



مطالعه عددی حل تشابهی جریان لایه مرزی جابجایی ترکیبی برای نانوسیال آب- مس از روی یک صفحه افقی

مسعود ضیائی راد^{۱*}، عباس کسایی پور^۲

۱- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

* اصفهان، صندوق پستی ۷۳۴۴۱-۸۱۷۴۶

چکیده

این مقاله به حل تشابهی لایه مرزی برای جریان جابجایی ترکیبی نانوسیال آب- مس ببوری از روی یک صفحه افقی به صورت عددی پرداخته است. معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم با بکارگیری متغیرهای تشابهی مناسب به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و همزمان با روابط تغییر خواص نانوسیال به کمک روش اختلاف محدود کلرباکس حل شده‌اند. تأثیر تغییر در دمای سطح، کسر حجمی نانوذره و پارامتر جابجایی ترکیبی بر ضریب اصطکاک در جریان، عدد نوسلت و پروفیل سرعت و دما بررسی شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که عدد نوسلت جریان با افزایش کسر حجمی نانوذرات و پارامتر جابجایی ترکیبی افزایش می‌یابد، بطوریکه پارامتر معرف عدد نوسلت جریان برای نانوسیال آب- مس با کسر حجمی ۴ درصدی نسبت به سیال خالص در حدود ۱۰٪ افزایش داشته است. از طرفی پارامتر ضریب اصطکاک نیز در همین محدوده، در حدود ۲۰٪ افزایش یافته است. با این وجود در مقادیر پائین تر پارامتر جابجایی ترکیبی، تأثیر حضور نانوذرات بر افزایش ضریب اصطکاک بیشتر خواهد شد. اثر دمای سطح نیز بر افزایش عدد نوسلت و کاهش ضریب اصطکاک، در کسر حجمی نانوذرات بالاتر و پارامتر جابجایی ترکیبی بالاتر، محسوس نیست. همچنین با افزایش دمای سطح، دمای نانوسیال در هر فاصله‌ای از سطح کاهش می‌یابد.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۲ خرداد ۱۳۹۳

پذیرش: ۲۹ تیر ۱۳۹۳

ارائه در سایت: ۲۳ مهر ۱۳۹۳

کلید واژگان:

جریان لایه مرزی

جابجایی ترکیبی

حل عددی تشابهی

نانوسیال

صفحه افقی

A Numerical study of similarity solution for mixed-convection copper-water nanofluid boundary layer flow over a horizontal plate

Masoud Ziae-Rad^{1*}, Abass Kasaeipoor²

1-Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

2- Department of Mechanical Engineering, Shahrood University, Shahrood, Iran

* P.O.B.73441-81746, Isfahan, Iran, m.ziaeirad@eng.ui.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper

Received 02 June 2014

Accepted 20 July 2014

Available Online 15 October 2014

Keywords:

Boundary layer flow

Mixed convection

Numerical similarity solution

Nanofluid

horizontal plate

ABSTRACT

This paper is concerned with a similarity solution for mixed-convection boundary layer copper-water nanofluid flow over a horizontal flat plate. Appropriate similarity variables are used to convert the Governing PDEs to ODEs and the resultant equations with the nanofluid properties relations are discretized and solved simultaneously using finite-difference Keller-Box method. The effects of change in plate temperature, the volume fraction of nanoparticles, and the mixed-convection parameter, on friction coefficient, Nusselt number and velocity and temperature profiles are investigated. The results show that, the Nusselt number increases as the mixed-convection parameter and the volume fraction of nanoparticles increases. This enhancement is about 10 percent for the nanofluid with 4% volume fraction of nanoparticles, compared with the pure water. Moreover, in this range the friction coefficient parameter increases about 20 percent. However, the lower the mixed-convection parameter is, the higher the effect of nanoparticles on the friction coefficient increment. The results also illustrate that the effect of the surface temperature on the increment of Nusselt number and on the reduction of friction coefficient is more considerable in higher mixed-convection parameter and volume fraction of nanoparticles. Also, by increasing surface temperature, the temperature of nanofluid decreases at any surface distance.

میدان جریان را به دو ناحیه تقسیم کرد و معادلات حاکم بر حرکت سیال را ساده سازی کرد[۲]. این دو ناحیه شامل ناحیه داخلی درون لایه مرزی که در آن ویسکوزیته بر میدان جریان حاکم است و ناحیه خارجی که جریان به صورت پتانسیل می‌باشد. با کمک این تئوری، برای حل بسیاری از مسائل نیازی نیست معادلات بقا بطور کامل حل شوند[۳-۶].

۱- مقدمه
mekanik سیالات، همچون بسیاری از علوم دیگر، پیشرفت خود را مدیون ایده‌های انقلابی همچون تئوری لایه مرزی و تئوری فیلم نازک می‌باشد. در بین این تئوری‌ها، بی‌شك تئوری لایه مرزی از جایگاه ویژه‌ای در این علم برخوردار است. لایه مرزی برای اولین بار توسط پرانتل [۱] معرفی شد. پرانتل

Please cite this article using:

M. Ziae-Rad, A. Kasaeipoor, A Numerical study of similarity solution for mixed-convection copper-water nanofluid boundary layer flow over a horizontal plate, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 14, pp. 190-198, 2015 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

نانوسيال عبوری از یک گوه با تولید(و یا جذب) انرژی داخلی پرداختند. آنها بی بردن سرعت نانوسيال کمتر از سرعت سیال خالص می باشد و حضور نانوادرات منجر به نازک شدن لایه مرزی هیدرودینامیکی می شود. آریفین و همکارانش [26] به حل تشابهی انتقال حرارت جابجایی اجباری نانوسيال در لایه مرزی عبوری از یک صفحه افقی پرداختند. نتایج نشان داد، افزایش نانوذرارات TiO_2 , نسبت به نانوذرارات Al_2O_3 و Cu انتقال حرارت بیشتری را سبب می شود.

همانطور که ذکر شد، در مطالعات گذشته موارد محدودی از بررسی جریان لایه مرزی نانوسيال روی سطوح یافت می شود که در این تحقیقات نیز، بدیل محدودیتهای معادلات لایه مرزی، تحلیل جامعی بر روی تأثیر پارامترهای مختلف بر انتقال حرارت در جریان سیال ارائه نشده است. در این مقاله با بکارگیری متغیرهای تشابهی مناسب و وارد کردن همزمان اثر دمای سطح و خواص نانوذرارات در معادلات حاکم، مطالعه کاملی بر روی تأثیر این پارامترها در انتقال حرارت جریان جابجایی ترکیبی انجام شده است. با افزودن نانوسيال در این نوع از مسئله‌ها می‌توان خنک کاری را افزایش داد و سیستم را بهینه کرد. علاوه بر آن، تأثیر پارامتر جابجایی ترکیبی و کسر حجمی نانوذرارات بر ضریب اصطکاک، عدد نوسلت و پروفیل‌های سرعت و دما نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

2- معادلات حاکم

جریان جابجایی ترکیبی لزج و تراکمناپذیر را در لایه مرزی عبوری از یک صفحه صاف افقی در حالت دائم درنظر می‌گیریم. فرض می‌شود جریان آزاد یکنواخت با سرعت U_∞ و با دمای یکنواخت T_∞ از روی یک صفحه افقی در حال عبور است. دما در بالای صفحه گرم به صورت $\bar{T}_w(x) > T_\infty$ و برای پایین صفحه تحت سرد به صورت $\bar{T}_w(x) < T_\infty$ درنظر گرفته می شود. در حالت اول، نیروی خاصیت شناوری در خلاف جهت گرانش (جریان همسو) عمل می‌کند، درحالی که در مورد دوم هم جهت باگرانش (جریان مخالف) خواهد بود. بافرض عدم تولید گرما و صرفنظر از تلفات لزجت در جریان لایه مرزی و با استفاده از تقریب بوزینسک، معادلات لایه مرزی حالت دائم را می-توان به صورت رابطه (1) نوشت [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \nu_{nf} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{(\rho \beta)_{nf}}{\rho_{nf}} g(\bar{T} - T_\infty) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \alpha_{nf} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (1)$$

برای همه متغیرهای بعددار از علامت بار استفاده شده است. شرایط مرزی در این معادلات به صورت رابطه (2) نوشتند:

$$\begin{aligned} \bar{u} = 0, \bar{v} = 0, \bar{T} = \bar{T}_w(x), \text{ at } \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = U_\infty, \bar{T} = T_\infty, \bar{p} = p_\infty, \text{ as } \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2)$$

که در این معادلات، \bar{x} و \bar{y} مختصات اندازه‌گیری شده از ابتدای صفحه به ترتیب در امتداد طول و عمود بر آن هستند. (\bar{u} , \bar{v} , \bar{T}) مولفه‌های سرعت طولی و عرضی، \bar{p} فشار، \bar{T} دمای محلی سیال، α چگالی سیال، ν لزجت سینماتیکی، ρ و شتاب گرانشی، β ضریب انبساط حرارتی سیال و ΔT ضریب پخش حرارتی سیال می باشد.

