت است: سیال تک‌فاز تراکم‌ناپذیر (مایع خالص و بخار مایع خالص) و یک فاز ترکیبی تراکم‌پذیر. دلانوی و کوانی [۲۳] یک رابطه حالت باروتروپیک برای فاز ترکیبی یاد شده پیشنهاد دادند که مخلوطی تک‌فاز با چگالی وابسته به دو فاز مایع و بخار را مدل‌سازی می‌کند. این مدل به تازگی توسط محققانی نظیر مرکل و همکارانش [۲۴]، سانگ و همکارانش [۲۵]، کوئیر و همکارانش [۲۶-۲۹] و اصفهانیان و همکارانش [۳۰] در شبیه‌سازی جریان‌های کائیتاسیون مورد استفاده قرار گرفته است. شایان یاد است که استفاده از رویکرد معادله حالت برای مدل‌سازی کائیتاسیون اما با روابطی دیگر نیز در مراجعی نظیر [۳۱]، [۳۲] قابل مشاهده است. در این مطالعه از مدل دلانوی و کوانی [۲۳] استفاده می‌شود. بدین ترتیب که هرگاه سیال مایع باشد، سیال مورد نظر پر از مایع با چگالی  $\rho_l$  و هرگاه سیال بخار باشد، سلول مورد نظر پر از بخار با چگالی  $\rho_v$  در نظر گرفته می‌شود. در نواحی که هر دو سیال حضور داشته باشند، چگالی مخلوط از رابطه (۶) محاسبه می‌شود:

$$\rho = \frac{\rho_l}{\rho_v} \left\{ \frac{\rho_l + \rho_v}{2} + \frac{\rho_l - \rho_v}{2} \sin \left( \frac{2}{C_{\min}} \frac{p - p_{\text{vap}}}{\rho_l - \rho_v} \right) \right\} \quad (6)$$

$p - p_{\text{vap}} > \Delta p_{\text{vap}}$   
 $|p - p_{\text{vap}}| < \Delta p_{\text{vap}}$   
 $p - p_{\text{vap}} < -\Delta p_{\text{vap}}$

که  $p_{\text{vap}}$  فشار بخار سیال،  $C_{\min}$  کم‌ترین سرعت صوت در سیال و  $\Delta p_{\text{vap}} = \pi C_{\min}^2 / (\rho_l - \rho_v)$  در مدل باروتروپیک مقدار  $C_{\min}$  نقش مهمی در تعیین اندازه طول و ضخامت حفره کائیتاسیون دارد. بهترین انتخاب این کمیت بین  $1.5 \text{ m/s}$  و  $4.0 \text{ m/s}$  است [۲۴]. کمیت دیگری که در جریان‌های کائیتاسیون از آن یاد می‌شود، عدد کائیتاسیون بوده که به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود [۲۸]:

$$s = \frac{p_\infty - p_{\text{vap}}}{1/2 \rho_\infty U_\infty^2} \quad (7)$$

#### ۴- روش حجم محدود جیمسون

معادلات حاکم پیش‌شرط‌سازی ارائه شده در رابطه (۱) به شکل انتگرالی در یک حجم کنترل  $\Omega$  که سطح آن  $\partial\Omega$  است، به صورت رابطه (۸) بیان می‌شوند:

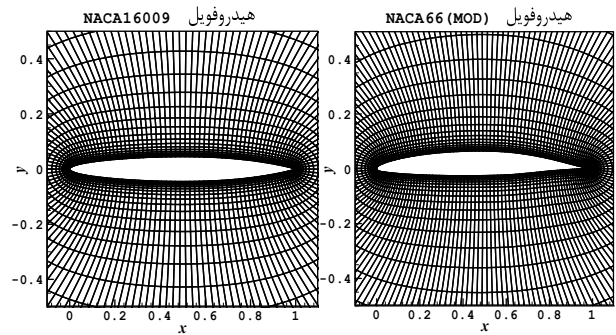
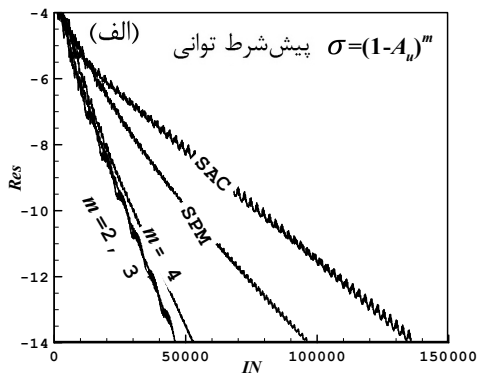
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \bar{Q} dA + \bar{F} \oint_{\partial\Omega} (\bar{F} dx - \bar{E} dy) = 0 \quad (8)$$

این معادلات در شکل بقایی خود به روش حجم محدود سلول-مرکزی در حجم سلول محاسباتی  $(i,j)$  همراه با جملات اتلافی جیمسون [۳۳، ۳۴] به شکل رابطه (۹) در می‌آیند:

