

پیشنهاد روابط تحلیلی جهت برآورد طول ابر کاواک طبیعی بر اساس عدد کاواک و عدد رینولدز

مهدی معرفت^{۱*}، سهراب طهماسبی^۲، محمد رضا انصاری^۳

۱- استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۳- دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

* تهران، صندوق پستی، ۱۴۱۱۵-۱۱۱۱، maerefat@modares.ac.ir

چکیده

در شرایطی که ابر کاواک تشکیل می‌گردد، محاسبه طول کاواک طبیعی حائز اهمیت می‌باشد. طول کاواک تابع عدد کاواک بوده و با استفاده از روابط ناشی از نتایج تجربی محاسبه می‌شود، که روابط مقاومنی می‌باشند و مبنای تحلیلی ندارند. همچنین در پیشینه تحقیقات روابطی وجود ندارد که بتوان طول کاواک را بر حسب عدد رینولدز بدست آورد و ارتباط بین عدد کاواک و عدد رینولدز را نشان دهد. در این تحقیق جهت بدست آوردن روابط تحلیلی مربوط به محاسبه طول کاواک طبیعی، با توجه به مدل انتقال جرم، معادله پیوستگی و معادله مومنتوم، براساس روش مرتبه بزرگی متغیرها، سه رابطه بدست آمده، رابطه تحلیلی اول مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد کاواک می‌باشد، که در آن نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت معکوس با ریشه عدد کاواک دارد. رابطه تحلیلی دوم مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد رینولدز می‌باشد، که در آن نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت مستقیم با ریشه عدد رینولدز دارد، رابطه تحلیلی سوم مربوط به محاسبه عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز می‌باشد، که در آن عدد کاواک نسبت معکوس با عدد رینولدز دارد. با تطبیق نتایج کار حاضر با نتایج تجربی، ضرایب مجهول مربوط به روابط تحلیلی حاصل می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد که روابط تحلیلی بدست آمده جایگزین مناسبی برای روابط تجربی می‌باشند. این روابط طول کاواک را بر حسب عدد کاواک و عدد رینولدز محاسبه و ارائه می‌دهند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دراگت: ۱۳ بهمن ۱۳۹۴

پذیرش: ۱۸ اسفند ۱۳۹۴

ارائه در سایت: ۲۷ اردیبهشت ۱۳۹۵

کلید واژگان:

طول کاواک

عدد کاواک

مرتبه بزرگی متغیرها

Analytical approach to estimate supercavity length based on Cavity and Reynolds Numbers

Mehdi Maerefat*, Sohrab Tahmasbi, Mohammad Reza Ansari

Department of Mechanical Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
*P.O.Box 14115-111, Tehran, Iran, maerefat@modares.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 02 February 2016
Accepted 09 March 2016
Available Online 16 May 2016

Keywords:
Cavity Length
Cavity Number
Order of Magnitude Method

ABSTRACT

Cavity length estimation is important as supercavity condition is generated. The natural cavity length is function of cavity number and is calculated by relations deduced from experimental results which are different from each other and are not driven from analytical approaches. Literature survey shows that correlations based on cavity length in relation with Reynolds and cavity numbers have not been attempted. The purpose of the present work is to estimate analytical based relations for cavity length with respect to mass transfer, continuity and momentum conservation equations. This attempt, which was conducted by order of magnitude method resulted in three relations. The first analytical based relation calculates cavity length versus cavity number. The obtained relation shows that cavity length is proportional to the inverse square root of cavity number. The second analytical relation calculates cavity length with respect to Reynolds number. It shows cavity length has a proportional relation to Reynolds square root. The third analytical relation considers cavity number with respect to Reynolds number. The third relation shows that cavity number has inverse relation to Reynolds number. Unknown coefficients values of the relations are obtained through comparison with the already existed experimental results. These analytical relations which are an appropriate alternative to experimental based relations estimate cavity length with respect to cavity and Reynolds number.

پدیده باعث سایش، خوردگی روی سطح و ایجاد ارتعاش و نویز در سیستم

کاواک یک پدیده فیزیکی است که در آن فشار سیال تا حد فشار بخار اشباع می‌گردد.

در کاربردهای دریایی و نظامی این پدیده بسیار مفید است و با تشکیل ابر کاواک می‌توان پسای اصطکاکی روی بدنه رونده‌های تند رو زیر سطحی را شدیداً کاهش داد. وقتی این پدیده شکل می‌گیرد، اطراف بدنه رونده توسط

کاهش یافته و بخار آب حاصل می‌گردد. این پدیده در بسیاری از تجهیزات مکانیکی مانند پمپ‌ها، توربین‌ها، نازل‌ها و پروانه‌های دریایی اتفاق می‌افتد و اثر نامطلوبی بر روی کلایی تجهیزات فوق اعمال می‌کند. از طرف دیگر این

۱- مقدمه

Please cite this article using:

M. Maerefat, S. Tahmasbi, M. R. Ansari, Analytical approach to estimate supercavity length based on Cavity and Reynolds Numbers, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 5, pp. 153-159, 2016 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

دادند. چانسون [10] مکانیزم پراکنده‌گی گاز دمشی که به واسطه گردابیان فشار و تنش برشی هست را نشان دادند. وانگ و همکاران [11] روابط بین شکل کاواک و پارامترهای هندسی مربوط به کاواک زا را به صورت عددی بررسی کردند و فرمول‌های تجزیی جهت محاسبه طول و قطر حباب کاواک بر روی برتابه‌های تحت تأثیر کاواک طبیعی ارائه نمودند. معرفت و همکاران [12] کاواک طبیعی را بر روی سه هندسه متفاوت شبیه‌سازی کردند و روابط مربوط به محاسبه طول کاواک سه هندسه را پس از شبیه‌سازی و صحه سنجی ارائه نمودند.