با بکارگیری متغیرهای بی بعد رابطه (3):

$$\begin{aligned} x = \frac{\bar{x}}{L}, y = Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{y}}{L} \right), u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, v = Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{v}}{U_\infty} \right), \\ p = \frac{(\bar{p} - p_\infty)}{\rho_{nf} U_\infty^2}, T = \frac{(\bar{T} - T_\infty)}{\Delta T} \end{aligned} \quad (3)$$

از طرفی مساله جریان جابجایی ترکیبی (ترکیب جریان‌های جابجایی اجباری و آزاد)، در بسیاری از فرآیندهای انتقال در دستگاه‌های مهندسی و در طبیعت بوجود می‌آیند. مساله جریان جابجایی ترکیبی دائم در لایه مرزی عبوری از یک صفحه افقی مسطح، برای مدت زمان طولانی موضوع اصلی در انتقال حرارت بوده است. به دلیل اهمیت آن، از هر دو دیدگاه تئوری و عملی به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته شده است [9-7]. در این مسأله، که در آن خاصیت شناوری دارای اثر قابل توجهی بر روی میدان جریان است، شبیه فشار به طور کلی متفاوت است، به طوری که هرچند در لبه لایه مرزی از پیش تعیین شده است، ولی باید اثر آن در عمق لایه مرزی به عنوان بخشی از فرایند حل به همراه درجه حرارت و سرعت، درنظر گرفته شود. مطالعات تئوری پیشین بیشتر بر روی اثرات خاصیت شناوری در این مسائل روی جریان یکنواخت گرم و یا سرد شده توسط صفحات مسطح، متمرکز شده است [10-13]. در مقاله دیگری که توسط استینروک [14] در مورد جریان لایه مرزی جابجایی ترکیبی عبوری از یک صفحه سرد افقی ارائه شد، نشان داده شده است که در حالتی که جریان بالای یک صفحه گرم افقی مدنظر است، حل تشابهی معادلات لایه مرزی برای هنگامی که اثر خاصیت شناوری در جهت جریان می‌باشد وجود دارد و جریان در لایه مرزی با شتاب است؛ با این حال برای جریان بالای یک صفحه سرد (اثر خاصیت شناوری نامطلوب) جریان جلورونده دارای یک گرادیان فشار نامطلوب است، لذا انتظار می‌رود که جدایی جریان رخ دهد. جریان جابجایی ترکیبی در لایه مرزی عبوری از یک صفحه صاف افقی نفوذپذیر با توزیع درجه حرارت $\sim x^{-1/2}$ و مکش جانبی سیال، ابتدا توسط مگیاری و همکارانش [15] مورد بررسی قرار گرفت. در این تحقیق آنها به این نتیجه رسیدند که فقط در حالت نیروهای بوبانسی در جهت جریان و مکش، جواب‌های یگانه بوجود می‌آید و در حالت نیروهای بوبانسی در خلاف جهت جریان و تزریق، فقط در موارد خاصی جواب یگانه وجود خواهد داشت. دسویتا و همکارانش [16] حل تشابهی برای جابجایی ترکیبی لایه مرزی عبوری از یک صفحه افقی نفوذپذیر را بررسی کردند و دریافتند که با افزایش توان درجه حرارت دیوار، عدد نوسلت محلی افزایش می‌یابد. همچنین ساپهاشینی و همکارانش [17] حل عددی به منظور بررسی اثر همزمان حرارت و غلظت در لایه مرزی جابجایی ترکیبی در یک صفحه افقی نفوذپذیر را مورد مطالعه قرار دادند. آنها دریافتند که نرخ انتقال حرارت با مکش، افزایش و با تزریق، کاهش می‌یابد.

عملکرد بالای خنک کاری، یکی از نیازهای حیاتی بسیاری از صنایع است. ضریب هدایت گرمایی پایین یکی از محدودیتهای اولیه برای افزایش کارآمدی سیالات راچی در سیستم‌های حرارتی است. هدایت گرمایی این گونه سیالات را می‌توان با افزودن نانوذرارات به آنها افزایش داد [18-20]. مفهوم نانوسيال، سوپرانسیونهای حاوی ذرات نانو، مواد فلزی و غیرفلزی را شامل می‌شود که به عنوان محیط‌های انتقال حرارت استفاده می‌شوند. چنین سیالاتی پتانسیل زیادی برای افزایش نرخ انتقال حرارت از خود نشان می‌دهند. خصوصیات انتقال حرارت جابجایی نانوسيالات به خواص ترموفیزیکی سیال پایه و ذرات معلق در آن، کسر حجمی ذرات معلق و شکل و ابعاد این ذرات بستگی دارد [21-23]. در زمینه استفاده از نانوسيال در معادلات لایه مرزی، اودین و همکارانش [24] به مطالعه انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک صفحه تحت گرم جاسازی شده در یک محیط متخلخل پر شده از نانوسيال با شرط جابجایی در مرز پرداختند. آنها دریافتند که با افزایش کسر حجمی ذرات معلق در آن، مطالعه انتقال حرارت افزایش می‌یابد. همچنین رحمان و همکارانش [25] به بررسی انتقال حرارت جابجایی ترکیبی لایه مرزی

که در آن a_6 ثابت ادغام شده است. بنابراین از رابطه (14) داریم:

$$\frac{d\phi_4}{dx} = \frac{a_2}{a_6} \phi_4^{2-\varepsilon} \quad (14)$$

$$\phi_4 = [a_7 + (\varepsilon - 1) \frac{a_2}{a_6} x]^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$$

که در آن a_7 ثابت ادغام شده است و $\neq 1$ می باشد. بنابراین از (15) داریم:

$$\phi_1 = a_6[a_7 + (\varepsilon - 1) \frac{a_2}{a_6} x]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \quad (15)$$

علاوه بر آن ما از رابطه (16) داریم:

$$\frac{d\phi_2}{dx} = a_3 a_6 [a_7 + (\varepsilon - 1) \frac{a_2}{a_6} x]^{\frac{(3+\varepsilon)}{\varepsilon-1}} \quad (16)$$

بنابراین از رابطه (17) داریم:

$$\phi_2 = a_8 + \frac{a_3 a_6^2}{2(\varepsilon+1)a_2} [a_7 + (\varepsilon - 1) \frac{a_2}{a_6} x]^{\frac{2(\varepsilon+1)}{(\varepsilon-1)}} \quad (17)$$

که در آن a_8 ثابت ادغام شده است و $= 0$ می باشد. طبق رابطه (10)،

(15) و (16) از رابطه (18) داریم:

$$U(x) = \phi_1 \phi_4 = a_6 (a_7 + \frac{x}{a_6})^n \quad (18)$$

که در آن $(\varepsilon - 1)a_2 = (\varepsilon + 1)/(\varepsilon - 1)$ ثابت است و $n = 1$ می باشد.

بنابراین $a_1 = \varepsilon a_2 = (n+1)/2$ و $a_2 = (n-1)/2$ است. بنابراین از رابطه

: داریم:

$$\phi_1 = a_6 (a_7 + \frac{x}{a_6})^{\frac{n+1}{2}}, \phi_4 = a_6 (a_7 + \frac{x}{a_6})^{\frac{n-1}{2}} \quad (19)$$

علاوه بر این طبق رابطه (9) رابطه (20) به دست می آید:

$$\frac{(\phi_3)_x}{\phi_3} = \frac{a_5}{(a_7 + x/a_6)} \quad (20)$$

طبق رابطه (10) و (20) رابطه (21) به دست می آید:

$$\phi_3 = T_w(x) = a_9 (a_7 + x/a_6)^{a_5} \quad (21)$$

که a_9 ثابت ادغام شده است. همچنین طبق رابطه (10)، (17) و (19) رابطه

: داریم:

$$(\phi_2)_x = a_3 a_6^2 (a_7 + \frac{x}{a_6})^{2n-1} \quad (22)$$

یا داریم:

$$\phi_2 = a_{10} + \frac{a_3 a_6^3}{2\pi} (a_7 + \frac{x}{a_6})^{2n} \quad (23)$$

که در آن a_{10} ثابت ادغام شده است. از طرفی طبق رابطه (10) از رابطه

: داریم:

$$\phi_3 = \phi_2 \phi_4 = a_6 [a_{10} + \frac{a_3 a_6^3}{2\pi} (a_7 + \frac{x}{a_6})^{2n}] (a_7 + \frac{x}{a_6})^{\frac{(n-1)}{2}} \quad (24)$$

در نتیجه از رابطه (25) داریم:

$$a_{10} = 0, a_3 = \frac{2\pi}{a_6^3}, a_6 = 1 \quad (25)$$

پس ثابت $a_3 = 2n$ می باشد. بنابراین از رابطه (26) داریم:

$$\phi_3 = (a_{11} + x)^{\frac{(5n-1)}{2}} \quad (26)$$

پس ثابت $a_5 = (5n-1)/2$ و $a_9 = 1$ است. در نهایت از رابطه (13) داریم:

$$\phi_1(x) = (a_7 + x)^{\frac{(n+1)}{2}}, \phi_2(x) = (a_7 + x)^{2n}$$

$$\phi_3(x) = T_w(x) = (a_7 + x)^{\frac{(5n-1)}{2}}$$

$$\phi_4(x) = (a_7 + x)^{\frac{(n-1)}{2}}, U(x) = (a_7 + x)^2 \quad (27)$$

و در نتایج آن $a_4 = (n-1)/2$ است.