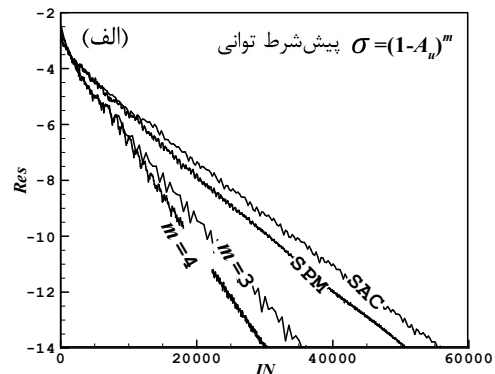
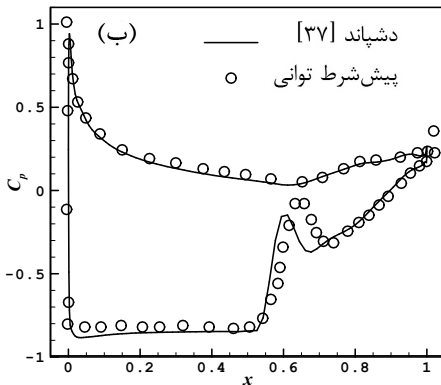
$$A_{i,j} \frac{\partial Q_{i,j,k}}{\partial t} = G_{i,j,k} + D_{i,j,k} \quad (9)$$

که  $k=1, 2, 3$  شاخص مؤلفه‌های بردار،  $A_{i,j}$  مساحت سلول  $(i,j)$  ام و  $G_{i,j,k}$  شار عددی مرتبط با سلول است:

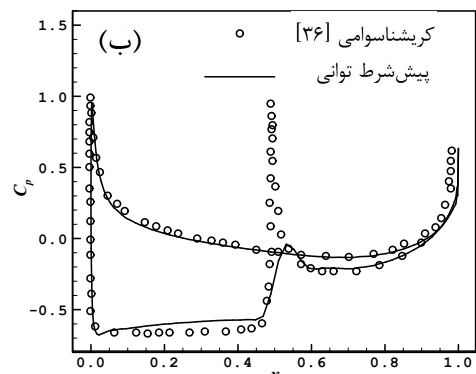
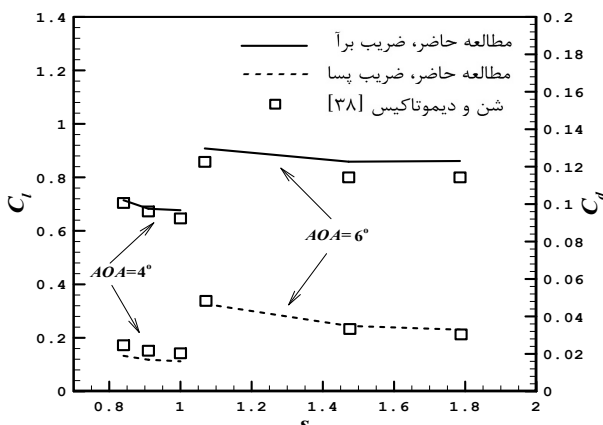
$$\begin{aligned} G_{i,j,1} &= \beta^2 \sum (F_1 dy - E_1 dx)_{i,j} \\ G_{i,j,2} &= -\frac{\sigma u_{i,j} G_{i,j,1}}{\beta^2} \sum (F_2 dy - E_2 dx)_{i,j} \\ G_{i,j,2} &= -\frac{\sigma u_{i,j} G_{i,j,1}}{\beta^2} \sum (F_2 dy - E_2 dx)_{i,j} \end{aligned} \quad (10)$$



شکل ۲ نمونه‌ای از شبکه مورد استفاده برای هیدروفویل های NACA16009 و NACA66(MOD)



شکل ۳ جریان غیرلزج کاویتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA66(MOD) در زاویه حمله ۴ درجه و عدد کاویتاسیون 0.84: (الف) نرخ همگرایی (ب) توزیع فشار روی دیواره



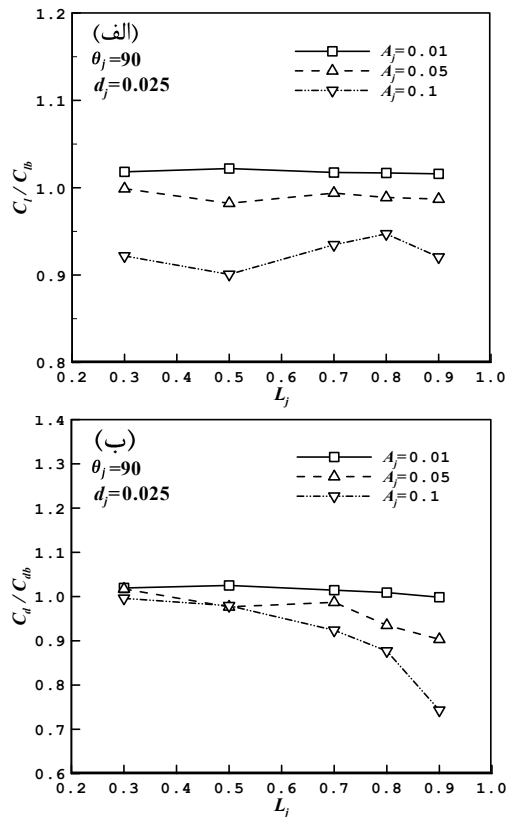
شکل ۴ جریان غیرلزج کاویتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA16009 در زاویه حمله ۳ درجه و عدد کاویتاسیون 0.66: (الف) نرخ همگرایی (ب) توزیع فشار روی دیواره

شکل ۵ ضریب برآ و پسای فشاری در جریان غیرلزج کاویتاسیونی برای هیدروفویل NACA66(MOD) بدون دمزش در زاویه حمله ۴ و ۶ درجه