در معادله دینامیک حباب، تغییرات شاعع حباب نسبت به زمان، فقط تابعی از تغییرات فشار داخل و خارج حباب می‌باشد و از ترم مشتق دوم تغییرات شاعع حباب، ترم کشش سطحی و ترم دمپینگ لرج صرف‌نظر گردیده است [13]. بدلیل اینکه تدوین و استخراج مدل‌های انتقال جرم از معادله پیوستگی به همراه ترم چشمی بطور کامل در پیشینه تحقیقات، بحث و بررسی نشده است، لذا مراحل استخراج مدل‌ها و فرضیات بکار رفته، با توضیحات لازم و کافی ارائه می‌شود.

با توجه به اینکه در کارهای گذشته و مطالعات انجام شده، مطالعه و تحقیقی بر روی محاسبه طول کاواک بر مبنای تحلیلی انجام نشده است. در شرایطی که پدیده ابرکاواک⁵ تشکیل می‌گردد، طول کاواک با استفاده از روابط ناشی از نتایج تجزیی محاسبه می‌شود، که مبنای تحلیلی ندارند و روابط متفاوتی می‌باشند. در این تحقیق جهت بدست آوردن روابط تحلیلی مربوط به محاسبه طول کاواک، با توجه به مدل انتقال جرم، معادله پیوستگی و معادله مومنتوم، براساس روش بزرگ مرتبه متغیرها⁶، سه رابطه تحلیلی بدست آمده، رابطه تحلیلی اول مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد کاواک می‌باشد. رابطه تحلیلی دوم مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد رینولز می‌باشد، توسط دو رابطه فوق می‌توان در محیط جریان، طول کاواک را بر حسب عدد کاواک و عدد رینولز جریان محاسبه نمود. رابطه تحلیلی سوم مربوط به محاسبه عدد کاواک نسبت به عدد رینولز پیش‌بینی کرد. ضرایب مجھول مربوط به روابط تحلیلی، در تطبیق با نتایج تجزیی، حاصل می‌شوند. میزان خطای روابط تحلیلی بدست آمده نسبت به نتایج تجزیی محاسبه شده است.

2- روابط حاکم

جریان حاکم بر پدیده مخلوط⁷ دو فازی می‌باشد. در این حالت جرم حجمی، مخلوطی از فاز بخار، فاز مایع و گازهای غیر محلول می‌باشد و توسط پارامتر کسر حجمی، میزان فازها تعیین می‌گردد. معادلات پیوستگی و مومنتوم بصورت مخلوط حل می‌شود. برای هر فاز یک معادله پیوستگی بطور مجزا منظور می‌گردد. وقتی که جریان بصورت مخلوط در نظر گرفته می‌شود رابطه (1) معادله پیوستگی جریان مخلوط، رابطه (2) معادله پیوستگی فاز بخار و رابطه (3) معادله پیوستگی فاز مایع را نشان می‌دهد.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha \rho_v) + \nabla \cdot (\alpha \rho_v \vec{V}) = R \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-\alpha)\rho_l) + \nabla \cdot ((1-\alpha)\rho_l \vec{V}) = -R \quad (3)$$

که در روابط (1) تا (3)، R نرخ تغییر فاز خالص از مایع به بخار و بخار به

غالوی از بخار و هوا پوشیده می‌شود و تماس بدنها با جریان آب از بین می‌رود. از کاویتاور جهت دمش هوا وايجاد غلاف کاواک در حالت دمشی استفاده می‌شود. لذا برای استفاده از اين پديده، آگاهی از فيزيك و پيش‌بیني رفتار آن بسيار ضروري است. با توجه به اهميت موضوع در سال‌های اخير به واسطه توسعه روش‌های ديناميک محاسباتي، مطالعات عددی بر روی شبیه‌سازی فيزيكی پدیده به صورت قابل توجه‌های امكان‌پذير گشته است. بطور کاى در شبیه‌سازی مدل‌های مختلف از دو دیدگاه زیر استفاده می‌شود [1]:

(1) مدل لاگرانژي (روش حباب‌های مجزا)

(2) مدل اوبلري (روش پيوسته)

در ديدگاه لاگرا نزا رفتار حباب‌ها بطور مجزا مدنظر قرار می‌گيرند و از معادلات ديناميک حباب‌ها استفاده می‌شود. در ديدگاه اوبلري جريان به صورت يك مخلوط تقريب زده می‌شود. برای هر فاز يك معادله پيوستگي بطور مجزا منظور می‌گردد. در اين مدل معادلات بقاي جرم هر فاز توسيط پارامتر کسر حجمي بيان می‌گردد. در حقيقت پارامترهای تأثیرگذار بر تشکيل کاواک بر اساس فرایندهای فيزيكی پيچيدهای می‌باشند. اشنبرگ [2] خلاصه‌ای از ديناميک تشکيل کاواک را ارائه نمود. در عمل شروع کاواک با رشد حباب‌ها آغاز می‌گردد. اين حباب‌ها دارای مخلوط از بخار آب و گازهای غير محلول می‌باشند. وقتی که فشار محلی تا حد فشار بخار کاهش می‌يابد حباب‌ها تا حد انفجار رشد می‌كنند و زمانیکه حباب‌ها به ناحيه پر فشار منتقل می‌گردد دچار فرو ریختگی می‌شوند. ديناميک فرو ریختگی، پيچيده بوده و وابسته به پارامترهای متعددی از قبليل کشش سطحي، تأثير لزجت و ميزان گازهای غير محلول دارد. در حال حاضر مدل انتقال جرمی در کاواک وجود ندارد که كليه پارامترهای فوق را در بر گيرد. مدل‌های موجود نشأت گرفته از معادله ديناميک حباب، رايلى-پليست¹ [3] می‌باشند. اين معادله معرف رشد و فرو ریختگی حباب متقابلي است که در ميدان فشار واقع می‌باشد. تعدادي از مدل‌های انتقال جرم در کاواک عبارتند از: مدل سينگهال،² مدل اشنبر و ساور³، مدل زوارت-گربر-بلامری⁴.