بنابراین همه ثابت های نشان داده شده طبق رابطه (9) به شکل (28) هستند:

$$a_1 = \frac{n+1}{2}, a_2 = \frac{n-1}{2}, a_3 = 2n,$$

$$a_4 = \frac{n-1}{2}, a_5 = \frac{5n-1}{2} \quad (28)$$

با جایگزین کردن رابطه (28) در رابطه (29) به دست می آید:

که در آنها L طول صفحه، U_∞ سرعت مشخصه، $Re = U_\infty L / \theta_f$ عدد رینولدز و

$\Delta T = \bar{T}_w - T_\infty$ اختلاف دمای مشخصه است، شکل بدون بعد معادلات حاکم

به صورت رابطه (4) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\vartheta_{nf}}{\theta_f} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ 0 &= - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f} \lambda T \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4)$$

شرط مرزی بدون بعد نیز به صورت رابطه (5) بازنویسی می شود:

$$U=0, V=0, T=1 \text{ at } y=0 \quad (5)$$

$$U=1, T=0, P=0 \text{ as } y \rightarrow \infty \quad (5)$$

در معادلات بدون بعد فوق، Pr عدد پرانتل و λ ثابت جابجایی ترکیبی و یا پارامتر خاصیت شناوری است که به صورت رابطه (6) تعریف می شود:

$$\lambda = \frac{Gr}{Re^{5/2}} \quad (6)$$

که در آن $Gr = g\beta_f \Delta T L^3 / \theta_f^2$ عدد گرشاھف می باشد. قابل ذکر است که

$\lambda > 0$ خاصیت شناوری در جهت جریان، < 0 خاصیت شناوری در خلاف

جهت جریان و $\lambda = 0$ برای جریان جابجایی اجرایی (جریان غیرشناور) است.

با استفاده از متغیرهای تشابهی رابطه (7) می توان معادلات دیفرانسیل

فوق با مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد [16]:

$$\Psi = \phi_1(x) f(\eta), P = \phi_2(x) P(\eta), \quad (7)$$

$$T = \phi_3(x) \Theta(\eta), \eta = \phi_4(x) y \quad (7)$$

که در آن Ψ تابع جریان به صورت زیر تعریف می شود:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, V = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

و به طور خودکار معادله پیوستگی (4) را تأمین می کند. با جایگذاری رابطه (7)

در روابط (4)، معادلات به معادلات دیفرانسیل معمولی رابطه (8) تبدیل

می شوند:

$$\frac{\vartheta_{nf}}{\theta_f} f''' + a_1 f'' - (a_1 + a_2) f'^2 - a_3 P - a_4 \eta P' = 0$$

$$P' = \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f} \lambda \theta \quad (8)$$

$$\frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{1}{Pr} \theta'' + a_1 f \theta' - a_5 f' \theta = 0 \quad (8)$$

که در این معادلات، f تابع جریان بدون بعد، θ پروفیل دمای بدون بعد و P

پروفیل فشار بدون بعد است. ثابت a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 به صورت رابطه (9) تعریف شده است:

$$a_1 = \frac{(\phi_1)_x}{\phi_4}, a_2 = \frac{\phi_1(\phi_4)_x}{\phi_4^2}, a_3 = \frac{(\phi_2)_x}{\phi_1 \phi_4^3}, \quad (9)$$

$$a_4 = \frac{\phi_2(\phi_4)_x}{\phi_1 \phi_4^4}, a_5 = \frac{\phi_1(\phi_3)_x}{\phi_3 \phi_4} \quad (9)$$

و

$$(\phi_3)_x = \phi_2(x) \phi_4(x), T_w(x) = \phi_3(x), \quad (10)$$

$$U(x) = \phi_1(x) \phi_4(x), V_w(x) = -(\phi_3)_x \quad (10)$$

و همچنین:

$$\frac{a_1}{a_2} = \varepsilon \quad (11)$$

به طوری که

$$\frac{(\phi_1)_x}{\phi_1} = \varepsilon \frac{(\phi_4)_x}{\phi_4} \quad (12)$$

که در آن \times زیرنویس نشان دهنده متمایز بودن از X است. بنابراین از رابطه

: داریم

$$\phi_1 = a_6 \phi_4^\varepsilon \quad (13)$$

2- محاسبه ضریب اصطکاک و عدد نولت

پس از حل عددی تشابهی معادلات حاکم و بکارگیری روابط مربوط به خواص نانوپیال، می‌توان با استفاده از نتایج خروجی حاصل، مقادیر $\theta'(0)$ و $f''(0)$ را بدست آورد.

ضریب اصطکاک و عدد نولت محلی در جریان را می‌توان با استفاده از این دو پارامتر به صورت رابطه (37) و (38) محاسبه نمود:

$$Re_x \frac{C_{fx}}{2} = (a_7 + x)^{\frac{3n-1}{2}} f_m \quad (37)$$

$$Re_x \frac{-1}{2} Nu_x = (a_7 + x)^{\frac{n-1}{2}} Nu_m \quad (38)$$

که در آنها a_7 ثابت انتگرال‌گیری است [16].

3- روش حل عددی

معادلات حاکم با استفاده از گسسته سازی اختلاف محدود مرتبه اول به شکل

جبری رابطه (39) نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \delta f_j - \delta f_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) &= r_j \\ \delta u_{j+1} - \delta u_j - \frac{h_{j+1}}{2} (\delta v_{j+1} + \delta v_j) &= t_{j+1} \\ \frac{h_j(n+1)}{2} \frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}} [v_j \delta f_j + v_{j-1} \delta f_{j-1}] - h_j n \frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}} [u_j \delta u_j + u_{j-1} \delta u_{j-1}] \\ + \left[\frac{h_j(n+1)}{2} \frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}} \right] [f_j \delta v_j + f_{j-1} \delta v_{j-1}] + [\delta v_j - \delta v_{j-1}] \\ - nh_j \frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}} [\delta p_j + \delta p_{j-1}] \\ - \left[\frac{h_j(n-1)}{2} \right] \eta_j \lambda \frac{\vartheta_f}{\vartheta_{nf}} \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f} [\delta \theta_j + \delta \theta_{j-1}] &= s_j \\ \delta p_{j+1} - \delta p_j - \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f} \lambda \frac{h_{j+1}}{2} (\delta \theta_{j+1} + \delta \theta_j) &= z_{j+1} \\ \delta \theta_{j+1} - \delta \theta_j - \frac{h_{j+1}}{2} (\delta g_{j+1} + \delta g_j) &= q_{j+1} \\ \left[\frac{h_j}{2} Pr \left(\frac{n+1}{2} \right) \frac{\alpha_f}{\alpha_{nf}} \right] [g_j \delta f_j + g_{j-1} \delta f_{j-1}] \\ - \left[\frac{h_j}{2} Pr \left(\frac{5n-1}{2} \right) \frac{\alpha_f}{\alpha_{nf}} \right] [\theta_j \delta u_j + \theta_{j-1} \delta u_{j-1}] \\ - \left[\frac{h_j}{2} Pr \left(\frac{5n-1}{2} \right) \frac{\alpha_f}{\alpha_{nf}} \right] [u_j \delta \theta_j + u_{j-1} \delta \theta_{j-1}] \\ + [\delta g_j - \delta g_{j-1}] + \left[\frac{h_j}{2} Pr \left(\frac{n+1}{2} \right) \frac{\alpha_f}{\alpha_{nf}} \right] [\delta g_j + \delta g_{j-1}] &= k_j \quad (39) \end{aligned}$$