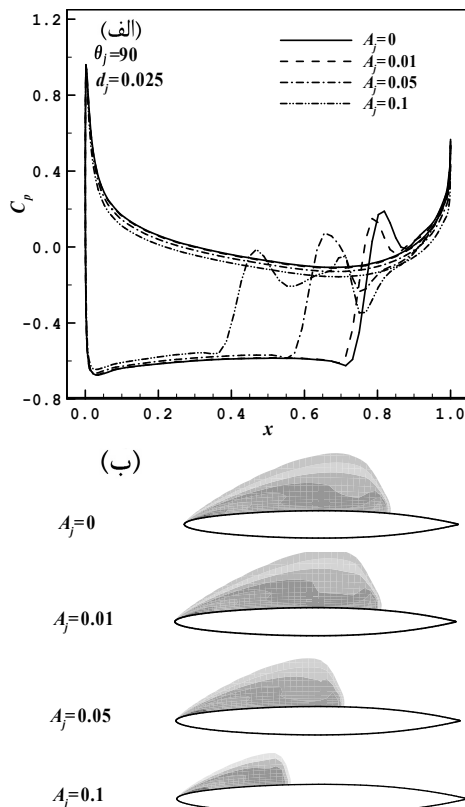
در شکل ۳ توزیع فشار روی دیواره هیدروفویل و نرخ همگرایی حل نشان داده شده است. مطابق شکل ۳ مشاهده می‌شود نتایج شبیه‌سازی عددی انطباق خوبی با نتایج عددی کریشناسوامی [۳۶] دارد و اعمال روش پیش شرط توانی نسبت به روش‌های دیگر پیش شرط بین ۳۶ تا ۴۵ درصد سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد. برای هیدروفویل NACA66(MOD) توزیع فشار روی دیواره،  $C_p$  بدون اعمال دمزش، با نتایج دشیانند و همکارانش [۳۷] مقایسه شده و به همراه نرخ همگرایی در شکل ۴ نمایش داده شده است. نتایج حاکی از انطباق خوب نتایج با داده‌های دشیانند و همکارانش [۳۷] و همچنین افزایش ۵۰ تا ۶۵ درصدی سرعت همگرایی است. جهت اعتبارسنجی تکمیلی، مقادیر ضریب برآ و پسای فشاری برحسب عدد کاویتاسیون برای هیدروفویل NACA66(MOD) محاسبه و با نتایج تجربی شن و دیموتاکیس [۳۸] در شکل ۵ مقایسه شده است. مقادیر محاسبه شده انطباق خوبی با نتایج تجربی دارد.

نتایج عددی ضرایب برآ و پسای فشاری در زاویه دمزش ۹۰ درجه و سرعت‌ها و موقعیت‌های مختلف جت دمزش برای هیدروفویل های NACA16009 و NACA66(MOD)، به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است.  $C_{DIB}$  ضریب برآ و  $C_{DB}$  ضریب پسای فشاری در حالت بدون جت می‌باشند. شایان یاد است که ضریب برآ،  $C_L$  و ضریب پسای فشاری،  $C_D$  به ترتیب از روابط  $C_L = F_L / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c$  و  $C_D = F_D / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c$  به دست می‌آیند که  $F_L$ ، نیروی برآ،  $F_D$ ، نیروی پسای فشاری و  $c$  طول وتر هیدروفویل است که در این تحقیق برابر واحد در نظر گرفته شده است. با توجه با شکل ۶ مشاهده می‌شود برای هیدروفویل NACA16009 دمزش در تمامی سرعت‌ها، ضریب برآ و پسای فشاری را نسبت به حالت بدون دمزش کاهش می‌دهد و با افزایش نسبت سرعت دمزش ضریب برآ و ضریب پسای فشاری کاهش می‌یابد. شکل ۷ نشان می‌دهد در هیدروفویل NACA66(MOD) دمزش در نسبت سرعت پایین

پس از اعتبارسنجی شبیه‌سازی عددی و ارزیابی سرعت همگرایی روش پیش شرط‌سازی توانی، اثر دمزش روی ضرایب آئرو دینامیکی و طول کاویتی به‌طور جداگانه بررسی و نتایج آن‌ها ارائه شده‌اند.



شکل ۷ نتایج عددی دمش جریان کائیتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA66(MOD) در زاویه حمله ۴ درجه و عدد کائیتاسیون 0.84: (الف) ضریب برآ (ب) ضریب پسای فشاری

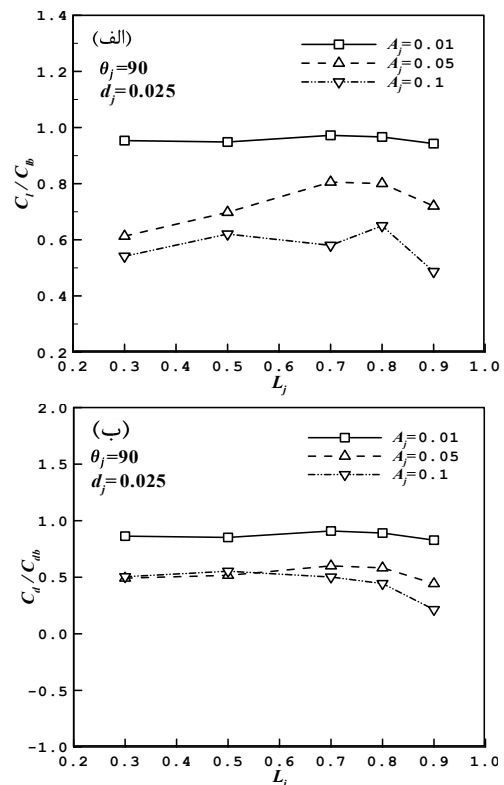


شکل ۸ جریان کائیتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA16009 در زاویه حمله ۳ درجه، عدد کائیتاسیون 0.66 و  $L_j = 0.7$ : (الف) توزیع فشار بر دیواره (ب) خطوط هم‌تراز چگالی