جزئيات مربوط به مدل‌های انتقال جرم، مختلف می‌باشند؛ اما در همه مدل‌ها از معادله پيوستگي همراه با ترم چشميه استفاده گردیده است [4]. در ترم چشميه از معادله ديناميک حباب رايلى-پليست استفاده می‌شود.

ساوچنکو و همکاران [5] نتایج تجزیی بر روی پرتابه‌های زیرآبی در تونل آب استخراج نمودند و بر اساس نتایج، روابط تجزیی جهت محاسبه طول و قطر حباب کاواک در حالت تقارن محوري ارائه نمودند. پينگ و همکاران [6] شكل حباب کاواک دمشي و نيزوي پسا حاصل از آن را به صورت عددی شبیه‌سازی نمودند و رابطه بين شكل حباب کاواک دمши و نرخ دمش گاز را به صورت تجزیي ارائه کردند. وانگ و همکاران [7] مجموعه‌ای از برتابه‌های زيرآبی را در تونل آب مدارسته به صورت تجزیي موردمطالعه قراردادند و مشخصات مربوط به شكل حباب کاواک را به صورت طبیعی و دمشي استخراج نمودند. وانگ و همکاران [8] نرخ گاز دمشي در حباب کاواک را موردررسی قرار داده و نرخ تغيير حجم حباب کاواک را بر اساس روابط تجزیي و نتایج آزمایشگاهی مقایسه نمودند. بين و همکاران [9] حباب کاواک را به شكل طبیعی و دمشي با استفاده از يك مدل سه‌بعدی و بر اساس معادله انتقال جرم شبیه‌سازی نموده و تطابق بين نتایج تجزیي و نتایج شبیه‌سازی را نشان

¹ Rayleigh-Plesset

² Singhal

³ Schneir-Sauer

⁴ Zwart-Gerber-Blaamri

با توجه به رابطه‌ی (10)، رابطه‌ی (19) بدست می‌آید.

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\rho R}{\rho_v \rho_l} \quad (19)$$

با توجه به روابط (12)، (14) و (18) رابطه‌ی (20) بدست می‌آید.

$$R = (n4\pi)^{\frac{1}{3}} (3\alpha)^{\frac{2}{3}} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_B - P}{3\rho_l}} \quad (20)$$

رابطه (20) را می‌توان بر اساس شاعع حباب یعنی R_{B} بفرم رابطه (22) نوشت.

$$n = \frac{3\alpha}{4\pi R_B^3} \quad (21)$$

$$R = \frac{3\alpha}{R_B} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_B - P}{3\rho_l}} \quad (22)$$

چنانچه فرض کنیم، انتقال جرم بفرم تبخیر باشد، در رابطه (23) فشار داخل حباب، فشار تبخیر خواهد بود و $P_B = P_v$ می‌باشد.

$$R_{evap} = \frac{3\alpha}{R_B} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (23)$$

زمانی که حباب به حداقل قطر خود برسد، بین نیروی پسا و نیروی کشش سطحی تعادل برقرار می‌شود که توسط عدد وبر در رابطه (24) ارائه می‌گردد.

$$W_e = \frac{\rho R_B v_{rel}^2}{S} \quad (24)$$

که در آن S نیروی کشش سطحی و v_{rel} سرعت نسبی بین فاز بخار و مایع می‌باشد. با جایگذاری رابطه (24) در رابطه (23)، رابطه (25) حاصل می‌گردد.

$$R_{evap} = \frac{3\alpha \rho_l v_{rel}^2}{W_e S} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (25)$$

که در آن v_{rel}^2 بعنوان یک سرعت مشخصه و $\frac{3}{W_e}$ بعنوان یک ضریب تجربی لحاظ شده و در رابطه (26) داریم.

$$R_{evap} = C \frac{\alpha \rho_l V_{ch}}{S} \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (26)$$

توضیح رابطه (27) و (28)، می‌توان کسر حجمی را به کسر جرمی بخار f ربط داد.

$$\alpha = f \frac{\rho}{\rho_v} \quad (27)$$

$$(1 - \alpha) = (1 - f) \frac{\rho}{\rho_l} \quad (28)$$

با جایگذاری رابطه (28) در رابطه (26)، روابط (29) و (30) بدست می‌آید.

$$P \leq P_v \quad \text{اگر}$$

$$R_{evap} = C_e \frac{V_{ch}}{S} \rho_v \rho_l \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} (1 - f) \quad (29)$$

$$P \geq P_v \quad \text{اگر}$$

$$R_{cond} = C_c \frac{V_{ch}}{S} \rho_l \rho_l \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l}} f \quad (30)$$

سرعت نسبی بین دو فاز معمولاً 1 الی 10 درصد سرعت اصلی جريان در نظر گرفته می‌شود، در جریان‌های مغذوش نیز نوسانات سرعت محلی نیز از همین مرتبه می‌باشد، بنابراین می‌توان V_{ch} را با \sqrt{k} جایگزین نمود که مربوط به انرژی جنبشی جريان مغذوش می‌باشد [13].

در روابط (30) و (29)، $C_c = 0/01$ و $C_e = 0/02$ می‌باشد که بروش تحریبی استخراج گردیده است.

مایع می‌باشد. از سبط رابطه (2) و (3) رابطه (4) و (5) بدست می‌آید

$$\rho_v \frac{D\alpha}{Dt} + \alpha \left[\rho_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \alpha \frac{D\rho_v}{Dt} = R \quad (4)$$

$$-\rho_l \frac{D\alpha}{Dt} + (1 - \alpha) \left[\rho_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + (1 - \alpha) \frac{D\rho_l}{Dt} = -R \quad (5)$$

در مرز مشترک آب و بخار رابطه (6) حاکم است.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

که ρ معرف چگالی مخلوط در مرز مشترک می‌باشد. در مرز مشترک ρ بعنوان یک مقدار ثابت فرض می‌شود.