در روش حل عددی کلریاکس [31] معادلات جبری فوق با استفاده از روش

نیوتون به صورت طولی درآمده و در قالب برداری- ماتریسی رابطه (40) و (41) بازنویسی می‌شوند:

$$A_j \delta_{j-1} + B_j \delta_j + C_j \delta_{j+1} = R_j \quad (40)$$

که در آن A، B و C ماتریس‌های 6×6 حاوی ضرایب معلوم هستند و

$$R_j = [r_j \quad s_j \quad t_{j+1} \quad z_{j+1} \quad k_j \quad q_{j+1}]^T \quad (41)$$

$$\bar{\delta}_j = [\delta f_j \quad \delta u_j \quad \delta v_j \quad \delta p_j \quad \delta \theta_j \quad \delta g_j]^T$$

سپس با استفاده از روش حل ماتریس سه قطعی تی دی ام ای² و با اعمال شرایط مرزی مربوطه، معادلات فوق برای محاسبه متغیرهای جریان حل می‌شوند [32]. برای اعمال روش حل عددی، برنامه‌ای کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شده است. دقت محاسبات نیز برای همگرایی حل عددی برای همه متغیرهای میدان برابر با 10^{-7} در نظر گرفته شده است.

4- بودسی و تحلیل نتایج

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و شرایط مرزی حاصل، با توجه به استفاده از حل تشابهی، استفاده از یک شبکه حل یک بعدی در راستای عرضی جریان برای محاسبه تغییرات میدان جریان کفایت می‌کند. لذا از یک شبکه غیریکنواخت در راستای عمود بر سطح استفاده شده است. (شکل 1) در

جدول 1 خواص ترموفیزیکی آب خالص و نانوذرات مس [27].

خواص ترموفیزیکی	نانو ذرات مس	آب خالص
997/1	8933	ρ (kgm ⁻³)
4179	385	C_p (Jkg ⁻¹ K ⁻¹)
0/613	401	k (Wm ⁻¹ K ⁻¹)
21	1/67	$\beta \times 10^5$ (K ⁻¹)

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_{nf}}{\vartheta_f} f''' + \frac{n+1}{2} ff'' - nf'^2 - 2nP - \frac{n-1}{2} \eta P' &= 0 \\ P' &= \frac{(\rho\beta)_{nf}}{\rho_{nf}\beta_f} \lambda \theta \\ \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{1}{Pr} \frac{\vartheta}{\vartheta_{nf}} \theta' + \frac{n+1}{2} f\theta' - \frac{5n-1}{2} f'\theta &= 0 \quad (29) \end{aligned}$$

شرایط مرزی برای متغیرهای موجود در معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت رابطه (30) بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0, f(0) = 0, \theta(0) = 1, \\ f''(\infty) &= 1, \theta(\infty) = 0, P(\infty) = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

2- تغییرات خواص نانوپیال

برای تکمیل معادلات حاکم، محاسبه خواص ترموفیزیکی نانوپیال است. خواصی نظری چگالی، ضریب انبساط حجمی، ظرفیت حرارتی و ضریب پخش حرارتی نانوپیال بر حسب خواص سیال خالص و نانوذرات جامد به صورت رابطه (31) محاسبه می‌شوند و سایر خواص ترموفیزیکی آب و نانوذره مس در

جدول 1 آورده شده است. [28]:

$$\begin{aligned} \rho_{nf} &= (1-\varphi)\rho_f + \varphi\rho_s \\ (\rho\beta)_{nf} &= (1-\varphi)(\rho\beta)_f + \varphi(\rho\beta)_s \\ (\rho c_p)_{nf} &= (1-\varphi)(\rho c_p)_f + \varphi(\rho c_p)_s \\ \alpha_{nf} &= \frac{k_{nf}}{(\rho c_p)_{nf}} \quad (31) \end{aligned}$$

در این رابطه (31) φ درصد حجمی نانوذرات است و اندیشهای f ، s و nf به ترتیب اشاره به سیال خالص، نانوذرات و نانوپیال دارد.

برای مدل کردن لزجت دینامیکی نانوپیال نیز می‌توان از رابطه معروف به "بریکمن" به صورت رابطه (32) استفاده کرد [28]:

$$k_{eff} = \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2.5}} \quad (32)$$

برای محاسبه ضریب هدایت گرمایی نانوپیال (k_{eff}) هم مدلی پیشنهاد شده است. در این مدل برای دو جزء مستقل از ذرات کروی سوسپانسیون، k_{eff} به صورت رابطه (33) نوشته می‌شود [29]:

$$k_{eff} = k_f [1 + \frac{k_s A_s}{k_f A_f} + c k_s Pe \frac{A_s}{k_f A_f}] \quad (33)$$

که در آن، $A_s = u_s d_s / \alpha_f$ و $Pe = u_s d_s / \alpha_f$ و k_s به ترتیب ضرایب هدایت حرارتی نانوذرات مس و سیال خالص هستند. برای نانوپیال آب- مس، $c=36000$ و $d_s=100$ nm قطر نانوذرات جامد است. همچنین [30] از (34) و (35) به (36) و (37) می‌رسد:

$$\frac{A_s}{A_f} = \frac{d_f}{d_s} \frac{\varphi}{1-\varphi} \quad (34)$$

و اندازه مولکولی سیال مبنای نامیده می‌شود و بر حسب انگستروم برابر است با:

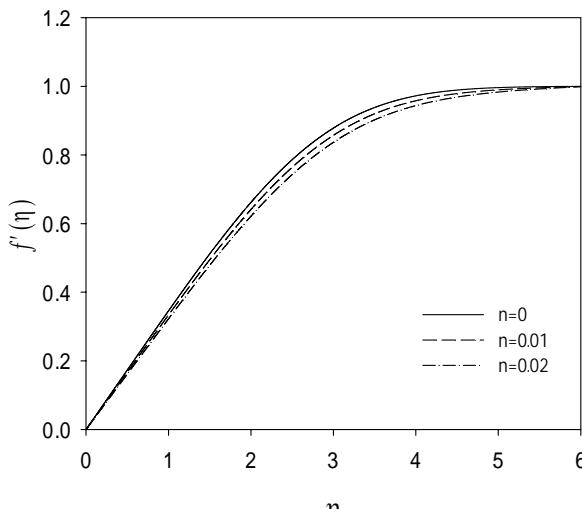
$$d_f = 2\text{\AA}, \text{\AA} = 0.1\text{nm} \quad (35)$$

در این روابط همچنین u_s سرعت حرکت براونی نانوذرات، برابر است با:

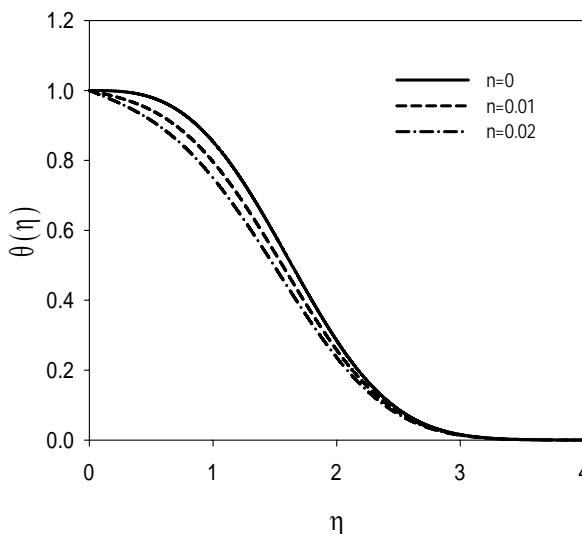
$$u_s = \frac{2k_b \theta(\eta)}{\pi \mu_f d_s^2} \quad (36)$$

که $k_b = 1.3807 \times 10^{-23}$ JK⁻¹ ثابت بولتزمن نامیده می‌شود. لزجت دینامیکی

برای آب $s = 9.09452 \times 10^{-4}$ Pa.s و عدد پرانتل آن نیز $Pr = 6.2$ درنظر گرفته شده است.