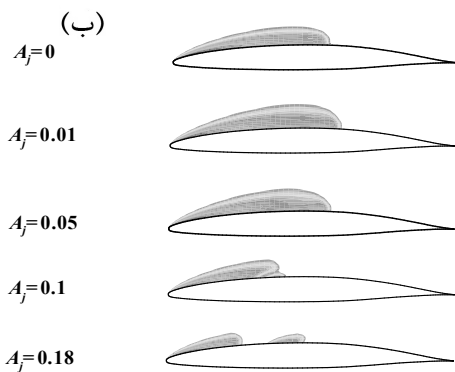
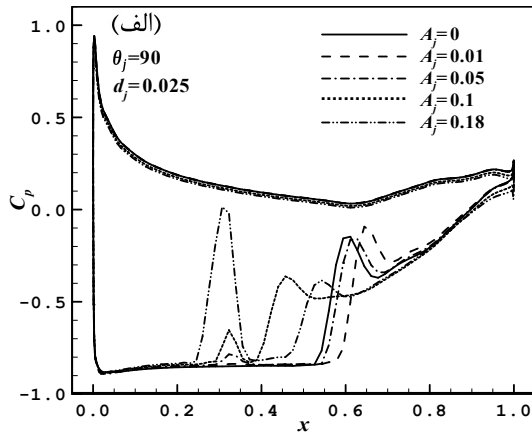
(۰/۰۱) ضریب برآ و پسای فشاری را نسبت به حالت بدون دمش افزایش می‌دهد، ولی با افزایش نسبت سرعت، ضریب برآ و پسای فشاری نسبت به حالت بدون دمش کاهش می‌یابد. همچنین نتایج نشان می‌دهد تغییر موقعیت جت دمش، تأثیر محسوسی بر ضرایب برآ و پسای فشاری ندارد.

در شکل ۸ منحنی ضریب فشار روی دیواره،  $C_p$  و خطوط هم‌تراز چگالی برای هیدروفویل NACA16009 در نسبت سرعت‌های مختلف دمش و  $L_j = 0.7$  نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که سبب کاهش طول کائیتی نسبت به حالت بدون دمش می‌شود و با افزایش نسبت سرعت دمش طول کائیتی کاهش می‌یابد. با توجه به توزیع فشار (شکل ۸ الف) مشاهده می‌شود اختلاف توزیع فشار پایین دست کائیتی و سطح تحتانی هیدروفویل ناچیز است. در نتیجه سهم اعظم میزان ضریب برآ و پسای فشاری ناشی از اختلاف فشار ناحیه کائیتی و سطح تحتانی متناظر با ناحیه کائیتی هیدروفویل است که با کاهش طول کائیتی، این اختلاف فشار کاهش می‌یابد و همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود منجر به کاهش ضریب برآ و پسای فشاری می‌گردد. همچنین موقعیت‌های مختلف جت دمش بررسی گردید و همان‌طور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود در  $L_j = 0.3$  با افزایش نسبت سرعت جت و در  $A_j = 0.15$ ، کائیتی به دو کائیتی کوچک‌تر تبدیل می‌شود.

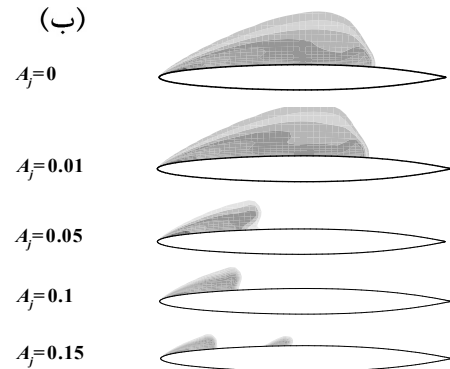
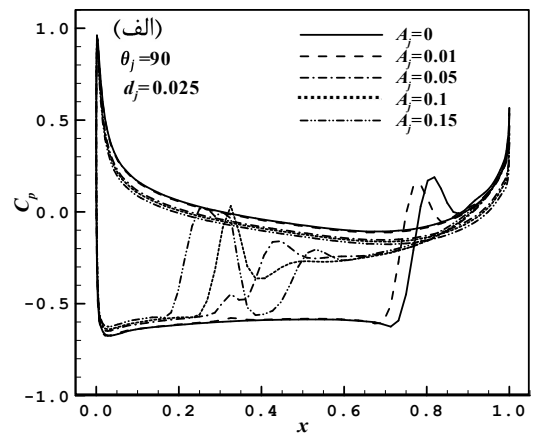
برای هیدروفویل NACA66(MOD) توزیع فشار بر دیواره،  $C_p$  و خطوط هم‌تراز چگالی در سرعت‌های مختلف دمش و  $L_j = 0.7$  در شکل ۱۰ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در سرعت‌های پایین طول کائیتی را به‌طور قابل توجهی تغییر نمی‌دهد، ولی در سرعت بالا (۰/۱) سبب کاهش طول کائیتی نسبت به حالت بدون دمش می‌شود. همچنین مطابق شکل ۱۱ در  $L_j = 0.3$  با افزایش نسبت سرعت جت و در  $A_j = 0.18$ ، کائیتی به دو کائیتی کوچک‌تر تبدیل می‌شود.