بنابراین ترم‌های سوم روابط (4) و (5) حذف می‌گردد و روابط (7) و (8) حاصل می‌گردد.

$$\rho_v \frac{D\alpha}{Dt} + \alpha \left[\rho_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = R \quad (7)$$

$$-\rho_l \frac{D\alpha}{Dt} + (1 - \alpha) \left[\rho_l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = -R \quad (8)$$

از جمع روابط (7) و (8) رابطه (9) بدست می‌آید.

$$(\rho_v - \rho_l) \frac{D\alpha}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (9)$$

چگالی مخلوط توسط رابطه (10) بیان می‌گردد.

$$\rho = \alpha \rho_v + (1 - \alpha) \rho_l \quad (10)$$

از سبط رابطه (1)، رابطه (11) بدست می‌آید.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (11)$$

از ترکیب رابطه (9) و (11) رابطه (12) بدست می‌آید.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\rho_l - \rho_v) \frac{D\alpha}{Dt} \quad (12)$$

کسر حجمی بخار را می‌توان بر حسب چگالی حجمی حباب با شاعع R_B توسط رابطه (13) نوشت.

$$\alpha = n \left(\frac{4}{3} \pi R_B^3 \right) \quad (13)$$

که n تعداد حباب در واحد حجم و R_B شاعع حباب می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (13) در رابطه (12)، رابطه (14) بدست می‌آید.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -(\rho_l - \rho_v) \frac{4}{3} \pi n (3R_B^2) \frac{DR_B}{Dt} \quad (14)$$

رابطه (14) را می‌توان بفرم رابطه (15) نوشت.

$$\frac{DR_B}{Dt} = -(\rho_l - \rho_v) (n4\pi)^{\frac{1}{3}} (3\alpha)^{\frac{2}{3}} \frac{DR_B}{Dt} \quad (15)$$

معادله دینامیک حباب (ایلی - پلیسیت) بفرم رابطه (16) می‌باشد.

$$R_B \frac{D^2 R_B}{Dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{DR_B}{Dt} \right)^2 = \frac{P_B - P}{\rho_l} - \frac{4\vartheta_l}{R_B} R_B - \frac{2S}{\rho_l R_B} \quad (16)$$

معادله دینامیک حباب یک معادله دیفرانسیلی غیرخطی می‌باشد، لذا با توجه به مفروضاتی که لحاظ می‌شود، از ترم مشتق دوم یا شتاب مربوط به شاعع حباب در سمت چپ، و ترم دمپینگ لزج با فرض غیر لزج بودن سیال و ترم مربوط به کشش سطحی، ترم‌های دوم و سوم سمت راست صرفنظر می‌گردد.

رابطه (17) بدست می‌آید.

$$\frac{DR_B}{Dt} = \sqrt{\frac{2P_B - P}{3\rho_l}} \quad (17)$$

2-1-مدل سینگهال

با جایگذاری رابطه (9) در رابطه (7)، رابطه (18) حاصل می‌گردد.

$$\frac{D\alpha}{Dt} \left(1 - \frac{\alpha(\rho_v - \rho_l)}{\rho} \right) = \frac{R}{\rho_v} \quad (18)$$

$$R_{\text{evap}} = F_{\text{vap}} \frac{3\alpha_{\text{nuc}}(1-\alpha)\rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (41)$$

اگر $P \geq P_v$

$$R_{\text{cond}} = F_{\text{cond}} \frac{3\alpha\rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l}} \quad (42)$$

که در روابط (41) و (42) $R_B = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$ و $\alpha_{\text{nuc}} = 5 \times 10^{-4}$ و $F_{\text{vap}} = 50$ و $F_{\text{cond}} = 0.01$ [14] می‌باشد.

3-2- مدل اشنر-ساور

در این مدل طبق رابطه (43) کسر حجمی بخار به تعداد حبابها در واحد حجم مایع ارتباط داده شده است

$$\alpha = \frac{\frac{V_v}{V_l}}{1 + \frac{V_v}{V_l}} = \frac{n \frac{4}{3} \pi R_B^3}{1 + n \frac{4}{3} \pi R_B^3} \quad (43)$$

که در آن ساعت حباب طبق رابطه (44) است.

$$R_B = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{3}{4\pi n} \quad (44)$$

در این مدل نرخ انتقال جرم وابسته به $(1-\alpha)$ می‌باشد، اگر $\alpha = 0$ و یا $\alpha = 1$ باشد، انتقال جرم به سمت صفر می‌کند. تعداد حبابها بر واحد حجم مایع مهم می‌باشد. انتقال جرم در مدل اشنر-ساور [15] از روابط (45) و (46) بدست می‌آید.

اگر $P \leq P_v$

$$R_{\text{evap}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1-\alpha) \frac{3}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (45)$$

اگر $P \geq P_v$

$$R_{\text{cond}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1-\alpha) \frac{3}{R_B} \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l}} \quad (46)$$

4-2- مدل انتقال جرم با احتساب ترم کشش سطحی

شروع کاواک الزاما در فشار بخار اتفاق نمی‌افتد و در یک فشار بحرانی که کمتر از فشار بخار می‌باشد، شکل می‌گیرد. این تأخیر در شروع کاواک بواسطه کشش سطحی می‌باشد. عبارت دیگر کشش سطحی باعث می‌گردد که تأخیری در آغاز و شروع کاواک وجود آورد. در بخشی از فرایند که ساعت حباب‌ها کوچک می‌باشد، تأثیرات چشمگیر است و با رشد حبابها و افزایش ساعت حباب این ترم کاهش می‌یابد. بنابر این برای زمانی که حباب‌ها ریز می‌باشند، اثر کشش سطحی قابل ملاحظه می‌باشد. مراحل رشد و متلاشی شدن حباب‌ها در ساعت‌های مختلف و با احتساب کشش سطحی نشان می‌دهد که با افزایش کشش سطحی زمان متلاشی شدن و فرو ریختن حباب‌ها کاهش می‌یابد. تأثیر این موضوع برای حباب‌های با ساعت کوچکتر قابل مشاهده می‌باشد [16]. مشاهده شد که در رابطه (16) از ترم کشش سطحی صرف‌نظر گردید. با توجه به اینکه ساعت حباب‌ها در زمان تشکیل حباب کاواک در محدوده $10^{-4} - 10^{-2}$ میلی‌متر است و ساعت حباب در مخرج کسر بوده بنابراین در مراحل تشکیل و شکل‌گیری کاواک تأثیرگذار می‌باشد. نرخ انتقال جرم با توجه به رابطه (47) تابعیت پارامترهای زیر است.