شکل 4 پروفیل سرعت نانوسیال ($\varphi=0.04$) در دماهای سطح (n) مختلف در جریان جابجایی ترکیبی ($\lambda=-0.03$)



شکل 5 پروفیل دما نانوسیال ($\varphi=0.04$) در دماهای سطح (n) مختلف در جریان جابجایی ترکیبی ($\lambda=-0.03$)

با در نظر گرفتن مقادیر فوق، تعداد گرههای محاسباتی در این روش برابر 170 خواهد بود. همچنین به منظور بررسی صحت عملکرد کد عددی نوشته شده، مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده با تحقیقات مشابه گذشته صورت گرفته است. برای این منظور حل تشابهی لایه مرزی برای جریان سیال خالص با جابجایی ترکیبی عبوری از یک صفحه صاف افقی بررسی شده است. در شکل 2 پروفیل دما به ازای $\lambda=-0.03$, $n=0.01$, $Pr=0.7$ و در شکل 3 تغییر ضریب اصطکاک محلی ($f''(0)$) به ازای $\lambda=-0.03$, $n=0.01$, $Pr=0.7$, با نتایج مطالعه دسویتا [16] مقایسه شده است. در هر دو شکل نتایج بدست آمده تطابق بسیار خوبی با مطالعه مشابه قبلی دارد که این تطابق می‌تواند مoid دقت و کارائی روش انتخاب شده در حل مساله لایه مرزی با جابجایی ترکیبی باشد.

4-1-4- بررسی پروفیل‌های سرعت و دما

در شکل 4 پروفیل سرعت (f') به ازای $\lambda=-0.03$, $\varphi=0.04$, در سه توان مختلف n (دماهای سطح) رسم شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، در هر فاصله مشخصی از سطح (η), با افزایش n سرعت در لایه مرزی کاهش می‌یابد. دلیل این امر، وجود خاصیت شناوری در جریان، بواسطه وجود

این شبکه‌بندی، نسبت فاصله هر دو گره متولی ثابت است رابطه (42)

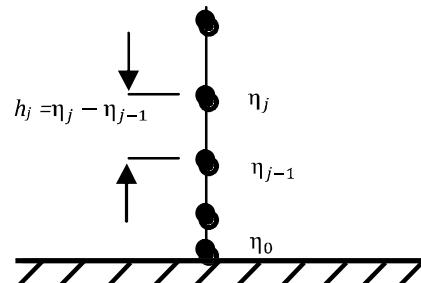
$$h_j = Kh_{j-1} \quad (42)$$

همچنین فاصله تا گره زام از رابطه (43) بدست می‌آید:

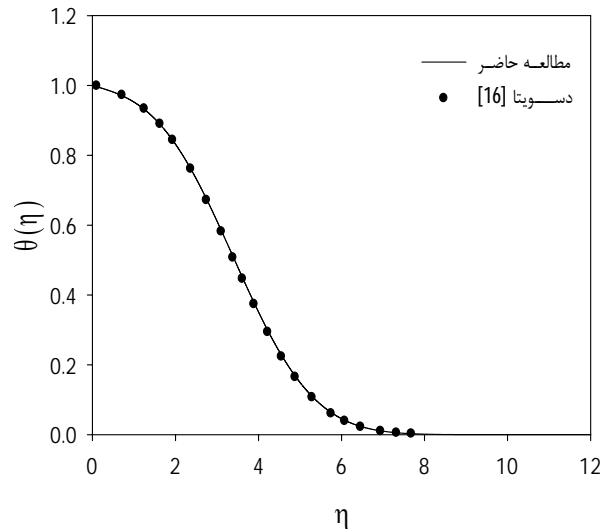
$$\eta_j = h_1 \frac{K^j - 1}{K - 1} \quad j = 1, 2, \dots, M \quad K > 1 \quad (43)$$

در رابطه (43)، h_1 طول اولین گام و K , ضریب کشیدگی یا نسبت فاصله هر دو گره متولی است. در مسأله حاضر، از مقادیر زیر در حل عددی استفاده شده است:

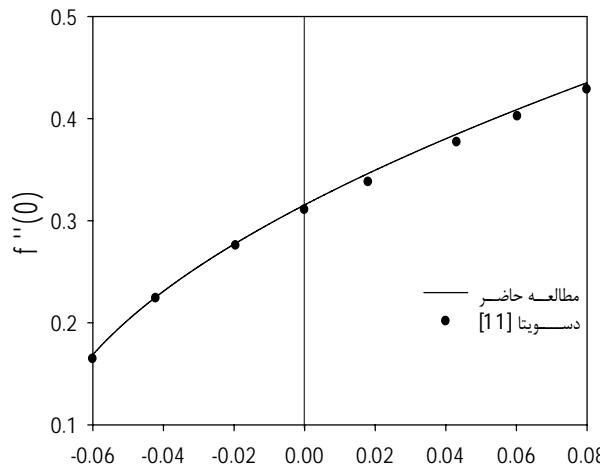
$$h_1 = 0.0001 \quad K = 1.01$$



شکل 1 نمایی ساده از شبکه‌بندی یکبعدی عرضی و غیریکنواخت استفاده شده



شکل 2 پروفیل دما در سیال خالص به ازای $\lambda=-0.03$, $n=0.01$ و $Pr=0.7$

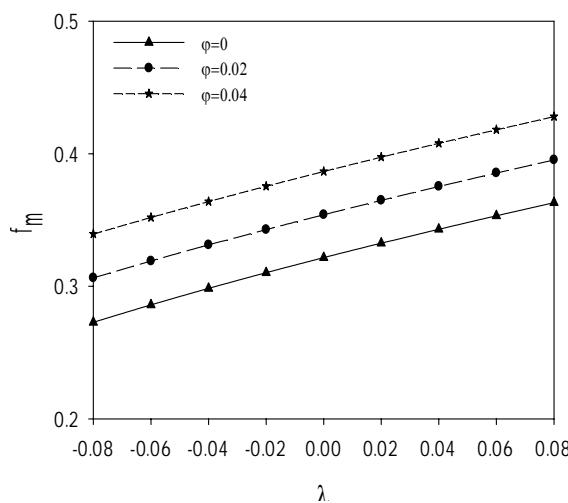


شکل 3 تغییرات ضریب اصطکاک محلی ($f''(0)$) نسبت به λ در سیال خالص به ازای $Pr=0.7$ و $n=0.01$

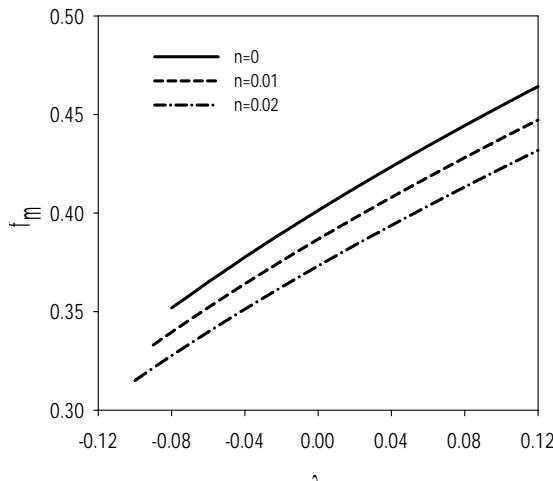
با توجه به این شکل دیده می‌شود که که با افزایش کسر حجمی نانوپیال، ضخامت لایه مرزی حرارتی اندکی افزایش می‌یابد و شرط حرارتی روی سطح بهتر به داخل جریان نانوپیال نفوذ می‌کند به طوری که در یک فاصله مشخص از دیوار با افزایش کسر حجمی نانوپیال مقدار $(\eta)^{\theta}$ بیشتر می‌شود. این رفتار به این دلیل است که ضریب انتقال حرارت هدایتی نانوپیال با افزایش کسر حجمی نانوپیال بیشتر می‌شود و سبب می‌شود که حرارت از سطح دیوار بهتر به داخل جریان نانوپیال نفوذ کند.

4-2- بررسی تغییرات ضریب اصطکاک

در شکل 8 تغییرات ضریب اصطکاک روزی سطح با پارامتر جابجایی ترکیبی و تأثیر تغییر درصد حجمی نانوپیال بر این تغییرات به ازای $n=0.01$ نشان داده شده است. از این نمودار چنین بر می‌آید که همواره با افزایش λ ضریب اصطکاک روند افزایشی خواهد داشت. این افزایش بدلیل افزایش گرادیان‌های سرعت در جریان با افزایش خاصیت شناوری موافق با جهت جریان در جریان‌های جابجایی آزاد، که λ معیاری از آن است، قابل انتظار می‌باشد. این شکل همچنین نشان می‌دهد که با افزایش درصد حجمی نانوپیال، ضریب اصطکاک به ازای تمامی مقادیر λ افزایش می‌یابد. دلیل این امر افزایش لرحت نانوپیال با توجه به افزایش کسر حجمی نانوپیال می‌باشد.