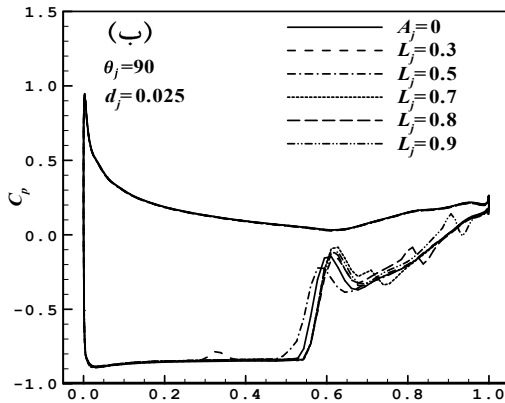
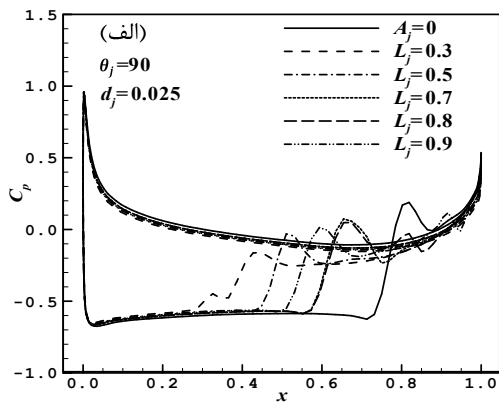
شکل ۹ نتایج عددی دمش در جریان کائیتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA16009 در زاویه حمله ۳ درجه و عدد کائیتاسیون 0.66: (الف) ضریب برآ (ب) ضریب پسای فشاری



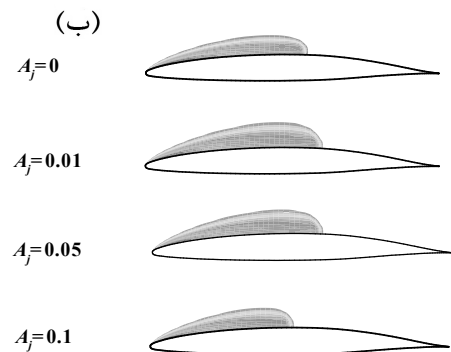
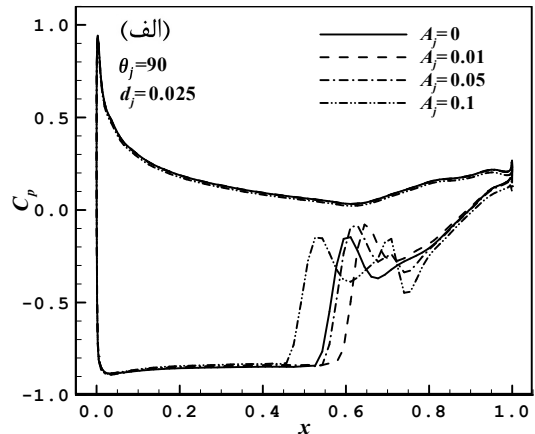
شکل ۱۱ جریان کایوتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA66(MOD) در زاویه حمله ۴ درجه، عدد کایوتاسیون 0.84 و  $L_j = 0.3$ : (الف) توزیع فشار بر دیواره (ب) خطوط هم‌تراز چگالی



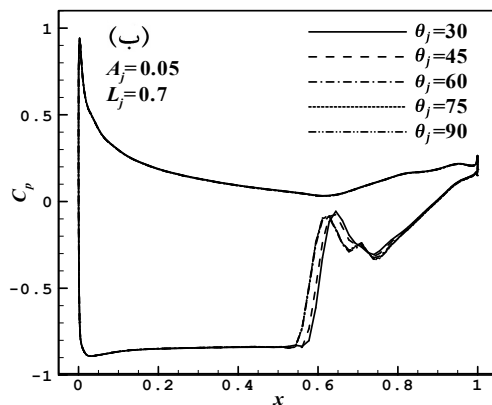
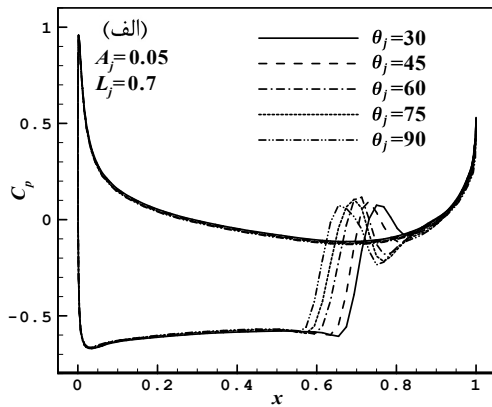
شکل ۹ جریان کایوتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA16009 در زاویه حمله ۳ درجه، عدد کایوتاسیون 0.66 و  $L_j = 0.3$ : (الف) توزیع فشار بر دیواره (ب) خطوط هم‌تراز چگالی



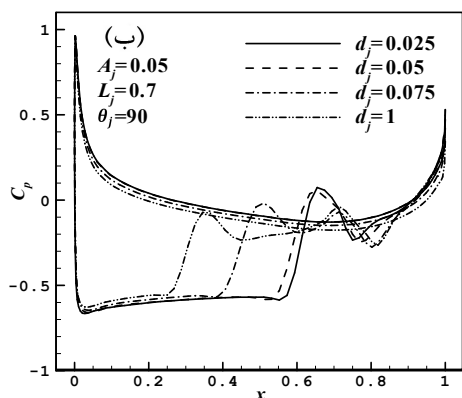
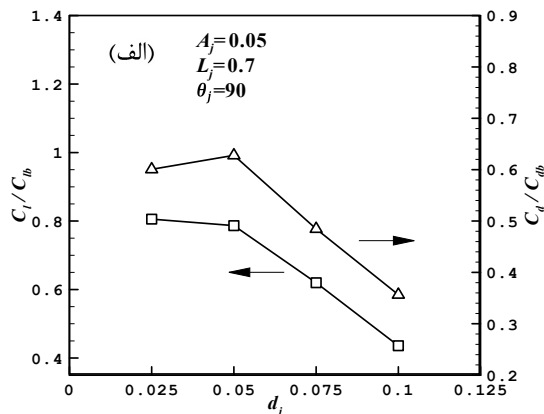
شکل ۱۲ توزیع فشار بر دیواره در موقعیت‌های مختلف دمش (الف) هیدروفویل NACA16009 در زاویه حمله ۳ درجه و عدد کایوتاسیون 0.66 (ب) هیدروفویل NACA66(MOD) در زاویه حمله ۴ درجه و عدد کایوتاسیون 0.84