$$R = f(\rho, \rho_v, \rho_l, \alpha, R_B, P, P_v, n) \quad (47)$$

اگر در رابطه (16) از ترم کشش سطحی صرف‌نظر نشود و در رابطه (48) این ترم منظور گردد، داریم:

فشار بخار با توجه به نوسانات فشار جریان مغذیوش از رابطه (31) و (32) بدست می‌آید.

$$P_v = (P_{\text{sat}} + \frac{P'_{\text{turb}}}{2}) \quad (31)$$

$$P'_{\text{turb}} = 0.39\rho k \quad (32)$$

با توجه به اینکه جریان اصلی مخلوطی از مایع، بخار مایع و گازهای غیر محلول می‌باشد، لذا چگالی جریان مخلوط را می‌توان بشکل رابطه (33) برحسب کسر حجمی نوشت و بر اساس آن رابطه (34) را بصورت کسر جرمی نوشت.

$$\alpha_v + \alpha_g + (1 - \alpha_v - \alpha_g) = 1 \quad (33)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f_v}{\rho_v} + \frac{f_g}{\rho_g} + \frac{1 - f_v - f_g}{\rho_l} \quad (34)$$

$$\rho_g = \frac{WP}{RT} \quad (35)$$

W وزن مولکولی گاز، R ثابت گازها، T دما و فشار گاز می‌باشد. گازهای غیر محلول در مخلوط جریان ناشی از دمش گاز درون محلول نیز می‌باشد. مقدار اندک این گاز می‌تواند تأثیرگذار باشد، بطوریکه در فشار کم انبساط گاز حاصل شده و کسر حجمی گاز را افزایش می‌دهد و روی چگالی تأثیر می‌گذارد، همچنین باعث تغییرآستانه فشار در تغییر فاز می‌گردد.

با توجه به رابطه (29) و (30) (روابط (36) و (37)) که روابط انتقال جرم بصورت کسر جرمی در مدل سینگنهال می‌باشند [13]، بدست می‌آید.

$$R_{\text{evap}} = C_e \frac{\sqrt{k}}{S} \rho_v \rho_l \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} (1 - f_v - f_g) \quad (36)$$

$$R_{\text{cond}} = C_c \frac{\sqrt{k}}{S} \rho_l \rho_i \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l}} f_v \quad (37)$$

2-2- مدل زوارت-گرب-بلامری

با توجه به رابطه (7)، ترم دوم را بواسطه پیوستگی، معادل صفر در نظر گرفته و رابطه (38) حاصل می‌گردد.

$$\rho_v \frac{D\alpha}{Dt} = R \quad (38)$$

از روابط (13) و (17)، رابطه (39) بدست می‌آید.

$$R_{\text{evap}} = \frac{3\alpha\rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \quad (39)$$

با توجه به اینکه فشار محیط کوچکتر و یا بزرگتر از فشار بخار باشد، رابطه (40) ارائه می‌شود [14].

$$R_{\text{evap}} = F \frac{3\alpha\rho_v}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l}} \text{sign}(P_B - P) \quad (40)$$

F یک ضریب تجربی است، رابطه (40) برای حالت تنظیر مناسب است ولی برای حالت تبخیر بطور فیزیکی ناصحیح و بطور عددی ناپایدار است، دلیل آن اینست که در مراحل اولیه، تشکیل کاواک از مراکز هسته رشد می‌کند و همچنانکه کسر حجمی بخار افزایش می‌یابد، چگالی مراکز هسته ای باقیستی کاهش می‌یابد. برای تصحیح مدل بجای α از $(1 - \alpha_{\text{nuc}})$ استفاده می‌گردد. مدل انتقال جرم زوارت-گرب-بلامری [14] در روابط (41) و (42) ارائه می‌گردد.

$$P \leq P_v \quad \text{اگر}$$

جهت محاسبه نسبت طول کاواک از آن‌ها استفاده می‌شود، رابطه گارابدیان^۱ (61)، ریچارد^۲ (62) واید^۳ (63)، [17] است. روابط (61) تا (63) نشان می‌دهد که نسبت طول کاواک به قطر جسم، فقط تابع عدد کاواک می‌باشد.

$$\frac{L_c}{d} = \frac{\sqrt{0.827(1+\sigma)}}{\sigma} \sqrt{\ln \frac{1}{\sigma}} \quad (61)$$

$$\frac{L_c}{d} = \frac{\sigma + 0.008}{\sigma(0.066 + 1.7\sigma)} \quad (62)$$

$$\frac{L_c}{d} = \frac{1.08}{\sigma^{1.118}} \quad (63)$$

طول کاواک، d قطر جسم، σ عدد کاواک می‌باشد. با توجه به رابطه تناسب (60) و نتایج تجربی [17] که در شکل ۱، نشان داده شده است رابطه تحلیلی (64) بدست می‌آید.

$$\frac{L_c}{d} = \frac{3.33}{\sqrt{\sigma} - 0.125} - 3.5 \quad (64)$$

نسبت طول کاواک به قطر آن فقط تابعی از عدد کاواک می‌باشد، در شکل ۱ نتایج حاصل از رابطه (64) با نتایج حاصل از [7] صحبت‌سنجی گردید.