شکل 8 تغییرات پارامتر معرف ضریب اصطکاک نانوپیال λ نسبت به η در φ های مختلف برای $n=0.01$



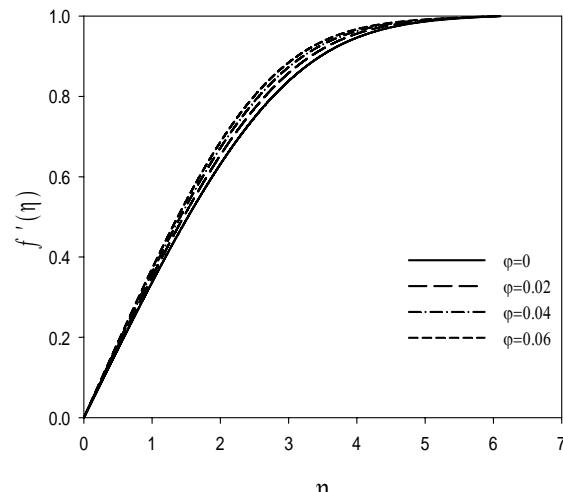
شکل 9 تغییرات ضریب اصطکاک نانوپیال ($\varphi=0/04$) نسبت به λ در n های مختلف

جابجایی آزاد در مساله می‌باشد که می‌تواند سبب کاهش سرعت با افزایش دمای دیوار می‌شود. با نزدیک شدن به دیوار یا به لبه لایه مرزی هیدرودینامیکی، تأثیر n بر پروفیل سرعت کمتر خواهد شد.

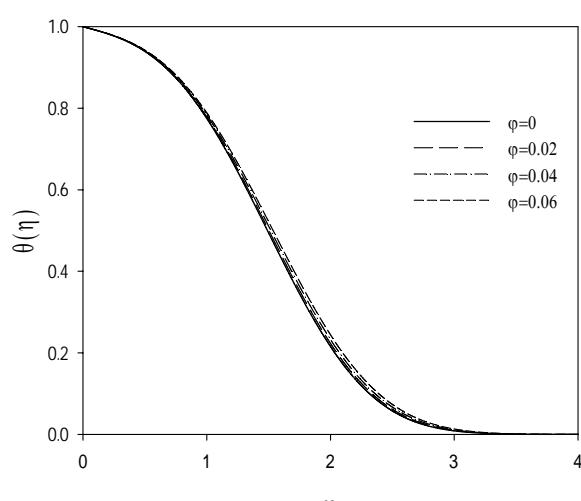
پروفیل دما (η) نیز در شکل 5 به ازای $\varphi=0.04$ و $\lambda=-0.03$ در سه توان مختلف n (دمای سطح) نشان داده شده است. دیده می‌شود که با افزایش n ، مقدار $(\eta)^{\theta}$ در هر فاصله‌ای از سطح کاهش می‌یابد. با نزدیک شدن به سطح آزاد و لبه لایه مرزی حرارتی، مجددًا تأثیر n بر پروفیل دما کمتر می‌شود. علاوه بر آن می‌توان گفت که تغییرات پروفیل دما ناشی از تغییر n ، در نزدیکی دیوار محسوس‌تر بوده که البته قابل انتظار است.

در شکل 6، اثر کسر حجمی نانوپیال بر پروفیل سرعت در $\lambda=0.04$ و $n=0.01$ مشاهده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، نانوپیال تأثیر ناچیزی بر سرعت می‌گذارد. افزایش نانوپیال به مقدار اندکی سرعت را در داخل لایه مرزی افزایش و ضخامت لایه مرزی را کاهش می‌دهد. دلیل این امر وجود نانوپیال مس در جریان می‌باشد که سبب می‌شود گرادیان فشار در جریان آزاد منفی‌تر شود و از رشد لایه مرزی جلوگیری نماید.

در شکل 7، اثر کسر حجمی نانوپیال بر پروفیل دما در $\lambda=0.04$ و $n=0.01$ مشاهده می‌شود.



شکل 6 پروفیل سرعت نانوپیال در کسر حجمی نانوپیال مختلف در جریان جابجایی ترکیبی ($n = 0.01, \lambda = 0.04$)



شکل 7 پروفیل دمای نانوپیال در کسر حجمی نانوپیال مختلف در جریان جابجایی ترکیبی ($n = 0.01, \lambda = 0.04$)

مخالف جهت جریان وجود دارد، مشاهده می شود که اثر دمای سطح بر تغییر ضریب اصطکاک در حضور مقادیر بیشتر نانوذرات، بیشتر است.

در جدول 2 ضرایب اصطکاک نانوسيال به ازای مقادیر مختلف λ و n و کسر حجمی نانوذرات جمع آوری شده است. در این جدول، ۵٪ بیانگر درصد افزایش ضریب اصطکاک ناشی از افزایش کسر حجمی نانوذرات در سیال پایه است که به صورت زیر تعریف می شود:

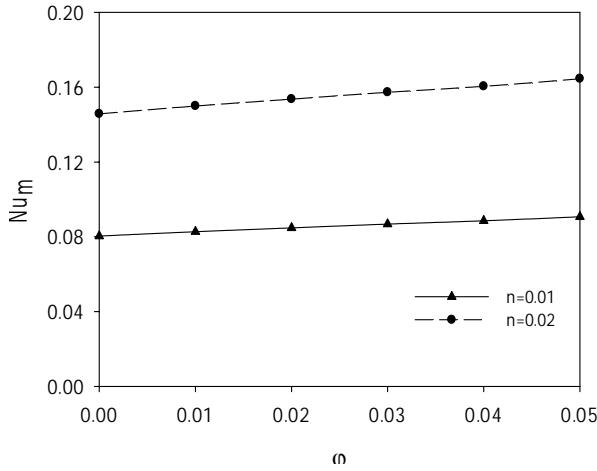
$$\% \Delta_f = [(f_{mnf} - f_m) / f_m] \times 100$$

دیده می شود که کمترین تأثیر حضور نانوذرات بر ضریب اصطکاک، در $n=0.02$ و به ازای $\lambda=0.04$ رخ می دهد. همچنین از داده های این جدول می توان نتیجه گرفت که بیشترین تأثیر افزایش کسر حجمی نانوذرات بر ضریب اصطکاک، در $n=0$ و به ازای $\lambda=0.04$ است.

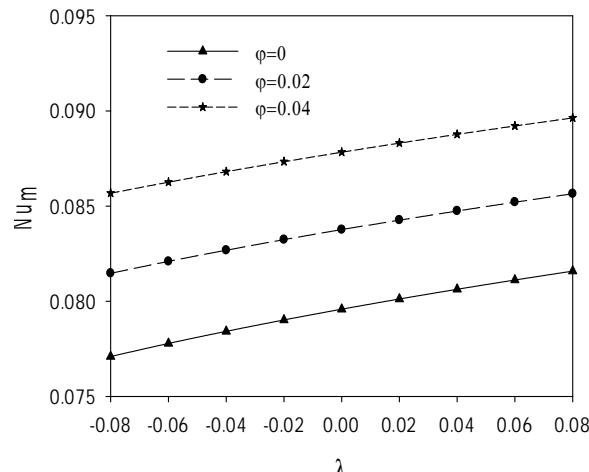
3-4- پرسی تغییرات عدد نولت

پارامتر معرف عدد نولت Nu_m بر حسب کسر حجمی نانوذرات در دماهای سطح مختلف و به ازای $\lambda=0.04$ در شکل 11 آورده شده است.

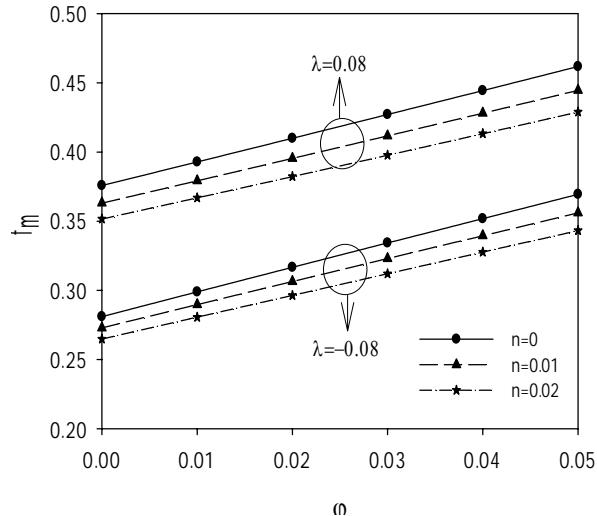
همانگونه که در این شکل مشاهده می شود، با افزایش کسر حجمی نانوذرات، نولت افزایش می یابد، که این بیانگر اثر حضور نانوذرات در افزایش انتقال حرارت از سطح می باشد. همچنین می توان دید که با افزایش دمای سطح دیوار، نولت نیز افزایش می یابد. این اثر افزایش در $n=0.02$ ، بیشتر است.