شکل ۱۰ جریان کایوتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA66(MOD) در زاویه حمله ۴ درجه، عدد کایوتاسیون 0.84 و  $L_j = 0.7$ : (الف) توزیع فشار بر دیواره (ب) خطوط هم‌تراز چگالی



شکل ۱۴ توزیع فشار بر دیواره در زوایای دمش مختلف، الف هیدروفویل NACA16009 در زاویه حمله ۳ درجه و عدد کائیتاسیون ۰.۶۶ ب هیدروفویل NACA66(MOD) در زاویه حمله ۴ درجه و عدد کائیتاسیون ۰.۸۴



شکل ۱۵ اثر پهنای جت بر جریان کائیتاسیونی عبوری از هیدروفویل NACA16009: (الف) ضریب برآ و پسای فشاری (ب) توزیع فشار روی دیواره

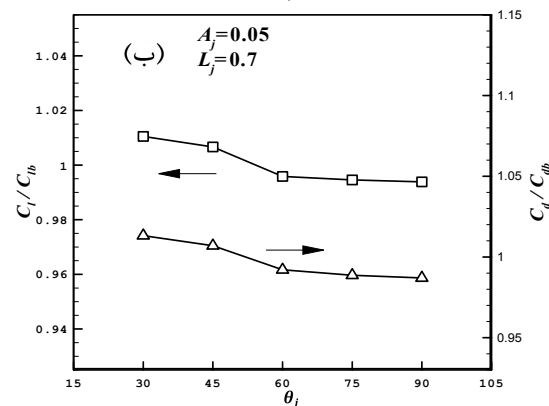
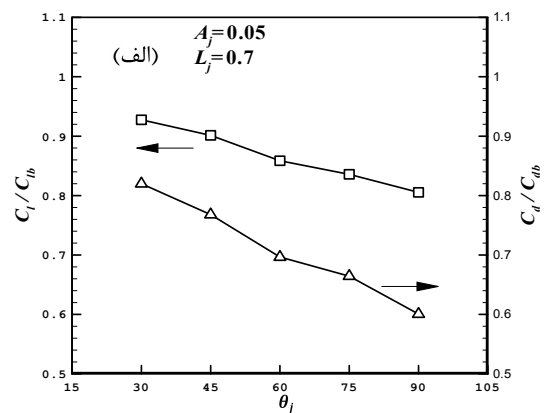
برای بررسی اثر موقعیت دمش، توزیع فشار بر دیواره برای موقعیت‌های مختلف جت و نسبت سرعت  $A_j = 0.05$  در شکل ۱۲ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود برای هیدروفویل NACA16009 هرچه جت دمش به لبه حمله نزدیک‌تر شود طول کائیتی کاهش می‌یابد، ولی برای هیدروفویل NACA66(MOD) محل قرارگیری جت تأثیر چندانی بر طول کائیتی ندارد.

شبیه‌سازی در زوایای دیگر دمش نیز انجام شده و نتایج برای زوایای دمش ۳۰ الی ۹۰ درجه در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۱۴ الف ملاحظه می‌شود برای هیدروفویل NACA16009 افزایش زاویه دمش، طول کائیتی را کم‌تر می‌کند و همان‌طور که در شکل ۱۳ الف مشاهده می‌شود سبب کاهش ضریب برآ و پسای فشاری می‌شود. در حالیکه براساس شکل ۱۴ ب برای NACA66(MOD)، تغییر زاویه دمش تأثیر محسوسی بر توزیع فشار دیواره و ضرایب برآ و پسای فشاری ایجاد نمی‌کند.

اثر پهنای جت بر ضرایب برآ و پسای فشاری و توزیع فشار برای هیدروفویل NACA6609 در شکل ۱۵ نشان داده شده است. پهنای جت ۰/۰۲۵، ۰/۰۵، ۰/۰۷۵ و ۰/۱ درصد طول وتر بررسی شده است. با توجه به شکل ۱۵ (ب) مشاهده می‌شود با افزایش پهنای جت، طول کائیتی کاهش می‌یابد که مطابق شکل ۱۵ الف منجر به کاهش ضرایب برآ و پسای فشاری می‌شود.

#### ۸- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر به بررسی اثر دمش سیال از سطح هیدروفویل و پارامترهای دمش بر طول کائیتی و ضرایب آئرو دینامیکی پرداخته شده است. روش حجم محدود جیمسون برای تحلیل جریان‌های غیرلزج کائیتاسیونی به کار گرفته شده است.