3-2- رابطه بین عدد رینولدز و طول کاواک طبیعی

از هم مرتبه بودن ترم‌های لزجت و اینرسی در رابطه (56)، روابط (65) و (66) بدست می‌آید.

$$\frac{u_\infty^2}{L_c} \sim \vartheta \frac{u_\infty}{d^2} \rightarrow \frac{L_c^2}{d^2} - \frac{u_\infty L_c}{\vartheta} \sim R_e \quad (65)$$

$$\frac{L_c}{d} \sim \sqrt{R_e} \quad (66)$$

با توجه به رابطه تناسب (66) و نتایج تجربی [17] که در شکل ۲، نشان داده شده است. رابطه تحلیلی (67) بدست می‌آید.

$$\frac{L_c}{d} = 3.58\sqrt{R_e \times 10^{-6}} - 3 \quad (67)$$

از عدد رینولدز 7×10^7 به بعد انحرافی بین نتایج تجربی و رابطه پیشنهادی، مشاهده می‌شود. این میزان انحراف تا عدد رینولدز 7.74×10^7 که متناسب با عدد کاواک ۰.۰۵ است، معادل ۵% می‌باشد. در شکل ۲ نتایج حاصل از رابطه (67) با نتایج حاصل از [7] صحبت‌سنجی گردید.

در هیچ یک از مقالات پیشین رابطه‌ای بین نسبت طول کاواک به قطر

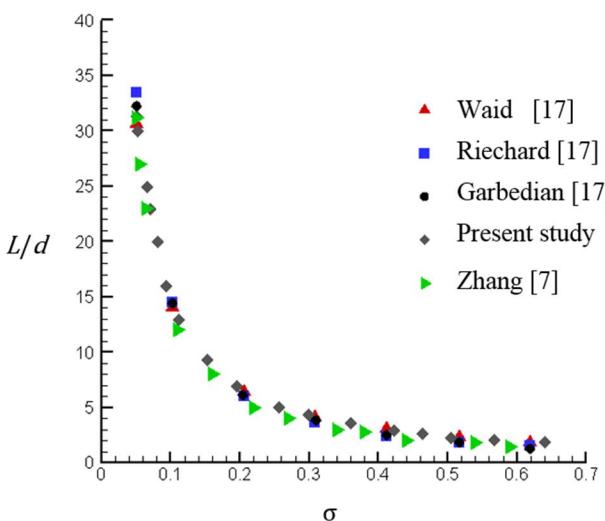


Fig. 1 Variation cavity lengths with cavitation number

شکل ۱ تغییر طول کاواک نسبت به عدد کاواک

¹Garabedian

²Richard

³Waid

$$\frac{DR_B}{Dt} = \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l} - \frac{4S}{3\rho_l R_B}} \quad (48)$$

مقدار $S = 0.072 \text{ N/m}$ کشش سطحی آب می‌باشد. با جایگذاری در رابطه (49) و (50) حاصل می‌گردد.

اگر $P \leq P_v$

$$R_{\text{evap}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1-\alpha) \frac{3}{R_B} \sqrt{\frac{2P_v - P}{3\rho_l} - \frac{4S}{3\rho_l R_B}} \quad (49)$$

اگر $P \geq P_v$

$$R_{\text{cond}} = \frac{\rho_v \rho_l}{\rho} \alpha (1-\alpha) \frac{3}{R_B} \sqrt{\frac{2P - P_v}{3\rho_l} - \frac{4S}{3\rho_l R_B}} \quad (50)$$

روابط (49) و (50)، بر اساس معادلات انتقال جرم می‌باشد که در آن‌ها نقش کشش سطحی آب در معادله دینامیک جباب نیز لحظه گردیده است.

3- رابطه بین عدد کاواک- عدد رینولدز

3-1- رابطه بین عدد کاواک و طول کاواک طبیعی

با توجه به معادلات پیوستگی، مومنتوم و با استفاده از روش مرتبه متغیرها می‌توان ترم‌های موجود در معادلات را که در حال حاضر نمی‌توان آن‌ها را بصورت تحلیلی حل کرد، ارزیابی نمود. لذا با این روش ترم‌های کم اهمیت تر را می‌توان حذف و معادلات باقیمانده را حل نمود.

با توجه به رابطه (51) معادله پیوستگی داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (51)$$

با توجه به تراکم ناپذیری و دائم بودن جریان رابطه (52) داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (52)$$

مرتبه متغیر u را معادل u_∞ و x را معادل L_c (طول کاواک) و y را معادل d (قطر جسم) در نظر می‌گیریم. رابطه (53) داریم.

$$\frac{u_\infty}{L_c} \sim \frac{v}{d} \rightarrow v \sim \frac{u_\infty d}{L_c} \quad (53)$$

رابطه (54) و (55) معادلات مومنتوم در جهت x, y را نشان می‌دهد.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \quad (54)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \quad (55)$$

با توجه به مرتبه متغیرها روابط (56) و (57) حاصل می‌گردد.

$$\frac{u_\infty^2}{L_c} \sim \frac{u_\infty v}{d} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{L_c}, \vartheta \frac{u_\infty}{L_c^2}, \vartheta \frac{u_\infty}{d^2}, g \quad (56)$$

$$\frac{u_\infty v}{L_c} \sim \frac{v^2}{d} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{d}, \vartheta \frac{v}{L_c^2}, \vartheta \frac{v}{d^2}, g \quad (57)$$

$$\frac{u_\infty}{L_c^2} \ll \frac{u_\infty}{d^2} \text{ و } \frac{v}{L_c^2} \ll \frac{v}{d^2} \quad (58)$$

بنابراین از ترم‌های دوم سمت راست روابط (56) و (57) در مقابل ترم‌های

سوم صرف نظر می‌گردد. با توجه به رابطه (57) و هم مرتبه بودن ترم فشار و ترم اینرسی روابط (59) و (60) بدست می‌آید.

$$\frac{u_\infty v}{L_c} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{d}, \frac{u_\infty^2 d}{L_c^2} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{d} \rightarrow \left(\frac{d}{L_c} \right)^2 \sim \frac{\Delta p}{\rho u_\infty^2} \sim \sigma \quad (59)$$

$$\frac{L_c}{d} \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \quad (60)$$

رابطه (60) نشان می‌دهد که بطور تحلیلی نسبت طول کاواک به قطر جسم، متناسب باعکس ریشه عدد کاواک می‌باشد و افزایش نسبت طول کاواک به قطر جسم، رابطه مستقیم با کاهش عدد کاواک دارد. روابط تجربی متفاوتی که

رابطه (69) نشان میدهد که عدد کاواک و عدد رینولدز معکوس یکدیگر هستند.