شکل 11 تغییرات پارامتر معرف عدد نولت Nu_m نسبت به φ در $\lambda = 0.04$ به $n=0.01, 0.02$



شکل 12 تغییرات پارامتر معرف عدد نولت Nu_m نسبت به λ در کسرهای حجمی مختلف نانوذرات برای $n=0.01$



شکل 10 پارامتر معرف ضریب اصطکاک f_m بر حسب φ در n های مختلف برای جریان با شناوری همجهت $\lambda = 0.08$ و $\lambda = -0.08$

جدول 2 تغییرات ضریب اصطکاک نانوسيال f_m به ازای مقادیر مختلف λ و n

$0/04\varphi$	$0/02\varphi$	0φ	n	λ
0/3776	0/3428	0/3081	= f_m	0
22/55	11/26	0	= $\% \Delta_f$	-0.04
0/3512	0/3202	0/2893	= f_m	0/02
21/39	10/68	0	= $\% \Delta_f$	
0/4013	0/3668	0/3324	= f_m	0
20/72	10/34	0	= $\% \Delta_f$	0
0/3731	0/3422	0/3116	= f_m	0/02
19/73	9/82	0	= $\% \Delta_f$	
0/4235	0/389	0/3549	= f_m	0
19/33	9/6	0	= $\% \Delta_f$	0/04
0/3938	0/3629	0/3323	= f_m	0/02
18/5	9/2	0	= $\% \Delta_f$	

تغییرات ضریب اصطکاک با پارامتر جابجایی آزاد (λ) برای نانوسيالی با $\varphi = 0.04$ به ازای دماهای مختلف سطح (n) در شکل 9 آمده است. می توان دید که با افزایش n ، ضریب اصطکاک کاهش می یابد. این کاهش با افزایش λ بیشتر هم می شود. دلیل آن ایجاد گرادیان فشار مطلوب بر اثر نیروهای شناوری همجهت با جریان ($\lambda > 0$) است.

شکل 10 تأثیر تغییر کسر حجمی نانوذرات را بر تغییرات ضریب اصطکاک در دماهای سطح مختلف n برای جریان جابجایی ترکیبی همجهت جریان با $\lambda = 0.08$ و مخالف جهت جریان با $\lambda = -0.08$ نشان می دهد. برای حالتی که نیروی شناوری همجهت با جریان است، با افزایش کسر حجمی نانوذرات، ضریب اصطکاک افزایش می یابد که این ناشی از افزایش لزجت سیال حاوی نانوذرات و درنتیجه افزایش تنش برشی در جریان است. همچنین مشاهده می شود که در تمامی مقادیر φ ، با افزایش n ضریب اصطکاک کاهش یافته است که نشان دهنده تأثیر دمای سطح بر کاهش لزجت سیال و درنتیجه کاهش ضریب اصطکاک مجاور سطح می باشد.

همچنین برای حالتی که نیروی شناوری در خلاف جهت جریان است، می توان دید که با افزایش کسر حجمی نانوذرات و همچنین با کاهش n ، ضریب اصطکاک افزایش می یابد. با این حال برای حالتی که نیروهای شناوری

- افزایش کسر حجمی نانوذرات و پارامتر جابجایی ترکیبی، هر دو منجر به افزایش عدد نوسلت و درنتیجه انتقال حرارت بیشتر در جریان می‌شود؛ بطوریکه پارامتر معرف عدد نوسلت جریان برای نانوسیال آب- مس با کسر حجمی 4 درصدی نسبت به سیال خالص در حدود 10% افزایش داشته است.
- افزایش دمای سطح موجب افزایش عدد نوسلت و کاهش ضریب اصطکاک می‌شود، با این حال اثر افزایش دمای سطح بر این تغییرات به ازای کسرهای حجمی بالاتر نانوذرات و در پارامترهای جابجایی ترکیبی بالاتر، محسوس‌تر است.

6- فهرست عالم

ثابت تحریب	C
ضریب اصطکاک محلی	C_{fx}
گرمایی ویژه (Jkg ⁻¹ K ⁻¹)	C_p
قطر نانوذرات جامد (nm)	d_s
اندازه مولکولی سیال مینا ($d_f = 2\bar{A}$)	d_f
تابع جریان بدون بعد	f
پارامتر معرف ضریب اصطکاک	f_m
عدد گراشتف (Gr = $g\beta \Delta TL^3/v^2$)	Gr
ضریب هدایت حرارتی (Wm ⁻¹ K ⁻¹)	k
ثابت بولتزمن ($JK^{-1}K_b = 1.3807 \times 10^{-23}$)	k_b
طول مشخصه (m)	L
توان دمای دیوار	N
پارامتر معرف عدد نوسلت	Nu_m
عدد نوسلت محلی	Nu_x
فشار سیال (Pa)	\bar{p}
($p = (\bar{p} - p_0)/\rho U_0^2$) فشار بدون بعد	P
پروفیل فشار بدون بعد ($Pr = v/\alpha$)	Pr
عدد پرانتل ($Pe = u_s d_s/\alpha$)	P_e
عدد رینولدز ($Re = U_0 L/\theta$)	Re
(K) دما	\bar{T}
($T = (\bar{T} - T_\infty) / \Delta T$) دمای بدون بعد	\bar{u}, \bar{v}
مولقه بردار سرعت در راستای \bar{x} و \bar{y} (ms^{-1})	U_∞
($u = \bar{u}/U_0, v = Re^{1/2}(\bar{v}/U_0)$) مولقه بدون بعد سرعت (ms^{-1})	U_s
سرعت مشخصه (ms^{-1})	\bar{x} و \bar{y}
سرعت حرکت براونی (ms^{-1})	H
مختصات کارتزین (m)	
علایم یونانی	
ضریب پخش حرارتی ($m^2 s^{-1}$)	α
ضریب انبساط گرمایی ($1/K$)	B
لرجت دینامیکی (Pa.s)	μ
(kgm ⁻³) چگالی	ρ
لرجت سینماتیکی ($m^2 s^{-1}$)	ν
($\lambda = Gr/Re^{5/2}$) پارامتر جابجایی ترکیبی	Λ
($\Delta T = \bar{T}_w - T$) دمای مشخصه	ΔT
متغیر تشابهی	

جدول 3 تغییرات عدد نوسلت نانوسیال Nu_m به ازای مقادیر مختلف λ , n و φ				
0/04 φ =	0/02 φ =	0 φ =	n	λ
0/0868	0/0826	0/0784	= Nu_m	0/01
10/71	5/35	0	= Δ_{Nu}	-0/04
0/1573	0/1498	0/1422	= Nu_m	0/02
10/61	5/34	0	= Δ_{Nu}	
0/0878	0/0837	0/0796	= Nu_m	0/01
10/3	5/15	0	= Δ_{Nu}	0
0/1592	0/1518	0/1443	= Nu_m	0/02
10/32	5/19	0	= Δ_{Nu}	
0/0887	0/0847	0/0806	= Nu_m	0/01
10/05	5/08	0	= Δ_{Nu}	0/04
0/1609	0/1537	0/1463	= Nu_m	0/02
9/98	5/05	0	= Δ_{Nu}	

شکل 12 تاثیر پارامتر شناوری جریان λ را بر عدد نوسلت در کسرهای حجمی مختلف نانوذرات نشان می‌دهد. با افزایش λ مقدار عدد نوسلت افزایش یافته است که با توجه به افزایش خاصیت شناوری در جریان با افزایش λ امری قابل انتظار است. همچنین می‌توان مشاهده نمود که با افزایش کسر حجمی نانوذرات، انتقال حرارت در نانوسیال بدليل اثرباری نانوذرات در تغییر ضریب هدایت حرارتی سیال پایه، افزایش یافته است. در جدول 3 مقادیر عدد نوسلت به ازای مقادیر مختلف λ و n به ازای کسرهای حجمی مختلف نانوذرات جمع‌آوری شده است.

در جدول 3 Δ_{Nu} بیانگر درصد افزایش نوسلت در اثر تغییر کسر حجمی نانوذرات است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\Delta_{Nu} = [(Nu_{m_nf} - Nu_{m_f})/Nu_{m_f}] \times 100)$$

همانگونه که از داده‌های جدول 3 برمی‌آید، بیشترین افزایش عدد نوسلت ناشی از حضور نانوذرات، در $n=0.01$ و به ازای $\lambda=-0.04$ رخ می‌دهد. همچنین کمترین تاثیر حضور نانوذرات بر افزایش نوسلت، در $n=0.02$ و به ازای $\lambda=0.04$ مشاهده می‌شود.