شکل ۱۳ تأثیر زاویه دمش بر ضریب برآ و پسای فشاری: (الف) هیدروفویل NACA66(MOD) در زاویه حمله ۳ درجه و عدد کائیتاسیون ۰.۶۶ (ب) هیدروفویل NACA66(MOD) در زاویه حمله ۴ درجه و عدد کائیتاسیون ۰.۸۴

$\theta_j$	زاویه دمش
$\rho_\infty$	چگالی جریان آزاد
$\rho_l$	چگالی بخار
$\rho_v$	چگالی مایع
$\rho$	چگالی
$\sigma$	ضریب پیش شرط
<b>زیر نویس‌ها</b>	
$j$	جت دمش

## ۱۰- مراجع

- [1] J. A. Geurst, Linearized Theory for Fully Cavitated Hydrofoils, *International Shipbuilding Progress*, Vol. 7, No. 65, pp. 48-54, 1960.
- [2] J. S. Uhlman, The surface singularity method applied to partially cavitating hydrofoils, *Journal of Ship Research*, Vol. 32, No. 2, pp. 107-124, 1987.
- [3] S. A. Kinnas, N. E. Fine, Non linear Analysis of the flow around Partially or Supercavitating Hydrofoils by a Potential Based Panel Method, in *Proceeding of the IABEM-90 Symposium of the International Association for Boundary Element Methods*.
- [4] N. E. Fine, S. A. Kinnas, A boundary element method for the analysis of the flow around 3-D cavitating hydrofoils, *Journal of Ship Research*, Vol. 37, No. 1, 1993.
- [5] M. Dular, R. Bachert, B. Stoffel, B. Širok, Experimental evaluation of numerical simulation of cavitating flow around hydrofoil, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, Vol. 24, No. 4, pp. 522-538, 2005.
- [6] M. Pasandideh Fard, I. Rashidi-Toroghi, M. Tolami, Numerical Simulation of 2-D Supercavitation and partial cavitation, Using Boundary Element Method, *Aerospace Mechanics Journal*, Vol. 4, No. 3, pp. 15-28, 2008. (In Persian)
- [7] k. Hejranfar, E. Ezzat neshan, K. Fattah Hesari, Numerical simulation of two-dimensional turbulent cavitation flow by means of barotropic model around arbitrary hydrofoil using preconditioning method, in *12th Fluid Dynamics Conference*, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran, 2009. (In Persian)
- [8] M. Soroshan, S. A. Mohsenpour, H. Soleimani, Modeling and Investigation of Unsteady and turbulent flow over hydrofoil, in *11th Marine Industries Conference*, Kish Island, Iran, 2009. (In Persian)
- [9] D.-q. Li, M. Grekula, P. Lindell, Towards numerical prediction of unsteady sheet cavitation on hydrofoils, *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, Vol. 22, No. 5, Supplement 1, pp. 741-746, 2010.
- [10] M. M. Karim, M. S. Ahmmed, Numerical study of periodic cavitating flow around NACA0012 hydrofoil, *Ocean Engineering*, Vol. 55, No. 0, pp. 81-87, 2012.
- [11] M. Behbahani-Nejad, M. chHangizian, Reduced-Order modeling of unsteady partial cavity flows using the boundary element method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 13, No. 6, pp. 140-152, 2013. (In Persian)
- [12] E. Roohi, A. P. Zahiri, M. Passandideh-Fard, Numerical simulation of cavitation around a two-dimensional hydrofoil using VOF method and LES turbulence model, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 9, pp. 6469-6488, 2013.
- [13] F. Celik, Y. Arikon Ozden, S. Bal, Numerical simulation of flow around two- and three-dimensional partially cavitating hydrofoils, *Ocean Engineering*, Vol. 78, No. 0, pp. 22-34, 2014.
- [14] A. J. Chorin, A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, pp. 12-26, 1967.
- [15] E. Turkel, Preconditioning Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 72, pp. 227-298, 1987.
- [16] Y. Choi, C. Merkle, Application of Preconditioning in Viscous Flows, *Journal of Computational Physics*, Vol. 105, pp. 207-223, 1993.
- [17] M. R. Zaccanti, *Analysis and Design of Preconditioning Methods for the Euler Equations* PhD Thesis, College of Engineering Mississippi State., 1999.
- [18] A. G. Malan, R. W. Lewis, P. Nithiarasu, An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows: Part I. Theory and Implementation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, pp. 659-714, 2002.
- [19] V. B. Leer, W. T. Lee, P. Roe, Characteristic Time-Stepping or Local Preconditioning of the Euler Equations, *AIAA Paper, AIAA-91-1552-CP*, 1991.

همچنین از روش پیش شرط توانی جهت تسریع در روند همگرایی بهره گرفته شده است. پایداری حل به کمک جملات اتلافی مرتبه دوم و چهارم به دست آمده است. برای پیمایش در زمان و رسیدن به حالت دائم از الگوریتم چهار مرحله‌ای رانگ-کوتا استفاده شده است. در این مطالعه برای شبیه‌سازی جریان‌های کاویتاسیونی از مدل باروتروپیک معرفی شده توسط دلانوی استفاده شده است. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی، انطباق بسیار خوبی با نتایج و کارهای عددی و تجربی محققان دیگر دارد. مشاهده می‌شود که اعمال روش پیش شرط توانی تأثیر به‌سزایی در افزایش سرعت همگرایی حل دارد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که دمش سبب کاهش طول کاویتا و ضرایب برآ و پسای فشاری نسبت به حالت بدون جت می‌شود و با افزایش نسبت سرعت دمش، طول کاویتا، ضرایب برآ و پسای فشاری کاهش می‌یابد. افزایش زاویه دمش، طول کاویتا، ضرایب برآ و پسای فشاری را کاهش می‌دهد. همچنین با افزایش پهنای جت، طول کاویتا، ضرایب برآ و پسای فشاری کاهش می‌یابد. در ادامه، پیشنهاد می‌شود مطالعه‌ای جدی در خصوص بهینه‌سازی شرایط تزریق نظیر انتخاب قدرت دمش، محل دمش، ابعاد پهنای دمش و تعداد شکاف‌های تزریق با عنایت به نحوه شکل‌گیری کاویتا و ضرایب آنرودینامیکی به عنوان فعالیت‌های آتی در راستای این تحقیق صورت پذیرد.