4-نتیجه گیری

در محیط ابرکاواک، محاسبه طول کاواک طبیعی حائز اهمیت می‌باشد بر اساس تحقیقاتی که تاکنون صورت گرفته، طول کاواک طبیعی تابع عدد کاواک بوده و با استفاده از روابط ناشی از نتایج تجربی محاسبه شده، که مبنای تحلیلی ندارند. این روابط توابع مختلفی می‌باشند. در این تحقیق جهت بدست آوردن روابط تحلیلی مربوط به محاسبه طول کاواک طبیعی، براساس روش مرتبه بزرگی متغیرها و با استفاده از مدل انتقال جرم، معادلات پیوستگی و مومنتوم، سه رابطه تحلیلی بدست آمده است. رابطه تحلیلی اول مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم نسبت به عدد کاواک می‌باشد. رابطه فوق نشان می‌دهد، که نسبت طول کاواک به قطر جسم فقط تابعی از عدد کاواک می‌باشد و با عکس ریشه آن ارتباط دارد، لذا نسبت طول کاواک به قطر جسم با کاهش عدد کاواک افزایش می‌باید. رابطه تحلیلی دوم مربوط به محاسبه نسبت طول کاواک به قطر جسم با عدد رینولدز می‌باشد، این رابطه مستقیم دارد و با افزایش عدد رینولدز نسبت طول کاواک به قطر جسم نیز افزایش می‌باید. خطای این رابطه تحلیلی نسبت به نتایج تجربی، تا عدد کاواک 0.05 کمتر از 5 درصد است. این خطاب قابل اعتماد بوده و می‌توان بر اساس این رابطه تحلیلی، در محیط ابرکاواک نسبت طول کاواک به قطر جسم را متناسب با افزایش عدد رینولدز محاسبه نمود. رابطه تحلیلی سوم مربوط به محاسبه عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز می‌باشد، این رابطه نشان می‌دهد که مطابق با نتایج تجربی، عدد کاواک و عدد رینولدز معکوس یکدیگر می‌باشند و با افزایش عدد رینولدز، عدد کاواک کاهش می‌باید. خطای این رابطه نسبت به نتایج تجربی کمتر از 2 درصد می‌باشد. نتایج حاصل از روابط بدست آمده، منطبق با نتایج تجربی و فیزیک پدیده ابرکاواک می‌باشند. روابط تحلیلی بدست آمده جایگزین مناسبی برای روابط تجربی می‌باشند و بوسیله این روابط می‌توان در محاسبات تجربی و عددی طول کاواک را بحسب عدد کاواک و عدد رینولدز پیش بینی نمود.

5-فهرست علائم

C_c	ضریب تقطیر
C_e	ضریب تبخیر
C_p	ضریب فشار
d	قطر جسم (m)
g	شتاب جاذبه (m/s^2)
K	انرژی جنبشی توربولانس (m^2/s^2)
L_c	طول کاواک (m)
l	طول مشخصه (m)
n	تعداد حباب در واحد حجم
P	فشار جریان مخلوط (Pa)
P_∞	فشار محیط (Pa)
P_B	فشار داخل حباب (Pa)
P_v	فشار بخار (Pa)
P'_{turb}	نوسان فشار مغشوش (Pa)
R_B	شعاع حباب (m)
R	نرخ انتقال جرم (kg/s)
R_{revap}	نرخ انتقال جرم بفرم تبخیر (kg/s)

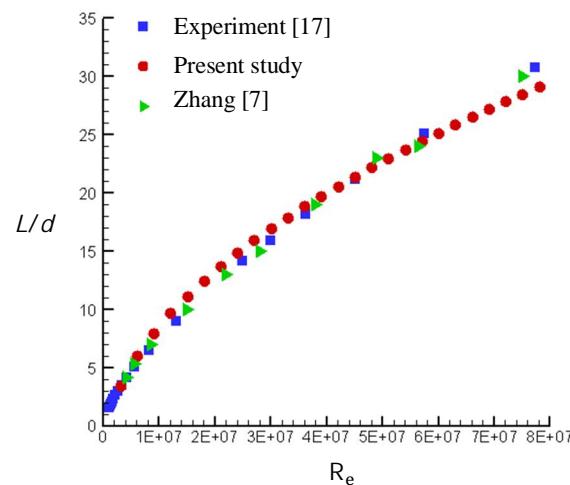


Fig. 2 Variation cavitation length with Reynolds number

شکل 2 تغییر طول کاواک نسبت به عدد رینولدز

جسم و عدد رینولدز ارائه نشده و مبنای همه روابط عدد کاواک می‌باشد، با توجه به رابطه تحلیلی (68) در حالی که کاواک تشکیل می‌گردد، می‌توان نسبت طول کاواک به قطر جسم را بر اساس عدد رینولدز محاسبه نمود

3-3 رابطه بین عدد کاواک و عدد رینولدز

با توجه به رابطه عدد کاواک- طول کاواک طبیعی و عدد رینولدز- طول کاواک طبیعی، می‌توان ارتباط بین عدد کاواک و عدد رینولدز را بفرم رابطه (68) نشان داد.

$$\frac{L_c}{d} \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sim \sqrt{R_e} \rightarrow \sigma \sim \frac{1}{R_e} \quad (68)$$

با توجه به رابطه تناسب (68) و نتایج تجربی [17] که در شکل 3 نشان داده شده است. رابطه تحلیلی (69) بدست می‌آید.

$$\sigma = \frac{1.3}{R_e \times 10^{-6} + 0.94} + 0.05 \quad (69)$$

خطای بین رابطه پیشنهادی و مقادیر تجربی در اعداد کاواک کمتر از 0.1% می‌باشد.