5- نتیجه گیری

جریان جابجایی ترکیبی نانوسیال در لایه مرزی بدليل اهمیت و کاربرد جریان در مسائل متعدد مهندسی و در عین حال سادگی حل معادلات لایه مرزی نسبت به معادلات ناویر-استوکس از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است که در این مقاله مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت. معادلات لایه مرزی حاکم بر جریان نانوسیال به صورت عددی و با استفاده از طرح تفاضل محدود ضمنی، به روش کلرباکس حل شده‌اند و حل تشابهی و نتایج عددی در مورد تغییر در شکل پروفیل‌های سرعت و دما، ضریب اصطکاک و انتقال حرارت در جریان تحت تأثیر تغییر کسر حجمی نانوذرات، پارامتر شناوری و دمای سطح مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج حاصل از این مطالعه را می‌توان در موارد زیر خلاصه کرد:

- با افزایش n ، مقدار θ در هر فاصله‌ای از سطح کاهش می‌یابد. با نزدیک شدن به سطح آزاد و لبه لایه مرزی حرارتی، مجدداً تاثیر n بر پروفیل دما کمتر می‌شود.

- با افزایش اثر شناوری در جریان جابجایی ترکیبی، ضریب اصطکاک افزایش یافته است. بطوریکه پارامتر معرف ضریب اصطکاک برای نانوسیال آب- مس با کسر حجمی 4 درصدی نسبت به سیال خالص در حدود 20% افزایش داشته است. با این وجود در مقادیر پائین تر پارامتر جابجایی ترکیبی، تاثیر حضور

- [16] L. Deswita, R. Nazar , A. Ishak , R. Ahmad , I. Pop, Similarity solutions for mixed convection boundary layer flow over a permeable horizontal flat plate, *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 217, pp. 2619-2630, 2010.
- [17] S. V. Subhashini, N. Samuel, I. Pop, Numerical investigation of dual solutions for double diffusive convection from a permeable horizontal flat plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 55, pp. 4981-4986, 2011.
- [18] F. M. Allan, M. A. Hajji, On The Similarity Solution of Nano-Fluid Flow Over A Moving Flat Plate Using The Homotopy Analysis Method, *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Vol. 1479, pp. 1833-1837, 2012.
- [19] A. M. Rashad, M. A. El-Hakiem, M. M. M. Abdou, Natural convection boundary layer of a non-Newtonian fluid about a permeable vertical cone embedded in a porous medium saturated with a nanofluid, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 62, pp. 3140-3151, 2011.
- [20] A.M. Rashad, A.J. Chamkha, M. Modather, Mixed convection boundary-layer flow past a horizontal circular cylinder embedded in a porous medium filled with a nanofluid under convective boundary condition, *Computers & Fluids*, Vol. 86, pp. 380-388, 2013.
- [21] P. Rana, R. Bhargava, Numerical study of heat transfer enhancement in mixed convection flow along a vertical plate with heat source/sink utilizing nanofluids, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 16, pp. 4318-4334, 2011.
- [22] M. M. Rashidi, O. Anwar Beg, M. Asadi, M. T. Rastegari, DTM- Padé Modeling of Natural Convective Boundary Layer Flow of a Nanofluid Past a Vertical Surface, *Int. J. of Thermal & Environmental Engineering*, Vol. 4, No. 1, pp. 13-24, 2012.
- [23] Ch. RamReddy, P. V. S. N. Murthy, A. J. Chamkha, A. M. Rashad, Soret effect on mixed convection flow in a nanofluid under convective boundary condition, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 64, pp. 384-392, 2013.
- [24] Md. J. Uddin, W. A. Khan, A. I. Md. Ismail, Free Convection Boundary Layer Flow from a Heated Upward Facing Horizontal Flat Plate Embedded in a Porous Medium Filled by a Nanofluid with Convective Boundary Condition, *Transp Porous Med*, Vol. 92, pp. 867-881, 2012.
- [25] M. M. Rahman, M. A. Al-Lawatia, I. A. Eltayeb, N. Al-Salti, Hydromagnetic slip flow of water based nanofluids past a wedge with convective surface in the presence of heat generation (or) absorption, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 57, pp. 172-182, 2012.
- [26] N. Md. Arifin, R. Nazar, I. Pop, Similarity Solution of Marangoni Convection Boundary Layer Flow over a Flat Surface in a Nanofluid, *Journal of Applied Mathematics*, A. ID. 634746, pp. 8, 2013.
- [27] A. Arefmanesh, M. Amini, M. Mahmoodi, M. Najafi, Buoyancy-driven heat transfer analysis in two-square duct annuli filled with a nanofluid, *European Journal of Mechanics B/Fluids*; Vol.33, pp. 95–104, 2012.
- [28] H.C. Brinkman, The Viscosity of concentrated suspensions and solution, *Chem. Phys.*, Vol. 20, pp. 571–581, 1952.
- [29] H.E. Patel, T. Sundararajan, T. Pradeep, A. Dasgupta, N. Dasgupta, S. K. Das, A micro-convection model for thermal conductivity of nanofluids, *Pramana, J. Phys.*, Vol. 65, pp. 863–869, 2005.
- [30] A. K. Santra, S. Sen, N. Chakraborty, Study of heat transfer due to laminar flow of copper-water nanofluid through two isothermally heated parallel plates, *Int. J. Therm. Sci.*, Vol. 48, pp. 391–400, 2009.
- [31] D.R. Jones, Free convection from a semi-infinite plate inclined at a small angle. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 26, pp. 77–98, 1973.
- [32] T. Cebeci, P. Bradshaw, Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, *Springer*, New York, 1988.

پروفیل دمای بدون بعد Θ
کسر حجمی نانوذرات جامد Φ

زیرنویس‌ها

موثر	Eff
سیال	F
نانو سیال	Nf
نانوذرات جامد	S
جریان آزاد	∞
دیوار	W
محالی	X

7- مراجع

- [1] L. Prandtl, Überflüssigkeitsbewegung bei sehrkleiner Reibung, Verh. III. Intern.Math.Kongr., Heidelberg, 1904, S.484(491, Teubner, Leipzig, 1905.
- [2] J.D. Anderson, Ludwig Prandtl's Boundary Layer, *Physics Today*, December, 2005.
- [3] O. Aydin, A. Kaya, Laminar boundary layer flow over a horizontal permeable flat plate, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. pp. 161, 229–240, 2005.
- [4] P. D. Weidman, D. G. Kubitschek, A. M. J. Davis, The effect of transpiration on self-similar boundary layer flow over moving surfaces, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 44, pp. 730–737, 2006.
- [5] A. Ishak, R. Nazar, I. Pop, Mixed convection boundary layers in the stagnation-point flow toward a stretching vertical sheet, *Mechanica*, Vol. 41, pp. 509–518, 2006.
- [6] K. Venkatasubbaiah, T. K. Sengupta, Mixed convection flow past a vertical plate: Stability analysis and its direct simulation, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, pp. 461–474, 2009.
- [7] O. D. Makinde, Similarity solution of hydromagnetic heat and mass transfer over a vertical plate with a convective surface boundary condition, *International Journal of the Physical Sciences*, Vol. 5, pp. 700–710, 2010.
- [8] K. Vajravelu, K. V. Prasad, C. Ng, Unsteady convective boundary layer flow of a viscous fluid at a vertical surface with variable fluid properties, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 14, pp. 455–464, 2013.
- [9] K. Bhattacharyya, S. Mukhopadhyay, G.C. Layek, Similarity solution of mixed convective boundary layerslip flow over a vertical plate, *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 4, pp. 299–305, 2013.
- [10] N. Afzal, T. Hussain, Mixed convection over a horizontal plate, *J. Heat Trans.* 106, 240–241, 1986.
- [11] W. Schneider, A similarity solution for combined forced and free convection flow over a horizontal plate, *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 22, pp. 1401–1406, 1979.
- [12] A. Ishak, R. Nazar, I. Pop, The Schneider problem for a micropolar fluid, *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 38, pp. 489–502, 2006.
- [13] A. Ridha, Aiding flows non-unique similarity solution of mixed-convection boundary-layer equation, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, Vol. 47, pp. 341–352, 1996.
- [14] H. Steinrück, A review of the mixed convection boundary-layer flow over a horizontal cooled plate, *GAMM Mitteilung Heft*, Vol. 2, pp. 127–158, 2001.
- [15] E. Magyari, I. Pop, B. Keller, Mixed convection boundary-layer flow past a horizontal permeable flat plate, *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 31, pp. 215–225, 2002.