## ۹- فهرست علائم

$A_j$	نسبت سرعت دمش، $V_j/U_\infty$
$AOA$	زاویه حمله
$c$	طول وتر هیدروفویل
$C_d$	ضریب پسای فشاری، $C_d = F_D / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c$
$C_{db}$	ضریب پسای فشاری بدون جت دمش
$C_l$	ضریب برآ، $C_l = F_L / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 c$
$C_{lb}$	ضریب برآ بدون جت دمش
$C_{min}$	کمترین سرعت صوت
$C_p$	ضریب فشار، $C_p = (p - p_\infty) / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2$
$d_j$	پهنای جت
$F_D$	نیروی پسای فشاری
$F_L$	نیروی برآ
$IN$	تعداد تکرار عددی
$L_j$	محل قرار گیری جت دمش
$p$	فشار
$p_\infty$	فشار جریان آزاد
$p_{vap}$	فشار بخار
$Res$	باقیمانده
$s$	عدد کاویتاسیون
$u$	سرعت در راستای محور $x$
$U_\infty$	سرعت جریان آزاد
$v$	سرعت در راستای محور $y$
$V_j$	سرعت جت دمش
$x$	محور $x$
$y$	محور $y$

## علائم یونانی

$\beta$	ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی
---------	-------------------------



- [29] O. Coutier-Delgosha, F. Deniset, J. A. Astolfi, J. B. Leroux, Numerical Prediction of Cavitating Flow on a Two-Dimensional Symmetrical Hydrofoil and Comparison to Experiments, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129, pp. 279-292, 2007.
- [30] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, K. Hejranfar, Power-Law Preconditioning in Numerical Solution of the 3rd order Non-Cavitation and Cavitation Flows, in *1st Applied Hydrodynamics Conference*, Iran University of Science & Technology, Tehran, Iran, 2010. (In Persian)
- [31] C. S. Song, Current Status of CFD for Cavitating Flows, in *Proceeding of the 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*.
- [32] T. G. Liu, B. C. Khoo, W. F. Xie, Isentropic One-Fluid Modelling of Unsteady Cavitating Flow, *Journal of Computational Physics*, Vol. 201, pp. 80-108, 2004.
- [33] A. Jameson, *Steady-state solution of the Euler equations for transonic flow*, *Proceedings of Transonic, Shock, and Multidimensional Flows*, New York: Advances in Scientific Computing, Academic Press, 1982.
- [34] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, The Jameson's numerical method for solving the incompressible viscous and inviscid flows by means of artificial compressibility and preconditioning method, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 206, No. 2, pp. 651-661, 2008.
- [35] A. Jameson, W. Schmidt, E. Turkel, Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes, *AIAA Paper*, AIAA-1981-1259, 1981.
- [36] P. Krishnaswamy, *Flow modelling for partially cavitating hydrofoils*, PhD Thesis, Denmark, 2000.
- [37] M. Deshpand, J. Feng, C. L. Merkle, Cavity Flow Predictions Based on the Euler Equations, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 116, pp. 36-44, 1994.
- [38] Y. T. Shen, P. E. Dimotakis, The Influence of Surface Cavitation on Hydrodynamic Forces, in *22nd American Towing Tank Conference*, 1989, pp. 44-53.
- [20] A. G. Malan, R. W. Lewis, P. Nithiarasu, An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows, Part II. Application, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, pp. 715-729, 2002.
- [21] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, A Local Power-Law Preconditioning Method for Steady Incompressible Flows, in *Second International Conference on Energy Conversion and Conservation (CICME10)*, Hammamet, Tunisia, 2010.
- [22] V. Esfahanian, P. Akbarzadeh, K. Hejranfar, An improved progressive preconditioning method for steady non-cavitating and sheet-cavitating flows, *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS*, Vol. 68, pp. 210-232, 2012.
- [23] Y. Delannoy, J. L. Kueny, Two phase flow approach in unsteady cavitation modeling, Cavitation and Multiphase Flow Forum, *ASME-FED*, Vol. 98, pp. 153-158, 1990.
- [24] C. L. Merkle, J. Feng, P. E. O. Buelow, Computational Modelling of the Dynamics of Sheet Cavitation, in *3rd International Symposium on Cavitation*, Grenoble, France, 1998.
- [25] C. Song, J. He, Numerical Simulation of Cavitating Flows by Single-Phase Flow Approach, in *3rd International Symposium on Cavitation*, Grenoble, France, 1998, pp. 295-300.
- [26] O. Coutier-Delgosha, R. Fortes-Patella, J. L. Reboud, Evaluation of the Turbulence Model Influence on the Numerical Simulations of Unsteady Cavitation, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 125, pp. 38-45, 2003.
- [27] O. Coutier-Delgosha, R. Fortes-Patella, J. Reboud, L., N. Hakimi, C. Hirsch, Stability of Preconditioned Navier-Stokes Equations Associated with a Cavitation Model, *Computers & Fluids*, Vol. 34, pp. 319-349, 2005.
- [28] O. Coutier-Delgosha, R. Fortes-Patella, J. Reboud, L., N. Hakimi, C. Hirsch, Numerical Simulation of Cavitating Flow in 2D and 3D Inducer Geometries, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 48, pp. 135-167, 2005.