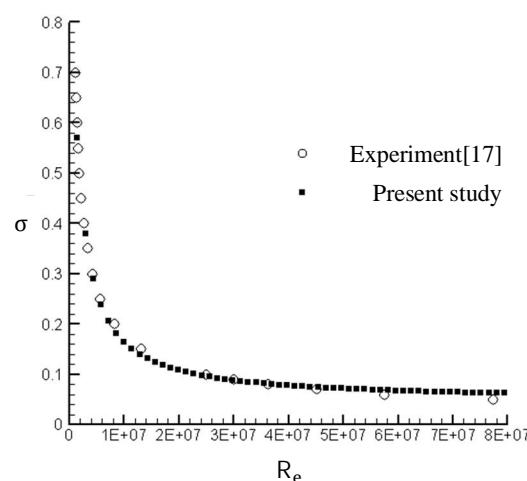


Fig. 3 Variation cavitation number with Reynolds number

شکل 3 تغییر عدد کاواک نسبت به عدد رینولدز

- [2] P. Eisenberg, *Cavitation*. Handbook of Fluid Mechanics, McGraw Hill, 1961.
- [3] C. E. Brennen, *Cavitation and Bubble Dynamics*, pp. 48-67, London: Oxford University Press, 1995.
- [4] I. Senocak, W. Shyy, Evaluation of cavitation models for Navier-Stokes computations, *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting*, 2002.
- [5] Y.N. Savchenko, Y.D. Vlasesko, V.N. Semenenko, Experimental study of high-speed cavitating flows , *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 26, No. 3, pp. 365-374, 1999.
- [6] J. Li-ping, W. Cong, W. Ying-jie et al, Numerical simulation of artificial ventilated cavity, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 18, No. 3, pp. 273-279, 2006.
- [7] W.W. Zhang, Y.J. Wei, J.Z. Zhang, C. Wang, K.P. Yu, Experimental research on the shape characters of natural and ventilated supercavitation, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. B 19, No. 5, pp. 564-571, 2007.
- [8] Z. Wang, K.P. Yu, X.H. Wan, Research on the gas-leakage rate of unsteady ventilated supercavity, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 22, No. 5, pp. 778-783, 2010.
- [9] J. Bin, L. Xian, P.Xiao, Z. Yao, Numerical investigation of the ventilated cavitating flow around an under-water vehicle based on a three-component cavitation model, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 22, No. 6, pp. 753-759, 2010.
- [10] H. Chanson, *Air bubble entrainment in free-surface turbulent shear flows*, pp. 127-135, London, UK: Academic Press, 1997.
- [11] H.B. Wang, J.Z. Zhang, Y.J. Wei, Study on relations between cavity form and typical cavitator parameters, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 20, No. 2, pp. 251-257, 2005.
- [12] M. Maerefat, S. Tahmasebi, M. R. Ansari, Numerical simulation of super-cavitating flow and calculation of cavity length around a submersible vehicle, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 187-196, 2015. (in Persian)
- [13] A. K. Singhal, H. Li, M. Athavale, Mathematical Basis and Validation of the Full Cavitation Model, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 124, No. 3, pp. 617-624, 2002.
- [14] P. J. Zwart, A. G. Gerber, T. Belamri, A Two-Phase Flow Model for Predicting Cavitation Dynamics, *Proceedings of The 5th International Conference on Multiphase Flow*, Yokohama, Japan, 2004.
- [15] G. H. Schnerr, J. Sauer, Physical and numerical modelling of unsteady cavitation dynamics, *Proceedings of The 4th International Conference on Multiphase Flow*, 2001.
- [16] Ehsan Samiei, M. Shams, A novel numerical scheme for the investigation of surface tension effects on growth and collapse stages of cavitation bubbles, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 30, No. 1, pp. 41-50, 2011.
- [17] T. J. Schauer, An Experimental study of a ventilated supercavitating vehicle, *MS thesis in aerospace engineering*, university of minnesota, 2003.

R_{cond}	نرخ انتقال جرم بفرم نقطه‌گیری (kg/s)
R_e	عدد رینولدز
R	ترم چشممه (kg/m ³)
R_B	شعاع حباب (m)
S	کشش سطحی (N/m ²)
t	زمان (s)
u	مولفه سرعت (m/s)
u_∞	سرعت جریان آزاد (m/s)
\vec{v}	بردار سرعت (m/s)
V_{ch}	سرعت مشخصه (m/s)
V_v	حجم بخار (m ³)
V_l	حجم مایع (m ³)
v	مولفه سرعت (m/s)
W_e	عدد وبر
	علامی یونانی
α_v	کسر حجمی بخار
α_g	کسر حجمی گاز
σ	عدد کاواک
μ	لزجت جریان آرام (kg/ms)
μ_t	لزجت جریان مغشوش (kg/ms)
ρ	حجم حجمی (kg/m ³)
ρ_v	حجم حجمی بخار (kg/m ³)
ρ_g	حجم حجمی گاز (kg/m ³)
ρ_l	حجم حجمی سیال (kg/m ³)
α_{nuc}	کسر حجمی گاز محلول در آب
ϵ	نرخ اتلاف انرژی مغشوش (m ² /s ³)
f	کسر جرمی
f_v	کسر جرمی بخار
f_l	کسر جرمی مایع

6-مراجع

- [1] J. Franc, J. Michel, *Fundamentals of cavitation*, pp. 98-124, Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2005.